1번 문항(2015 고려대학교 논술기출)

$s<t$ 인 두 실수에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(s,\ s^2)$ 과 $\mathrm{B}(t,\ t^2)$ 은 곡선 $y=x^2$ 위를 움직인다.
두 점 A,B 가 $\overline{\mathrm{AB}}=1$ 을 만족하며 움직일 때, 선분 AB 와 곡선 $y=x^2$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $F(s)$ 라 하자. 극한값 $\lim_{s\to\infty} s^3F(s)$ 를 구하시오.

2번 문항(2020 연세대학교 모의논술)

가로의 길이가 1이고 세로의 길이가 a인 직사각형 여러 개를 반지름의 길이가 1인 원 O 위에 올려놓아 원 O의 원주 전체를 덮으려고 한다. 필요한 직사각형 개수의 최솟값을 $N(a)$라고 할 때, 극한값 $\lim_{a \to 0+} N(a)\,a^k = 0$이 성립하기 위한 k값의 범위를 구하시오.

3번 문항(2018 이화여자대학교 모의논술)

(1). 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (단, $x > 0$)

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

(2). 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (단, $x > 0$)

$$e^{\frac{x}{x+1}} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e$$

(3). 다음 부등식이 성립함을 보이시오. (단, $x > 0$)

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

(4). (3)의 결과를 이용하여 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$임을 보이시오. (단, $x > 0$)

4번 문항(2020 인하대학교 모의논술)

자연수 n에 대하여 방정식 $\sin x = \frac{1}{x}$는 구간 $\left(2n\pi,\ 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$에서 유일한 해 $x = a_n$을 갖는다.

(1) 모든 자연수 n에 대하여

$$2n\pi < a_{n+1} - 2\pi < a_n$$

가 성립함을 보이시오.

(2) 각 자연수 n에 대하여

$$a_n - a_{n+1} + 2\pi = \frac{1}{\cos b_n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

을 만족하는 b_n이 $a_{n+1} - 2\pi$와 a_n 사이에 존재함을 보이시오.

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n \sin(a_{n+1} - a_n) = 0$임을 보이시오.

5번 문항(2023 부산대학교 논술기출)

(가) $x=a$에서 $x=b$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이 l은 다음과 같다.

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

(나) 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$와 a에 가까운 모든 실수 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$f(x)\le h(x)\le g(x) \text{ 이고 } \lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=L \text{ 이면 } \lim_{x\to a}h(x)=L$$

(다) 닫힌구간 $[a,b]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x)\,dx < (b-a)f(b)$$

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $p(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(ⅰ) $t<p(t)$

(ⅱ) $x=t$에서 $x=p(t)$까지의 곡선 $y=x^2$의 길이는 1이다.

다음 물음에 답하시오.

[1] $\lim\limits_{t\to\infty}\{p(t)-t\}=0$ 임을 보이시오.

[2] $\lim\limits_{t\to\infty}t\{p(t)-t\}$ 의 값을 구하시오.

[3] $\lim\limits_{t\to\infty}t^2\{1-(p'(t))^2\}$ 의 값을 구하시오.

6번 문항(2022 서울과학기술대학교 논술기출)

(가) 곡선 $y=e^x$ (e는 자연상수) 위의 점 $(0,1)$에서의 접선의 방정식을 $y=f(x)$라고 하자.

(나) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\},\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$이고, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$이다.

[1] 제시문 (가)의 $f(x)$에 대하여 $e^x-f(x)$의 최솟값을 구하시오.

[2] $0\le x\le 1$에서 $2x^2+x+1-e^x$의 최솟값을 구하시오.

[3] 문항 [2]를 이용하여 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\sqrt[n]{e}\le 1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}$$

[4] 문항 [1], [3]과 제시문 (나)를 이용하여 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{e}-1)$$

7번 문항(2022 경희대학교 논술기출)

점 $\mathrm{A}\left(a, \dfrac{1}{a}\right)$ $(a>0)$을 지나고 기울기가 음수인 직선이 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 접하지 않는다. 이 직선이 y축과 만나는 점을 P, x축과 만나는 점을 Q, 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하고, 원점을 O라 하자.

(1) $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}$일 때, 삼각형 OPQ의 넓이 $S(a)$를 구하고, 그 근거를 논술하시오.

(2) $\overline{\mathrm{AB}}=1$일 때, 삼각형 OPQ의 넓이 $S(a)$에 대하여 $\lim\limits_{a \to \infty} S(a)$와 $\lim\limits_{a \to 0} S(a)$의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오.

8번 문항(2023 서강대학교 모의논술)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$일 때 극한값

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n} + a_n}$$ 을

구하시오.

9번 문항(2022 서강대학교 논술기출)

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 모든 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족하며, $\int_{1}^{3} f(x)dx = 1$일 때, $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} f(t)dt$의 값을 구하시오.

10번 문항(2022 서강대학교 논술기출)

함수 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 에 대하여, 문항 [1]과 [2]에 답하시오.

($0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 일 때 $\sin x<x<\tan x$ 이 성립한다.)

[1] 함수 $f(x)$가 열린구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 감소함을 보이시오.

[2] 임의의 자연수 k에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\int_{x}^{3x}\frac{(f(t))^k}{t}dt$ 의 값을 구하시오.

11번 문항(2022 한양대학교 모의논술)

극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ 을 구하시오.

12번 문항(2022 한양대학교 모의논술)

연속함수 $f(x)$는 다음 식을 만족시킨다.

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)dx = n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)dx$$

극한값 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 - n\int_0^1 x^5\,dx\right]$을 구하시오.

13번 문항(2022 한양대학교 의대 논술기출)

자연수 n에 대하여

$$c_n = (n-2022)\int_0^1 x^n\left\{e^x + x\ln(x+1) + x^2\cos^{2022}\pi x\right\}dx$$

일 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty} c_n$을 구하시오.

14번 문항(2022 가톨릭대학교 모의논술)

(ㄱ) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x) \geq 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

(ㄴ) 양의 실수 x에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x$$

(ㄷ) 명제 A는 다음과 같다.

모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$이다.

(ㄹ) 자연수 n에 대하여 다음 집합 B의 원소 중 가장 큰 수를 a_n이라고 하자.

$$B=\left\{\alpha \,\middle|\, \alpha\text{는 방정식 } x^3-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^2+x-e=0\text{의 실근}\right\} \cup \{\sqrt{e}\}$$

[1] 제시문 (ㄱ), (ㄴ)을 이용하여 제시문 (ㄷ)의 명제 A의 참, 거짓을 판별하고 그 근거를 논술하시오.

[2] 제시문 (ㄹ)의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 극한값 $\lim_{n \to \infty} a_n$을 구하고 그 근거를 논술하시오.

15번 문항(2021 경북대학교 모의논술)

(가) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

(1) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

(2) $\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(4) 실수 c가 닫힌구간 $[a, b]$에 포함될 때,

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

이다.

(나) 정적분과 급수의 합 사이의 관계

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx \text{ (단, } \Delta x = \frac{b-a}{n}, \ x_k = a + k\Delta x\text{)}$$

(다) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ 꼴의 부정적분

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

(라) 수열의 극한의 대소 관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$일 때,

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$이다.

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha = \beta$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

두 함수 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x) = \frac{\cos x}{x}$에 대하여 $f(x) = g(x)$를 만족시키는 모든 양의 실수 x의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하여 $a_1, a_2, a_3, \cdots$이라 하자. 다음 물음에 답하시오.

[1] $a_{10}-a_2$의 값을 구하시오.

[2] $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$의 값을 구하시오.

[3] 자연수 n에 대하여

$$A_n = \left| \int_{a_n}^{a_{n+1}} \{f(x)-g(x)\}dx \right|$$

라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}A_k$의 값을 구하시오.

16번 문항(2021 경북대학교 모의논술)

(가) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면

$$f'(a)=0$$

이다.

(나)

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

(다) 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

이다.

(라) 수열의 극한값의 대소관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\{c_n\}$은 수렴하고

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$$

이다.

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+n$은 다음 조건을 만족시킨다. (단, n은 정수)

함수 $f(x)$는 $x=m$에서 극댓값 m^3+n을 갖고, $x=-m$에서 극솟값을 갖는다. (단, m은 자연수)

다음 물음에 답하시오.

[1] $\dfrac{4ac}{m^2}$ 의 값을 구하시오.

[2] 두 곡선 $y=f(x)$, $y=mx^2+n$과 두 직선 $x=0$, $x=m$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 A_m이
라 하고, 이 도형의 내부 또는 경계에 속하는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 B_m
이라 하자.

(1) 자연수 k에 대하여, $m=2k-1$이면

$$B_m = \frac{k(pk^3+qk^2+rk+s)}{6}$$

이다. $\dfrac{(p-q)r}{s}$의 값을 구하시오. (단, p, q, r, s는 상수)

(2) 수열 $\left\{\dfrac{B_m}{A_m}\right\}$이 수렴함을 증명하시오.

17번 문항(2021 경북대학교 모의논술)

(가) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$, $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

(나) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

이다.

(다) 함수 $f(x)$가 어떤 열린 구간에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대하여

(a) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다.

