TEAM 수리남's 5월 모의고사 주요문항해설(14번)

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족한다.

$\vert f(k)\vert+\vert g(k)\vert=0$을 만족시키는 실수 k의 개수는 2이다.

$4f(1)+2g(1)=-1$일 때, $f(4)$의 값은? [2024년 5월 모의고사 14번]

① 46 ② 49 ③ 52 ④ 55 ⑤ 58

1. 박스 조건 분석

$$|f(k)|+|g(k)|=0$$

절댓값은 항상 0이상이고, 둘의 합이 0이 되려면 두 값 모두 0이 돼야한다.
$f(k)=0,\ g(k)=0$

TEAM 수리남's TIP

'$|a|+|b|=0$이면 $a=b=0$이다.'

위 명제는 매우 유명한 소재이기 때문에 꼭 기억하도록 하자.

2. $f(k)=0,\ g(k)=0$ 해석

$g(k)$는 $f(x)$의 $(k,\ f(k))$에서의 접선의 방정식의 y절편이므로, $f(x)$의 $(k,\ f(k))$에서의 접선의 방정식을 써보면, $y=f'(k)(x-k)+f(k)$이고 $x=0$을 대입하면, $g(k)=f(k)-kf'(k)$이다.
$f(k)=g(k)=0$이므로, 문제 조건은 $f(k)=0,\ kf'(k)=0$을 동시에 만족하는 k가 2개라는 것을 의미한다.

$f(k)=0$에서 k는 $f(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표 중 하나라는 것을 의미하고,
$kf'(k)=0$에서 $f'(k)=0$ 또는 $k=0$을 의미한다.

1) $k=0$과 $f(k)=0$을 동시에 만족한다는 것은 $f(x)$가 $(0,\ 0)$을 지난다는 것을 의미
2) $f'(k)=0,\ f(k)=0$를 동시에 만족한다는 것은 $f(x)$가 $x=k$에서 x축에 접한다는 것을 의미

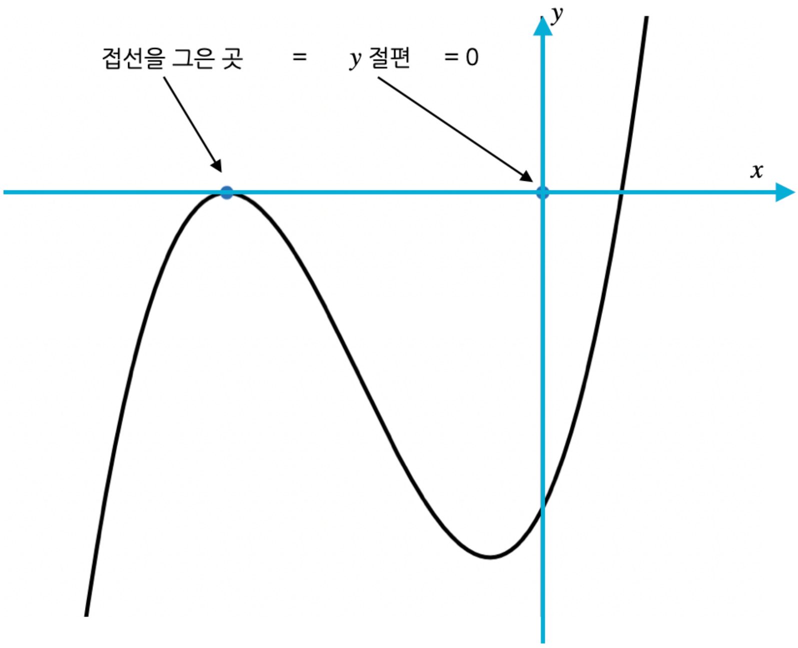
이러한 k가 2개가 되려면 $f(x)$가 $(0,\ 0)$을 지나고 다른 한 점에서는 접하면서 만나면 k값이 2개가 됨을 알 수 있다.

3. 계산

$f(x)=x(x-a)^2$이라 쓸 수 있고, $4f(1)+2g(1)=-1$이므로
$f(1)=(1-a)^2,\ g(1)=f(1)-f'(1)=(1-a)^2-\{(1-a)^2+2(1-a)\}=-2(1-a)$
$4f(1)+2g(1)=4(1-a)^2-4(1-a)=-1$ 이므로, $a=\dfrac{1}{2}$임을 알 수 있다.
$f(4)=49$임을 알 수 있다.

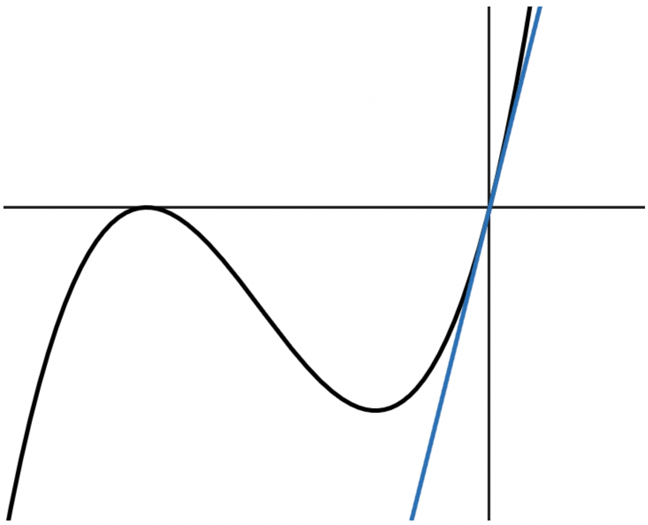
*별해

$f(k)=0,\ g(k)=0$ 를 그래프로 해석할 수도 있다.
$f(k)=0$은 접점의 함숫값이 0이라는 의미로, $g(k)=0$는 y절편이 0이라는 의미로 해석하고 문제를 접근해보면,



위와 같이 쓸 수 있다. 이상의 모양에서, $f(x)=(x-a)^2(x-b)$꼴임을 알 수 있다.

다음으로 접선의 y절편이 0이 되는 지점은, 역으로 원점에서 $f(x)$에 접선을 그어보면 알 수 있다. 위의 경우에서 원점에서 삼차함수에 접선을 한 개 더 그을 수 있는 경우는 오직 $f(x)$가 $(0,\ 0)$을 통과할 때만 존재한다.



최종적으로 $f(x)=(x-a)^2x$ 꼴로 쓸 수 있다.

3. 계산

$f(x)=x(x-a)^2$이라 쓸 수 있고, $4f(1)+2g(1)=-1$이므로

$f(1)=(1-a)^2$, $g(1)=f(1)-f'(1)=(1-a)^2-\{(1-a)^2+2(1-a)\}=-2(1-a)$

$4f(1)+2g(1)=4(1-a)^2-4(1-a)=-1$ 이므로, $a=\dfrac{1}{2}$임을 알 수 있다.

$f(4)=49$임을 알 수 있다.

TEAM 수리남's 5월 모의고사 주요문항해설(15번)

15. 첫째항이 자연수인 수열 a_n이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n}{3} & (a_n\text{이 3의 배수인 경우}) \\ \dfrac{{a_n}^2+5}{3} & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_4+a_5=5$ 가 되도록 하는 모든 a_n의 값의 합은? [4점]

① 63 ②66 ③69 ④72 ⑤75

[2024년 5월 모의고사 15번]

새롭게 정의된 수열 문제, 그 중에서 일부 복잡한 점화식이 포함된 문항이다.

