2024 5월 고3 수학 풀이 (by 환동)

수학 영역

제 2 교시

5지선다형

1. $4^{1-\sqrt{3}} \times 2^{1+2\sqrt{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

$$2^{2-2\sqrt{3}} \times 2^{1+2\sqrt{3}} = 2^3 = 8$$

2. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \frac{4}{1+1} = 2$$

3. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5-a_3=8$일 때, a_2의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

공차 : d

$$\underbrace{(1+4d)}_{a_5} - \underbrace{(1+2d)}_{a_3} = 8 \rightarrow 2d=8 \rightarrow d=4$$

$$a_2 = a+d = 1+4 = 5$$

4. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-4}{h}=6$일 때, $f(1)+f'(1)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

주어진 극한이 $\frac{0}{0}$ 꼴이므로 $f(1)-4=0$ $\therefore f(1)=4$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-4}{2h} \times 2 = 6$$

$$f'(1) \times 2 = 6 \qquad \therefore f'(1)=3$$

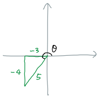
$$f(1)+f'(1) = 7$$

5. $\sin(-\theta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{8}{5}$이고 $\cos\theta<0$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

$\underbrace{(-\sin\theta)}_{\sin(-\theta)} + \underbrace{(-\sin\theta)}_{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{8}{5}$

$-2\sin\theta = \frac{8}{5}$ $\therefore \sin\theta = -\frac{4}{5}$



$\tan\theta = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

6. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+3a$가 $x=-2$에서 극대일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$f'(x) = 3x^2+2ax = 3x\left(x+\frac{2}{3}a\right)$

$x=-2$에서 $f(x)$가 극대이므로 $f'(-2)=0$ $\therefore a=3$

$f'(x)=0$의 또다른 해는 $x=0$이므로 $x=0$에서 극소

따라서 극솟값은 $f(0)=3a=3\times3=9$

7. 다항함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하고

$$f'(x)=\{3x-f(1)\}(x-1)$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$f(x)$가 실수 전체 집합에서 증가 $\rightarrow$ $f'(x)\geq 0$

$f'(1)=0$이므로 $f'(x)\geq0$을 만족시키려면 $f'(x)$를 완전제곱꼴로

만드는 방법밖에 없다. 따라서 $3x-f(1) = 3(x-1)$

$\therefore f(1)=3$

$f'(x) = 3(x-1)^2 = 3x^2-6x+3$ 이므로

$f(x) = \int f'(x)dx = x^3-3x^2+3x+C$

이 때, $f(1)=3$이므로 $1+C=3$ $\therefore C=2$

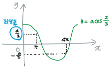
따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$

$\therefore f(2)=4$

8. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\cos bx$의 주기가 6π이고 닫힌구간 $[\pi, 4\pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 1일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{11}{6}$ ③ 2 ④ $\frac{13}{6}$ ⑤ $\frac{7}{3}$

주기 : $\frac{2\pi}{|b|} = 6\pi$ $\quad \therefore b = \frac{1}{3}$ $\quad (\because b>0)$



$\rightarrow \frac{a}{2} = 1 \quad \therefore a=2$

$a+b = 2+\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

9. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = 1-4\times S_n$$

이고 $a_4=4$일 때, $a_1\times a_6$의 값은? [4점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

$\underbrace{a_4}_{4} = 1-4S_3 \quad \therefore \underbrace{a_1+a_2+a_3}_{S_3} = -\frac{3}{4} \cdots ㉠$

$a_3 = 1-4S_2 \rightarrow a_3 = 1-4a_1-4a_2$

$\therefore 4a_1+4a_2+a_3 = 1 \cdots ㉡$

$a_2 = 1-4S_1 \rightarrow a_2 = 1-4a_1$

$\therefore 4a_1+a_2 = 1 \cdots ㉢$

㉡ − ㉠ 을 하면 $3a_1+3a_2 = \frac{7}{4} \cdots ㉣$

3×㉢ − ㉣을 하면 $9a_1 = \frac{5}{4}$ $\quad \boxed{\therefore a_1 = \frac{5}{36}}$

$a_5 = 1-4S_4 = 1-4(S_3+a_4) = 1-4(-\frac{3}{4}+4) = -12$

$a_6 = 1-4S_5 = 1-4(\underbrace{S_3}_{-\frac{3}{4}}+\underbrace{a_4}_{4}+\underbrace{a_5}_{-12}) = 36$

$\boxed{\therefore a_6 = 36}$

$\therefore a_1\times a_6 = \frac{5}{36}\times 36 = 5$

10. 실수 m에 대하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도를 각각

$$v_1(t)=3t^2+1,\quad v_2(t)=mt-4$$

라 하자. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 두 점 P, Q가 움직인 거리가 같도록 하는 모든 m의 값의 합은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$t=0$부터 $t=2$까지 P가 움직인 거리 : S_1
〃 〃 Q가 〃 〃 : S_2

$S_1 = \int_0^2 \underline{v_1(t)}\,dt = [t^3+t]_0^2 = 10$
원래 $|v_1(t)|$인데 어차피 $v_1(t)>0$ 이니까

$S_2 = \int_0^2 |v_2(t)|\,dt$

☆ $S_2 = 10$이 되도록 하는 게 목표 ☆

(i) $0\leq t\leq 2$일 때 $v_2(t)\geq 0$ 가정
$v_2(0) = -4$이므로 가정 성립 ×

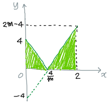
(ii) $0\leq t\leq 2$일 때 $v_2(t)\leq 0$ 가정

$S_2 = \int_0^2 |v_2(t)|\,dt = -\int_0^2 v_2(t)\,dt$

$= -\left[\frac{m}{2}t^2-4t\right]_0^2 = -2m+8$

$\underbrace{10}_{S_1} = \underbrace{-2m+8}_{S_2}$ 이라면 $\boxed{m=-1}$

(iii) $0<\frac{4}{m}<2$ 가정



(색칠된 부분 넓이) = 10

$\frac{1}{2}\times\frac{4}{m}\times 4 + \frac{1}{2}\times(2-\frac{4}{m})\times(2m-4) = 10$

↳ $\frac{8}{m}+2m-8+\frac{8}{m} = 10$

↳ $2m-18+\frac{16}{m} = 0$ 이항하고 정리

↳ $m^2-9m+8=0$ $\times\frac{m}{2}$

↳ $(m-1)(m-8)=0$ $\quad \boxed{\therefore m=8}\ (\because 0<\frac{4}{m}<2)$

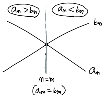
모든 m의 합은 $(-1)+8 = 7$

11. 공차가 정수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 자연수 $m(m \geq 3)$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|a_1 - b_1| = 5$
> (나) $a_m = b_m$, $a_{m+1} < b_{m+1}$

$\sum_{k=1}^{m} a_k = 9$일 때, $\sum_{k=1}^{m} b_k$의 값은? [4점]

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2



(가) $|a_1 - b_1| = 5$ 인데 $a_1 > b_1$ 이므로 $a_1 - b_1 = 5$

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 등차수열이면 $\{a_n - b_n\}$도 등차수열

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차가 정수이므로 $\{a_n - b_n\}$의 공차도 정수

↳ $a_n - b_n = -n + 6$이고 $m = 6$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{6} a_k}_{9} - \underbrace{\sum_{k=1}^{6} b_k}_{?} = \underbrace{\sum_{k=1}^{6} (-k+6)}_{15}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{9} b_k = -6$$

$a_n = a_1 + d_1(n-1)$
$b_n = a_2 + d_2(n-1)$

이라 할 때

$a_n - b_n = (a_1 - a_2) + (d_1 - d_2)(n-1)$

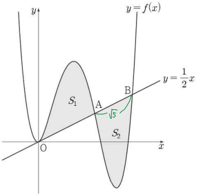
따라서 $\{a_n - b_n\}$은 첫째항이 $a_1 - a_2$ 이고
공차는 $d_1 - d_2$ 인 등차수열

d_1, d_2가 정수이면 $d_1 - d_2$도 당연히 정수이다.

12. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = \frac{1}{2}x$가 원점 O에서 접하고 ㉠
x좌표가 양수인 두 점 A, B($\overline{OA} < \overline{OB}$)에서 만난다.
곡선 $y = f(x)$와 선분 OA로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1,
곡선 $y = f(x)$와 선분 AB로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2라 하자.
$\overline{AB} = \sqrt{5}$이고 $S_1 = S_2$일 때, $f(1)$의 값은? [4점] ㉡

① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$



㉠ $f(x) - \frac{1}{2}x = x^2(x-a)(x-b)$ (a, b는 상수)

㉡  → A와 B의 x좌표차 : 2

㉠에서 $a = k-2$, $b = k$ (k는 상수)라 하자.

$S_1 = S_2$ 이므로 $\int_0^k \left\{f(x) - \frac{1}{2}x\right\} dx = 0$ 이다.

$$\int_0^k x^2(x-k+2)(x-k)\,dx = 0 \cdots ㉢$$

$$\int_0^k \left\{x^4 + (-2k+2)x^3 + (k^2-2k)x^2\right\} dx = 0$$

$$\frac{\cancelto{k}{k^5}}{5} + (-2k+2)\frac{\cancelto{1}{k^4}}{4} + \cancelto{k-2}{(k^2-2k)}\frac{\cancelto{1}{k^3}}{3} = 0$$

$$\frac{k}{5} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} + \frac{k}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

$$\frac{k}{30} - \frac{1}{6} = 0 \qquad \therefore k = 5$$

따라서 ㉢에서 $f(x) - \frac{1}{2}x = x^2(x-3)(x-5)$

양변에 $x = 1$을 대입하면 $f(1) - \frac{1}{2} = 8$

$$\therefore f(1) = \frac{17}{2}$$

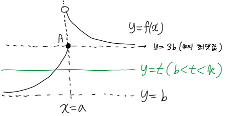
13. 두 상수 a, $b(b>0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+3}+b & (x \le a) \\ 2^{-x+5}+3b & (x > a) \end{cases}$$

라 하자. 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값이 $4b+8$일 때, $a+b$의 값은? (단, $k>b$) [4점]

$b<t<k$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이다.

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13



k의 최댓값 $= \lim_{x\to\infty} f(x) = 3b$

이 값이 $4b+8$이라고 했으므로 $3b=4b+8$

$\therefore b=8$

점 A의 y좌표 $= 3b = 24$이므로

$2^{a+3}+8=24$

$2^{a+3}=16$ $\therefore a=1$

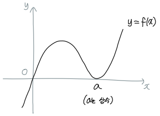
$\therefore a+b = 1+8=9$

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$\lvert f(k)\rvert + \lvert g(k)\rvert = 0$을 만족시키는 실수 k의 개수는 2이다.

$4f(1)+2g(1)=-1$일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 46 ② 49 ③ 52 ④ 55 ⑤ 58



$y=f(x)$의 그래프를 위와 같이 그리면

(1) $f(0)=0$이고 그 접선은 당연히 $(0,0)$을 지나므로 $g(0)=0$

(2) $f(a)=0$이고 그 접선은 x축과 일치하므로 $g(a)=0$

이므로 조건을 만족시키는 k가 0과 a로 2개가 된다.

따라서 어떤 실수 a에 대해 $f(x)=x(x-a)^2$

$4f(1)+2g(1)=-1$이라고 했는데 일단 $f(1)=(1-a)^2$

$g(1)$을 구하기 위해 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식을 구하면

$f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$

$f'(x)=3x^2-4ax+a^2=(3x-a)(x-a)$

$f'(1)=(3-a)(1-a)=a^2-4a+3$

따라서 접선의 방정식은 $y=(a^2-4a+3)(x-1)+f(1)$이므로

$\underbrace{g(1)}_{\text{접선의 y절편}}$을 구하면 $g(1)=-a^2+4a-3+f(1)$이다.

따라서 $4f(1)+2g(1)=-1$

$-2a^2+8a-6+6\underbrace{f(1)}_{(1-a)^2}=-1$

$4a^2-4a+1=0$

$(2a-1)^2=0$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=x\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$이므로

$f(4)=4\times\left(\frac{7}{2}\right)^2=49$

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{3} & (a_n\text{이 3의 배수인 경우})\\ \dfrac{a_n{}^2+5}{3} & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우})\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_4+a_5=5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 63 ② 66 ③ 69 ④ 72 ⑤ 75

a_4가 3의 배수이면 $a_5=\frac{a_4}{3}$

$a_5=\frac{a_4}{3}$ 와 $a_4+a_5=5$를 동시에 만족시키는

두 자연수 a_4, a_5는 존재하지 않음

왜 꼭 자연수?

따라서 a_4는 3의 배수가 아니다.

$a_4=1$이면 $a_5=2$이므로 $a_4+a_5\neq 5$

$a_4=2$이면 $a_5=3$이므로 $a_4+a_5=5$

따라서 $a_4=2$이다.

$a_4=2$

a_3이 3의 배수 → $a_3=6$

a_3이 3의 배수 아님 → $a_3=1$

$a_3=6$: ○ $a_2=18$, × 존재하지 않음

$a_3=1$: ○ $a_2=3$, × 존재하지 않음

$a_2=18$: ○ $a_1=54$, × $a_1=7$

$a_2=3$: ○ $a_1=9$, × $a_1=2$

$\therefore 54+7+9+2=72$

* 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수라는 근거

자연수 k에 대해

$a_n=3k-2$라 하면 $a_{n+1}=\frac{(3k-2)^2+5}{3}=\frac{9k^2-12k+9}{3}=3k^2-4k+3$ (자연수)

$a_n=3k-1$이라 하면 $a_{n+1}=\frac{(3k-1)^2+5}{3}=\frac{9k^2-6k+6}{3}=3k^2-2k+2$ (자연수)

$a_n=3k$라 하면 $a_{n+1}=\frac{3k}{3}=k$ (자연수)

따라서 (1) a_n이 자연수이면 a_{n+1}은 자연수이고 (2) a_1은 자연수 (문제 조건)

이므로 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수이다.

단답형

16. 방정식

$\log_2(x-3)=1-\log_2(x-4)$ → $x>4$임에 주의한다.

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

5

$\log_2(x-3)+\log_2(x-4)=1$

$(x-3)(x-4)=2$

$x^2-7x+10=0$

$(x-2)(x-5)=0$

$x=5$ $(\because x>4)$

17. 함수 $f(x)=(x-1)(x^3+x^2+5)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

7

$f(x)=x^4+x^3+5x-x^3-x^2-5$

$f'(x)=4x^3+3x^2+5-3x^2-2x$

$f'(1)=4+3+5-3-2$

$=7$

18. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = 2x^3 + \int_0^{-x} f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

16

$$\int_0^x f(t)dt - \int_0^{-x} f(t)dt = 2x^3$$

$$\int_0^x f(t)dt + \int_{-x}^0 f(t)dt = 2x^3$$

$$\int_{-x}^x f(t)dt = 2x^3 \quad //$$

상수 a, b에 대하여 $f(x)=3x^2+ax+b$ 라 하자.

$$\int_{-x}^x (3t^2+at+b)dt = 2x^3$$

$$\left[t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_{-x}^x = 2x^3 \qquad \therefore b=0$$

$f(x)=3x^2+ax$인데 $f(1)=5$이므로 $a=2$ $\quad \therefore f(x)=3x^2+2x$

$\therefore f(2)=16$

19. 집합 $U=\{x \mid -5 \le x \le 5,\ x$는 정수$\}$의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여 두 집합 A, B를

$A=\{a \mid a$는 x의 실수인 네제곱근, $x \in X\}$,
$B=\{b \mid b$는 x의 실수인 세제곱근, $x \in X\}$

라 하자. $n(A)=9$, $n(B)=7$이 되도록 하는 집합 X의 모든 원소의 합의 최댓값을 구하시오. [3점]

11

$x<0$ 이면 실수인 네제곱근 0개
〃 세제곱근 1개

$x=0$ 이면 실수인 네제곱근 1개
〃 세제곱근 1개

$x>0$ 이면 실수인 네제곱근 2개
세제곱근 1개

$n(A)=9$가 되려면 X에 양수 4개와 0을 포함해야 한다.

양수를 최대한 큰 것들로 포함하면 $\underbrace{5,\ 4,\ 3,\ 2,}_{\text{양수 4개}}\ 0$

여기에 $n(B)=7$로 만들기 위해 음수 2개를 더 포함시킨다.