(b) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다.

(라) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여

$$f(c)=k$$

인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

(마) 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha \ (\alpha\text{는 실수})$$

일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이면

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$$

이다.

곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=tx$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 t의 값의 범위는 $0<t<\beta$이다. 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=tx$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 만나는 두 점을 각각 P_1, P_2라 하고 두 점 P_1, P_2의 x좌표를 각각 a_1, a_2라 하자. (단, $a_1<a_2$) 이때 곡선 $y=\ln x$ 위의 두 점 P_1, P_2에서의 두 접선이 만나는 점을 R이라 하자. $0<t<\beta$일 때, 다음 물음에 답하시오.

[1] β의 값을 구하시오.

[2] 선분 $\mathrm{RP_1}$, 선분 $\mathrm{RP_2}$ 및 곡선 $y=\ln x$로 둘러사인 부분의 넓이를 S_t라 하고 $\angle \mathrm{P_1RP_2}$를 θ_t라 하자. 다음 물음에 답하시오.

(1) $|\tan\theta_t|$를 a_1과 a_2로 나타내면 $\dfrac{a_2-a_1}{k+la_1a_2}$이다. $k+l$의 값을 구하시오. (단, k, l은 실수)

(2) S_t를 a_1, a_2, t로 나타내면 $\dfrac{1}{2}(a_2-a_1)(m+nt^2a_1a_2)$이다.
$m\times n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 실수)

[3]

(1) $t^{-1}<a_2<t^{-\frac{5}{3}}$임을 증명하시오. (단, $e=2.718\cdots$)

(2) 점 R의 x좌표 x_t와 [2-2]에서 구한 S_t, θ_t에 대하여

$$\lim_{t\to 0+}\frac{x_t|\tan\theta_t|}{tS_t}$$

의 값을 구하시오.

18번 문항(2022 광운대학교 논술기출)

양수 k에 대하여 함수 $f(x)=kx\ln|x|$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 실수 t에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 다음 물음에 답하시오.

(1) 구간 $0<x<1$에서 두 함수 $\ln|x|$와 $-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$의 대소 관계를 판정하시오.

(2) (1)을 이용하여 두 극한값 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$와 $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$를 구하시오.

19번 문항(2022 광운대학교 논술기출)

함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, $k \geq \dfrac{1}{2}$)

$$f(x) = \frac{e^x}{kx^2 + x + 1}, \quad g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

(1) 함수 $f(x)$의 극값을 구하시오.

(2) $x > 0$에서 함수 $y = \dfrac{e^x}{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}$을 이용하여 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$임을 보이시오.

(3) $x = 0$에서 함수 $g(x)$의 미분가능성을 조사하시오.

20번 문항(2022 광운대학교 모의논술)

함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $a \le x \le b$일 때 $a \le g(x) \le b$가 성립한다. 함수 $g(x)$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 방정식 $g(x) = x$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오

(2) 함수 $g(x)$는 열린구간 (a, b)에서 미분가능하며 이 구간의 모든 x에서 $|g'(x)| < 1$이 성립할 때, 열린구간 (a, b)에서 방정식 $g(x) = x$의 실근이 존재하면 오직 하나임을 보이시오.

21번 문항(2021 광운대학교 논술기출)

실수 전체의 집합을 정의역하으로 하는 미분가능한 함수 f가 모든 실수 x, y에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, 물음에 답하시오

$$f(x+y) \geq f(x)+f(y)-(xy-1)^2,\ f(0) \geq 1,\ f'(0)=1$$

(1) $f(0)$을 구하시오

(2) 함수 $f(x)$와 도함수 $f'(x)$를 구하시오.

22번 문항(2018 광운대학교 논술기출)

함수 $f(x)$에 대한 다음 두 조건 p, q에 대하여 p는 q이기 위한 필요충분조건이다. p가 q이기 위한 충분조건임을 다음 순서에 따라 증명할 때, 물음에 답하시오.

p : 모든 실수 x, y에 대하여, $f(x+y)=f(x)+f(y)$이고 $\lvert f(x)\rvert \le x^2$ 이다. q : 모든 실수 x에 대하여, $f(x)=0$ 이다.

(1) $f(0)=0$ 임을 보이시오.

(2) $f(x)$는 $x=0$에서 미분 가능함을 보이시오.

(3) $f(x)$는 모든 실수 x에서 미분 가능함을 보이시오.

(4) $f(x)=0$ 임을 보이시오.

23번 문항(2021 서강대 논술기출)

[1] 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 열린구간 (a, b)의 모든 x에 대하여 $f(x) < g(x)$이면 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$$

[2] 함수 $f(x)$가 구간 $[1, \infty)$에서 연속이고 증가할 때, 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k) < \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

[3] p가 자연수일 때, 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p$$

[4] 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

24번 문항(2021 한양대 논술기출)

<가> $a>0,\ 0\le b\le 1$인 상수 $a,\ b$에 대하여 함수

$$f(x)=a\sqrt{1+e^x}+\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-b}{\sqrt{1+e^x}+b}\right)$$

의 도함수가 $f'(x)=\sqrt{1+e^x}$ 이다.

<나> 곡선 $y=h(x)\ \ (c\le x\le d)$의 길이는 $\displaystyle\int_c^d \sqrt{1+\{h'(x)\}^2}\,dx$ 이다.

<다> 수열 $\{\alpha_n\},\ \{\beta_n\},\ \{\gamma_n\}$에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\beta_n=L$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $\alpha_n\le\gamma_n\le\beta_n$이면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\gamma_n=L$이다.

<라> 연속함수 $p(x),\ q(x),\ r(x)$에 대하여 닫힌구간 $[c,\ d]$에서 $p(x)\le q(x)\le r(x)$이면

$$\int_c^d p(x)dx\le\int_c^d q(x)dx\le\int_c^d r(x)dx$$

이다.

[1] $a+b$의 값을 구하시오.

[2] 실수 k에 대하여 곡선 $y=e^x\ \left(k\le x\le k+\dfrac{1}{e^k}\right)$의 길이를 $g(k)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{k\to\infty}g(k)$의 값을 구하시오.

[3] 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{F(2x)}{e^x}$의 값을 구하시오.

(단, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$)

25번 문항(2020 시립대 논술기출)

자연수 n에 대하여 닫힌 구간 $[0, \pi]$에서 곡선 $y=e^{-x}\sin nx$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값을 구하여라.

26번 문항(2019 성균관대 논술기출)

<제시문1>

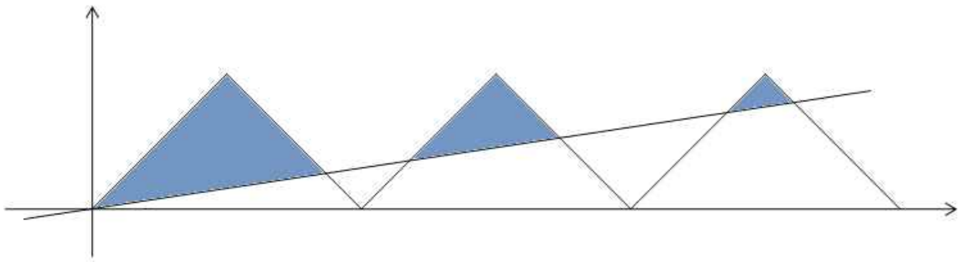
자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

<제시문2>

함수 $y=f(x)$는 $0 \le x \le 2$일 때, $f(x)=1-|1-x|$를 만족하고, 음이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족한다. 아래 그림의 색칠한 부분과 같이 부등식 $\frac{x}{m} \le y \le f(x)$를 만족하는 제 1사분면에 있는 점들의 집합을 P라 하고, 영역 P의 넓이를 $g(m)$이라 하자. (단, $m>1$인 실수)



<제시문3>

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ 일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

[1] <제시문2>에서 $m=4$일 때, $g(4)$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[2] 양의 실수 m이 자연수 n에 대하여 $2n-1 \le m \le 2n+1$을 만족할 때, <제시문2>에서 $3(n-g(m)) = \frac{f(n)}{m+1} - \frac{f(n-1)}{m-1}$로 쓰여진다. 이 때, 다항식 $f(n)$을 n에 대한 식으로 표현하고 그 이유를 논하시오.

[3] <제시문2>에서 극한 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(m)}{m}$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

27번 문항(2019 인하대 논술기출)

(가) $0 < x < 1$일 때 $0 < \sin x < x$이므로

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} > \sqrt{1-x^2}$$

이다.

(나) (사잇값 정리) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고

$$f(a) < 0 < f(b)$$

이면 $f(c)=0$인 c가 a와 b사이에 존재한다.

(※) 자연수 n에 대하여 함수 $y=\dfrac{1}{x+n}$의 그래프와 함수 $y=\sin x\left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$의 그래프의 교점의 x좌표를 a_n이라고 하자.

[1] 구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $g(x)=\sin x-\dfrac{x}{1+x^2}$가 증가함을 보이시오.