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n}{3} & (a_n\text{이 3의 배수인 경우}) \\ \dfrac{{a_n}^2+5}{3} & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

여기서 $a_4+a_5=5$ 라는 방정식 조건에 주목하면, a_5는 위 점화식에 의해 a_4에 대해 표현이 가능하고 따라서 a_4에 대한 방정식을 세울 수 있다.

i) a_4가 3의 배수인 경우

$$a_4+\frac{a_4}{3}=5,\quad a_4=\frac{15}{4}\quad (\text{모순})$$

ii) a_4가 3의 배수가 아닌 경우

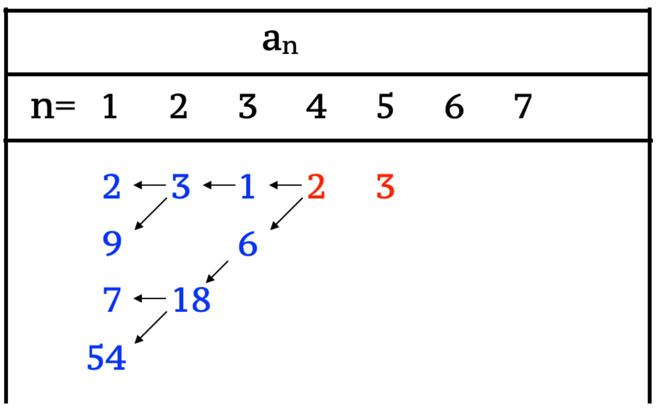
$$a_4+\frac{a_4^2+5}{3}=5,\quad a_4^2+3a_4-10=0,$$

$$a_n>0\text{ 이므로}$$

$$a_4=2,\ a_5=3$$

따라서 $a_4=2$, $a_5=3$ 으로 픽스된다는 것을 알 수 있다.

이런식으로 경우에 따라 직전항이 가능한 가짓수들을 역추적하다보면 아래의 결과를 얻는다.



따라서 정답은 $2+7+9+54=72$

TEAM 수리남's TIP

만약 문제에 접근조차 하지 못했다면, 위의 풀이처럼 규칙을 역으로 적용하는 방식이 떠오르지 않을 수도 있다.
하지만 처음부터 아이디어가 떠오르지 않았어도 **반드시 해봤어야하는 것은** **일단 대입해보는** 일이다.
특히 이런 복잡한 점화식의 경우 반드시 식에 실제 숫자를 대입해봐야 규칙성이 드러나는 경우가 많다.

a1에 따라 경우를 분류해 직접 규칙에 맞게 예시를 써보자.

a_1	a_n (n= 1 2 3 4 5 6 7)
1	$1 \to 2 \to 3 \to 1 \to 2 \to 3 \to 1 \ldots$
2	$2 \to 3 \to 1 \to 2 \to 3 \to 1 \to 2 \ldots$
3	$3 \to 1 \to 2 \to 3 \ldots$
4	$4 \to \frac{19}{3} \to \frac{406}{27} \ldots$
5	$5 \to 10 \to 35 \ldots$
6	$6 \to 2 \to 3 \to 1 \to 2 \to 3 \to 1 \ldots$
7	$7 \to 18 \to 6 \to 2 \to 3 \to 1 \to 2 \ldots$

이렇게 예시를 쓰는 것이 처음엔 겁나더라도, 막상 한 번만 눈 딱 감고 예시를 모두 써나가는 경험을 해보면 그리 오래 걸리지 않는다는 것을 깨달을 것이다.

이렇게 쓰면서 생각을 해보면, 4,5번째 항의 합이 5가 되는 경우는 2, 3이 오는 것밖에 오지 않는다는 것을 깨닫게 되고, 왜 다른 경우는 올 수 없는지를 그 다음에야 수학적으로 느끼고 검증하면 되는 것이다. a_5는 오직 a_4에 의해 결정되고 가능한 연산이 두 가지밖에 되지 않으므로 각각 시도해보면, 수학적으로도 무결하게 $a_4 = 2,\ a_5 = 3$으로 고정할 수 있게 된다.

이 과정을 거치고 나면 그 전 항들을 두가지 연산을 가지고 유추하는 사고는 자연스럽게 따라올 것이다.

TEAM 수리남's 5월 모의고사 주요문항해설(20번)

20. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=\left(-\frac{1}{2}x+3\right)g(x)-x^3+2x^2$$

을 만족시킨다. 상수 $k\,(k\neq 0)$에 대하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)}\times\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}=k$$

일 때, k의 값을 구하시오. [4점]

[2024년 5월 모의고사 20번]

1. 극한 조건 분석

① $\lim_{x \to 2} \frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)}$

보자마자 $\frac{0}{0}$ 꼴을 떠올려야 한다.

위에서 $f(x)$와 $g(x)$에 대한 항등식이 하나 주어졌으므로, 수치 대입을 활용하면,

$x=2$ 대입: $2f(2)=2g(2)-8+8 \rightarrow f(2)=g(2)$

분모가 0으로 가기 때문에 극한값이 존재하기 위해서는 분자 또한 0으로 가야하고,
$g(1)=0$ 인 것을 알아낼 수 있다.

$g(1)$의 값을 알아냈기 때문에 위 항등식을 통해 $f(1)$의 값도 알아내고 넘어가야 한다.

$x=1$ 대입: $1f(1)=\frac{5}{2}g(1)-1+2 \rightarrow f(1)=1$

② $\lim_{x \to \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$

이 극한은 다항함수에서의 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이므로 바로 차수를 떠올려야 한다.

$f(x)$를 n차 다항식이라고 가정하면, $g(x)$는 $2n$차 다항식이어야만 극한값이 존재한다.

차수에 대한 힌트를 가지고 위 항등식으로 돌아가 n의 값을 알아내보자.

2. $f(x)$, $g(x)$에 대한 항등식 분석

$$xf(x)=\left(-\frac{1}{2}x+3\right)g(x)-x^3+2x^2$$

① 좌변은 $(n+1)$차로 명확하지만, 우변은 $(2n+1)$차항과 3차항의 비교를 해봐야 한다.

그러나 우변에서 $(2n+1)$차항이 남아있게 되면 좌변의 $(n+1)$차항과 항등식을 이룰 수 없으므로,
뒤의 $-x^3$과 함께 사라져야 한다는 것을 짐작할 수 있다.

따라서 $n=1$이고, 우변에서 $(2n+1)$차항과 3차항이 사라져 2차식으로 항등식을 이룬다는 것을 알 수 있다.

$\rightarrow$ $g(x)$의 최고차항: $-2x^2$
($\because$ 최고차항이 $-2x^2$이어야만 뒤의 $-x^3$와 함께 소거된다.)

② 좌변에서 상수항이 생기지 않는 것을 확인할 수 있다. 만약 $g(x)$가 상수항을 갖게 되면 우변에서 상수항이 생기게 되므로 $g(x) = -2x^2 + \square x$ 꼴, 즉 x를 인수로 가진다는 것을 알 수 있다.

앞서 $g(1) = 0$ 조건을 구해놨기 때문에, $g(x) = -2x(x-1)$로 식이 구해지고, 위 항등식에 넣어 식을 전개해보면, $f(x)$의 식도 구할 수 있다.

$\rightarrow f(x) = -5x + 6$

TEAM 수리남's TIP

다항함수의 항등식을 봤을 때 취해야 할 태도

① 차수 비교해보기

: 항등식이라는 것은 $-2x^2 = -2x^2$처럼 완전히 같은 꼴을 전제로 하기 때문에 $f(x)$, $g(x)$ 등이 섞여 있으면 가장 먼저 양변의 최고차항부터 비교해보자.

② 특징적인 항 찾아내기

: 상수항이 몇이다, 또는 상수항이 없다 등 특징적인 조건이 보이면 그 특징을 통해 힌트를 얻는다.

