고정하기 (기본편): 경우의 수 세기 생각의 틀

들어가며,

경우의 수 고난도 문제풀이에서 가장 많이 쓰이고 또 중요한 생각의 도구인 **고정하기**를 이해하기 위해, 이번 칼럼에서는 **곱의 법칙의 의미**에서 출발하여 그로부터 **고정하기라는 생각을 어떻게 모든 문제풀이에서 자연스럽게 끌어낼 수 있는지**, 그 생각의 틀을 정립하는 내용을 총정리하고자 기획하였습니다.

이번 칼럼의 예제들에서는 답을 구하는 그 자체보다도, 풀이 도중 계속해서 **일반화할 수 있는 대칭적인 구조를 발견**하고 거기서 **고정하기를 통해 다음 계산을 더 쉽게 생각할 수 있는 흐름**을 익히는데 집중하고, 다음 칼럼에서는 더욱 고난도의 문항을 통해 '고정하기' 생각의 스킬을 적용하는 실전 예를 살펴보겠습니다.

I. 곱의 법칙, 혹시 느낌적으로 그냥 써야할 것 같아서 쓰고있나?

1. 정의의 오해

곱의 법칙은 경우의 수를 세는 데 있어서 기본 중의 기본으로 많은 교재의 가장 첫 부분에서 다루어진다.
그런데 곱의 법칙을 보통 참고서에서 어떻게 설명하고 있냐하면,

"**동시에 또는 연달아 발생하는 사건**들에 대해 **곱의 법칙**을 사용한다."

그런데, 당최 *동시에 발생하는 사건*이 뭔지, 왜 그럴 때에 곱의 법칙을 사용하는지를 정확히 이해하고 설명할 수 있는가?
결론부터 말하면, 이 정의 자체가 좋은 정의가 아니다. 서론을 더 끌지 않고 곱의 법칙을 언제 써야하는지 그 명확한 정의를 먼저 다시 내리겠다.

2. 곱의 법칙은 대칭적인 구조가 발견될 때 사용한다.

“동시에 발생하는 사건들”에 대해 곱의 법칙을 적용한다는 말은 틀린 말은 아니지만, 곱의 법칙이 사용되는 모든 상황을 설명해주지는 못한다. 따라서 곱셈이 사용되는 모든 경우를 포괄할 수 있는 조건을 아래와 같이 기억해두기 바란다.

“대칭적인 구조가 발견될 때에 곱의 법칙을 사용한다.”

말이 어려울 수도 있어서 조금 더 풀어서 설명하자면, ‘곱셈’이라는 것이 어떻게 도출되는 것인지 다시 떠올려보자. 곱셈이 덧셈의 연장이었던 것을 상기해보자. $2\times5=10$는 사실 $2+2+2+2+2=10$를 간편하게 표기한 것이다. **같은 것들의 덧셈**을 여러 번 반복할 때에 곱셈을 사용하는 것을 우리는 은연 중에 알고 있다.

경우의 수를 셀 때에도, 합의 법칙에서 우리는 전체 경우의 수를 구하기 위해 사건을 쪼개어 $n(S)=n(A)+n(B)+n(C)$와 같이 전체 경우의 수를 구한다. 이 때, 우리가 주목할 것은 A, B, C 사건이 대칭적인 경우여서 경우의 수가 정확히 같은 방법으로 계산된다면 곱셈을 이용해

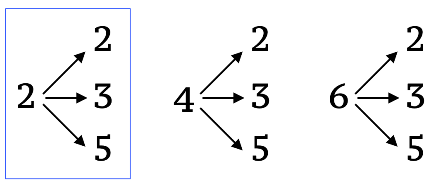
$$n(S)=n(A_1)+n(A_2)+n(A_3)=3\times n(A)$$

와 같이 세어주는 것이 합당하다는 의미이다.

예를 들어보자.

Example 1 두 개의 주사위를 차례로 굴릴 때, 처음 나온 수가 짝수이고 둘째로 나온 수가 소수인 경우의 수는?

위 문제를 풀 때, 첫 번째 숫자로 가능한 것은 2,4,6로 3가지, 두 번째 숫자로 가능한 것은 2,3,5로 3가지이고 두 사건이 연달아 발생하므로 총 가짓수는 곱의 법칙에 의해 $3\times3=9$가지라고 설명해도 좋지만, 더 본질적으로 이 문제에서 곱의 법칙을 쓰는 이유는 **똑같이 세어지는 구조의 반복**이 있기 때문이다.



첫 번째 수가 무엇이 나오든 둘째로 나오는 수는 영향을 받지 않고 똑같이 세어지기 때문에, 첫 번째 수의 가짓수만큼 두 번째 수의 가짓수를 그저 곱해주면 전체 경우의 수가 나오게 되는 것이다.

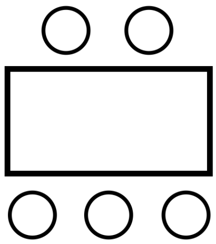
TEAM 수리남's 핵심노트

고정하기

대칭적인 경우의 수를 셀 때는 대표성을 갖는 한 가지 경우로 고정한 후,
이어서 세어지는 경우의 수를 곱해준다.