[2] 모든 자연수 n에 대하여 부등식

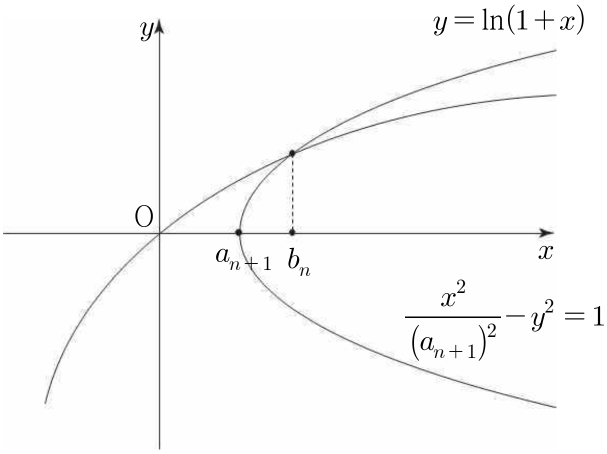
$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} < a_n < \frac{1}{n}$$

이 성립함을 보이시오.

[3] 극한값 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\int_0^{a_n} \sin x\, dx$를 구하시오.

28번 문항(2022 연세대 논술기출)

<그림 1>과 같이 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{(a_{n+1})^2}-y^2=1$ $(x \geq a_{n+1})$과 함수 $y=\ln(1+x)$의 그래프는 한 점에서 만난다. 이 점의 x좌표를 b_n이라 할 때, 아래 제시문을 참고하여 다음 물음에 답하시오.



제시문 1. $x>0$인 실수 x에 대하여 $\ln(1+x)<x$가 성립한다.

제시문 2. 자연수 n에 대하여 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$이 성립한다.

[1] 수열 $\{a_n\}$이 $1+\dfrac{1}{(a_n)^2} \leq \dfrac{1}{(a_{n+1})^2}$을 만족시킬 때, $a_{n+1}<b_n<a_n$이 성립함을 보이시오.

[2] $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+b_n)$의 값을 구하시오.

1번 문항 해설

정답 : $\dfrac{1}{48}$

두 점 $\mathrm{A}(s,\ s^2)$, $\mathrm{B}(t,\ t^2)$를 지나는 직선의 방정식이

$y-s^2=\dfrac{t^2-s^2}{t-s}(x-s) \qquad \therefore\ y=(t+s)x-st$

이고, 직선 AB가 항상 포물선 $y=x^2$의 위쪽에 있으므로

둘러싸인 영역의 넓이는

$$F(x)=\int_s^t \{(t+s)x-st-x^2\}dx$$

$$=-\int_s^t (x-s)(x-t)dx=\frac{1}{6}(t-s)^3$$

$\overline{\mathrm{AB}}=1\ \Rightarrow\ (t-s)^2+(t^2-s^2)^2=1$

$\therefore\ (t-s)^2\{1+(t+s)^2\}=1$

$t-s=\dfrac{1}{\sqrt{1+(t+s)^2}}$ 이므로

$$\lim_{s\to\infty}s^3F(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s^3(t-s)^3}{6}$$

$$=\lim_{s\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{s}{\sqrt{1+(t+s)^2}}\right)^3$$

$s<t\le s+1$로부터 $2x>t+s\le 2s+1$임을 이용하여

식의 범위를 얻을 수 있고, 이로부터

$$\left(\frac{s}{\sqrt{1+(2s+1)^2}}\right)^3\le 6s^2F(s)<\left(\frac{s}{\sqrt{1+(2s)^2}}\right)^3$$

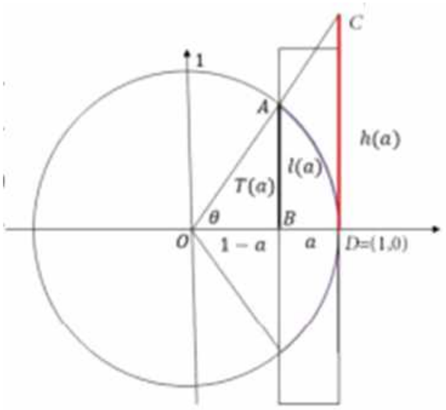
$$\lim_{s\to\infty}\left(\frac{s}{\sqrt{1+(2s+1)^2}}\right)^3=\lim_{s\to\infty}\left(\frac{s}{\sqrt{1+(2s)^2}}\right)^3=\frac{1}{8}$$

샌드위치 원리에 의하여 $\dfrac{1}{8}$로 수렴합니다.

$\displaystyle\lim_{s\to\infty}6s^3F(s)=\frac{1}{8} \qquad \therefore\ \lim_{s\to\infty}s^3F(s)=\frac{1}{48}$

2번 문항 해설

정답 : $k > \frac{1}{2}$



중심각이 θ인 부채꼴 OAD에서 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 $T(a)$,
호 $\widehat{\mathrm{DA}}$의 길이를 $l(a)$, 선분 OA의 연장선이 D에서의 수선과 만나는 점을 C라고 했을 때,
선분 $\overline{\mathrm{CD}}$의 길이를 $h(a)$라 하자. 그러면 $T(a)< l(a)< h(a)$이다. 삼각형 $\triangle$OAB와
$\triangle$OCD의 닮음비로부터 $\frac{h(a)}{1}=\frac{T(a)}{1-a}$을 얻는다 :

$h(a)=\frac{T(a)}{1-a}$ $\cdots$ (1) 또한 $0<a<1$이고

$T(a)=\sqrt{1-(1-a)^2}=\sqrt{2a-a^2}=\sqrt{a}\sqrt{2-a}$ $\cdots$ (2)

따라서 $N(a)$는 부등식 $\frac{2\pi}{2h(a)}\le\frac{2\pi}{2l(a)}\le N(a)\le\frac{2\pi}{2T(a)}$을

만족하고, 이를 간단히 하면 $\frac{\pi}{h(a)}\le N(a)\le\frac{\pi}{T(a)}$를 얻는다.

여기에 식 (1)과 (2)를 적용하면

$\frac{\pi(1-a)}{\sqrt{a}\sqrt{2-a}}\le N(a)\le\frac{\pi}{\sqrt{a}\sqrt{2-a}}$ 그러므로

$\frac{\pi(1-a)}{\sqrt{a}\sqrt{2-a}}a^k \le N(a)a^k \le \frac{\pi}{\sqrt{a}\sqrt{2-a}}a^k$

$\frac{\pi(1-a)}{\sqrt{2-a}}a^{k-\frac{1}{2}} \le N(a)a^k \le \frac{\pi}{\sqrt{2-a}}a^{k-\frac{1}{2}}$

여기서 $\lim_{a\to0}N(a)a^k=0$이 성립하려면 부등식의 양 끝이

0으로 수렴해야 하므로, 즉 $\lim_{a\to0}\frac{\pi(1-a)}{\sqrt{2-a}}a^{k-\frac{1}{2}}=0$이고

$\lim_{a\to0}\frac{\pi}{\sqrt{2-a}}a^{k-\frac{1}{2}}=0$이어야 하므로, $k>\frac{1}{2}$이어야 한다.

3번 문항 해설

정답 : (1) 해설참조 (2) 해설참조 (3) 해설참조 (4) 해설참조

(1) 정적분을 계산하면

$$\int_x^{x+1}\frac{1}{t}dt=\left[\ln t\right]_x^{x+1}=\ln(x+1)-\ln x=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

(2) (1)의 부등식 $\frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$의 각 항에

x를 곱하면 x가 양수이므로

$$\frac{x}{x+1}<x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<1$$

을 얻고, 이 부등식에 지수 함수 e^t를 취하면 $y=e^t$는 증가함수이므로

$$e^{\frac{x}{x+1}}<e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}<e$$

이 성립한다. 그리고 지수 함수와 로그 함수는

서로 역함수이기 때문에 $e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$이므로

주어진 부등식이 참임을 알 수 있다.

(3) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e$는 이미 주어졌으므로 $e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$이 임의의 양수 x에 대하여 참임을 보이면 된다.

먼저 문제 (2)의 왼쪽 부등식에 $e^{\frac{1}{x+1}}$을 곱하면 $e^{\frac{x}{x+1}}e^{\frac{1}{x+1}}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x e^{\frac{1}{x+1}}$이 되고

지수법칙에 의해

$e^{\frac{x}{x+1}}e^{\frac{1}{x+1}}=e^{\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x+1}}=e^{\frac{x+1}{x+1}}=e$가 되어 $e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x e^{\frac{1}{x+1}}$을 얻는다. 그리고 문제

(1)의 왼쪽 부등식에 지수함수를 취하면

$e^{\frac{1}{x+1}}<e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\left(1+\frac{1}{x}\right)$이 성립한다. 그러므로

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x e^{\frac{1}{x+1}}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x}\right)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$이 성립하여 임의의 양수 x에 대하여

$e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$이 참이다. 따라서 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$이 성립한다.

(4) 문제 (3)의 부등식에 극한 $\lim\limits_{x\to\infty}$를 취하면 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\lim\limits_{x\to\infty}e=e\le\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$이

되고,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$ 이므로

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le e \le \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 이 성립한다.

따라서 함수의 극한의 대소관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ 이 참이다.