3. 최종 극한 계산

$$\lim_{x\to2}\frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)} \times \lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)} = k$$

왼쪽의 $\frac{0}{0}$꼴 극한은 $\lim_{x\to2}\frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)} = \lim_{x\to2}\frac{\frac{g(x-1)-g(1)}{(x-1)-1}}{\frac{f(x)-f(2)-\{g(x)-g(2)\}}{x-2}} = \frac{g'(1)}{f'(2)-g'(2)}$ 이므로

계산하면 -2가 나온다.

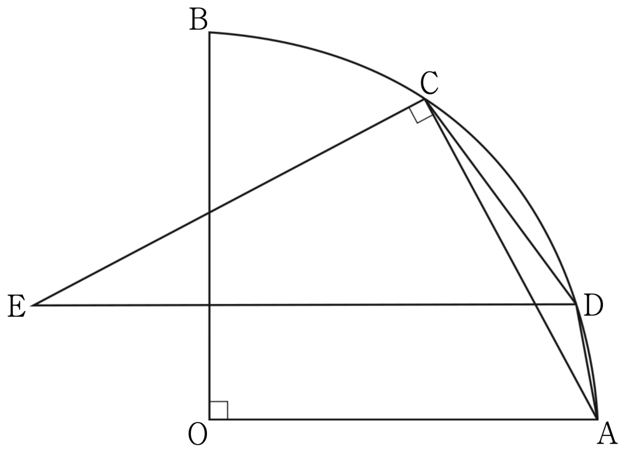
오른쪽의 $\frac{\infty}{\infty}$꼴 극한에서는 위아래의 최고차항만 고려하면 된다.

$\{f(x)\}^2$의 최고차항은 $25x^2$, $g(x)$의 최고차항은 $-2x^2$이므로 $-\frac{25}{2}$가 나온다.

$\Rightarrow$ 정답: 25

TEAM 수리남's 5월 모의고사 주요문항해설(21번)

21. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위에 점 C를 $\overline{AC}=4\sqrt{2}$가 되도록 잡는다. 호 AC 위의 한 점 D에 대하여 점 D를 지나고 선분 OA에 평행한 직선과 점 C를 지나고 선분 AC에 수직인 직선이 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 CED의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$일 때, $\overline{AD}=p+q\sqrt{7}$을 만족시키는 두 유리수 p, q에 대하여 $9\times|p\times q|$의 값을 구하시오. (단 점 D는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.) [4점]



[2024년 5월 모의고사 21번]

원이 포함된 도형 문제를 만났을 때는 반드시 해야할 것들이 정해져있다는 것을 익히 알고 있을 것이다.

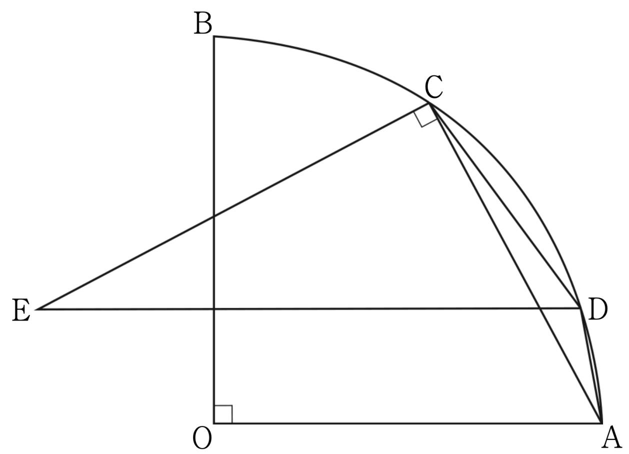
그런데, 반드시 하라고 했다고 해서 보조선과 수선들을 마구잡이로 내리면 더 복잡한 풀이로 갈 수 있으므로 주의를 기울여야 한다. 그전에 반드시 생각할 것이 바로 **삼각형이 정해지는 조건**이다.

TEAM 수리남's 핵심노트

삼각형이 정해지는 조건

삼각형의 {변, 변, 변, 각, 각, 각} 중 3개를 알면 그 삼각형이 정해졌다고 할 수 있다.

3개만 알면 그 삼각형의 **나머지 요소들도 모두 알 수 있다.**



그래서, 우리는 문제에서 요구하는 $\overline{AD}$를 알아내기 위해 삼각형 ADC 또는 삼각형 ADO에서 출발할 수 있겠고, 그 삼각형 중 세 개의 요소만 알아내면 우리가 원하는 답은 그냥 계산으로 알아낼 수 있는 것이다.

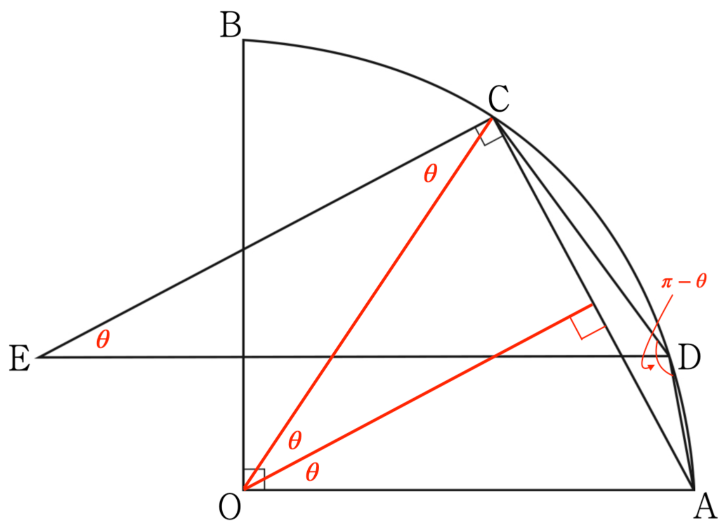
문제에서 주어지는 조건들을 보았을 때, 1) $\overline{AC}=4\sqrt{2}$로 주어져 삼각형 OAC가 알려졌고, 2)각 $\angle ADC$도 삼각형 OAC와 관련해 쉽게 구할 수 있을 것으로 보인다. 게다가 삼각형 CED에 대한 정보가 주어져 있어 문제를 풀어내면 3) $\overline{CD}$도 알아낼 수 있을 걸로 생각이 된다.

그러니 이 3요소가 모두 포함되어 있는 삼각형 ADC로 접근하는 것이 $\overline{AD}$를 알아내는 데에 가장 효과적인 루트로 계획을 짤 수 있다.

이렇게 계획이 세워졌다면, 그제서야 "원이 포함된 도형 문제를 만났을 때는 반드시 해야할 것"들을 이용해 각과 변을 수월하게 구하는 방법을 이용해보는 것이다!

이 내용은 글 하단에 한꺼번에 정리해두었으니 꼭 숙지해두길 바란다.

$\overline{\mathrm{AD}}$를 구하기 위해 필요한 세 가지 정보 1) $\overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{2}$와 더불어 2)각 $\angle\mathrm{ADC}$, 그리고 3) $\overline{\mathrm{CD}}$를 구해보자.



2)각 $\angle\mathrm{ADC}$

먼저, 각을 알기 위해 삼각형 OAC를 표현하는 θ를 먼저 설정한다. 이렇게 설정하면 각 $\angle\mathrm{ADC}$은 긴 호 AC 의 원주각으로, 그 중심각이 $2\pi-2\theta$이므로 원주각과의 관계에 의해 $\pi-\theta$로 구할 수 있다.

