8. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\cos bx$의 주기가 6π이고 닫힌구간 $[\pi, 4\pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 1일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{11}{6}$ ③ 2 ④ $\frac{13}{6}$ ⑤ $\frac{7}{3}$

9. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=1-4\times S_n$$

이고 $a_4=4$일 때, $a_1\times a_6$의 값은? [4점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

$S_{n+1}-S_n=1-4S_n$, $S_{n+1}=-3S_n+1$

$S_4=-3S_3+1 \rightarrow a_4+S_3=-3S_3+1$

$S_3=-3S_2+1$

$S_2=-3S_1+1$

$-4S_3+1=4$, $S_3=-\frac{3}{4}$, $S_4=\frac{13}{4}$

$S_2=\frac{7}{12}$

$S_1=\frac{5}{36}=a_1 \longrightarrow a_1=\frac{5}{36}$ …①

$S_5=-3S_4+1=-\frac{35}{4}$

$S_6=-3S_5+1=\frac{109}{4}$, $a_6=\frac{144}{4}=36$

∴ $\frac{5}{36}\times 36=5$

10. 실수 m에 대하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도를 각각

$$v_1(t)=3t^2+1,\quad v_2(t)=mt-4$$

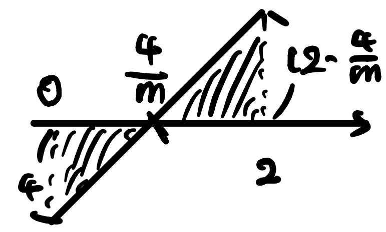
라 하자. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 두 점 P, Q가 움직인 거리가 같도록 하는 모든 m의 값의 합은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$\int_0^2 |3t^2+1|dt=[t^3+t]_0^2=10$

$y=mt-4$?

Case 1) $0<\frac{4}{m}<2 \rightarrow m>2$



$\frac{8}{m}+\frac{m}{2}\cdot\left(2-\frac{4}{m}\right)^2=10$

↓

$8+\frac{1}{2}(2m-4)^2=10m$

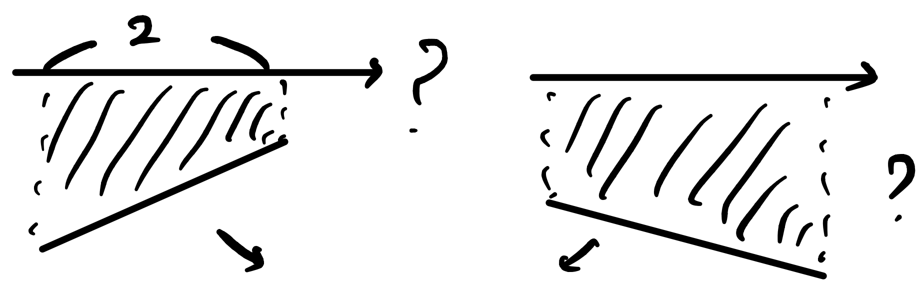
↓

$2m^2-8m+16=10m$

↓

$m^2-9m+8=0$, ∴ $m=\cancel{1}$ or 8

Case 2) 구간 [0,2]에 x축과의 교점 X



어쨌든 사다리꼴

$\frac{1}{2}\times 2\times(4+6)=10$

$2m-4=-6$, $m=-1$

11. 공차가 정수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 자연수 $m(m \geq 3)$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert a_1 - b_1 \rvert = 5$ (나) $a_m = b_m$, $a_{m+1} < b_{m+1}$

$\sum_{k=1}^{m} a_k = 9$일 때, $\sum_{k=1}^{m} b_k$의 값은? [4점]

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

(나): $d_a < d_b \to a_{m-1} > b_{m-1}$

∴ (가): $a_1 - b_1 = 5$

$c_n = a_n - b_n$이라 하면

$c_n = \frac{-5}{m-1}(n-1) + 5$

그런데 $\frac{-5}{m-1} = d_c$이고

$d_a - d_b = d_c$이므로

d_c도 정수

∴ $m-1 = 5$ or $\cancel{1}$, $m = 6$ (∵ $m \geq 3$)