음수도 최대한 큰 것들로 포함시킨다. $-1,\ -2$

따라서 $X=\{5, 4, 3, 2, 0, -1, -2\}$ 이므로

X의 모든 원소의 합은 11

20. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=\left(-\frac{1}{2}x+3\right)g(x)-x^3+2x^2 \ \cdots ㉠$$

을 만족시킨다. 상수 $k(k \ne 0)$에 대하여

$$\underbrace{\lim_{x\to2}\frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)}}_{㉡}\times\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}}_{㉢}=k$$

일 때, k의 값을 구하시오. [4점]

25

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=g(2)$ 임을 알 수 있다.

따라서 ㉡은 $\frac{0}{0}$ 꼴 극한이므로 $g(1)=0$

그리고 ㉢에서 ($g(x)$의 차수) $= 2\times$ ($f(x)$의 차수) 임을 알 수 있다.

정확한 차수는 ㉠을 통해 구할 수 있다.

㉠에서 $f(x)$가 2차, $g(x)$가 4차라고 해보자.

그러면 좌변은 3차인데 우변은 5차라서 등식이 성립할 리가 없다.

이는 $f(x)$가 3차 이상이어도 모두 마찬가지이다.

따라서 $f(x)$는 1차, $g(x)$는 2차일 수밖에 없다

이때 좌변이 2차이므로 우변의 x^3을 제거해야 하는데,

$g(x)$의 최고차항 계수가 -2이면 삼차항을 제거할 수 있다.

그리고 좌변의 상수항이 0이므로 우변의 상수항도 0이다.

따라서 $g(x)$의 상수항은 0이다.

— 이 색으로 밑줄 친 부분을 모두 종합하면 $g(x)=-2x^2+2x$

㉠의 우변에 $g(x)=-2x^2+2x$를 대입한 후 간단히 하면

$$\left(-\frac{1}{2}x+3\right)(-2x^2+2x)-x^3+2x^2 = -5x^2+6x$$

이므로 $xf(x)=-5x^2+6x$이다. 따라서 $f(x)=-5x+6$

이제 k의 값을 구하면

$$\lim_{x\to2}\frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)} = \lim_{x\to2}\frac{-2x^2+6x-4}{2x^2-7x+6} = \lim_{x\to2}\frac{-2(x-1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(2x-3)}$$

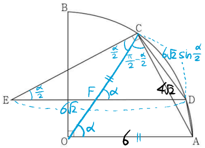
$$= \lim_{x\to2}\frac{-2x+2}{2x-3} = -2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)} = \frac{25x^2+\sim}{-2x^2+2x} = -\frac{25}{2}$$

따라서 $k=(-2)\times\left(-\frac{25}{2}\right)=25$

21. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위에 점 C를 $\overline{AC}=4\sqrt{2}$가 되도록 잡는다. 호 AC 위의 한 점 D에 대하여 점 D를 지나고 선분 OA에 평행한 직선과 점 C를 지나고 선분 AC에 수직인 직선이 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 CED의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$일 때, $\overline{AD}=p+q\sqrt{7}$을 만족시키는 두 유리수 p, q에 대하여 $9\times|p\times q|$의 값을 구하시오. (단, 점 D는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.) [4점]

64



삼각형 CED의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$이고

$\overline{ED}$는 이 외접원의 지름이므로 $\overline{ED}=6\sqrt{2}$

$\angle COA=\alpha$라 하고, 두 선분 OC와 ED의 교점을 F라 하자.

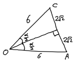
① $\overline{OA}=\overline{OC}$이므로 $\angle OCA=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$이다

그리고 $\angle ACE=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle OCE=\frac{\alpha}{2}$이다.

② $\overline{OA}\,/\!/\,\overline{ED}$이므로 $\angle CFD=\angle COA=\alpha$이다.

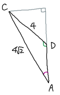
그리고 $\underbrace{\angle CFD}_{\alpha}=\underbrace{\angle FCE}_{\frac{\alpha}{2}}+\angle FEC$이므로 $\angle FEC=\frac{\alpha}{2}$이다.

따라서 $\overline{CD}=\overline{ED}\sin\frac{\alpha}{2}=6\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$



왼쪽 그림에서 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{3}$이다.

따라서 $\overline{CD}=6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}=4$



세 점 A, C, D가 모두 호 AB 위에 있기 때문에 삼각형 ACD의 외접원의 반지름 길이는 6이다.

사인법칙에 의해 $12=\frac{4}{\sin(\angle DAC)}=\frac{4\sqrt{2}}{\sin(\angle ADC)}$이므로

$\sin(\angle DAC)=\frac{1}{3}$, $\sin(\angle ADC)=\frac{\sqrt{2}}{3}$

↓

$\cos(\angle DAC)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos(\angle ADC)=-\frac{\sqrt{7}}{3}$

따라서 $\overline{AD}=\overline{AC}\cos(\angle DAC)-\overline{DC}\cos(\pi-\angle ADC)$

$=4\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}-4\times\frac{\sqrt{7}}{3}$

$=\frac{16}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{7}$ $\therefore p=\frac{16}{3},\ q=-\frac{4}{3}$

$\therefore 9\times|p\times q|=9\times\frac{16}{3}\times\frac{4}{3}=64$

22. 최고차항의 계수가 4이고 서로 다른 세 극값을 갖는 사차함수 $f(x)$와 두 함수 $g(x)$,

$$h(x)=\begin{cases}4x+2 & (x<a)\\ -2x-3 & (x\geq a)\end{cases}$$

가 있다. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
>
> $|g(x)|=f(x)$, $\displaystyle\lim_{t\to0+}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}=|f'(x)|$
>
> 이다.
>
> (나) 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(0)=\frac{40}{3}$일 때, $g(1)\times h(3)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

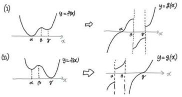
114

(가) $|g(x)|=f(x)$ → $f(x)\geq0$, $g(x)=\pm f(x)$

$\displaystyle\lim_{t\to0+}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}=|f'(x)|$ → $g(x)$의 우미분계수는 음수가 아니다.

$g(x)$가 감소하는 경우 없음

(나) $g(x)h(x)$가 모든 실수에서 연속 → $g(x)$가 불연속되는 점 개수 최소화하는게 좋을 듯



$g(x)$의 특징

ⓐ 불연속인 점에서 $g'(x)=f'(x)=0$

ⓑ 불연속인 점에서 좌극한과 우극한이 서로 -1배

※ $g(x)$의 세 극값이 서로 다르므로 극솟값 2개가 모두 0인 경우는 고려 대상에서 제외

$g(x)$의 불연속 점에서 $g(x)h(x)$가 연속이 되기 위해서는 해당 점에서 $h(x)=0$이거나 $h(x)$의 좌극한과 우극한이 서로 -1배이면 된다. (ⓑ에 의해)

② $a=\frac{1}{2}$이므로 $h(x)=0$의 해는 $x=-\frac{1}{2}$ 여기에서도 $g(x)$가 불연속이다

① 이때, $a=\frac{1}{2}$이고 $g(x)$의 불연속점 중 하나가 $x=\frac{1}{2}$

일단 α, β, γ 중 2개는 불연속점이고, 이 불연속점은 $-\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{2}$이다.

만약 케이스 (i)이라면 $\beta=-\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{1}{2}$이므로 $g(0)<0$이므로 $g(0)=\frac{40}{3}$이라는 조건에 부합하지 않는다.

케이스 (ii)라면 $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로 $g(0)>0$이다. 따라서 $g(0)=\frac{40}{3}$이라는 조건을 만족시킬 수 있다

따라서 $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$이고 $\gamma>\frac{1}{2}$인 케이스 (ii)를 선택하자.

ⓐ에 의해 $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)=f'(\gamma)=0$이다. 그리고 $f'(x)$의 최고차항 계수가 16이므로

$f'(x)=16\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-\gamma)$이라고 할 수 있다.

전개하면 $f'(x)=16x^3-16\gamma x^2-4x+4\gamma$이므로 $f(x)=4x^4-\frac{16}{3}\gamma x^3-2x^2+4\gamma x+\frac{40}{3}$ $\left(\because g(0)=\frac{40}{3}\right)$

$f(\gamma)=0$이므로 $-\frac{4}{3}\gamma^4+2\gamma^2+\frac{40}{3}=0$이므로 방정식을 풀면 $\gamma=2$ $\left(\because \gamma>\frac{1}{2}\right)$

따라서 $f(x)=4x^4-\frac{32}{3}x^3-2x^2+8x+\frac{40}{3}$이다.