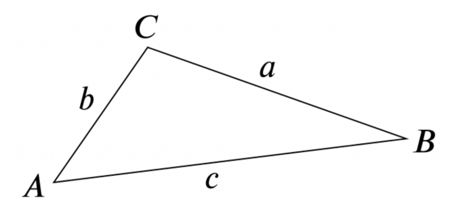
θ의 정체성을 표현하기 위해 센스있게 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$정도 써주고 넘어가자.

3) $\overline{\mathrm{CD}}$

이 길이는 삼각형 CED로부터 알아낼 수 있는데, 이 삼각형에서 변과 각을 모른다고 해서 당황할 필요가 없다. 문제에서 "삼각형 CED의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$"라는 조건을 주었기 때문에 사실상 $\overline{\mathrm{CD}}$는 사인법칙을 통해 구하라는 이야기를 직접 해준 것이나 다름없다.

잠시 사인 법칙을 상기하고 넘어가자면,

TEAM 수리남's TIP



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

(단, R은 삼각형의 외접원의 반지름)

또한, 점 O에서 $\overline{AC}$에 수선을 내릴 때, $\overline{CE}$와 평행하여 각$\angle E$ 또한 θ가 된다.

따라서,

$2R\sin E = \overline{CD}$

$\overline{CD} = 2 \times 3\sqrt{2} \times \sin\theta = 2 \times 3\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{3} = 4$

이상으로, 1) $\overline{AC} = 4\sqrt{2}$, 2)각$\angle ADC = \pi - \theta$, 3) $\overline{CD} = 4$ 로 $\overline{AD}$를 코사인 제 2 법칙에 의해 바로 구할 수 있다.

$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 - 2\overline{CD} \cdot \overline{DA}\cos(\angle ADC)$

$32 = 16 + \overline{DA}^2 - 2 \times 4 \times \overline{DA}\cos(\pi - \theta)$

$\overline{DA} = \dfrac{-4\sqrt{7} + 16}{3}$

$\therefore p \times q = -\dfrac{64}{9}$

따라서 답은 64.

TEAM 수리남's 핵심노트

원이 포함된 도형문제

원이 나왔을 때 반드시 생각해야하는 것들이 있다.
아래 몇 가지 사항은 반드시 기억해두자.

1) 현 → 수선 내리기

2) 원 위의 점 → 중심과 잇기

3) 원주각 → 중심각 찾기

4) 외접원 → sine 법칙

5) 원 밖의 점 → 접선

TEAM 수리남's 5월 모의고사 주요문항해설(22번)

22. 최고차항의 계수가 4이고, 서로 다른 세 극값을 갖는 사차함수 $f(x)$와 두 함수 $g(x)$,

$$h(x)=\begin{cases} 4x+2 & (x<a) \\ -2x-3 & (x \geq a) \end{cases}$$

가 있다. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$|g(x)|=f(x),\ \lim_{t\to 0+}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}=|f'(x)|$$ 이다.

(나) 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(0)=\frac{40}{3}$일 때, $g(1)\times h(3)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[2024년 5월 모의고사 22번]

1. (가) 조건 분석

① $|g(x)|=f(x)$

$g(x)=-f(x)$ 또는 $g(x)=f(x)$, $f(x)=|g(x)|\geq 0$ 임을 알 수 있다.

② $\lim_{t\to 0+}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}=|f'(x)|$에서 오른쪽 항이 미분계수의 정의 형태로 변형 가능하므로

$\lim_{t\to 0+}\frac{g(x+t)-g(x)}{(x+t)-x}=|f'(x)|=g'(x+)$ ($g'(x)$의 우극한) 으로 변형할 수 있다.

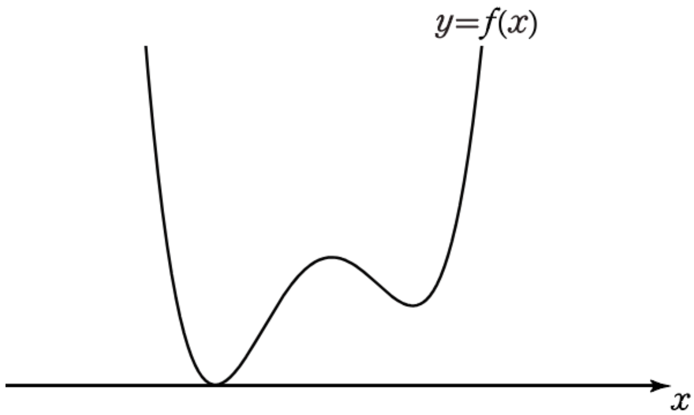
$\frac{0}{0}$꼴 극한이므로 분모도 0으로 수렴해야 하므로, $g(x+)=g(x)$ ($g(x)$의 우극한과 $g(x)$의 함숫값이 같아야 함)임을 알 수 있고,

$g'(x+)=|f'(x)|\geq 0$ 이므로, $g(x)$가 연속인 구간에서 증가함수임을 알 수 있다. ------- (ㄱ)

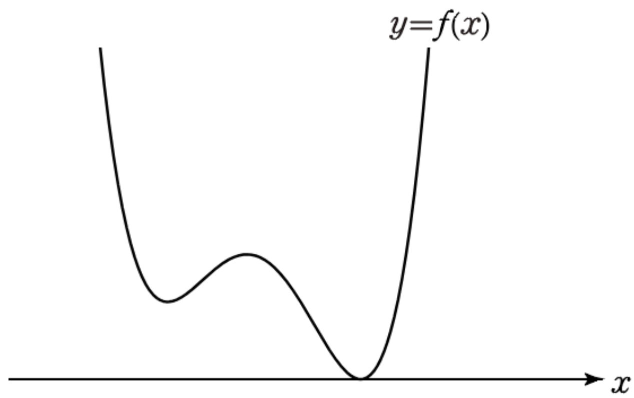
2. $g(x)$ 개형 분석

(나) 조건은 '곱함수의 연속' 으로 굉장히 자주 출제되는 빈출 요소이다. $g(x)$가 어디서 불연속이고, $h(x)$가 어디서 불연속인지에 따라 상황이 매우 달라지므로, $g(x)$의 개형을 조사하는게 우선이다.

$g(x)=-f(x)$ 또는 $g(x)=f(x)$로, $f(x)$의 개형을 알아야 $g(x)$가 정해지므로, $f(x)$의 개형을 먼저 생각해보자. $f(x)\geq 0$이고, 서로 다른 세 극값을 갖는 최고차항의 계수가 4인 사차함수인데, 실전에서는 특수한 경우부터 조사를 해보는 태도를 가지자. 다음과 같은 두 가지 경우의 특수한 경우가 존재한다.