$c_n = -n + 6$

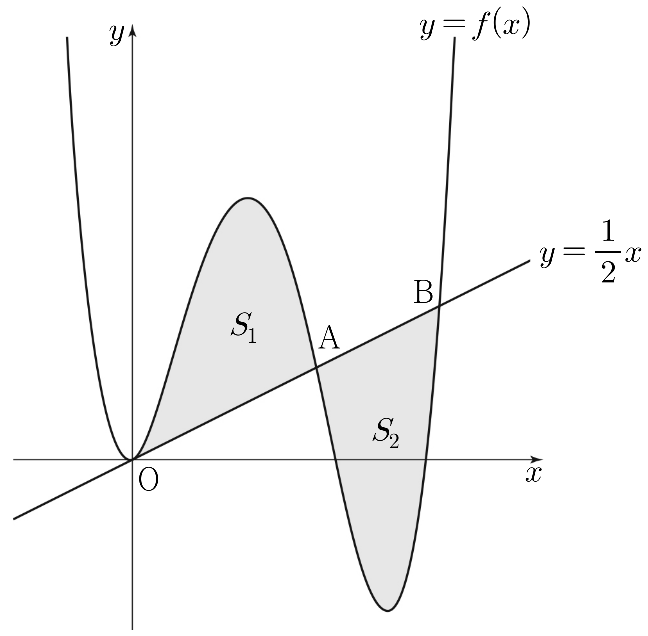
$\sum_{k=1}^{6} c_n = 3 \cdot 5 = 15$

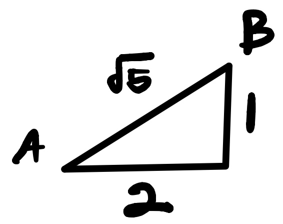
$9 - 15 = -6$

12. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = \frac{1}{2}x$가 원점 O에서 접하고 x좌표가 양수인 두 점 A, B($\overline{\mathrm{OA}} < \overline{\mathrm{OB}}$)에서 만난다.
곡선 $y = f(x)$와 선분 OA로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1,
곡선 $y = f(x)$와 선분 AB로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2라 하자.
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{5}$이고 $S_1 = S_2$일 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$





$x_A = \alpha$라 하면 $x_B = \alpha + 2$

$g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$라 하면

$g(x) = x^2(x-\alpha)(x-\alpha-2)$

$\int_0^{\alpha+2} g(x)\,dx = 0$

∴ $\int_0^{\alpha+2} \{x^4 - (2\alpha+2)x^3 + (\alpha^2+2\alpha)x^2\}\,dx$

$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{\alpha+1}{2}x^4 + \frac{\alpha^2+2\alpha}{3}x^3\right]_0^{\alpha+2}$

$= (\alpha+2)^4\left(\frac{\alpha+2}{5} - \frac{\alpha+1}{2} + \frac{\alpha}{3}\right)$

$= \cdots \times \frac{\alpha-3}{30} = 0$, $\alpha = 3$

∴ $f(1) - \frac{1}{2} = 1 \cdot (-2) \cdot (-4) = 8$, $\frac{1}{2} + 8 = \frac{17}{2}$

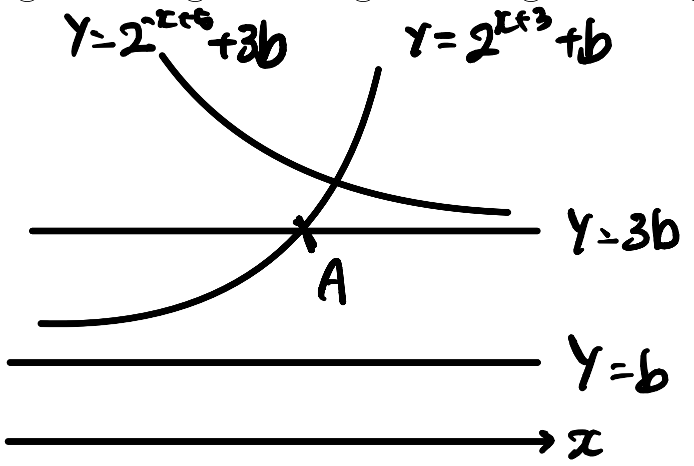
13. 두 상수 a, $b(b>0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}2^{x+3}+b & (x\le a)\\ 2^{-x+5}+3b & (x>a)\end{cases}$$

라 하자. 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값이 $4b+8$일 때, $a+b$의 값은? (단, $k>b$) [4점]

> $b<t<k$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이다.