이제 $g(1)\times h(3)$의 값을 구하자.

$g(x)=\pm f(x)$이므로 $g(1)=\pm f(1)=\pm\frac{38}{3}$이다.

그런데 케이스 (ii)에서 $\underbrace{\frac{1}{2}}_{\beta}<x<\underbrace{2}_{\gamma}$이면 $g(x)<0$이므로 $g(1)=-\frac{38}{3}$이다

그리고 $a=\frac{1}{2}$이므로 $x=3$이면 $h(x)=-2x-3$이다. 따라서 $h(3)=-9$이다.

$\therefore g(1)\times h(3)=\left(-\frac{38}{3}\right)\times(-9)=114$

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 두 사건 A, B에 대하여

$$\underbrace{\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3}}_{㉠},\quad \underbrace{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=4\times\mathrm{P}(A\cap B)}_{㉡}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은? [2점]

① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

㉠에서 $P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}$ ⋯ ㉢

㉢ − ㉡ 을 하면

$-P(A\cap B)=\frac{2}{3}-4P(A\cap B)$

$3P(A\cap B)=\frac{2}{3}$ $\therefore P(A\cap B)=\frac{2}{9}$

24. 다항식 $(ax^2+1)^6$의 전개식에서 x^4의 계수가 30일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

${}_6C_n\cdot(ax^2)^n\cdot 1^{6-n}$

$={}_6C_n\cdot(ax^2)^n$ ⋯ ㉠

에서 x의 지수가 4가 되도록 하는 n의 값은 2

㉠에 $n=2$를 대입하면 ${}_6C_2\times a^2\times x^4=15a^2x^4$

문제에서 x^4의 계수가 30이라 했으므로 $15a^2=30$이다.

$\therefore a=\sqrt{2}$

25. $4 \le x \le y \le z \le w \le 12$를 만족시키는 짝수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는? [3점]

① 70 ② 74 ③ 78 ④ 82 ⑤ 86

x, y, z, w는 모두 4, 6, 8, 10, 12중 하나의 값을 갖는다.

일단 4, 6, 8, 10, 12 중에서 중복을 허락하여 4개를 뽑아놓으면

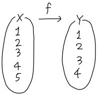
x, y, z, w에 들어가는 수는 알아서 정해지므로 구하는 경우의 수는

$${}_5H_4 = {}_8C_4 = 70$$

26. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to Y$의 개수는? [3점]

(가) $f(1)+f(2)=4$ (나) 1은 함수 f의 치역의 원소이다.

① 145 ② 150 ③ 155 ④ 160 ⑤ 165



(가) 조건에 따라 케이스를 분류하자.

(i) $f(1)=1$, $f(2)=3$인 경우

$f(1)=1$이므로 (나) 조건을 만족시켰다.

따라서 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값은 자유롭게 선택할 수 있으므로

경우의 수는 ${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$

(ii) $f(1)=2$, $f(2)=2$ 인 경우

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 중 적어도 하나는 1이어야 하므로

경우의 수는 ${}_4\Pi_3 - \underbrace{{}_3\Pi_3}_{\text{1을 빼놓고 선택하는 경우의 수}} = 4^3 - 3^3 = 37$

(iii) $f(1)=3$, $f(2)=1$인 경우

(i)과 동일하다. 따라서 경우의 수는 64

이상으로 구하는 경우의 수는 $64 + 37 + 64 = 165$

27. 다음 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [3점]

> (가) $a \times b \times c \times d = 108$
> (나) a, b, c, d 중 서로 같은 수가 있다.

① 32 ② 36 ③ 40 ④ 44 ⑤ 48

2 | 108
2 | 54
3 | 27
3 | 9
3

$\Rightarrow$ $108 = 2^2 \times 3^3$

(나) 조건에 따라 케이스를 분류하자.

(i) 두 자연수가 2인 경우

나머지 두 자연수의 곱은 $3^3 = 27$이다.

이 중 두 자연수가 모두 10 이하가 되는 경우는 (3, 9) 뿐이다.

2, 2, 3, 9를 나열하는 방법의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$

(ii) 두 자연수가 3인 경우

나머지 두 자연수의 곱은 $2^2 \times 3 = 12$

이 중 두 자연수가 모두 10 이하가 되는 경우는 (2, 6)과 (3, 4)가 있다.

3, 3, 2, 6 을 나열하는 방법의 수 : $\frac{4!}{2!} = 12$

3, 3, 3, 4 를 나열하는 방법의 수 : $\frac{4!}{3!} = 4$

(iii) 두 자연수가 $6(=2\times3)$인 경우

나머지 두 자연수의 곱은 3이다. $1 \times 3 = 3$

6, 6, 1, 3을 나열하는 방법의 수 : 12

(iv) 두 자연수가 1인 경우

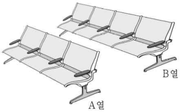
나머지 두 자연수의 곱은 108이다. 그런데 10 이하의 두 자연수의 곱으로 108을 만들 수 없다.

— 밑줄 친 부분을 모두 더하면

$12 + 12 + 4 + 12 = 40$

28. 그림과 같이 A열에 3개, B열에 4개로 구성된 총 7개의 좌석이 있다. 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명 모두가 이 7개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉았을 때, 다음 조건을 만족시키도록 앉을 확률은? (단, 한 좌석에는 한 명의 학생만 앉는다.) [4점]

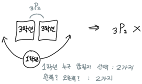
> (가) A열의 좌석에는 서로 다른 두 학년의 학생들이 앉되, 같은 학년의 학생끼리는 이웃하여 앉는다.
> (나) B열의 좌석에는 같은 학년의 학생끼리 이웃하지 않도록 앉는다.



① $\frac{2}{15}$ ② $\frac{16}{105}$ ③ $\frac{6}{35}$ ④ $\frac{4}{21}$ ⑤ $\frac{22}{105}$

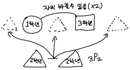
(i) 1학년 학생 1명, 3학년 학생 2명을 A열에 앉히되, 3학년 학생 2명은 이웃하여 앉히는 경우의 수

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ $_3P_2 \times 2 \times 2 = 24$

그리고 B열에서 2학년 2명이 이웃하지 않게 앉히는 경우의 수



$_3P_2 \times 2 = 12$

케이스 (i)에서 경우의 수 $24 \times 12 = 288$

(ii) 1학년 학생 2명, 3학년 학생 1명을 A열에 앉히되,

1학년 학생 2명이 이웃한 경우의 수 : $\underbrace{2!}_{\text{1학년 앉히기}} \times \underbrace{3}_{\text{3학년 누구?}} \times \underbrace{2}_{\text{3학년 앉히기}} = 12$

B열에서 2학년, 3학년이 번갈아가며 앉는 경우의 수 . $2! \times 2! \times 2 = 8$

②③②③ → $2! \times 2! = 4$가지
③②③② → $2! \times 2! = 4$가지
) 8가지

케이스 (ii)에서 경우의 수는 $12 \times 8 = 96$

(i)~(ii)에 의해 A열에 1학년과 3학년을 앉히는 방법의 수는 $288 + 96 = 384$

그런데 1학년과 2학년의 수가 2명으로 똑같기 때문에 A열에 2학년과 3학년을 앉히는 방법의 수도 이와 같다. 따라서 (가), (나)를 만족시키는 모든 경우의 수는 $2 \times 384 = 768$

따라서 구하는 확률은 $\frac{768}{7!} = \frac{2^8 \times 3}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}$

$= \frac{2^4}{7 \times 5 \times 3} = \frac{16}{105}$

단답형

29. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수를 구하시오. [4점] 75

(가) $a+b+c+d+e=11$
(나) $a+b$는 짝수이다.
(다) a, b, c, d, e 중에서 짝수의 개수는 2 이상이다.

음이 아닌 정수 a', b', c', d', e'에 대해

$a=a'+1,\quad b=b'+1,\quad c=c'+1,\quad d=d'+1,\quad e=e'+1$

라고 하자 (가)에 의해 $a'+b'+c'+d'+e'=6$ 이다.

(나) 조건에 의해 a, b는 모두 홀수이거나 모두 짝수이다.