case 1



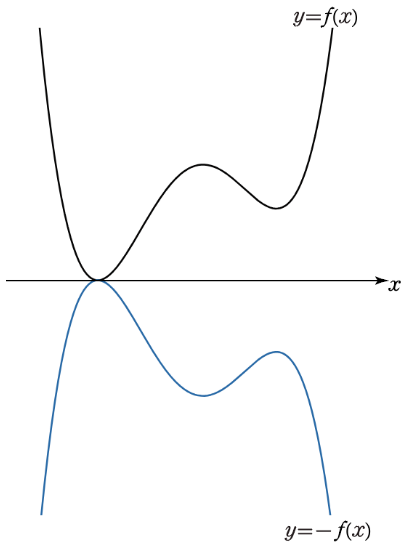
case 2

TEAM 수리남's TIP

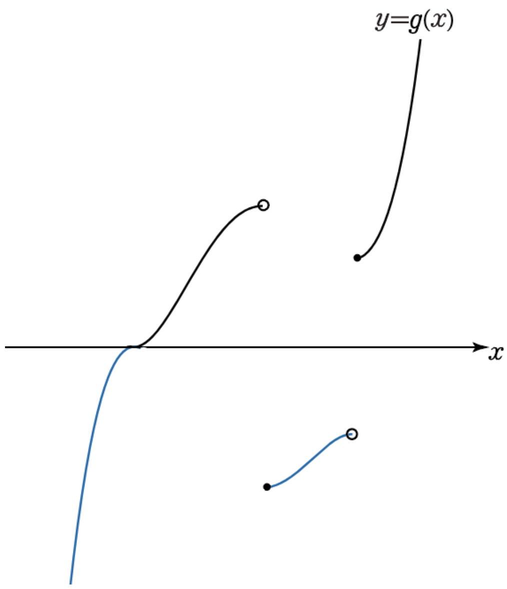
실전에서는 주로 특수한 상황에서 답이 등장하므로, 특수한 상황을 먼저 분석해 답을 결정하고, 일반적인 상황을 검증하는 연습을 해보자. 물론, 특수한 상황에서 답이 등장하지 않을 수도 있지만, 특수한 상황을 정해놓고 보면, 문제 상황을 더욱 쉽고 정확하게 이해할 수 있다. 뒤에서 일반적인 상황에서는 왜 답이 되지 않는지 검증해보도록 하겠다.

case 1

$g(x) = -f(x)$ 또는 $g(x) = f(x)$이므로 $y = f(x)$, $y = -f(x)$그래프를 모두 그려보면 아래와 같다.



$g(x)$는 위에서 검은색 함수 또는 파란색 함수를 따라가는데, 위의 (ㄱ)에서 $g(x)$는 연속인 구간에서 증가함수라는 것을 알아냈으므로, $g(x)$를 아래와 같이 그릴 수 있다.



3. 이제 $g(x)$의 개형을 조사했으므로, $g(x)h(x)$가 연속함수라는 조건을 이용해보자.

TEAM 수리남's 핵심노트

곱함수의 연속

두 함수 $g(x)h(x)$가 $x=a$에서 연속일 때 , 아래와 같이 3가지 경우가 나올 수 있다.

1) $g(x)$가 $x=a$에서 연속, $h(x)$는 $x=a$에서 불연속
$\rightarrow$ $g(a)=0$

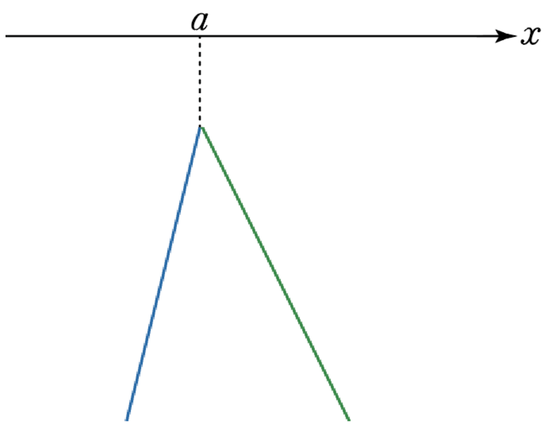
2) $g(x)$가 $x=a$에서 불연속, $h(x)$는 $x=a$에서 연속
$\rightarrow$ $h(a)=0$

3) $g(x)$, $h(x)$ 모두 $x=a$에서 불연속
$\rightarrow$ '연속'의 정의를 활용하자.$\left(\lim_{x\to a-} g(x)h(x)=\lim_{x\to a+} g(x)h(x)=g(a)h(a)\right)$

$$g(a-)h(a-)=g(a+)h(a+)=g(a)h(a)$$

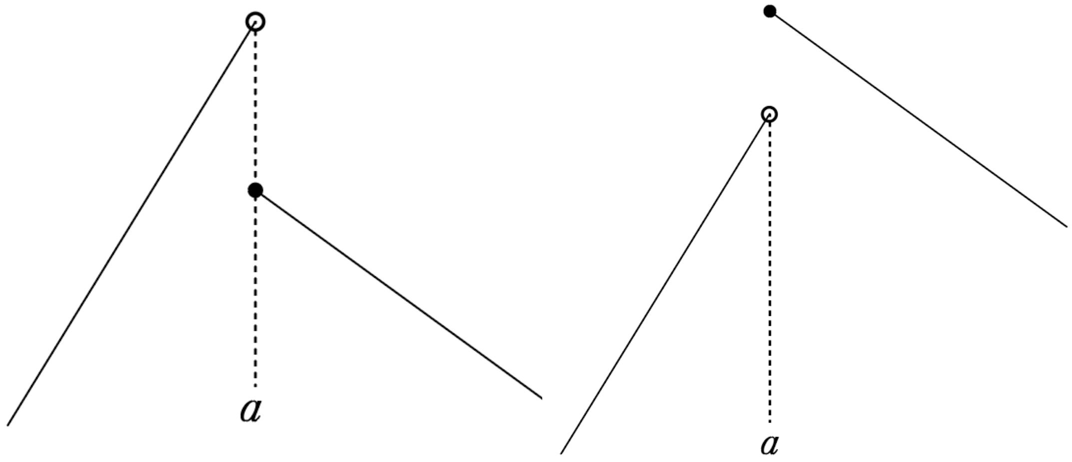
$h(x)$도 a에 따라 달라지는 함수이므로, $h(x)$에 따라서도 문제 상황이 달라져, 케이스를 나눠야한다.

1) $h(x)$가 연속함수일 때, $a=-\dfrac{5}{6}$이고, 아래와 같은 함수임을 알 수 있다.



$h(x)=0$인 부분이 없으므로, $g(x)$의 불연속점 2개를 해소할 수 없다. (수리남's 핵심노트 참고)

2) $h(x)$가 불연속함수일 때,

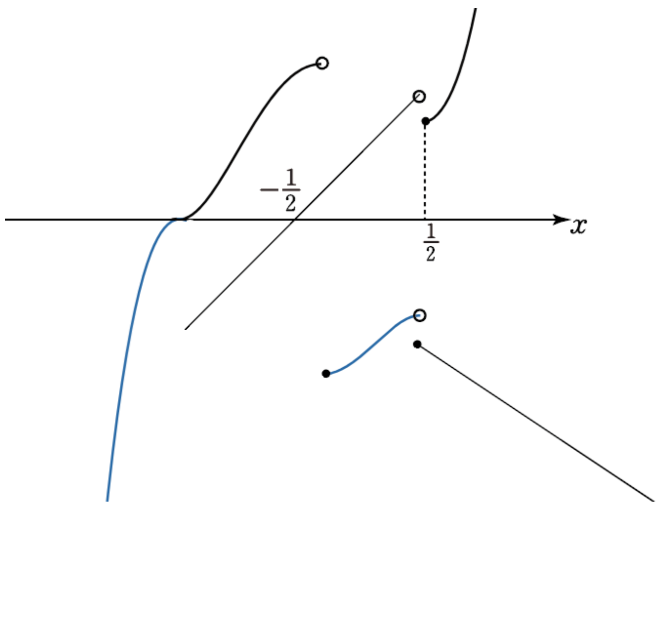


위와 같이 두 가지 상황이 존재하는데, $g(x)$의 불연속점 2개와 $h(x)$의 불연속점 1개를 해소해야 $g(x)h(x)$가 연속함수가 됨을 알 수 있다. $h(x)$의 불연속점을 해소하는 방법은 2가지가 존재하는데,

① $g(x)$의 함숫값이 0이 되는 경우
이렇게 되면, $g(x)$의 불연속점 2개가 남게되고, 이를 해소하기 위해서는 $h(x)$가 0이 되야 하는데($h(x)$의 불연속점은 이미 $g(x)$의 함숫값이 0인 x값과 일치하므로) $h(x)$그래프를 그려보면 두 군데에서 0이 될 수 없기 때문에 이 경우는 불가능함을 알 수 있다.