4번 문항 해설

정답 : (1) 해설참조 (2) 해설참조 (3) 해설참조

(1) $a_{n+1} > 2(n+1)\pi$이므로 $2n\pi < a_{n+1} - 2\pi$이다.

그리고 $\sin(a_{n+1} - 2\pi) - \sin a_n = \sin a_{n+1} - \sin a_n$

$$= \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} < 0$$

이므로 $2n\pi < a_{n+1} - 2\pi < a_n$이다.

(2) 구간 $[a_{n+1} - 2\pi,\ a_n]$에서 함수 $f(x) = \sin x$에

평균값 정리를 적용하면

$$\frac{\sin a_n - \sin(a_{n+1} - 2\pi)}{a_n - a_{n+1} + 2\pi} = \cos b_n$$

인 b_n이 $a_{n+1} - 2\pi$와 a_n 사이에 적어도 하나 존재한다.

즉, $a_n - a_{n+1} + 2\pi = \dfrac{\sin a_n - \sin(a_{n+1} - 2\pi)}{\cos b_n}$

$$= \frac{\sin a_n - \sin a_{n+1}}{\cos b_n} = \frac{1}{\cos b_n}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

을 얻는다.

(3) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$일 때, $\sin\theta < \theta$가 성립하고,

$0 < a_n - (a_{n+1} - 2\pi) < \dfrac{\pi}{2}$이므로

$\sin(a_n - (a_{n+1} - 2\pi)) < a_n - a_{n+1} + 2\pi$를 얻는다.

(1)과 (2)의 결과를 이용하면

$\sin(a_n - a_{n+1}) = \dfrac{1}{\cos b_n}\left(\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$이고

$1 - \dfrac{2\pi}{a_{n+1}} < \dfrac{a_n}{a_{n+1}} < 1$임을 알 수 있다.

$\lim\limits_{n\to\infty} \cos b_n = 1$이므로

$0 < a_n \sin(a_n - a_{n+1}) < \dfrac{1 - \dfrac{a_n}{a_{n+1}}}{\cos b_n}$이고 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - \dfrac{a_n}{a_{n+1}}}{\cos b_n} = 0$이다.

따라서, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \sin(a_{n+1} - a_n) = 0$이다.

5번 문항 해설

[1]

$y=x^2$ 에서 $y'=2x$ 이므로 구간 $[t,\ p(t)]$ 에서 곡선의 길이는

$$\int_t^{p(t)}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_t^{p(t)}\sqrt{1+4x^2}\,dx=1 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

이다.

$\sqrt{1+4x^2}$ 이 구간 $[t,\, p(t)]$에서 증가하는 연속함수이므로 제시문 (다)에 의해

$$\{p(t)-t\}\sqrt{1+4t^2}<\int_t^{p(t)}\sqrt{1+4x^2}\,dx<\{p(t)-t\}\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}$$

이다. ①에 의해

$$\{p(t)-t\}\sqrt{1+4t^2}<1<\{p(t)-t\}\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}$$

이고 이 부등식을 정리하면

$$\frac{1}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}}<p(t)-t<\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

이다. $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+4t^2}}=0$ 이고,

$\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=\infty$ 이므로 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}}=0$ 이다. 따라서

제시문 (나)에 의해 $\lim\limits_{t\to\infty}\{p(t)-t\}=0$ 이다.

[1] 별해

$y=x^2$ 에서 $y'=2x$ 이므로 구간 $[t,\ p(t)]$ 에서 곡선의 길이는

$$\int_t^{p(t)}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_t^{p(t)}\sqrt{1+4x^2}\,dx=1 \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

$\sqrt{1+4x^2}$ 이 구간 $[t,\, p(t)]$에서 증가하는 연속함수이므로 제시문 (다)에 의해

$$\{p(t)-t\}\sqrt{1+4t^2}<\int_t^{p(t)}\sqrt{1+4x^2}\,dx<\{p(t)-t\}\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}$$

이다. 각 변을 $p(t)-t$ 로 나누면

$$\sqrt{1+4t^2}<\frac{\int_t^{p(t)}\sqrt{1+4x^2}\,dx}{p(t)-t}<\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}$$

이고

사잇값정리에 의해 $\dfrac{\int_t^{p(t)}\sqrt{1+4x^2}\,dx}{p(t)-t}=\sqrt{1+4c^2}$ 인 c 가 t 와 $p(t)$ 사이에 존재한다.

즉, $\int_t^{p(t)} \sqrt{1+4x^2}\,dx = \{p(t)-t\}\sqrt{1+4c^2}$ 을 만족하는 c가 $t<c<p(t)$에 존재한다.

①에 의해

$\{p(t)-t\}\sqrt{1+4c^2}=1$이고 양변을 $\sqrt{1+4c^2}$ 으로 나누면 $p(t)-t=\dfrac{1}{\sqrt{1+4c^2}}$ 이다.

또, $t<c<p(t)$이므로 $t\to\infty$이면 $c\to\infty$이다.

따라서 $\lim\limits_{t\to\infty}\{p(t)-t\}=\lim\limits_{c\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+4c^2}}=0$ 이다.

[2]

[1]에서 $\lim\limits_{t\to\infty}\{p(t)-t\}=0$이고, $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=\infty$이므로

$\lim\limits_{t\to\infty}\{p(t)-t\}\times\dfrac{1}{p(t)}=\lim\limits_{t\to\infty}\left\{1-\dfrac{t}{p(t)}\right\}=0$이다. 따라서 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{p(t)}=1$이고

$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{p(t)}{t}=1$ ………③

이다. ②의 각 변에 t를 곱하면,

$$\frac{t}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}}<t\{p(t)-t\}<\frac{t}{\sqrt{1+4t^2}} \text{ 이다.}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+4\left\{\dfrac{p(t)}{t}\right\}^2}}=\frac{1}{2}\text{ 이고, }\quad \lim_{t\to\infty}\frac{t}{\sqrt{1+4t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+4}}=\frac{1}{2}$$

이므로

제시문 (나)에 의해 $\lim\limits_{t\to\infty}t\{p(t)-t\}=\dfrac{1}{2}$ 이다.

[2]별해

[1]에서 $\lim\limits_{t\to\infty}\{p(t)-t\}=0$이고, $\lim\limits_{t\to\infty}p(t)=\infty$이므로

$\lim\limits_{t\to\infty}\left\{\dfrac{p(t)}{t}-1\right\}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}\{p(t)-t\}=0$이다. 따라서 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{p(t)}{t}=1$ ………③

이다.

②의 각 변에 t를 곱하면,

$$\frac{t}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}}<t\{p(t)-t\}<\frac{t}{\sqrt{1+4t^2}} \text{ 이다.}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+4\left\{\frac{p(t)}{t}\right\}^2}}=\frac{1}{2}$$ 이고, $$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\sqrt{1+4t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+4}}=\frac{1}{2}$$

이므로

제시문 (나)에 의해 $\lim_{t\to\infty}t\{p(t)-t\}=\frac{1}{2}$ 이다.

[3]

①의 양변을 t에 대하여 미분하면 $\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}\times p'(t)-\sqrt{1+4t^2}=0$ 이다.

식을 정리하면 $\{p'(t)\}^2=\frac{1+4t^2}{1+4\{p(t)\}^2}$ 이고,

$$1-\{p'(t)\}^2=1-\frac{1+4t^2}{1+4\{p(t)\}^2}=\frac{4\{p(t)\}^2-4t^2}{1+4\{p(t)\}^2}$$ 이고,

$$t^2\left[1-\{p'(t)\}^2\right]=\frac{4t^2\left[\{p(t)\}^2-t^2\right]}{1+4\{p(t)\}^2}$$ 이다.

③에 의해

$$\lim_{t\to\infty}t^2\left[1-\{p'(t)\}^2\right]=\lim_{t\to\infty}4t\{p(t)-t\}\times\frac{tp(t)+t^2}{1+\{4p(t)\}^2}=\lim_{t\to\infty}4t\{p(t)-t\}\times\frac{\frac{p(t)}{t}+1}{\frac{1}{t^2}+4\left\{\frac{p(t)}{t}\right\}^2}$$

$$=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1+1}{4}=1$$

이다.

[3] 별해

①의 양변을 t에 대하여 미분하면 $\sqrt{1+4\{p(t)\}^2}\times p'(t)-\sqrt{1+4t^2}=0$

식을 정리하면 $\{p'(t)\}^2=\frac{1+4t^2}{1+4\{p(t)\}^2}$ 이고,

$$1-\{p'(t)\}^2=1-\frac{1+4t^2}{1+4\{p(t)\}^2}=\frac{4\{p(t)\}^2-4t^2}{1+4\{p(t)\}^2}=\frac{4\{p(t)+t\}\{p(t)-t\}}{1+4\{p(t)\}^2}$$ 이다.

[미적분-1]의 별해에서 $p(t)-t=\frac{1}{\sqrt{1+4c^2}}$ 이므로

$$1-\{p'(t)\}^2=\frac{4\{p(t)+t\}}{1+4\{p(t)\}^2}\times\frac{1}{\sqrt{1+4c^2}}$$ 이다.