이를 기준으로 케이스를 나누자.

(i) a, b가 홀수일 때 (a', b'가 0 또는 짝수)

(다) 조건에 의해 a, b가 모두 홀수이면 c, d, e 중 2개는 짝수이다
(c', d', e' 중 2개는 홀수)

$$\underbrace{a'+b'}+\underbrace{c'+d'+e'}=6$$

(1) 0 + 6
(2) 2 + 4
(3) 4 + 2
(4) 6 + 0

(1) a', b' 결정하는 방법의 수
⇒ $a'=b'=0$ (1가지)
c', d', e' 결정하는 방법의 수
⇒ 0, 1, 5 나열 (6가지)
0, 3, 3 나열 (3가지)
1, 1, 4 나열 (3가지)
1, 2, 3 나열 (6가지)
18가지
∴ $1\times 18=18$가지

(2) a', b' 결정하는 방법의 수
⇒ $a'=2, b'=0$ 또는 $a'=0$ 또는 $b'=2$
(2가지)
c', d', e' 결정하는 방법의 수
⇒ 0, 1, 3 나열 (6가지)
1, 1, 2 나열 (3가지)
9가지
∴ $2\times 9=18$가지

(3) a', b' 결정하는 방법의 수
⇒ $\begin{cases}a'=0\\b'=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}a'=2\\b'=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}a'=4\\b'=0\end{cases}$
(3가지)
c', d', e' 결정하는 방법의 수
⇒ 0, 1, 1 나열 (3가지)
∴ $3\times 3=9$가지

(4) $c'=d'=e'=0$이므로
$c=d=e=1$이다.
따라서 $a\sim e$ 모두 홀수가 됨
0가지

(i)에서 총 경우의 수는 $18+18+9=45$

(ii) a, b가 짝수일 때 (a', b'는 모두 홀수)

a, b가 모두 짝수이면 (다)조건은 이미 만족시켰다.
따라서 c, d, e는 아무렇게나 결정해도 된다.

$$\underbrace{a'+b'}+\underbrace{c'+d'+e'}$$

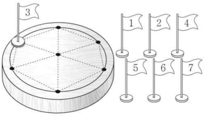
(1) 0 + 6 ⇒ 0가지 ($a'=b'=0$이므로 가정에 모순)
(2) 2 + 4 ⇒ $1\times {}_3H_4=15$가지
(3) 4 + 2 ⇒ $2\times {}_3H_2=12$가지
(4) 6 + 0 ⇒ $3\times {}_3H_0=3$가지

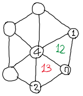
(ii)에서 총 경우의 수는 $15+12+3=30$

따라서 모든 경우의 수는 $45+30=75$

30. 그림과 같이 원판에 반지름의 길이가 1인 원이 그려져 있고, 원의 둘레를 6등분하는 6개의 점과 원의 중심이 표시되어 있다. 이 7개의 점에 1부터 7까지의 숫자가 하나씩 적힌 깃발 7개를 각각 한 개씩 놓으려고 할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점] 40

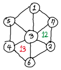
깃발이 놓여 있는 7개의 점 중 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 한 변의 길이가 1인 정삼각형일 때, 세 꼭짓점에 놓여 있는 깃발에 적힌 세 수의 합은 12 이하이다.





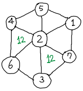
왼쪽 그림을 통해
중앙에 4 이상의 수가 오면 안된다는 것을 알 수 있다
따라서 중앙에 오는 수가 3 이하인 것으로 케이스를 나누자.

(i) 중앙에 오는 수가 3



$3+7+2=12$이므로 7의 양 옆에는 반드시 1과 2가 온다.
그런데 이렇게 되면 6 옆에는 필연적으로 4 이상의 수가 올 수밖에 없고,
4가 온다고 해도 $3+6+4=13$으로 12보다 크다
따라서 중앙에 3이 올 수 없다

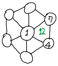
(ii) 중앙에 오는 수가 2



$2+7+3=12$이므로 7의 양 옆에는 1과 3이 온다.
나머지 수(4, 5, 6)는 5와 6이 이웃하지 않도록 배열하면 된다. ($\because 2+5+6=13$)
중앙에 2가 올 때의 경우의 수를 구하면
- 7을 아무데나 놓기 (원순열이니까 1가지)
- 1과 3을 7의 양 옆에 놓기 (서로 자리 바꿀 수 있으므로 2가지)
- 4, 5, 6을 5와 6이 이웃하지 않게 놓기 ((5, 4, 6)과 (6, 4, 5)로 2가지)

→ $1\times 2\times 2=$ 4가지

(iii) 중앙에 오는 수가 1



$1+7+4=12$이므로 7의 양 옆에 오는 수는 1, 2, 4 중에 2개이다
그리고 남은 3개의 수는 아무렇게나 배열해도 조건을 만족시킨다
중앙에 1이 오는 경우의 수를 구하면
- 7을 아무데나 놓기 (1가지)
- 1, 2, 4 중 2개를 7의 양 옆에 놓기 (${}_3P_2=6$가지)
- 남은 3개의 수 마음대로 배열 ($3!=6$가지)

→ $1\times 6\times 6=$ 36가지

이상으로 조건을 만족시키는 모든 경우의 수는 $4+36=40$

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. 함수 $f(x)=\sin 2x$에 대하여 $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은? [2점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

$f'(x) = 2\cos 2x$

$f''(x) = -4\sin 2x$

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{\pi}{2} = -4$

24. 첫째항이 1이고 공차가 $d(d>0)$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{a_n}-\frac{n+1}{a_{n+1}}\right)=\frac{2}{3}$일 때, d의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{a_k}-\frac{k+1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{a_1}-\cancel{\frac{2}{a_2}}\right)+\left(\cancel{\frac{2}{a_2}}-\cancel{\frac{3}{a_3}}\right)+\left(\cancel{\frac{3}{a_3}}-\cancel{\frac{4}{a_4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{n}{a_n}}-\frac{n+1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\underbrace{\frac{1}{a_1}}_{1}-\frac{n+1}{a_{n+1}} = 1-\frac{n+1}{a_{n+1}}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{a_n}-\frac{n+1}{a_{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{a_k}-\frac{k+1}{a_{k+1}}\right)$

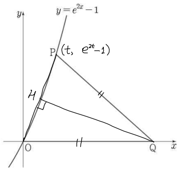
$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n+1}{a_{n+1}}\right)$

이 값이 $\frac{2}{3}$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{a_{n+1}} = \frac{1}{3}$이다.

따라서 $a_{n+1} = 3n+1$이므로 $d=3$

25. 곡선 $y=e^{2x}-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ e^{2t}-1)\ (t>0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}$를 만족시키는 x축 위의 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3



$\overline{OP}$의 중점을 H라 하자.

$\overline{PQ}=\overline{OQ}$라고 가정하면

직선 OP와 직선 QH는 서로 수직이므로 기울기 곱이 -1이다.

직선 OP의 기울기가 $\frac{e^{2t}-1}{t}$이므로 직선 QH의 기울기는 $-\frac{t}{e^{2t}-1}$

그리고 점 H의 좌표는 $\left(\frac{t}{2},\ \frac{e^{2t}-1}{2}\right)$ 이므로

직선 QH의 방정식은 $y=-\frac{t}{e^{2t}-1}\left(x-\frac{t}{2}\right)+\frac{e^{2t}-1}{2}$

따라서 이 직선의 x절편 f(t)를 구하면

$$f(t)=\frac{t}{2}+\frac{(e^{2t}-1)^2}{2t} \text{ 이다.}$$

따라서 $\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{1}{2}+\frac{(e^{2t}-1)^2}{2t^2}\right\}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+2$$

$$=\frac{5}{2}$$

26. 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+\left(\frac{4}{x}\right)^n}{x^n+\left(\frac{4}{x}\right)^{n+1}}$$

이 있다. $x>0$일 때, 방정식 $f(x)=2x-3$의 모든 실근의 합은? [3점]

① $\frac{41}{7}$ ② $\frac{43}{7}$ ③ $\frac{45}{7}$ ④ $\frac{47}{7}$ ⑤ 7

(i) $x>2$ 일 때 $\left(0<\frac{4}{x}<x\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+\left(\frac{4}{x}\right)^n}{x^n+\left(\frac{4}{x}\right)^{n+1}}=x \quad \left(\because x>\frac{4}{x}\right)$$

