고정하기 (실전편): 경우의 수 고난도 문제

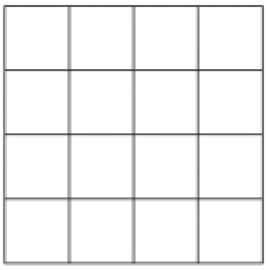
들어가며,

지난 칼럼 고정하기 (기본편)에 이은 실전편 칼럼입니다.
지난 칼럼에서는 곱의 법칙의 의미에서 출발하여 그로부터 **고정하기라는 생각을 어떻게 모든 문제풀이에서 자연스럽게 끌어낼 수 있는지**, 그 생각의 틀을 정립하는 내용을 다루었습니다. 아직 읽어보지 않았다면 [고정하기(기본편) - 경우의 수 세기 생각의 틀]을 반드시 정독하고 이번 칼럼을 읽어보기 바랍니다.

다시 강조하지만, **고정하기**의 개념은 **경우의 수 고난도 문제풀이**에서 핵심적인 사고의 틀 중 하나입니다. 경우의 수 고난도 예제에 접근하는 것이 어렵게 느껴지는 학생들은 예제 풀이를 반복적으로 읽어 자기 것으로 만들 수 있도록 합니다.

II. 실전 고난도 예제 풀이

Example 1 아래 바둑판에 검은돌 4개와 하얀돌 4개를 놓으려고 한다. 각 행과 열에 검은돌과 하얀돌이 모두 하나씩만 놓이는 경우의 수는?



먼저 천천히 시간을 갖고 문제를 풀어보기를 바란다.

1. 왜 어려운가?

벌써 답까지 구하고 정답을 확인한 학생도 있었겠지만, 상당히 고난도 문항이었고 문제를 아예 접근하지 못한 학생이 많았던 문제이다.

이유는 **행과 열에 모두 조건**이 걸려 있고, **행이 4개**나 되기 때문에 가짓수가 너무 많아지기 때문이다.
고난이도 문항에서는 이렇게 가짓수가 너무 많아 분류가 곤란한 상황을 종종 마주하게 되지만, 이때 이에 압도당하지 말고, 앞서 다루었던 개념을 떠올려보자.

TEAM 수리남's 핵심노트

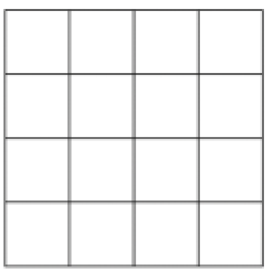
고정하기

대칭적인 경우의 수를 셀 때는 대표성을 갖는 한 가지 경우로 고정한 후,
이어서 세어지는 경우의 수를 곱해준다.

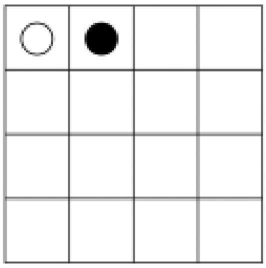
다시 강조하건데, 이럴 때에 필요한 것이 바로 '**고정하기**'이다. 모든게 움직일 수 있는 상황에서는 어떤 기준점도 없으므로, 조건의 일부를 '고정'하여 주어진 조건으로 바꿔버린 후 진행하면 기준이 생겨 훨씬 수월하게 경우를 나눌 수 있게 되는 것이다.

그렇게 마음대로 고정해버려도 되는지 의구심이 드는 학생도 있겠지만, 이 경우 왜 곱의 법칙을 사용하는지 앞서 다룬 내용을 떠올려 보자. 우리가 다루는 대상들이 **대칭적이기 때문에 고정이 가능**하다는 것을 상기할 수 있을 것이다. **대칭적인 구조 안에서는 대상들 간 위치를 바꾸거나, 이름이 부여된 순서를 바꾸어도 경우의 수는 정확히 똑같이 세어지기 때문**이다.