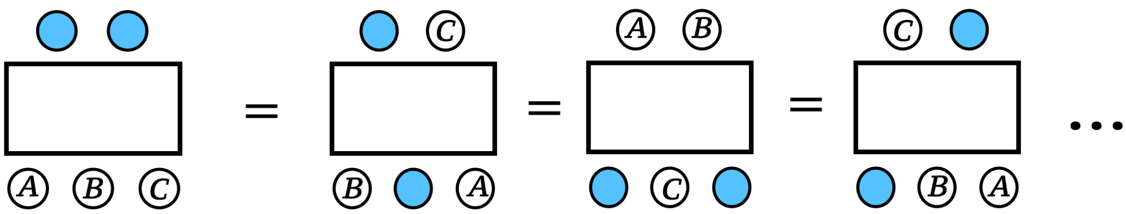
다른 예제를 살펴보자.

Example 2 A, B, C, D, E 다섯 명의 학생이 아례 탁자에서 두 차례 회의를 하려고 한다. 1차 회의에서는 A, B, C 학생만 회의를 하고, 2차 회의에서는 다섯 명 학생이 모두 함께 회의를 한다. 1차 회의에 참석한 세 학생은 2차 회의 때 다시 같은 자리에 앉지 않는다고 할 때, 두 차례 회의의 자리를 배치하는 경우의 수는?



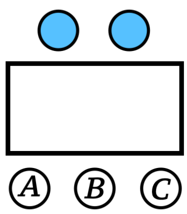
1차 회의에 학생을 앉히는 경우의 수는 ${}_5P_3$으로 계산한다.

2차 회의에 학생을 앉히는 때에는, 1차 회의에 학생을 어떻게 앉혔는지에 상관없이 모든 자리들은 동일한 특성값들을 가지게 된다.



(단, 파란색 자리는 1차 회의 때 비었던 자리를 의미)

1차 회의의 자리 배치에 관계없이, 2차 회의에 남은 학생 D, E를 앉히려고 할 때 그 자리들은 모두 Ⓐ Ⓑ Ⓒ ● ● 중 하나라는 공통점 아래에 같은 방식으로 세어진다는 의미이다.



따라서 위와 같이 **한 가지 케이스로 고정**해버린 후, 문제를 다시 일반화할 수 있다: “Ⓐ Ⓑ Ⓒ ● ● **에서 A, B, C, D, E를 다시 앉힐 때 A, B, C는 원래 앉아있던 자리에 다시 앉지 않도록 재배치하는 경우의 수는**?”.

이렇게 해서 세어진 경우의 수는 **모든 1차 회의 자리 배치에 동일하게 적용**할 수 있으므로, 1차 회의에 학생을 앉히는 경우의 수인 ${}_5P_3$**을 곱해주기**만 하면 되는 것이다.

2차 회의에서 앉는 경우의 수는 빈 두 자리 ● ● 에 A, B, C 중 몇 명을 보낼 것인지에 따라 분류할 수 있다.

(i) ● ● 에 두 명을 보냄

****곱의 법칙의 백미는 대칭적인 상황을 생각할 수 있는 모든 경우에, 아무 케이스나 고정하여 대표로 놓고 이후 상황들을 이어서 곱해주기만 하면 된다는 점이다. 이어지는 풀이에서도 적용해보자***

= (A, B, C, 중 2명 골라 ● ●에 보내기) × (나머지 한 명 자기 자리 아닌 곳에 보내기) × (D, E 남은 자리에 뿌리기)

=

먼저 “A, B, C, 중 2명 골라 ● ●에 보내기” = ${}_3P_2$

○ ○ ○ Ⓐ Ⓑ

다음으로 “C를 자기 자리 (3번째 석) 제외 나머지에 보내기” = ${}_2C_1$

Ⓒ ○ ○ Ⓐ Ⓑ

마지막으로 “D, E를 나머지 자리에 뿌리기” = ${}_2P_2$

${}_3P_2 \times {}_2C_1 \times {}_2P_2 = 24$

위와 같은 방법으로 이어서 풀이해보자.

(ii) ● ● 에 한 명을 보냄

$({}_3C_1 \times {}_2P_1) \times 3 \times {}_2P_2 = 36$

(iii) ● ● 에 한 명도 보내지 않음

$(2) \times {}_2P_2 = 4$

총 64개의 2차 회의 자리 배치가 있다. 따라서 이를 1차 회의의 경우의 수인 ${}_5P_3$에 곱하면

${}_5P_3 \times 64 = 3840$

TAKE HOME MESSAGE

고정하기를 통해 경우의 수를 세는 생각의 틀을 익혔기를 바랍니다.

곱의 법칙의 본질은 결국 **동일한 방식으로 세어지는 동치 관계의 경우들**을 파악해서, 결국 **그 중 하나만 확실히 세고 전체 구성원 개수를 곱해주면** 더 빠른 계산을 할 수 있다는 것입니다. 이를 이해하고 활용하는 학생들은 경우의 수를 세는 계산량을 획기적으로 줄이고 빠르게 확신을 갖고 문제풀이에 임할 수 있게 됩니다.

다음 편에서는 고정하기 개념을 이용한 심화 문제풀이에 대해 다루어보겠습니다.

지금까지 **TEAM 수리남**이었습니다.
이 글을 읽는 수험생 여러분 모두에게 행운을 바랍니다.