$f(x)=x$이므로 $x=2x-3$의 해를 찾으면 $x=3$

(ii) $x<2$ 일 때 $\left(0<x<\frac{x}{4}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+\left(\frac{4}{x}\right)^n}{x^n+\left(\frac{4}{x}\right)^{n+1}}=\frac{1}{\left(\frac{4}{x}\right)}=\frac{x}{4} \quad \left(\because \frac{4}{x}>x\right)$$

$f(x)=\frac{x}{4}$ 이므로 $\frac{x}{4}=2x-3$ 의 해를 찾으면

$x=\frac{12}{7}$

(iii) $x=2$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+\left(\frac{4}{x}\right)^n}{x^n+\left(\frac{4}{x}\right)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{2^{n+1}+2^n}}{\cancel{2^n+2^{n+1}}}=1$$

$f(2)=1$이므로 $x=2$일 때 등식 $f(x)=2x-3$ 성립

— 밑줄 친 부분 모두 합하면 $3+\frac{12}{7}+2=\frac{47}{7}$

27. 함수 $f(x)=x^3+x+1$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=g(t)+t,\quad y=g(t)-t$$

에서 $t=3$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $-\dfrac{1}{5}$　② $-\dfrac{3}{10}$　③ $-\dfrac{2}{5}$　④ $-\dfrac{1}{2}$　⑤ $-\dfrac{3}{5}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{g'(t)-1}{g'(t)+1}$$

$f(1)=3$이므로 $g'(3)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 $t=3$일 때 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{4}+1} = -\frac{3}{5}$$

28. 두 상수 $a(a>0)$, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=a\sin x-\cos x,\quad g(x)=e^{2x-b}-1$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\tan b$의 값은? [4점]

> (가) $f(k)=g(k)=0$을 만족시키는 실수 k가 열린구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$에 존재한다.
>
> (나) 열린구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 방정식 $\{f(x)g(x)\}'=2f(x)$의 모든 해의 합은 $\dfrac{\pi}{4}$이다.

① $\dfrac{5}{2}$　② 3　③ $\dfrac{7}{2}$　④ 4　⑤ $\dfrac{9}{2}$

(가)에서 $g(k)=0$을 만족시키는 k의 값은 $\dfrac{b}{2}$이다.

$f(k)=g(k)=0$이므로 $f\left(\dfrac{b}{2}\right)=0$이다. ㉠

(나)에서 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=2f(x)$

$f'(x)g(x)=f(x)\{2-g'(x)\}$

$(a\cos x+\sin x)(e^{2x-b}-1)=(a\sin x-\cos x)(2-2e^{2x-b})$

일단, $x=\dfrac{b}{2}$는 이 등식을 만족시킨다.

$\dfrac{b}{2}$ 외에 다른 해를 구하면

$(a\cos x+\sin x)(\cancel{e^{2x-b}-1})=(a\sin x-\cos x)(\cancel{2-2e^{2x-b}})$ 1 -2

$a\cos x+\sin x=-2a\sin x+2\cos x$

$(2a+1)\sin x=(2-a)\cos x$

$\tan x=\dfrac{2-a}{2a+1}$

이 방정식의 해를 α라 하자. $\underbrace{\alpha+\dfrac{b}{2}=\dfrac{\pi}{4}}_{(나)\ 조건}$이므로 $\dfrac{b}{2}=\dfrac{\pi}{4}-\alpha$이다.

따라서 $\tan\left(\dfrac{b}{2}\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\dfrac{1-\frac{2-a}{2a+1}}{1+\frac{2-a}{2a+1}}=\dfrac{3a-1}{a+3}$

그리고 ㉠에 의해 $a\sin\left(\frac{b}{2}\right)-\cos\left(\frac{b}{2}\right)=0 \rightarrow \tan\left(\frac{b}{2}\right)=\dfrac{1}{a}$

$\dfrac{3a-1}{a+3}=\dfrac{1}{a}$이므로 $3a^2-2a-3=0$이다. $\therefore a=1+\sqrt{10}$

따라서 $\tan\left(\dfrac{b}{2}\right)=\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}$이다.

$\tan b$의 값을 구하면

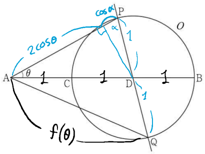
$$\tan b=\tan\left(\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\right)=\frac{2\tan\left(\frac{b}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{b}{2}\right)}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{10}-1}{3}\ (\times 9)}{1-\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^2\ (\times 9)}$$

$$=\frac{6(\sqrt{10}-1)}{9-(\sqrt{10}-1)^2}=\frac{6(\sqrt{10}-1)}{2\sqrt{10}-2}=\frac{6\cancel{(\sqrt{10}-1)}}{2\cancel{(\sqrt{10}-1)}}=3$$

단답형

29. 그림과 같이 길이가 3인 선분 AB를 삼등분하는 점 중 A와 가까운 점을 C, B와 가까운 점을 D라 하고, 선분 BC를 지름으로 하는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P를 $\angle \mathrm{BAP} = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{6}\right)$가 되도록 잡고, 두 점 P, D를 지나는 직선이 원 O와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 선분 AQ의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, $\cos\theta_0 = \frac{7}{8}$인 θ_0에 대하여 $f'(\theta_0) = k$이다. k^2의 값을 구하시오. (단, $\angle \mathrm{APD} < \frac{\pi}{2}$이고 $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{6}$이다.) [4점]

40



원 O는 점 D를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이다.

따라서 $\overline{PD} = \overline{DQ} = 1$이다.

$\angle APD = \alpha$라 하자. 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{PD}}{\sin\theta} = \frac{\overline{AD}}{\sin\alpha} \rightarrow \frac{1}{\sin\theta} = \frac{2}{\sin\alpha}$ 이다

따라서 $\sin\alpha = 2\sin\theta$

그리고 점 D에서 선분 AP에 수선의 발을 내리면 $\overline{AP} = 2\cos\theta + \cos\alpha$ 임을 알 수 있다.

일단 $g(\theta) = 2\cos\theta + \cos\alpha$ 라 하자.

삼각형 APQ에서 제2코사인법칙에 의해

$\overline{AQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2 - 2\,\overline{AP}\,\overline{PQ}\cos\alpha$

$\{f(\theta)\}^2 = \{g(\theta)\}^2 + 4 - 4g(\theta)\cos\alpha \cdots ㉠$

양변에 $\theta = \theta_0$을 대입하는데, 필요한 값들을 미리 계산하면 다음과 같다.

- $\cos\alpha = \sqrt{1-\underbrace{\cos^2\alpha}_{}} = \sqrt{1-\underbrace{4\sin^2\theta_0}_{}} = \sqrt{1-4\cdot\frac{15}{64}} = \frac{1}{4}$ ($\cos\alpha = 2\cos\theta$)
- $g(\theta_0) = 2\cos\theta_0 + \cos\alpha = 2\times\frac{7}{8} + \frac{1}{4} = 2$

따라서

$\{f(\theta_0)\}^2 = 4 + 4 - 4\times 2\times\frac{1}{4} = 6$ 이므로 $f(\theta_0) = \sqrt{6}$ 이다.

㉠의 양변을 미분하자

$2f(\theta)f'(\theta) = 2g(\theta)g'(\theta) - 4g'(\theta)\cos\alpha - 4g(\theta)\frac{d}{d\theta}(\cos\alpha)$

이번에도 $\theta = \theta_0$을 대입하기 전에 필요한 값들을 미리 계산하자.