②$g(x)$의 불연속점을 통해 해소

$g(x)$와 $h(x)$가 같은 x값($x=a$)에서 불연속이라면, 수리남's 핵심노트 내용 3번에 의해서 불연속점을 해소할 수 있다.
$g(a+)h(a+)=g(a-)h(a-)$이고, $g(x+)$와 $g(x-)$는 부호가 반대고, 절댓값은 같기 때문에
$h(a+)=-h(a-)$이고 $4a+2=2a+3$, 즉 $a=\dfrac{1}{2}$임을 알 수 있다.

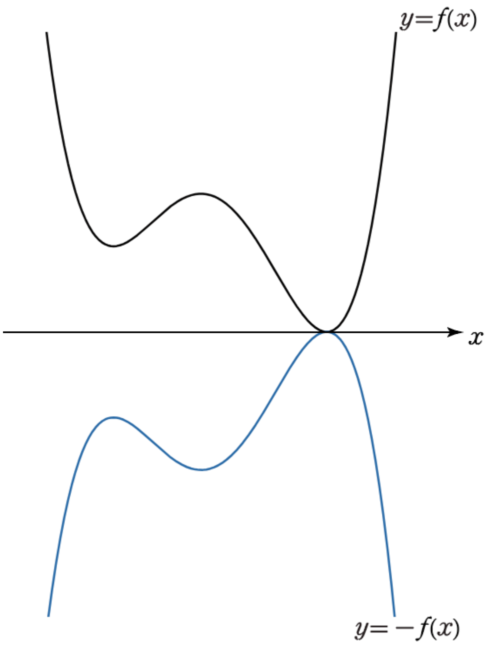


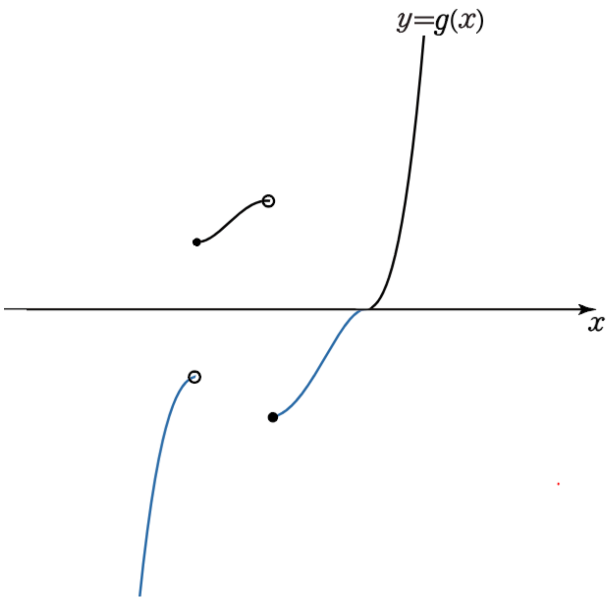
또 나머지 $g(x)$의 불연속 점은 $h(x)$가 0이 되면 해소되므로 위와 같은 상황의 그래프가 그려진다.

이렇게 되면, 그래프 상에서 $g(0) < 0$임을 확인할 수 있고, 문제조건인 $g(0) = \frac{40}{3}$을 만족하지 않는다.

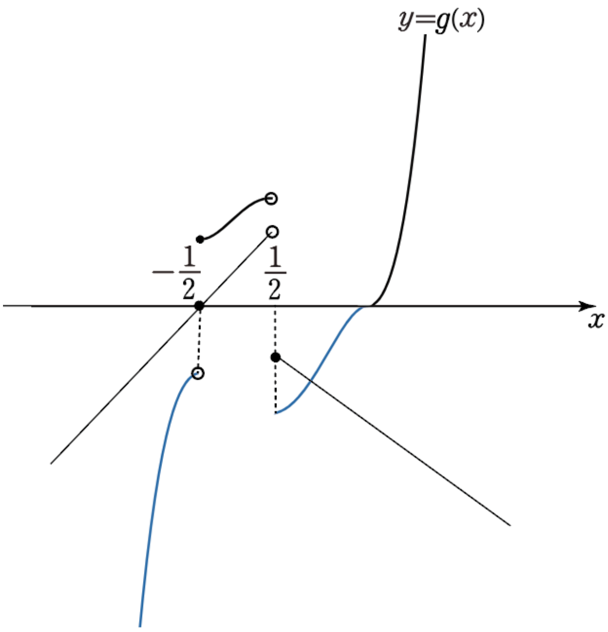
case 2

case 1과 마찬가지로 $g(x) = -f(x)$ 또는 $g(x) = f(x)$이므로 $y = f(x)$, $y = -f(x)$그래프를 모두 그려보면 아래와 같고, $g(x)$도 아래와 같이 그려짐을 알 수 있다.





마찬가지로, $g(x)h(x)$가 연속함수가 되기 위해서는 아래와 같은 상황만 가능함을 알 수 있다.



이 상황에서는 $g(0) > 0$이므로 문제 상황을 만족하므로, 이 경우가 답이 됨을 알 수 있다.

4. 마무리 계산

위 그래프를 보면

$f'(x)=16\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-k)$, $f(k)=0$ 임을 알 수 있다.

$\int_0^k f'(x)\,dx=f(k)-f(0)=0-\frac{40}{3}=-\frac{40}{3}$ 임을 알 수 있다.

TEAM 수리남's TIP

함숫값과 도함수가 등장하면, '함숫값의 차 = 도함수의 정적분'을 활용할 수 있어야 합니다.

이를 계산해보면 $k=2$임을 알 수 있다. 따라서 $f'(x)=16x^3-32x^2-4x+8$이므로

$f(x)=4x^4-\frac{32}{3}x^3-2x^2+8x+\frac{40}{3}$이고, $f(1)=\frac{38}{3}$, $h(3)=9$

따라서 $g(1)\times h(3)=114$임을 알 수 있다.

cf) 일반적인 경우

일반적인 경우에는 위에서 했던 방식과 똑같이 $g(x)$의 그래프를 그려보면 불연속점이 3개가 나온다는 것을 알 수 있다. 이때, $h(x)$가 해소할 수 있는 불연속점이 위에서 최대 2개라는 것을 확인했으므로($h(x)$의 불연속점, $h(x)=0$이 되는 점), $g(x)h(x)$가 실수 전체에서 연속이 되는 것은 불가능하다.