2. 맘대로 고정한 후, 동치인 상황의 수 만큼 곱해버리기



이 문제에서는 *'일반성을 잃지 않고'* 맨 첫 행의 첫 칸과 둘째 칸에 각각 흰돌과 검은돌을 맘대로 고정한 채로 진행하는 것이다.



그리고 이 상태로 센 경우의 수에 나중에 **첫행에 흰돌 검은돌을 뿌리는 경우의 수인 ${}_4P_2$만 곱해주면 되는 것**이다.
바둑판의 각 열은 순서에 무관하게, 오직 그 안에서 흰돌과 검은돌이 각각 하나씩만 사용되었는지만 중요하기 때문에, 첫 줄의 여러 바리에이션들을 하나하나 따져가며 다음 행들에 채워지는 경우의 수를 세는 것은 무의미한 것이다. **어떤 경우라도 열 순서를 적당히 바꾸면 위 그림처럼 될 것이기 때문.**

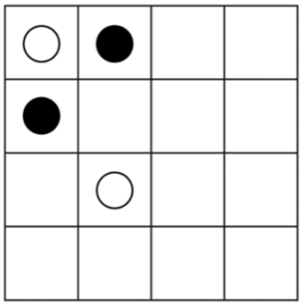
경우의 수 = ${}_4P_2 \times$

그 다음 아래를 더 채워보려고 하면, 눈치챈 사람도 있겠지만, 또 다시 고정이 가능하다.

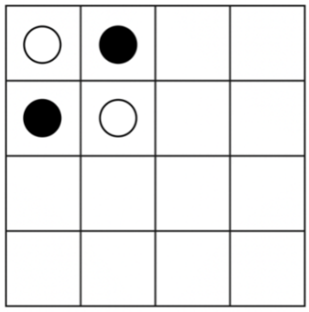
"일반성을 잃지 않고, 첫 두 돌 아래에 들어가는 돌은 어떤 모습으로 정할 수 있지?"
첫 흰돌의 아래에 넣어줄 검은돌, 둘째열 검은돌의 아래 들어가는 흰돌도 아래 3개의 행 모두 비어있으니 행을 **적당히 바꿔 같은 모습으로 돌릴 수 있는 것들이 있을 것**이다.

일반성을 잃지 않고 어떤 모습들이 있는지 한 번 생각해본 후 아래 풀이를 이어서 보기 바란다.

1)



2)



일반성을 잃지 않고, 아래 3개의 행을 **적당히 바꿔** **항상 저 둘 중 하나의 모습으로 된다**는 것이 이해되는가?

그리고 해놓고 보니 각각 경우1), 2)은 경우의 수를 세는 것이 더 이상 그리 어렵지 않다.

2)경우는 동치인 가짓수가 아래 세 줄 중 하나를 택하는 ${}_3C_1$가지, 1)경우는 아래 세 줄에 바둑돌을 채우는 전체 가짓수인 3^2에서 ${}_3C_1$를 뺀 만큼의 동치의 가짓수가 있다. 이를 1),2)의 각각 경우의 수를 센 다음 곱해주면 된다.

경우의 수 = ${}_4P_2 \times [(\text{경우}1) \times (3^2 - {}_3C_1) + (\text{경우}2) \times ({}_3C_1)]$

경우 1),2)는 각각 세어보면 2가지씩 경우의 수가 나오는 것을 어렵지 않게 알 수 있다.

답은 216

TAKE HOME MESSAGE

기준이 서지 않을 때는 반드시 일부 조건을 고정하고 시작한다.

비단 경우의 수 문제 뿐 아니라 수학 공부를 하면서 꼭 기억했으면 하는 격언입니다.
먼저 조건을 고정하고 시작하지 않으면 한 발도 내딛을 수 없습니다.

지금까지 **TEAM 수리남**이었습니다.
이 글을 읽는 수험생 여러분 모두에게 행운을 바랍니다.