- $\frac{d}{d\theta}(\cos\alpha) = \frac{d}{d\theta}\sqrt{1-4\sin^2\theta} = \frac{-8\sin\theta\cos\theta}{2\sqrt{1-4\sin^2\theta}}$ 이므로 $\theta = \theta_0$ 대입하면 $\frac{-8\times\frac{\sqrt{15}}{8}\times\frac{7}{8}}{2\sqrt{1-4\times\frac{15}{64}}} = -\frac{7\sqrt{15}}{4}$
- $g'(\theta_0) = -2\sin\theta_0 + \frac{d}{d\theta}(\cos\alpha) = -2\times\frac{\sqrt{15}}{8} - \frac{7\sqrt{15}}{4} = -2\sqrt{15}$

따라서 $f'(\theta_0) = \frac{2g(\theta_0)g'(\theta_0) - 4g'(\theta_0)\cos\alpha - 4g(\theta_0)\frac{d}{d\theta}(\cos\alpha)}{2f(\theta_0)}$

$= \frac{2\times2\times(-2\sqrt{15}) - 4\times(-2\sqrt{15})\times\frac{1}{4} - 4\times2\times\left(-\frac{7\sqrt{15}}{4}\right)}{2\times\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{15}}{2\sqrt{6}} = \sqrt{40}$ $\therefore k^2 = 40$

30. 수열 $\{a_n\}$은 공비가 0이 아닌 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} a_n & (|a_n| < \alpha) \\ -\frac{5}{a_n} & (|a_n| \geq \alpha) \end{cases} \quad (\alpha\text{는 양의 상수})$$

라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 자연수 p가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$

(나) $\sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{b_n}$의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 m은 p이고, $\sum_{n=1}^{p} b_n = 51$, $\sum_{n=p+1}^{\infty} b_n = \frac{1}{64}$이다.

$32\times(a_3+p)$의 값을 구하시오. [4점] 138

(가) $\frac{a}{1-r} = 4$ 이고 $0 < |r| < 1$이다.

(나)에서 $\frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 1 & (|a_n| < \alpha) \\ -\frac{a_n^2}{5} & (|a_n| \geq \alpha) \end{cases}$ 이므로

$\sum_{n=1}^{m} \frac{b_n}{a_n}$ 이 $m = p$에서 최솟값을 갖는다는 것은

$n \leq p$일 때는 $\underbrace{\frac{a_n}{b_n} = -\frac{a_n^2}{5}}_{|a_n| \geq \alpha}$ 이었다가 $n \geq p+1$이 되면 $\underbrace{\frac{a_n}{b_n}}_{|a_n| < \alpha} = 1$이 된다는 의미이다.

$n \leq p$이면 $|a_n| \geq \alpha$이므로

$\sum_{n=1}^{p} b_n = \sum_{n=1}^{p}\left(-\frac{5}{a_n}\right) = (-5)\sum_{n=1}^{p}\boxed{\frac{1}{a_n}} = (-5)\times\frac{\frac{1}{a}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^p\right\}}{1-\frac{1}{r}} = 51 \cdots ㉠$

첫째항 $\frac{1}{a}$, 공비 $\frac{1}{r}$

$n \geq p+1$이면 $|a_n| < \alpha$이므로

$\sum_{n=p+1}^{\infty} b_n = \frac{\boxed{ar^p}}{1-r} = \underbrace{\left(\frac{a}{1-r}\right)}_{4} r^p = 4r^p = \frac{1}{64}$ $\therefore r^p = \frac{1}{256}$

$n = p+1$부터 시작하므로 첫째항이 $a_{p+1} = ar^p$이다.

$r^p = \frac{1}{256}$을 ㉠에 대입하면 $(-5)\times\frac{\frac{1}{a}(\cancel{1-256})^{-5}}{1-\frac{1}{r}} = \cancel{51}^{1}$ $\therefore a\left(1-\frac{1}{r}\right) = 25$

$\frac{a}{1-r} = 4$에서 $a = 4-4r$이고, 이를 $a\left(1-\frac{1}{r}\right) = 25$에 대입한 후 이차방정식 꼴로 정리하면

$4r^2 + 17r + 4 = 0$ 이다. $\therefore r = -\frac{1}{4}$

$r = -\frac{1}{4}$을 $a\left(1-\frac{1}{r}\right) = 25$에 대입하면 $5a = 25$를 얻는다. $\therefore a = 5$

그리고 $r^p = 256$ 이므로 $\left(-\frac{1}{4}\right)^p = 256$이다. $\therefore p = 4$

따라서 $32\times(a_3+p) = 32\times(ar^2+p)$

$= 32\times\left(5\times\frac{1}{16}+4\right)$

$= 10 + 128 = 138$

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{36}=1$의 한 점근선이 $y=2x$일 때, 양수 a의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\sqrt{\frac{36}{a^2}} = 2$

$\frac{6}{a} = 2$ $\therefore a=3$

24. 방향이 같은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{a}-2\vec{b}|=6$일 때, 벡터 $\vec{b}$의 크기는? [3점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

$\vec{a}$와 $\vec{b}$의 방향이 같으므로 어떤 양수 k에 대해 $\vec{b}=k\vec{a}$

$|\vec{a}-2\vec{b}|=6$

$|\vec{a}-2k\vec{a}|=6$

$|(1-2k)\vec{a}|=6$

$|1-2k|\underbrace{|\vec{a}|}_{3}=6$

$|1-2k|=2$ $\therefore k=\frac{3}{2}$

따라서 $\vec{b}=\frac{3}{2}\vec{a}$이므로 $|\vec{b}|=\frac{3}{2}|\vec{a}|=\frac{3}{2}\times 3=\frac{9}{2}$

25. 한 초점이 F$(c, 0)(c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P(x_1, y_1)에서의 접선의 기울기와 직선 PF의 기울기의 곱이 1일 때, $x_1{}^2+y_1{}^2$의 값은? (단, $x_1 \neq c$) [3점]

① $\frac{11}{9}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{13}{9}$ ④ $\frac{14}{9}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

㉠의 방정식은 $\frac{x_1}{2}x+y_1y=1$ 이므로

기울기는 $-\frac{x_1}{2y_1}$

㉡의 기울기는 $\frac{y_1}{x_1-c}=\frac{y_1}{x_1-1}$ $(\because c=\sqrt{2-1}=1)$

두 기울기 곱이 1이므로

$\left(-\frac{x_1}{2\cancel{y_1}}\right)\times\frac{\cancel{y_1}}{x_1-1}=1$

$-\frac{x_1}{2x_1-2}=1$

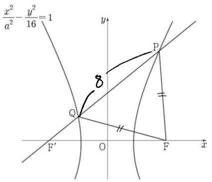
$-x_1=2x_1-2$ $\therefore x_1{}^2=\frac{4}{9}$ $(\because x_1=\frac{2}{3})$

이를 타원의 방정식에 대입하면 $\frac{2}{9}+y_1{}^2=1$

$\therefore y_1{}^2=\frac{7}{9}$

따라서 $x_1{}^2+y_1{}^2=\frac{4}{9}+\frac{7}{9}=\frac{11}{9}$

26. 그림과 같이 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하고, 이 쌍곡선과 직선 PF$'$이 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. $\overline{\text{PF}}=\overline{\text{QF}}$이고 $\overline{\text{PQ}}=8$일 때, 선분 FF$'$의 길이는? (단, $a>0$) [3점]



① 8 ② $4\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{6}$ ④ $4\sqrt{7}$ ⑤ $8\sqrt{2}$

쌍곡선의 정의에 의해

$\overline{PF'}-\overline{PF}=\overline{QF}-\overline{QF'}$

$\underbrace{\overline{PF'}}_{\overline{PQ}+\overline{QF'}}+\overline{QF'}=\underbrace{\overline{PF}+\overline{QF}}_{\overline{PF}=\overline{QF}}$

$(8+\overline{QF'})+\overline{QF'}=2\overline{QF}$

$8+2\overline{QF'}=2\overline{QF}$

$\overline{QF}-\overline{QF'}=4$ $\therefore 2a=4$

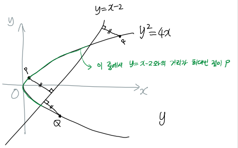
따라서 $a=2$이므로 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ 이다.

$\overline{FF'}=2c=2\sqrt{4+16}=4\sqrt{5}$

27. 점 F를 초점으로 하는 포물선 $y^2=4x$가 있다.
다음 조건을 만족시키는 포물선 $y^2=4x$ 위의 서로 다른 세 점 P, Q, R에 대하여 $\overline{PF}+\overline{QF}+\overline{RF}$의 값은? [3점]

점 P와 직선 $y=x-2$ 사이의 거리를 k라 할 때, 이 직선으로부터의 거리가 k가 되도록 하는 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 중 P가 아닌 점은 Q, R뿐이다.