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13



Point: $3b\le t<4b+8$ 일 때로

$f(x)=t$인 x 1개

$f(x)$가 점 A 이후에로 $y=2^{x+3}+b$를 유하면?

→ 무조건 교점 2개!

그렇다고 이전에 stop할 순도 X

∴ A의 x좌표가 곧 a

1, $2^{a+3}+b=3b \rightarrow 2^{a+2}=b$

2, $2^{-a+5}+3b=4b+8 \rightarrow 2^{-a+5}=b+8$

∴ $2^{a+2}+8=2^{-a+5}$, $2^a=t\,(t>0)$ 라 하면

$4t+8=\frac{32}{t}$, $t^2+2t-8=0$

$t=\cancel{-4}$ or 2, $a=1$, $b=8$

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $|f(k)|+|g(k)|=0$을 만족시키는 실수 k의 개수는 2이다.

$4f(1)+2g(1)=-1$일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

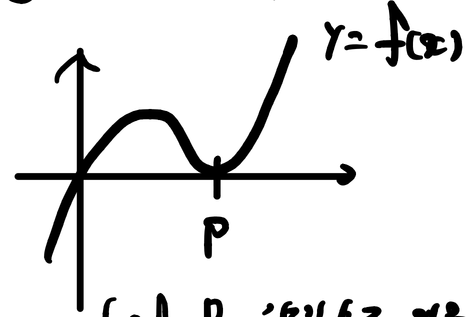
① 46 ② 49 ③ 52 ④ 55 ⑤ 58

$f(k)=0$, $g(k)=0$인 k 2개

$x=k$에서 함숫값 0 + 접선 y절편도 0?

→ 1, x축에서 접

2, 원점 지날 때



∴ $f(x)=x(x-p)^2$

(cf, p 음수일 수도 있음)

접·방 : $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 에서

$g(t)=-tf'(t)+f(t)$

$=-2t(t-p)$

$f(1)=(1-p)^2$, $g(1)=-2(1-p)$

$4(1-p)\cdot\{(1-p)-1\}$

$=4(p-1)\cdot p=4p^2-4p=-1$

∴ $p=\frac{1}{2}$

$f(4)=4\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^2=49$

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{3} & (a_n\text{이 3의 배수인 경우})\\[2mm] \dfrac{{a_n}^2+5}{3} & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우})\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_4+a_5=5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 63 ② 66 ③ 69 ④ 72 ⑤ 75

a_n 자리에 1, 2 넣으면 $a_{n+1}=2, 3$

↳ a_n은 항상 자연수일 수 있는가?

1. $a_n=3k-2$ 꼴일 때 $\frac{9k^2-12k+9}{3}=3k^2-4k+3$

2. $a_n=3k-1$ 꼴일 때 $\frac{9k^2-6k+6}{3}=3k^2-2k+2$

↳ 무조건 자연수!

가능한 (a_4, a_5) 순서쌍 :

~~(1,4)~~, (2,3), ~~(3,2)~~, ~~(4,1)~~

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
3	2	6	18	$\frac{54}{7}$
		1	3	$\frac{9}{2}$

↳ $a_n=\begin{cases}3a_{n+1}\\ \sqrt{3a_{n+1}-6}\end{cases}$ (a_n이 3의 배수가 아닌 자연수)

$54+7+9+2=72$

단답형

16. 방정식

$$\log_2(x-3)=1-\log_2(x-4)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)=(x-1)(x^3+x^2+5)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = 2x^3 + \int_0^{-x} f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = 3x^2 + \cdots$

항등식 → 양변 미분

$f(x) = 6x^2 - f(-x),$

$f(x) + f(-x) = 6x^2$ → 상수항 × !