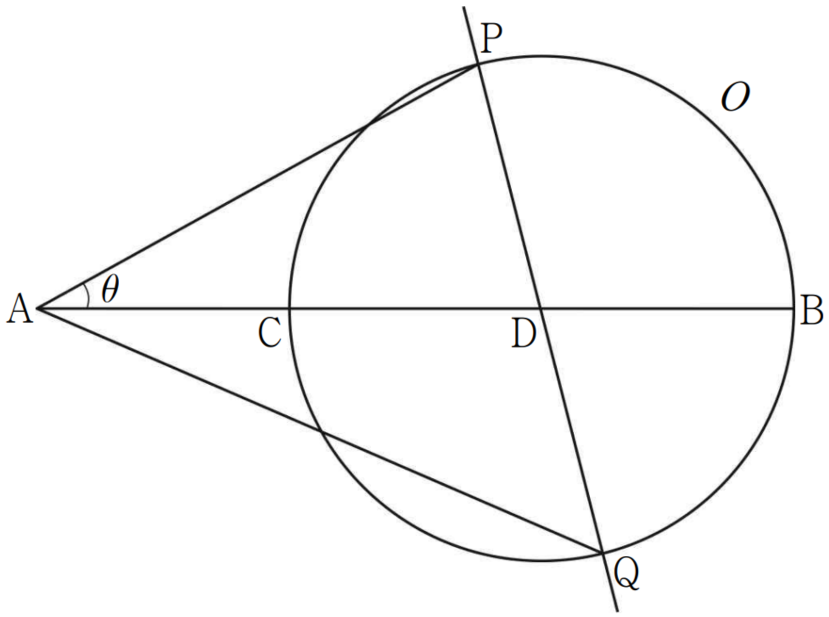
TEAM 수리남's TIP

시험장에서는 특수한 경우만 조사해서 답을 냈더라도, 꼭 연습할 때는 일반적인 경우가 왜 안 되는지 검증해보는 태도를 가져야 합니다. 일반적인 경우가 왜 안 되는지 검증하는 과정이 문제해석능력, 수학적 사고력, 추론 등의 여러 능력을 기르는데 큰 도움이 될 것입니다.

TEAM 수리남's 5월 모의고사 주요문항해설(29번)

29. 그림과 같이 길이가 3인 선분 AB를 삼등분하는 점 중 A와 가까운 점을 C, B와 가까운 점을 D라 하고, 선분 BC를 지름으로 하는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P를 $\angle \mathrm{BAP} = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{6}\right)$가 되도록 잡고, 두 점 P, D를 지나는 직선이 원 O와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 선분 AQ의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, $\cos\theta_0 = \frac{7}{8}$인 θ_0에 대하여 $f'(\theta_0) = k$이다. k^2의 값을 구하시오. (단, $\angle \mathrm{APD} < \frac{\pi}{2}$이고 $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{6}$이다.)

〔4점〕



[2024년 5월 모의고사 29번]

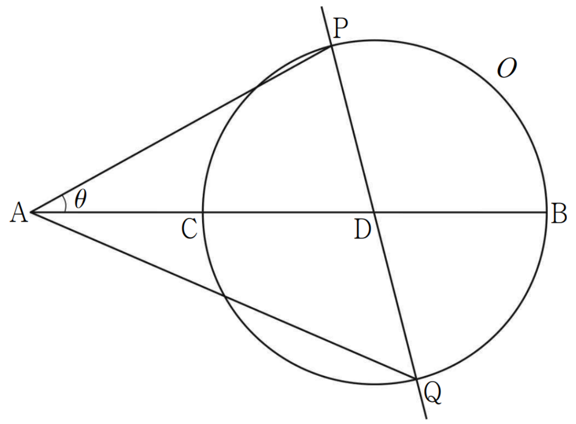
1. 머리 속 시뮬레이션

기계적으로 문제 풀이를 써 내려가기에 앞서, 큰 그림으로 상황을 먼저 인지하고 나서, 필요한 계산과 구해야하는 것이 무엇인지를 파악한 뒤에 작은 그림으로 들어가는 것이 압도적으로 유리하다.

$f(\theta)$라는 함수는, 원 위를 돌고 있는 점 P의 위치에 의해 정해지는 θ값에 대하여, P에서 중심을 가로질러 반대편에 생기는 Q점에 의해 생기는 선분 AQ의 길이이다.
즉, 점 P가 점 C에서 시작해 시계 방향으로 원 위를 이동한다고 생각하면(즉, θ가 0에서 시작해 점점 커질 때), 점 Q는 점 B에서 시작해 똑같이 시계 방향으로 원 위를 이동하게 되고, $f(\theta)$의 값은 3에서 점점 줄어들게 된다.

그러한 상황에서 특정 값 θ_0에 대하여 그 순간의 $f(\theta)$ 함수의 변화율을 구하는 것이다.

2. $f(\theta)$ 구하기



ΔAQD에서 선분 AD와 선분 QD의 길이가 각각 2, 1인 것을 알기 때문에 사이각만 알면 코사인 법칙을 통해 AQ의 길이, 즉 $f(\theta)$를 구할 수 있다.

$\angle$ADQ는 $\angle$PAD(=θ)와 $\angle$APD의 합이다.

$\angle \mathrm{APD} = \alpha$라 하면 ΔAPD에서 사인 법칙을 통해 $\dfrac{\overline{\mathrm{PD}}}{\sin\theta} = \dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin\alpha}$, 즉 $\dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$이므로 $\sin\alpha = 2\sin\theta$이다.

여기서 α라는 새로운 변수를 도입하였는데, 이는 $\sin\alpha = 2\sin\theta$라는 성질을 만족하며 θ의 값에 따라 정해지는 변수 α라는 뜻이다. **미지의 변수가 아닌, θ와의 관련성을 갖고 움직이는 변수**인 것이다.

따라서, $f(\theta)$를 구하는데 있어 α를 사용해서 표현해도 문제 없이 계산이 가능하다.

이제 ΔAQD에서 선분 AD, 선분 QD의 길이와 사이각 $\theta+\alpha$를 알기 때문에 코사인 법칙으로 선분 AQ의 길이를 표현하면,

$\overline{AQ}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{QD}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{QD} \times \cos(\theta + \alpha)$

$\rightarrow \overline{AQ} = f(\theta) = \sqrt{5 - 4\cos(\theta + \alpha)}$

TEAM 수리남's TIP

새로운 변수를 임의로 도입해도 기존의 변수와의 **관계식**이 있으면, 그 관계 속에서 기존의 변수와 함께 움직이기 때문에 **자유롭게** 사용해도 상관이 없다.

3. $f'(\theta_0)$ 구하기

먼저 $f'(\theta)$를 구해보면, $f'(\theta) = \dfrac{2\sin(\theta+\alpha) \times \left(1 + \dfrac{d\alpha}{d\theta}\right)}{\sqrt{5 - 4\cos(\theta+\alpha)}}$ 이다.

$\sin\alpha = 2\sin\theta$에서 양변을 θ에 대해 미분하면, $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = \dfrac{2\cos\theta}{\cos\alpha}$도 쉽게 구할 수 있다.

이제, 정해진 θ_0라는 값에 대하여, 대입만 해주면 끝난다.

정해진 값 θ_0에 대하여, $\cos\theta_0 = \dfrac{7}{8}$일 때의 α값을 α_0라 하면,

$\cos\theta_0 = \dfrac{7}{8}$, $\sin\theta_0 = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$, $\cos\alpha_0 = \dfrac{1}{4}$, $\sin\alpha_0 = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ 이고,

$\dfrac{d\alpha}{d\theta} = \dfrac{2\cos\theta_0}{\cos\alpha_0} = 7$ 이다.