따라서 $\lim_{t\to\infty} t^2[1-\{p'(t)\}^2]=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2\{p(t)+t\}}{1+4\{p(t)\}^2}\times\frac{1}{\sqrt{1+4c^2}}$ 이다.

우변의 분자, 분모를 $\{p(t)\}^3$ 으로 나누면

$$\lim_{t\to\infty} t^2[1-\{p'(t)\}^2]=\lim_{t\to\infty}\frac{4\left\{\frac{t}{p(t)}\right\}^2\left\{1+\frac{t}{p(t)}\right\}}{\frac{1}{\{p(t)\}^2}+4}\times\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\{p(t)\}^2}+4\left\{\frac{c}{p(t)}\right\}^2}}$$

이다.

한편 $t<c<p(t)$ 에서 $\frac{t}{p(t)}<\frac{c}{p(t)}<1$ 이고 ③과 제시문(나)에 의해 $\lim_{t\to\infty}\frac{c}{p(t)}=1$ 이다.

따라서

$$\lim_{t\to\infty} t^2[1-\{p'(t)\}^2]=\frac{4\times 1^2\times(1+1)}{4}\times\frac{1}{\sqrt{4\times 1^2}}=1$$

6번 문항 해설

[1]

$y=e^x$ 를 미분하면 $y'=e^x$이므로 점 $(0,1)$에서 접선의 기울기는 1이다.

따라서 $f(x)=x+1$이다.

$g(x)=e^x-x-1$이라고 하자. $g(x)$를 미분하면

$g'(x)=e^x-1$

이므로 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0 (극소)	$\nearrow$

따라서 $g(0)=0$은 극솟값이자 최솟값이다.

[2]

$h(x)=2x^2+x+1-e^x$이라고 하면

$h'(x)=4x+1-e^x,\ h''(x)=4-e^x$

이다. 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 $h''(x)>0$이므로 $h'(x)$는 구간 $(0,1)$에서 증가한다.

한편 $h'(0)=0$이므로 $0<x<1$에서 $h'(x)>0$이다.

따라서 $h(x)$는 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 극값을 가지지 않는다.

여기서 $h(0)=0,\ h(1)>0$이므로 함수 $h(x)$의 최솟값은 0이다.

[3]

문항 [2]에 의해서 $0\le x\le 1$에서 $2x^2+x+1-e^x\ge 0$이므로 부등식

$e^x\le 1+x+2x^2$

이 성립한다. 모든 자연수 n에 대하여 $0<\frac{1}{n}\le 1$이므로 $x=\frac{1}{n}$을 위 부등식에 대입하면

$\sqrt[n]{e}\le 1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}$

가 성립한다.

[4]

문항 [1]에 의해서 $e^x\ge 1+x$가 성립한다. 여기서 $x=\frac{1}{n}$을 대입하면, 모든 자연수

n에 대하여

$\frac{1}{n} \leq \sqrt[n]{e} - 1$

이 성립함을 알 수 있다. 또 문항 [2.3]에 의하여

$\sqrt[n]{e} - 1 \leq \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}$

가 모든 자연수 n에 대하여 성립한다. $c_n = n(\sqrt[n]{e} - 1)$이라고 하면 모든 자연수 n
에

대하여

$1 \leq c_n \leq 1 + \frac{2}{n}$

가 성립한다.

7번 문항 해설

점 B의 좌표를 $B\left(b, \frac{1}{b}\right)$라 하자. 점 A와 B를 지나는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{ab}x+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 이다. 따라서 점들의 좌표 $P\left(0, \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$와 $Q(a+b, 0)$을 얻을 수 있다. 따라서

$$\overline{AB}=\sqrt{(a-b)^2+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2}=\frac{|a-b|}{ab}\sqrt{1+a^2b^2} \text{ 이고,}$$

$$\overline{PQ}=\sqrt{(a+b)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}=\frac{(a+b)}{ab}\sqrt{1+a^2b^2} \text{ 이다.}$$

(1) 점 B가 $\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{PQ}$를 만족하는 경우, $|a-b|=\frac{1}{2}(a+b)$를 얻는다. 이때, $a>b$이면 $b=\frac{1}{3}a$이고, $a<b$이면 $b=3a$이다. 삼각형 OPQ의 넓이는

$$S(a)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=\frac{(a+b)^2}{2ab}$$

이므로, $a>b$인 경우와 $a<b$인 경우 모두 $S(a)=\frac{8}{3}$을 얻는다.

(2) 점 B가 $\overline{AB}=1$을 만족하는 경우, $|a-b|=\frac{ab}{\sqrt{1+a^2b^2}}$를 얻는다. 이때 $a>b$이면 $a=b+\frac{ab}{\sqrt{1+a^2b^2}}$이고, $a<b$이면 $b=a+\frac{ab}{\sqrt{1+a^2b^2}}$이므로, 이를 다시 쓰면

$$\frac{b}{a}=\begin{cases}1-\dfrac{b}{\sqrt{1+a^2b^2}} & (a>b)\\ 1+\dfrac{b}{\sqrt{1+a^2b^2}} & (a<b)\end{cases}$$

이다. 여기서 $0<\frac{ab}{\sqrt{1+a^2b^2}}<1$이므로, $0<\frac{b}{\sqrt{1+a^2b^2}}<\frac{1}{a}$이고, 극한값 $\lim_{a\to\infty}\frac{b}{\sqrt{1+a^2b^2}}=0$을 얻는다. 따라서 극한값 $\lim_{a\to\infty}\frac{b}{a}=1$을 얻을 수 있고, 이를 이용하면

$$\lim_{a\to\infty}S(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2}{2\frac{b}{a}}=2$$

를 얻는다. 위 식을 $\frac{a}{b}$에 대해서 정리하면

$$\frac{a}{b}=\begin{cases} 1+\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2b^2}} & (a>b) \\ 1-\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2b^2}} & (a<b) \end{cases}$$

이다. 여기서 $0<\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2b^2}}<1$ 이므로, $0<\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2b^2}}<a$ 이고, 극한값 $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{a}{\sqrt{1+a^2b^2}}=0$ 을 얻는다.

따라서 극한값 $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{a}{b}=1$ 을 얻을 수 있고, 이를 이용하면

$$\lim_{a\to 0}S(a)=\lim_{a\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{a}{b}\right)^2}{2\dfrac{a}{b}}=2$$

를 얻는다.

8번 문항 해설

$x, y > 0$에 대하여 $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ 이므로 주어진 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}+a_n} \le \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}+\sqrt{a_n}\right)\right]$$

이 성립한다. 제시문 [라]에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}$ 이고

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}+a_n} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}+\sqrt{a_n}\right)\right] = \frac{2}{3}+0 = \frac{2}{3}$$

이다. 따라서 제시문 [다]에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}+a_n} = \frac{2}{3}$ 이다.

9번 문항 해설

구간 $[2,\infty)$에서 임의의 x를 택하자. $x=2n+c$를 만족하는 자연수 n과 $0\le c<2$ 가 존재하므로

$$\int_{-x}^{x} f(t)dt=\int_{-2n-c}^{2n+c} f(t)dt=\int_{-2n-c}^{-2n} f(t)dt+\int_{-2n}^{2n} f(t)dt+\int_{2n}^{2n+c} f(t)dt$$

이고, $f(x)$가 모든 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$을 만족하므로

$$\int_{-2n}^{2n} f(t)dt=2n\int_{0}^{2} f(t)dt \text{ 이고 } \int_{2n}^{2n+c} f(t)dt=\int_{0}^{c} f(2n+t)dt=\int_{0}^{c} f(t)dt$$

이다.

$$\int_{0}^{2} f(x)dx=\int_{0}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{2} f(x)dx=\int_{2}^{3} f(x)dx+\int_{1}^{2} f(x)dx=\int_{1}^{3} f(x)dx=1$$

이므로

$$\frac{1}{x}\int_{-x}^{x} f(t)dt=\frac{2n}{x}+\frac{1}{x}\int_{0}^{c} f(t)dt+\frac{1}{x}\int_{-c}^{0} f(t)dt$$

이다. 이때, $\frac{x-2}{x}\le\frac{2n}{x}\le 1$이고 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{x}=1$이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2n}{x}=1$이다.

이제, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{0}^{c} f(t)dt=0$임을 보이자.

$c=0$인 경우에는 당연히 성립하므로 $0<c<2$라 가정하자.

함수 $|f(x)|$가 닫힌구간 $[0,2]$에서 연속이므로 제시문 [다]의 최대·최소 정리에 의해 함수 $|f(x)|$는 최댓값을 갖는다. 최댓값을 M이라고 하면, 구간 $[0,c]$에 속하는 임의의 x에 대하여 $-M\le f(x)\le M$이므로

$$-2M\le -cM=\int_{0}^{c}(-M)dt\le\int_{0}^{c} f(t)dt\le\int_{0}^{c} Mdt=cM\le 2M$$

이 성립한다.

이때 $-\frac{2M}{x}\le\frac{1}{x}\int_{0}^{c} f(t)dt\le\frac{2M}{x}$이고 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2M}{x}=0$이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{0}^{c} f(t)dt=0$이다.

