

[진문명문]

과연이 문제는 어떤 개념의 활용을 우리들에게 보여주려고 하였는가.
진실로 우리들에게 물어보려 했던 것은 어떠한 것이었는가.
그에 대한 나의 대답을, '명문'에 대한 대답을 보입니다.

공차가 정수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 과 자연수 m ($m \geq 3$)이 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} & \quad |a_1 - b_1| = 5 \\ \text{(나)} & \quad a_m = b_m, \quad a_{m+1} < b_{m+1} \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^m a_k = 9$ 일 때, $\sum_{k=1}^m b_k$ 의 값은?

- ① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

2024 고3 5월 교육청 모의고사 11번

공차가 정수인 두 등차수열이 존재한다고 합니다.
이때, (가)조건과 (나)조건에서 같은 구조가 계속 등장하는 바,

$$a_n - b_n = c_n$$

을 '새로운 수열로 인정해야 함'을 생각해낼 수 있습니다.

발상의 근거는 교과서와 기출문제에서..

수능 문제의 출제 근거는 크게

1. 수학 교과서
2. 역대 수능 기출문제
3. EBS 수능특강, 수능완성

으로 알려져 있습니다.

수능 트렌드가 많이 변하여 과거에 비해 출제 경향과 문제 유형이 많이 변했다 할지라도
기본적으로 수능 수학을 준비한다면 저 3가지 문제집에 대해 출제진이 보여준 발상과 풀이법은
응당 숙지해야 한다고 생각합니다.

사실 N제마저도 기본 문제 베이스는 저 3개의 문제집에서 출발합니다.

따라서 지금 실력이 부족하다면(약 3등급 이하)

남은 기간에 상관없이 기출 및 교과서 예제 숙지를 최우선으로 해야 할 것입니다.

1st. 등차수열의 재구성

우리가 주어진 조건에서
위에서 말한 바와 같이

$$a_n - b_n = c_n$$

으로 인정하게 되면

새로 만들어진 수열조차 '등차수열'임을 알 수 있습니다.

생각의 구조는 다음과 같습니다.

$$a_n = a_1 + d_a(n-1), \quad b_n = b_1 + d_b(n-1)$$

이라 한다면

$$a_n - b_n = (a_1 - b_1) + (d_a - d_b)(n-1)$$

이므로

$$c_n = c_1 + d_c(n-1), \quad (c_1 = a_1 - b_1, d_c = d_a - d_b)$$

이것마저도 '등차수열'의 구조임을 알 수 있습니다.

따라서 (가)조건은 $|c_n| = 5$

(나) 조건은 $c_m = 0, c_{m+1} < 0$

임을 알 수 있습니다.

수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 등차수열 일 때,

$a_n \pm b_n = (a_1 \pm b_1) + (d_a \pm d_b)(n-1)$ 이므로 등차수열

$a_n \times b_n$: n 에 대한 이차식이므로 등차수열은 아니다.

$a_n \div b_n = \frac{a_1 + d_a(n-1)}{b_1 + d_b(n-1)}$ 이므로 등차수열은 아니다.

등차수열은 계속 증가 혹은 계속 감소

이제 (가) 조건에서

$$c_1 = 5 \text{ or } c_1 = -5$$

를 결정해 주어야 합니다.

이때, '등차수열은 직선이므로 계속 증가하거나 혹은 계속 감소'한다는

성질을 떠올릴 수 있어야 합니다.

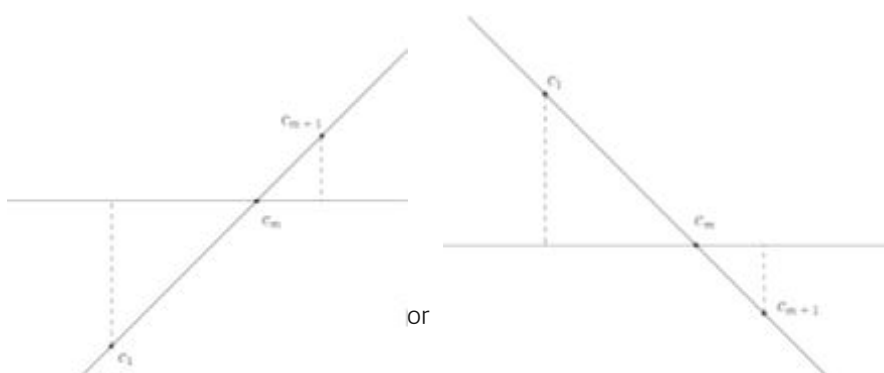
등차수열의 식은 말 그대로

$$c_n = c_1 + d_c(n-1)$$

즉, n 에 대한 일차식이므로 직선의 방정식과 동일하기 때문에

공차가 양수인지 or 음수인지에 따라 계속 증가 or 감소의 특성을 가지게 됩니다.

이를 문제와 연관지어 시각적으로 확인해보면 다음과 같습니다.



이때, $c_{m+1} < 0$ 이므로 공차가 음수인 2번째 그림의 상황임을 알 수 있습니다.

따라서 $c_1 = 5$ 이고 $c_m = 0$ 이므로

$$c_m = 5 + d_c(m-1) = 0 \text{에서}$$

$$d_c(m-1) = -5 \text{임을 알 수 있습니다.}$$

이때, $d_c < 0$ 이고, 문제 조건에서 d_c 은 정수, 그리고 자연수 $m \geq 3$ 이므로

$$d_c = -1, \quad m-1 = 5 \text{임을 알 수 있습니다.}$$

$$\text{따라서 } c_n = 5 - (n-1) = -n + 6$$

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열일 때,

$$a_n = a_1 + d_a(n-1) \text{이므로}$$

$$a_n = d_a n + (a_1 - d_a) \sim y = d_a x + (a_1 - d_a)$$

그러므로 d_a 의 부호에 따라 그래프 개형은

계속 증가 or 계속 감소의 특성을 갖는다.

마무리

이때, $m = 6$ 이고 $\sum_{k=1}^m a_k = 9$ 이므로 $\sum_{k=1}^6 a_k = 9$

$$\text{즉, } \sum_{k=1}^6 c_k = \sum_{k=1}^6 a_k - \sum_{k=1}^6 b_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^6 b_k = 9 - \sum_{k=1}^6 c_k$$

$$\sum_{k=1}^6 c_k = \sum_{k=1}^6 (-n+6) = (5+4+3+2+1) = 15$$

$$\text{그러므로 } \sum_{k=1}^6 b_k = 9 - 15 = -6$$