이렇게 구한 모든 값을 $f'(\theta)$의 식에 대입하면 문제가 끝이 난다.

$$f'(\theta_0) = \frac{2\sin(\theta_0+\alpha_0) \times \left(1 + \dfrac{d\alpha}{d\theta}\right)}{\sqrt{5 - 4\cos(\theta_0+\alpha_0)}} = \frac{2 \times \dfrac{\sqrt{15}}{4} \times (1+7)}{\sqrt{5 - 4 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right)}} = 2\sqrt{10}$$

$\Longrightarrow$ 정답: 40

TEAM 수리남's 5월 모의고사 주요문항해설(30번)

30. 수열 $\{a_n\}$은 공비가 0인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} a_n & (|a_n| < \alpha) \\ -\dfrac{5}{a_n} & (|a_n| < \alpha) \end{cases} \quad (\alpha\text{는 양의 상수})$$

라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 자연수 p가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$

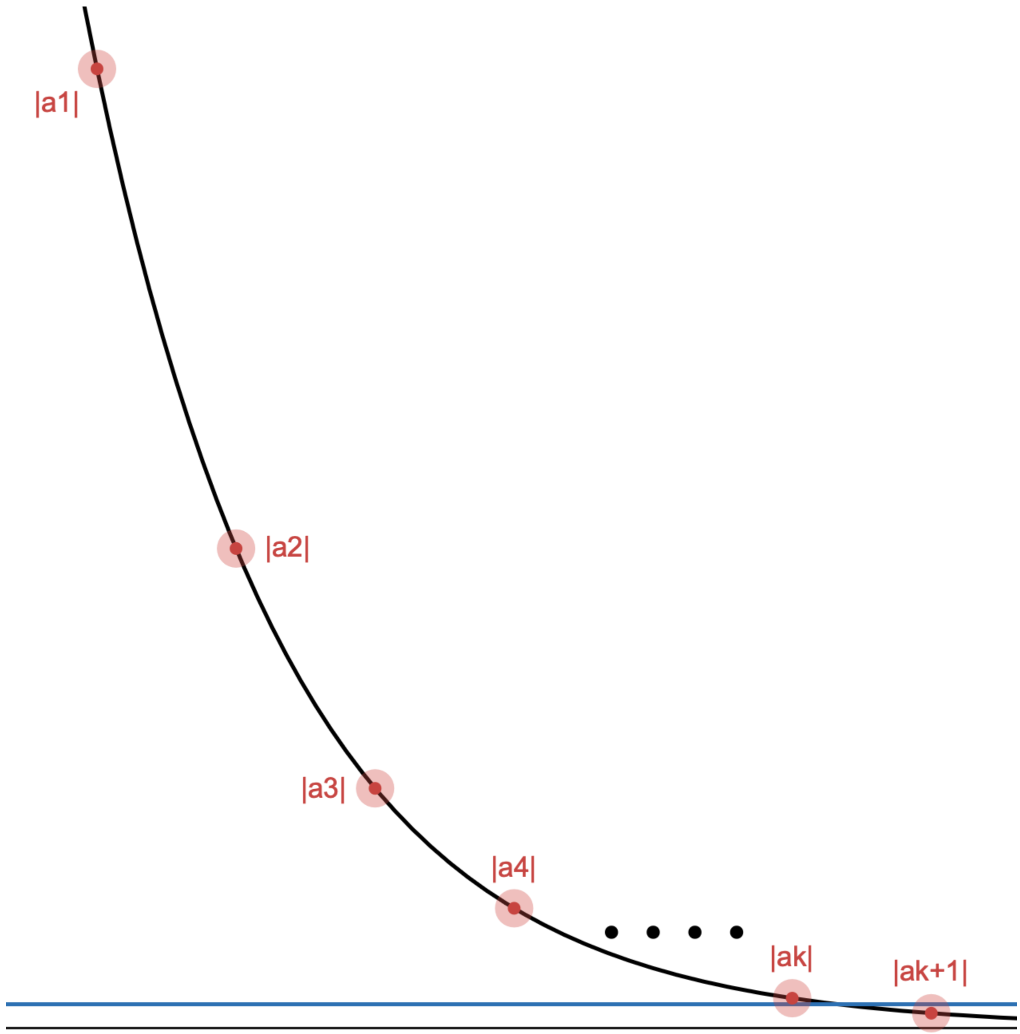
(나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{b_n}$ 값이 최소가 되도록 하는 자연수 m은 p이고, $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} b_n = 51$, $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{\infty} b_n = \frac{1}{64}$ 이다.

$32 \times (a_3 + p)$의 값을 구하시오.

[2024년 5월 모의고사 30번]

1. b_n을 먼저 분석해보자.

$|a_n|$의 값 범위에 따라 b_n이 결정되기 때문에, $|a_n|$라는 수열에 대해 생각해봐야한다.
a_n은 첫 항이 a_1이고, 공비가 r인 등비수열이고, (가) 조건에 의해서 $-1<r<1$임을 알 수. 있다.
따라서, $|a_n|$은 첫 항이 $|a_1|$이고 공비가 $|r|<1$인 등비수열이다.
따라서 $|a_n|$을 좌표평면 상에 나타내면, 아래와 같다.



b_n이 $|a_n|$이 α보다 큰지 작은지를 기준으로 결정되므로 $y=\alpha$(파란선)을 기준으로
$|a_k|>\alpha$, $|a_{k+1}|<\alpha$인 k를 설정해보자.

이제, b_n을 조사해보면

$$b_1=-\frac{5}{a_1},\ b_2=-\frac{5}{a_2},\ b_3=-\frac{5}{a_3},\ b_4=-\frac{5}{a_4},\ \cdots,\ b_k=-\frac{5}{a_k}$$

$$b_{k+1}=a_{k+1},\ b_{k+2}=a_{k+2},\ b_{k+3}=a_{k+3},\ \cdots$$

이다.

2. (가) 조건 분석

무한등비급수이므로 $\dfrac{a_1}{1-r}=4$

3. (나) 조건 분석

$\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{b_n}$ 이 최소가 되는 상황을 알아야 하므로, $\dfrac{a_n}{b_n}$을 나열해보면

$$-\frac{5}{a_1^{\,2}},\ -\frac{5}{a_2^{\,2}},\ -\frac{5}{a_3^{\,2}},\ -\frac{5}{a_4^{\,2}},\ \cdots,\ -\frac{5}{a_k^{\,2}},\ \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}=\frac{a_{k+1}}{a_{k+1}}=1,\ \frac{a_{k+2}}{b_{k+2}}=\frac{a_{k+2}}{a_{k+2}}=1,\ \cdots$$

$\dfrac{a_n}{b_n}$합을 조사해보면 처음에는 계속 음수들의 합이므로 감소하다가, $\dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}}=\dfrac{a_{k+1}}{a_{k+1}}=1$가 더해지는 순간 점점 증가하게 된다. 즉 $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{b_n}$ 이 최소가 되는 m값 p는 k임을 알 수 있다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{p}b_n=51,\quad \sum_{n=p+1}^{\infty}b_n=\frac{1}{64}$이므로

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{p}b_n=\sum_{n=1}^{k}b_n=\sum_{n=1}^{k}-\frac{5}{a_n}=-5\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{a_n}$이다.

$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 첫 항이 $\dfrac{1}{a_1}$이고 공비가 $\dfrac{1}{r}$인 등비수열이므로,

$\displaystyle -5\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{a_n}=-5\times\frac{\frac{1}{a_1}\left(1-\frac{1}{r^k}\right)}{1-\frac{1}{r}}=51$임을 알 수 있다.

② $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{\infty}b_n=\sum_{n=k+1}^{\infty}a_n=\frac{a_{k+1}}{1-r}=\frac{1}{64}$이다.

$\dfrac{a_{k+1}}{1-r}=\dfrac{a_1r^k}{1-r}=4r^k=\dfrac{1}{64}$이므로 $r^k=\dfrac{1}{256}$이고, 이를 ①에서 나온 식에 대입해보면

$\dfrac{5\times255}{a_1\left(1-\frac{1}{r}\right)}=51$이므로, $a_1\left(1-\dfrac{1}{r}\right)=25$임을 알 수 있다. 이와 $\dfrac{a_1}{1-r}=4$를 연립해서 계산하면

$a_1=5,\ r=-\dfrac{1}{4}$이다. $r^k=r^p=\left(-\dfrac{1}{4}\right)^p=\dfrac{1}{256}$이므로, $p=4$이다. 따라서 $32\times(a_3+p)=138$이다.