마찬가지로 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{-c}^{0} f(t)dt=0$이 성립한다. 그러므로, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_{-x}^{x} f(t)dt=1$이다.

10번 문항 해설

[1] $0<x<\frac{\pi}{2}$ 일 때 $\frac{1}{\tan x}<\frac{1}{x}<\frac{1}{\sin x}$ 이므로

$$\frac{\cos x}{\sin x}<\frac{1}{x},\ \text{즉}\ x\cos x-\sin x<0$$

이다. 따라서

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}<0$$

이 성립하여 $f(x)$는 열린구간 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$에서 감소한다.

[2] 열린구간 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$에서 $f(x)<1$이고, $\lim_{x\to0+}f(x)=1$이다.

열린구간 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$에서 임의의 x를 택하자. 문항 [1]에 의하여 $f(t)=\frac{\sin t}{t}$가 구간 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$에서 감소하므로 $x\le t\le 3x$인 임의의 t에 대하여

$$\frac{\sin 3x}{3x}\le\frac{\sin t}{t}<1$$

이다. 각 변을 k제곱하고 $\frac{1}{t}$를 곱하면

$$0<\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^k\frac{1}{t}\le\frac{\sin^k t}{t^{k+1}}\le\frac{1}{t}$$

이다. 따라서 정적분과 곡선 및 x축 사이의 넓이의 관계를 이용하면

$$\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^k\int_x^{3x}\frac{1}{t}dt=\int_x^{3x}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^k\frac{1}{t}dt\le\int_x^{3x}\frac{\sin^k t}{t^{k+1}}dt\le\int_x^{3x}\frac{1}{t}dt$$

이다. $\lim_{x\to0+}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^k=1$이고 $\lim_{x\to0+}\int_x^{3x}\frac{1}{t}dt=\ln 3$이므로

$$\lim_{x\to0+}\int_x^{3x}\frac{(f(t))^k}{t}dt=\lim_{x\to0+}\int_x^{3x}\frac{\sin^k t}{t^{k+1}}dt=\ln 3$$

이다.

11번 문항 해설

함수 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 의 그래프를 생각하면, 다음 부등식이 성립한다.

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le 1+\int_1^{n}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \qquad \Rightarrow$$

$$2\left(\sqrt{n+1}-1\right) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le 1+2\left(\sqrt{n}-1\right)$$

각 변에 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 을 곱한 후에 극한 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 을 취하면,

$$2=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{n+1}-1\right)}{\sqrt{n}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1+2\left(\sqrt{n}-1\right)}{\sqrt{n}}=2$$ 이다.

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}=2$ 이다.

(별해)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\,\right]_0^1=2$$

12번 문항 해설

아래의 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 f(x)dx = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx = n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)dx$$

여기서 $f(x) = x^5$이라 하자. 그러면 $f(x)$는 연속이고 미분가능한 함수이므로, 평균값 정리에 의해

$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)dx = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(\theta_k(x))\left(\frac{k}{n} - x\right)dx$을 만족하는 $\theta_k(x) \in \left[x, \frac{k}{n}\right]$가 존재한다.

$f'(x) = 5x^4$는 $[0, 1]$에서 증가하므로,

모든 $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$에 대하여 $5\left(\frac{k-1}{n}\right)^4 \le 5x^4 \le 5\left(\frac{k}{n}\right)^4$이 성립한다. 따라서

$$\int_x^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k-1}{n}\right)^4 dx \le \int_x^{\frac{k}{n}} 5x^4 dx \le \int_x^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k}{n}\right)^4 dx$$

$$5\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n} - x\right) \le \left(\frac{k}{n}\right)^5 - x^5 \le 5\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n} - x\right)$$

이고, 이로부터 아래와 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k-1}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n} - x\right)dx \le n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^5 - x^5\right)dx \le n\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} 5\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(\frac{k}{n} - x\right)dx$$

(2)번 문제에서 계산한 결과를 활용하여, 위 부등식 양쪽 끝을 $n \to \infty$일 때의 극한값을 계산하면 $\frac{1}{2}$로 동일함을 알 수 있다. 따라서 제시문 (가)에 의해 문제에서 구하고자 하는 극한값은 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 - n\int_0^1 x^5 dx\right] = \frac{1}{2}$이다.

13번 문항 해설

$q(x)=e^x+x\ln(x+1)+x^2\cos^{2022}\pi x$ 라 하면, 함수 $q(x)$는 닫힌구간 $[0,1]$을 포함하는 열린구간에서 연속인 도함수 $q'(x)$를 갖는다.

제시문 <가>에 의하여 $q'(x)$는 닫힌구간 $[0,1]$에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

이 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 하면 닫힌구간 $[0,1]$에서

$$m \le q'(x) \le M \ \cdots\cdots \ ㉠$$

한편 부분적분법을 적용하면

$$\begin{aligned} c_n &= (n-2022)\int_0^1 x^n q(x)\,dx \\ &= \frac{n-2022}{n+1}\left(\Big[x^{n+1}q(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x^{n+1}q'(x)\,dx\right) \\ &= \frac{n-2022}{n+1}\left(q(1)-\int_0^1 x^{n+1}q'(x)\,dx\right) \end{aligned}$$

㉠과 제시문 <나>에 의하여

$$\frac{m}{n+2}=m\int_0^1 x^{n+1}dx \le \int_0^1 x^{n+1}q'(x)\,dx \le M\int_0^1 x^{n+1}dx=\frac{M}{n+2}$$

따라서

$$\frac{(n-2022)m}{(n+1)(n+2)} \le \frac{n-2022}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}q'(x)\,dx \le \frac{(n-2022)M}{(n+1)(n+2)}$$

이고 제시문 <다>에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-2022}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}q'(x)\,dx=0$$

그러므로 $\lim_{n\to\infty} c_n = q(1) = e+\ln 2+\cos^{2022}\pi = e+\ln 2+1$ 이다.

14번 문항 해설

[1]

함수 $g(t)=\frac{1}{t}$ 이라고 하면 함수 $g(t)$는 구간 $(0,\ \infty)$에서 $g(t)>0$이고 감소하므로,

제시문 (ㄱ)과 (ㄴ)에 의해서

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\times\left(1+\frac{1}{n}-1\right)<\int_1^{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{t}\,dt<1\times\left(1+\frac{1}{n}-1\right),$$

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

따라서

$$\frac{1}{2}\leq\frac{n}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1\ \Rightarrow\ \sqrt{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$$

이다. 그러므로 제시문 (ㄷ)의 명제 A는 참이다.

[2]

$f(x)=x^3-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^2+x-e$ 라고 하자.

(a) [1]로부터,

$$f\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e<0 \text{이고}$$

$$f(e)=e^3-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^2+e-e=e^2\left\{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}>0$$

이다.

따라서 사잇값 정리에 의해 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ e\right)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(b) $x>e$인 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x)=3x^2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x+1=x\left\{3x-2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}+1>0$$

이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(e,\ \infty)$에서 증가한다. 따라서 $x\geq e$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)\geq f(e)>0$$

이다.

그러므로 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(e,\ \infty)$에서 해를 갖지 않는다.

[1] 과 (a), (b)에 의해서 제시문 (ㄹ)의 수 a_n은 다음을 만족한다.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < a_n < e$$

한편, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = e$ 이다.

15번 문항 해설

[1]

$f(x)=g(x) \Rightarrow \sin x=\cos x$ 이므로 $\tan x=1$ 이다.

이때 $x=\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \cdots$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{\pi}{4}$ 이고 공차가 π인 등차수열이다. 즉, $a_n=\frac{\pi}{4}+(n-1)\pi$ (단, n은 자연수) 이고, $a_{10}-a_2=8\pi$ 이다.

[2]

$a_n=\frac{\pi}{4}+(n-1)\pi$ 이므로 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-\frac{3}{4}}$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\frac{4}{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_2^{n+1}\frac{1}{x-\frac{3}{4}}dx &\le \frac{1}{a_1}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k}\\ &=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-\frac{3}{4}}\\ &\le \frac{1}{a_1}+\frac{1}{\pi}\int_1^{n}\frac{1}{x-\frac{3}{4}}dx\end{aligned}$$

인 것을 알 수 있다. 로그함수의 적분법을 이용하여 풀면,

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{\pi}\int_1^{n}\frac{1}{x-\frac{3}{4}}dx=\frac{1}{\pi}\left(\ln\left(n-\frac{3}{4}\right)-\ln\frac{1}{4}+4\right),$$

$$\frac{4}{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_2^{n+1}\frac{1}{x-\frac{3}{4}}dx=\frac{1}{\pi}\left(\ln\left(n+\frac{1}{4}\right)-\ln\frac{5}{4}+4\right)$$

임을 알 수 있다. 즉,

$$\frac{1}{\pi}\left(\ln\left(n+\frac{1}{4}\right)-\ln\frac{5}{4}+4\right)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\le\frac{1}{\pi}\left(\ln\left(n-\frac{3}{4}\right)-\ln\frac{1}{4}+4\right)$$

이고, $\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(\ln\left(n+\frac{1}{4}\right)-\ln\frac{1}{4}+4\right)=\frac{1}{\pi}$ 이므로, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{\pi}$ 이다.