$\therefore f(x) = 3x^2 + 2x \ (\because f(1)=5)$

$f(2) = 16$

19. 집합 $U = \{x \mid -5 \le x \le 5,\ x$는 정수$\}$의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여 두 집합 A, B를

$A = \{a \mid a$는 x의 실수인 네제곱근, $x \in X\}$,
$B = \{b \mid b$는 x의 실수인 세제곱근, $x \in X\}$

라 하자. $n(A)=9$, $n(B)=7$이 되도록 하는 집합 X의 모든 원소의 합의 최댓값을 구하시오. [3점]

$A = \{a \mid a^4 = x,\ x \in X\}$
$B = \{b \mid b^3 = x,\ x \in X\}$

x가 어느 값이든 그에 대응하는 b는 1개씩

→ $n(X) = n(B)$

$\underbrace{5\ 4\ 3\ 2\ 1}_{2\text{개의 } a}\ \underbrace{0}_{1\text{개}}\ \underbrace{-1\ -2\ -3\ -4\ -5}_{0\text{개}}$

$\therefore 2 \times 4 + 1 \times 1 + 0 \times 2 = 9$

$5, 4, 3, 2, 0, -1, -2$

합의 최대 : 11

20. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)g(x) - x^3 + 2x^2$$

을 만족시킨다. 상수 $k\,(k \ne 0)$에 대하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)} \times \lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)} = k$$

일 때, k의 값을 구하시오. [4점]

$\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x-1)}{f(x)-g(x)}$ → 부정형인가?

$x=2$ 대입: $2f(2) = 2g(2) \to f(2) - g(2) = 0$

$\therefore g(1) = 0$, 대입하면 $f(1) = 1$

또 $x=0$ 대입 $g(0) = 0$

정리: $f(1)=1$, $g(1)=0$, $g(0)=0$

한편, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$ 가 존재

→ $f(x) = ax^n + \cdots$ 이면 $g(x) = px^{2n} + \cdots$

$(a \ne 0,\ p \ne 0,\ n \ge 1)$ $(\because k \ne 0)$

$ax^{n+1} + \cdots = -\dfrac{p}{2}x^{2n+1} + \cdots - x^3 + 2x^2$

Case 1) $n+1 = 2n+1$ → 불가능

Case 2) $p = -2$ 이고 $n = 1$

$f(x) = ax - a + 1$, $g(x) = -2x(x-1) = -2x^2 + 2x$

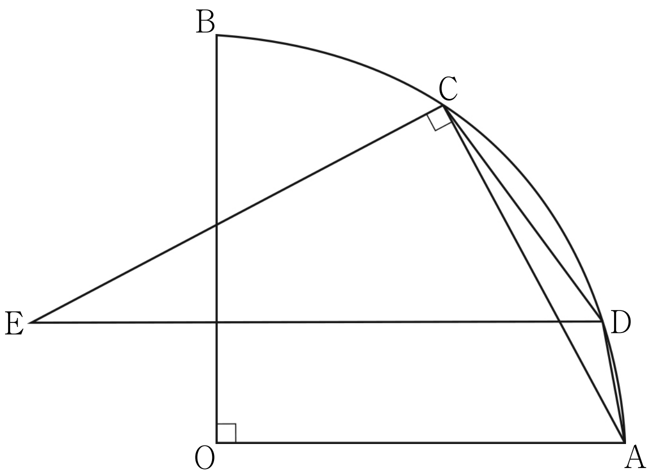
$ax^2 + (-a+1)x = -5x^2 + 6x$

$a = -5$, $f(x) = -5x + 6$

결론: $\lim_{x\to 2} \dfrac{-2(x-1)(x-2)}{\cancel{2x^2-7x+6}\ (2x-3)(x-2)} \times \dfrac{25}{-2}$