① 17 ② $\frac{35}{2}$ ③ 18 ④ $\frac{37}{2}$ ⑤ 19

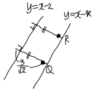


초록색으로 표시한 부분 중에서 $y=x-2$와의 거리가 최대인 점을 P라 할 때,
k는 점 P와 직선 $y=x-2$ 사이의 거리이다.
그 이유는 박스 조건을 만족시키는 서로 다른 점의 개수가 3이 되도록 하는 k의 값이 이것으로 유일하기 때문이다.
만약에 k가 이것보다 크면 조건을 만족시키는 점이 2개, k가 이것보다 작으면 4개 나온다.

초록색으로 표시한 부분 중 점 P와 $y=x-2$ 사이의 거리가 최대이므로 점 P에서 접선의 기울기는 1이다.
점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 여기에서 접선의 방정식은 $y_1y=2(x+x_1)$이므로
기울기는 $\frac{2}{y_1}$이다. 이는 1이어야 하므로 $y_1=2$이고, 이를 포물선의 방정식에 대입하면 $x_1=1$이다.
$\therefore$ 점 P의 좌표 : $(1, 2)$
$\overline{PF}=1\underbrace{-(-1)}_{준선}=2$

점 P와 직선 $y=x-2$ 사이의 거리 $(1,2)\sim x-y-2=0$은

$$\frac{|1-2-2|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$



직선 QR의 방정식을 $y=x-k$라 하자.
이 직선과 $y=x-2$ 사이의 거리는
$(0, -k)\sim x-y-2=0$
↳ $\frac{|k-2|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$
$\therefore k=5\ (\because k>2)$

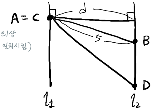
따라서 직선 QR의 방정식은 $y=x-5$이다.
이 직선과 포물선 $y^2=4x$의 두 교점이 Q, R이다.
즉, $(x-5)^2=4x \rightarrow x^2-14x+25=0$의 두 근이 Q와 R의 x좌표이다.
두 근을 α, β라 하면 $\overline{QF}+\overline{RF}=(\alpha-(-1))+(\beta-(-1))=\underbrace{\alpha+\beta}_{\text{근과 계수 관계에 의해 }14}+2=16$

따라서 $\overline{PF}+\overline{QF}+\overline{RF}=2+16=18$

28. 서로 평행한 두 직선 l_1, l_2가 있다.
직선 l_1 위의 점 A에 대하여 점 A와 직선 l_2 사이의 거리는 d이다.
직선 l_2 위의 점 B에 대하여 $|\overrightarrow{AB}|=5$이고, 직선 l_1 위의 점 C, 직선 l_2 위의 점 D에 대하여 $|4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|$의 최솟값은 12이다.
$|4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|$의 값이 최소일 때의 벡터 $\overrightarrow{CD}$의 크기를 k라 할 때, $d\times k$의 값은? (단, d는 $d\le 5$인 상수이다.) [4점]

① $16\sqrt{7}$ ② $32\sqrt{2}$ ③ 48
④ $16\sqrt{10}$ ⑤ $16\sqrt{11}$

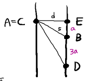
(계산 편의상 A와 C 일치시킴)



$|4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|$ (A와 C 일치한다고 가정)

$=3\times\left|\frac{4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}}{3}\right|$

$=3\times|\overrightarrow{AE}|$ (점 E는 $\overline{BD}$를 1:4로 외분하는 점)



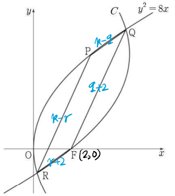
이때, $|\overrightarrow{AE}|$의 최솟값은 두 직선 사이의 거리 d이다.
따라서 $3d=12$이므로 $d=4$
오른쪽 그림에서 $a=\sqrt{5^2-4^2}=3$이므로
$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{d^2+(4a)^2}=\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}$
이 값이 $|4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|$가 최소가 되도록 하는 $|\overrightarrow{CD}|$의 값이다.
따라서 $k=4\sqrt{10}$

$\therefore d\times k=4\times 4\sqrt{10}=16\sqrt{10}$

단답형

29. 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$와 이 포물선 위의 제1사분면에 있는 점 P가 있다. 점 P를 초점으로 하고 준선이 $x=k$인 포물선 중 점 F를 지나는 포물선을 C라 하자. 포물선 $y^2=8x$와 포물선 C가 만나는 두 점을 Q, R이라 할 때, 사각형 PRFQ의 둘레의 길이는 18이다. 삼각형 OFP의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오.
(단, k는 점 P의 x좌표보다 크고, O는 원점이다.) [4점]

24



점 Q의 x좌표를 q, 점 R의 x좌표를 r이라 하자.

포물선의 정의에 의해

$\overline{FQ}=$ (점 Q와 $x=-2$ 사이의 거리) $=q+2$
($y^2=8x$의 준선)

$\overline{PQ}=$ (점 Q와 $x=k$ 사이의 거리) $=k-q$
(포물선 C의 준선)

같은 이유로 $\overline{FR}=r+2$, $\overline{PR}=k-r$

사각형 PRFQ의 둘레의 길이가 18이므로 위에서 구한 4개의 값을 모두 더하면 18이 나온다.

$(\cancel{q}+2)+(k-\cancel{q})+(\cancel{r}+2)+(k-\cancel{r})=2k+4=18$이다.

$\therefore k=7$

점 F는 포물선 C 위의 점이고 포물선 C의 준선은 $x=7$이므로

$\overline{FP}=$ (점 F와 $x=7$ 사이의 거리) $=7-2=5$

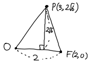
다른 관점에서 보면 점 P는 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로 점 P의 x좌표를 p라 하면

$\overline{FP}=$ (점 P와 $x=-2$ 사이의 거리) $=p+2$

$p+2=5$이므로 $p=3$이다.

점 P는 포물선 $y^2=8x$ 위에 있고, 제1사분면 위에 있으며, x좌표가 3이므로

점 P의 좌표는 $(3, 2\sqrt{6})$이다.



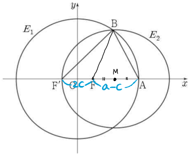
$\triangle OFP=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{6}=2\sqrt{6}$

이므로 $S=2\sqrt{6}$이다.

$\therefore S^2=24$

30. 그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원 E_1이 있다. 타원 E_1의 꼭짓점 중 x좌표가 양수인 점을 A라 하고, 두 점 A, F를 초점으로 하고 점 F'을 지나는 타원을 E_2라 하자. 두 타원 E_1, E_2의 교점 중 y좌표가 양수인 점 B에 대하여 $\overline{BF'}-\overline{BA}=\frac{1}{5}\overline{AF'}$이 성립한다. 타원 E_2의 단축의 길이가 $4\sqrt{3}$일 때, $30\times c^2$의 값을 구하시오. [4점]

36



점 A의 좌표를 $(a, 0)$이라 하고, 선분 FA의 중점을 M이라 하자.

타원 E_2의 중점은 M이고 $\overline{F'M}=2c+\frac{a-c}{2}=\frac{a+3c}{2}$이므로

타원 E_2의 장축의 길이는 $2\overline{F'M}=a+3c$이다.

타원의 정의에 의해

$\overline{BF}+\overline{BF'}=2a$ ⋯ ㉠

$\overline{BF}+\overline{BA}=a+3c$ ⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $\overline{BF'}-\overline{BA}=a-3c$

그리고 문제에서 $\overline{BF'}-\overline{BA}=\frac{1}{5}\underbrace{\overline{AF'}}_{a+c}$으로 주어졌으므로 $\overline{BF'}-\overline{BA}=\frac{1}{5}a+\frac{1}{5}c$

$a-3c=\frac{1}{5}a+\frac{1}{5}c$이므로 $\frac{4}{5}a=\frac{16}{5}c$이다. 따라서 $a=4c$

타원 E_2의 정보를 다시 정리해보면

- 장축의 길이 $(2a')=\underbrace{a}_{4c}+3c=7c$
- 단축의 길이 $(2b')=4\sqrt{3}$ (문제 조건)
- 초점 사이의 거리 $(2c')=\underbrace{a}_{4c}-c=3c$

타원의 성질에 의해 $(c')^2=(a')^2-(b')^2$이 성립하므로

$\left(\frac{3}{2}c\right)^2=\left(\frac{7}{2}c\right)^2-(2\sqrt{3})^2$이다. 여기에서 c^2을 구하면 $c^2=\frac{6}{5}$이므로

$30\times c^2=30\times\frac{6}{5}=36$이다.

※ **확인 사항**
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.