[3]

$$\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\sin x-\cos x}{a_{n+1}}dx \le \int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\sin x-\cos x}{x}dx \le \int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\sin x-\cos x}{a_n}dx$$ 이고

$\int_{a_n}^{a_{n+1}} (\sin x - \cos x)\,dx = 2\sqrt{2}$ 이므로,

$$2\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k+1}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}A_k \le 2\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$

이다. [2]에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}A_k = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ 이다.

16번 문항 해설

[1]

주어진 조건과 제시문 ㈎를 이용하면,

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 3a(x+m)(x-m) = 3ax^2 - 3am^2$

이다. 항등식의 성질을 이용하여 좌변과 우변의 계수를 비교하면 $b=0$, $c=-3am^2$이므로 $a=-\frac{1}{2}$이다.

따라서 $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}m^2x + n$이고

$$\frac{4ac}{m^2} = \frac{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{2}m^2}{m^2} = -3$$

이다.

[2]

(1)

주어진 도형의 내부 또는 경계에서 직선 $x=i$ (i는 $0 \le i \le m$인 정수)위의 y좌표가 정수인 점의 개수를 L_i라고 하자.

자연수 k에 대하여, $m=2k-1$이면

$$f(i) = -\frac{1}{2}i^3 + \frac{3}{2}(2k-1)^2 i + n = \frac{i}{2}\left(-i^2 + 3(2k-1)^2\right) + n$$

이다. 이때

i가 짝수이면 $\frac{i}{2}$가 정수이므로 $-\frac{1}{2}i^3 + \frac{3}{2}(2k-1)^2 i$ 는 정수이고,

i가 홀수이면 $-i^2 + 3(2k-1)^2$은 짝수이므로 $-\frac{1}{2}i^3 + \frac{3}{2}(2k-1)^2 i$는 정수이다.

즉, $f(i)$는 정수이다.

따라서 $L_i = -\frac{1}{2}i^3 - (2k-1)i^2 + \frac{3}{2}(2k-1)^2 i + 1$이고,

$$\begin{aligned}
B_m = B_{2k-1} &= \sum_{i=0}^{2k-1} L_i = \sum_{i=0}^{2k-1}\left(-\frac{1}{2}i^3 - (2k-1)i^2 + \frac{3}{2}(2k-1)^2 i + 1\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left\{\frac{(2k-1)2k}{2}\right\}^2 - (2k-1)\times\frac{(2k-1)2k(4k-1)}{6} + \frac{3}{2}(2k-1)^2\times\frac{(2k-1)2k}{2} + 2k \\
&= \frac{k(28k^3 - 56k^2 + 35k + 5)}{6}
\end{aligned}$$

이다.

그러므로 $\frac{(p-q)r}{s} = \frac{(28+56)35}{5} = 588$이다.

(2)

주어진 도형의 내부 또는 경계에서 직선 $x=i$ (i는 $0 \le i \le m$인 정수)위의 y좌표가 정수인 점의 개수를 L_i라 하자. (이때, L_i는 $f(x)-y+1$개가 된다.)

$$-\frac{1}{2}i^3-mi^2+\frac{3}{2}m^2i=-\frac{1}{2}i^3+\frac{3}{2}m^2i+n-(mi^2+n) \le L_i$$

$$\le -\frac{1}{2}i^3+\frac{3}{2}m^2i+n-(mi^2+n)+1=-\frac{1}{2}i^3-mi^2+\frac{3}{2}m^2i+1$$

이다. 따라서

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2-m\times\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+\frac{3}{2}m^2\times\frac{m(m+1)}{2} \le B_m=\sum_{i=1}^{m}L_i$$

$$\le -\frac{1}{2}\left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2-m\times\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+\frac{3}{2}m^2\times\frac{m(m+1)}{2}+m+1$$

이고, 이 부등식에서 가장 왼쪽 값을 C_m, 가장 오른쪽 값을 D_m이라 하자.

$$A_m=\int_0^m\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}m^2x-mx^2\right)dx=-\frac{1}{8}m^4+\frac{3}{4}m^4-\frac{1}{3}m^4=\frac{7}{24}m^4 \text{ 이다.}$$

부등식 $\frac{C_m}{A_m} \le \frac{B_m}{A_m} \le \frac{D_m}{A_m}$ 에서 $\lim_{m\to\infty}\frac{C_m}{A_m}=\lim_{m\to\infty}\frac{D_m}{A_m}=1$ 이므로

제시문 (라)에 의하여 수열 $\left\{\frac{B_m}{A_m}\right\}$이 1로 수렴한다.

17번 문항 해설

[1]

직선 $y=tx$와 곡선 $y=\ln x$가 접한다고 하자.

접점을 $(\alpha,\ t\alpha)=(\alpha,\ \ln\alpha)$라고 하면 접선의 기울기는 $\frac{1}{\alpha}=t$이다.

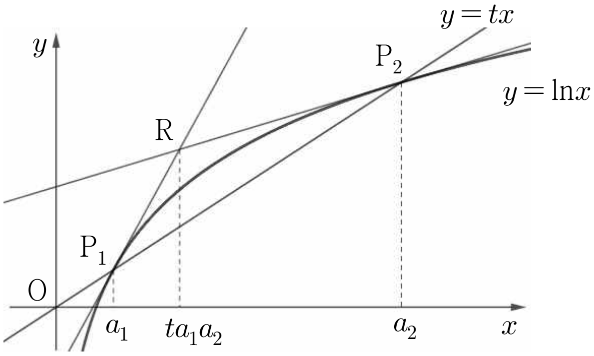
따라서 $\ln\alpha=1$이므로 $\alpha=e$이다.

즉, 직선 $y=tx$와 곡선 $y=\ln x$가 두 점에서 만날 t의 범위는 $0<t<\frac{1}{e}$이고 $\beta=\frac{1}{e}$이다.

[2]

(1)

직선 $y=tx$와 곡선 $y=\ln x$가 만나는 두 점은 각각 $(a_1,\ ta_1)=(a_1,\ \ln a_1)$, $(a_2,\ ta_2)=(a_2,\ \ln a_2)$이다.



P_1에서 접하는 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{a_1}x+ta_1-1$이고 P_2에서 접하는 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{a_2}x+ta_2-1$이기 때문에 두 접선이 만나는 점 R의 좌표는 $(ta_1a_2,\ t(a_1+a_2)-1)$이다.

점 $\mathrm{Q}_1(ta_1a_2,\ ta_1)$과 점 $\mathrm{Q}_2(a_2,\ t(a_1+a_2)-1)$에 대하여 $\theta_1=\angle\mathrm{P}_1\mathrm{RQ}_1$, $\theta_2=\angle\mathrm{P}_2\mathrm{RQ}_2$라 두면 $\tan\theta_t=\tan\left(\theta_1+\theta_2+\frac{\pi}{2}\right)$이다. 그러면 $\tan\theta_1=a_1$이고 $\tan\theta_2=\frac{1}{a_2}$이다. 따라서

$$|\tan\theta_t|=\left|\frac{\tan\theta_1\tan\theta_2-1}{\tan\theta_1+\tan\theta_2}\right|=\frac{a_2-a_1}{1+a_1a_2}$$

이므로 $k=1$, $l=1$이고 $k+l=2$이다.

두 접선의 기울기가 $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$ 이므로 $|\tan\theta_t| = \left| \dfrac{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}}{1 + \frac{1}{a_1} \times \frac{1}{a_2}} \right| = \dfrac{a_2 - a_1}{1 + a_1 a_2}$ 이다.

(2)

두 접선이 만나는 점 R의 좌표는 $(ta_1a_2,\ t(a_1+a_2)-1)$ 이므로

$$S_t = \int_{a_1}^{ta_1a_2} \left(\frac{1}{a_1}x + ta_1 - 1 \right) dx + \int_{ta_1a_2}^{a_2} \left(\frac{1}{a_2}x + ta_2 - 1 \right) dx - \int_{a_1}^{a_2} \ln x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}(a_2 - a_1)(1 - t^2 a_1 a_2)$$

이다. 따라서 $m=1$, $n=-1$ 이므로 $m \times n = -1$ 이다.

[3]

(1)

함수 $f(x) = \ln x - tx$ 을 미분하면 $f'(x) = \frac{1}{x} - t$ 이기 때문에 f 는 $x = \frac{1}{t}$ 에서 최댓값을 갖고 이때 함숫값은 $f(t^{-1}) = -\ln t - 1 > 0$ 이다.

$t^{-1} < t^{-\frac{5}{3}}$ 이고 $f\left(t^{-\frac{5}{3}}\right) = -t^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{5}{3}t^{\frac{2}{3}}\ln t + 1\right)$ 이다.

$g(s) = \frac{5}{3}s^{\frac{2}{3}}\ln s + 1$ 라 두면 $g'(s) = \frac{5}{3}s^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\ln s + 1\right)$ 이기 때문에 $s = e^{-\frac{3}{2}}$ 에서 최솟값을 갖는다. $g\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{5}{2e} + 1 > 0$ 이기 때문에 모든 $s > 0$ 에 대하여 $g(s) > 0$ 이다.