$= 25$

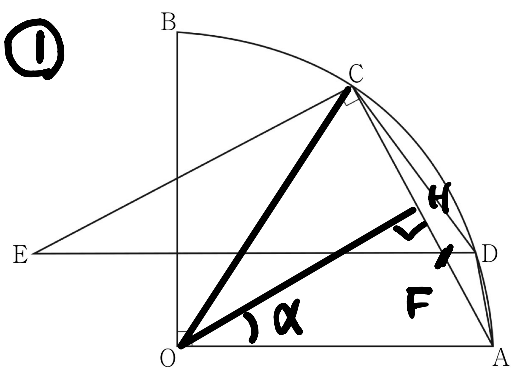
21. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위에 점 C를 $\overline{AC}=4\sqrt{2}$가 되도록 잡는다. 호 AC 위의 한 점 D에 대하여 점 D를 지나고 선분 OA에 평행한 직선과 점 C를 지나고 선분 AC에 수직인 직선이 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 CED의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$일 때, $\overline{AD}=p+q\sqrt{7}$을 만족시키는 두 유리수 p, q에 대하여 $9\times|p\times q|$의 값을 구하시오. (단, 점 D는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.) [4점]



원위의 점 C → ① 중심과 잇기

② 지름 양끝점 잇기

①



이등변△ → 수선 내리기

△CEF ∽ △HOA 이므로

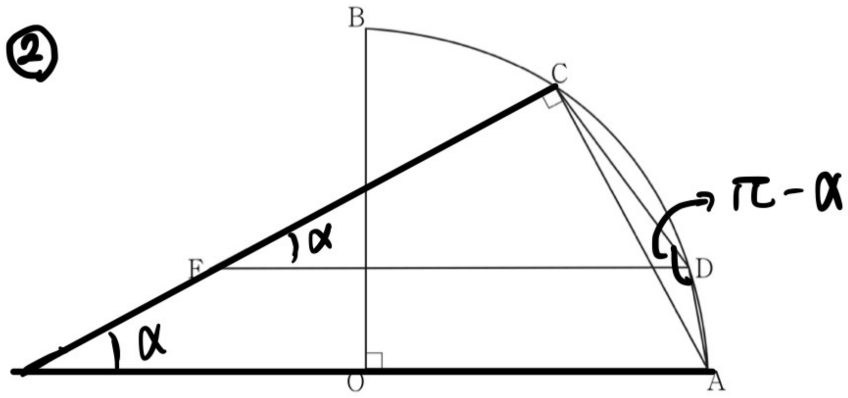
∠HOA를 통해 ∠CED의 정보를 구할 수 있음

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\overline{CD}}{\sin\alpha}=6\sqrt{2}$에서 $\overline{CD}=4$

(외접원의 반지름이는 표현에서!)

목표가 AD인데 $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ 값 → 각 필요!

②



$\angle CDA=\pi-\alpha$

∴ $\overline{AD}=x$라 하면

$32=x^2+16+8x\cos\alpha$

$=x^2+\frac{8\sqrt{7}}{3}x+16$

$3x^2+8\sqrt{7}x-48=0 \rightarrow x=\frac{-4\sqrt{7}\pm\sqrt{256}}{3}$

$=\frac{-4\sqrt{7}+16}{3}$

$p=-\frac{4}{3}$, $q=\frac{16}{3}$, $9\times\frac{64}{9}=64$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

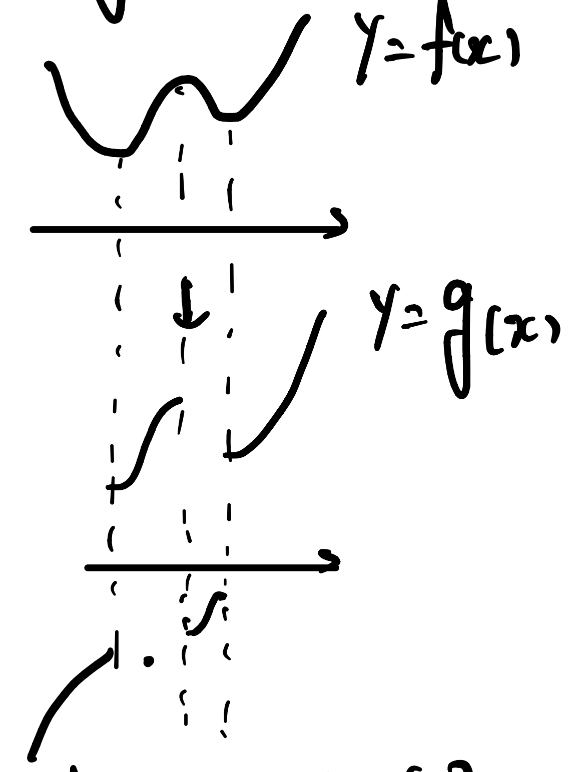
(가): 일단 $f(x) \geq 0$

1, $g(x) = f(x)$ or $g(x) = -f(x)$

(취사선택)

2, $g'(x+) = |f'(x)|$

ex)



(나): if, $h(x)$가 연속함수?

$4a+2 = -2a-3$, $a = -\frac{5}{6}$

그런데 $4x+2=0$인 $x = -\frac{1}{2}$

$-2x-3=0$인 $x = -\frac{3}{2}$

$a = -\frac{5}{6}$면 $h(x)=0$일 수 없다!

→ $g(x)h(x)$ 무조건 불연 됨

∴ $h(x)$는 $x=a$ 불연

만약 $h(-\frac{1}{2})=0$이면 $a > -\frac{1}{2}$

$h(-\frac{3}{2})=0$이면 $a \leq -\frac{3}{2}$

∴ $h(x)=0$인 x는 둘中 하나뿐!

22. 최고차항의 계수가 4이고 서로 다른 세 극값을 갖는 사차함수 $f(x)$와 두 함수 $g(x)$,

$$h(x)=\begin{cases} 4x+2 & (x<a) \\ -2x-3 & (x \geq a) \end{cases}$$

가 있다. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$|g(x)| = f(x), \quad \lim_{t \to 0+} \frac{g(x+t)-g(x)}{t} = |f'(x)|$$

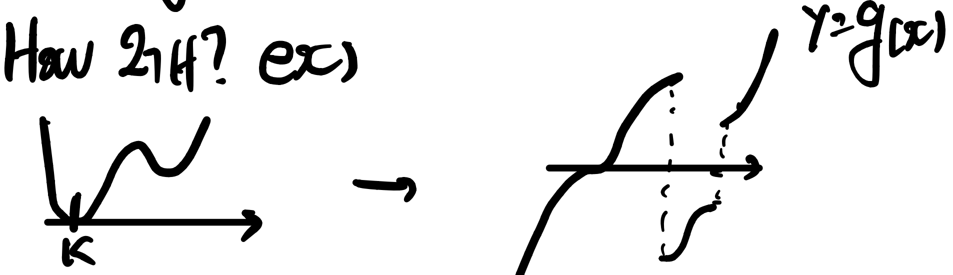
이다.

(나) 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(0) = \frac{40}{3}$일 때, $g(1) \times h(3)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

한편, $g(x)$의 불연속점은 2~3개

How 2개? ex)



하나의 x에서는 (불)×(불)=(연)

다른 x에서는 $h(x)=0$이면 됨!

(불)×(불) 상황인 x서 $g(x)$의 좌, 우는 부호만 반대

$h(x)$의 좌우로 ~~부호만~~ 반대여야 연속

∴ $4a+2 = 2a+3$, $a = \frac{1}{2}$

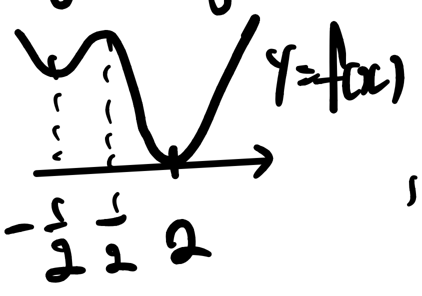
$a = \frac{1}{2}$이므로 1) $g(x)$는 $x = \frac{1}{2}$ 불연

2) $h(-\frac{1}{2}) = 0$, $x = -\frac{1}{2}$ 불연

∴ $f'(x) = (x-k)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2}) \times 16$

$f(x) = 4x^4 - \frac{16}{3}kx^3 - 2x^2 + 4kx + C$

$g(0) = \frac{40}{3} \rightarrow f(0) = \frac{40}{3}$, $f(k)=0$에서 $K=2$



, $g(1) = -f(1) = -\frac{38}{3}$

$h(3) = -9$

∴ $(-\frac{38}{3}) \times (-9) = 114$