즉 $t^{-1} < a_2 < t^{-\frac{5}{3}}$ 이다.

(참고) $f(t^{-1}) > 0$, $f\left(t^{-\frac{5}{3}}\right) < 0$ 이므로 제시문 (라)에 의해 $f(a_2) = 0$ 을 만족하는 a_2 가 $t^{-1} < a_2 < t^{-\frac{5}{3}}$ 에 존재한다.

함수 $f(x) = \ln x - tx$ 는 a_1 과 a_2 에서 근을 갖고 $1 < a_1 < e$ 이다. [2]의 (1), (2)에 의

해 $\dfrac{x_t\,|\tan\theta_t\,|}{tS_t}=\dfrac{2a_1a_2}{(1-t^2a_1a_2)(1+a_1a_2)}$ 이다.

$1<a_1<e$ 이고 $t^{-1}<a_2<t^{-\frac{5}{3}}$ 이기 때문에 $t^{-1}<a_1a_2<e\,t^{-\frac{5}{3}}$ 이다.

즉 $\lim\limits_{t\to 0+}t^2a_1a_2=0$ 이고 $\lim\limits_{t\to 0+}a_1a_2=\infty$ 이므로 $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{x_t\,|\tan\theta_t\,|}{tS_t}=2$ 이다.

18번 문항 해설

(1) $0 < x < 1$, $h(x) = \ln x + \frac{1}{\sqrt{x}}$라 하면 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}}$

$h'(x) = 0$에서 $x = \frac{1}{4}$이므로, $0 \searrow \frac{1}{4} \nearrow 1$

최솟값(극솟값) $h\left(\frac{1}{4}\right) = -2\ln 2 + 2 > 0$이므로 $h(x) > 0$, $\therefore \ln|x| > -\frac{1}{\sqrt{x}}$

(2) $0 < x < 1$일 때 $\ln|x| > -\frac{1}{\sqrt{x}}$이므로 $-\sqrt{x} < x\ln x < 0$인데,

$$\lim_{x\to 0+}\sqrt{x} = 0\text{이므로 } \lim_{x\to 0+} f(x) = 0$$

$-1 < x < 0$일 때 $-x = t$로 치환하면 $0 < t < 1$, $f(x) = f(-t) = -kt\ln t = -f(t)$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{t\to 0+}(-f(t)) = -\lim_{t\to 0+} f(t) = 0$$

19번 문항 해설

(1) $f(x)=\dfrac{e^x}{kx^2+x+1}$, $f'(x)=\dfrac{e^x x(kx-2k+1)}{(kx^2+x+1)^2}=0$에서 $x=0$ 또는 $\dfrac{2k-1}{k}$

(i) $k=\dfrac{1}{2}$이면 $f'(x)\geq 0$이므로 극값이 없다.

(ii) $k>\dfrac{1}{2}$이면 극댓값 $f(0)=1$, 극솟값 $f\left(\dfrac{2k-1}{k}\right)=\dfrac{1}{4k-1}e^{\frac{2k-1}{k}}$

(2) $y=\dfrac{e^x}{\frac{1}{2}x^2+x+1}$이면 (1)에서 $k=\dfrac{1}{2}$일 때이므로 $x>0$에서 $y'>0$이므로 증가함수이고

$x=0$이면 $y=1$이므로 $e^x>\dfrac{1}{2}x^2+x+1$, 즉 $e^x>\dfrac{1}{2}x^2$,

$\therefore\ 0<\dfrac{x}{e^x}<\dfrac{2}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$

(3) $x<0$이면 $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{g(x)}{x}=0$이고, $x>0$이면 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^t}=0$

$\therefore\ g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$ (미분가능하다.)

20번 문항 해설

(1) $g(a)=a$이면 주어진 방정식의 실근 $x=a$가 존재하고, $g(b)=b$이면 실근 $x=b$가 존재한다.

$g(a)\neq a$, $g(b)\neq b$라 가정하자.

함수 $f(x)=g(x)-x$라고 하면, 연속함수의 차는 연속함수 이므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이다. $a\leq g(x)\leq b$이므로 다음이 성립한다.

$f(a)-a>0$, $f(b)=g(b)-b<0$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 (a,b)사이에 적어도 하나 존재한다. 즉, $g(c)=c$인 c가 (a,b)에 적어도 하나 존재한다.

(2) 방정식 $g(x)=x$의 서로 다른 근 α와 $\beta(\alpha<\beta)$가 존재한다고 가정하자. 그러면 $g(\alpha)=\alpha$, $g(\beta)=\beta$이다. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분가능하므로 평균값정리에 의하여

$$g'(c)=\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}=1$$

가 성립하는 $c\in(\alpha,\beta)$가 존재한다. 그러나 조건에서 $|g'(x)|<1$이므로 모순이다. 따라서 $\alpha=\beta$ 즉, 방정식 $g(x)=x$의 근이 존재하면 오직 하나이다.

21번 문항 해설

(1) $f(x+y)-f(x) \ge f(y)-(xy-1)^2$

$x=0$, $y=0$일 때 $f(0) \le 1$이고 문제에서 $f(0) \ge 1$이므로 $f(0)=1$

(2) 주어진 부등식으로부터

$y>0$일 때

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y} \ge \frac{f(y)-1}{y}+2x-x^2y \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y} \le \frac{f(y)-1}{y}+2x-x^2y \quad \cdots\cdots \text{②}$$

미분계수의 정의와 문제의 조건으로부터

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}=f'(0)=1$$

함수의 극한의 대소관계에 의하여

①에서 $\displaystyle\lim_{y\to 0+}\frac{f(x+y)-f(x)}{y} \ge 2x+1$, ②에서 $\displaystyle\lim_{y\to 0+}\frac{f(x+y)-f(x)}{y} \le 2x+1$

그러므로 $\displaystyle f'(x)=\lim_{y\to 0+}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=2x+1$

따라서 $f(x)=x^2+x+C$ (C는 상수)이고, 조건에서 $f(0)=1$이므로 $f(x)=x^2+x+1$이다.

22번 문항 해설

(1) $f(x+y)=f(x)+f(y)$에 $x=y=0$을 대입하면 $f(0)=2f(0)$, 즉 $f(0)=0$이다.

(2) $|f(x)| \le x^2$ 이므로 $x \ne 0$이면 $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \le |x|$이므로 $-|x| \le \dfrac{f(x)}{x} \le |x|$

$$-\lim_{x\to 0}|x| \le \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \le \lim_{x\to 0}|x|$$

여기서 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$이다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하고 $f'(0)=0$이다.

(3) $f(x+h)-f(x)=f(h)$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=f'(0)=0$$

따라서 $f(x)$는 모든 실수 x에서 미분 가능하고 $f'(x)=0$이다.

(4) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=0$이므로 $f(x)$는 상수함수인데, $f(0)=0$이므로 $f(x)=0$이다.

23번 문항 해설

[1]

함수 $f(x)$, $g(x)$의 한 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라고 하고, $H(x)=G(x)-F(x)$라고 놓자. 그러면 함수 $H(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)의 모든 x에 대하여

$$H'(x)=G'(x)-F'(x)=g(x)-f(x)>0$$

이다. 따라서 제시문 [나]에 의하여 함수 $H(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 증가한다. 그러므로

$$\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx=[G(b)-G(a)]-[F(b)-F(a)]=H(b)-H(a)>0$$

이므로

$$\int_a^b f(x)\,dx<\int_a^b g(x)\,dx$$

이다.

(마지막 부분의 다른 풀이) $H(x)$가 함수 $g(x)-f(x)$의 한 부정적분이므로

$$\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b \{g(x)-f(x)\}\,dx=H(b)-H(a)>0$$

[2]

k가 임의의 자연수라고 할 때, 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[k, k+1]$에서 증가하므로 열린구간 $(k, k+1)$의 모든 x에 대하여 $f(k)<f(x)<f(k+1)$이다. 따라서 문항 [2-1]의 결과에 의하여

$$f(k)=\int_k^{k+1} f(k)\,dx<\int_k^{k+1} f(x)\,dx<\int_k^{k+1} f(k+1)\,dx=f(k+1)$$

이다. 임의의 자연수 n에 대하여 $k=1, 2, \cdots, n$일 때의 부등식을 모두 더하면,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)<\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)\,dx=\int_1^{n+1} f(x)\,dx<\sum_{k=1}^{n} f(k+1)=\sum_{k=1}^{n+1} f(k)-f(1)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)<\int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

이고

$$f(1)+\int_1^{n+1} f(x)\,dx<\sum_{k=1}^{n+1} f(k)$$

이다. 그러므로 문제의 두 부등식 중에서 오른쪽 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립하고, 왼쪽 부등식은 $n\geq 2$일 때 성립한다. 또한 $n=1$일 때는 왼쪽 부등식이

등식으로 성립한다.

[3]

자연수 p에 대하여 함수 $f(x)=x^p$은 구간 $[1,\infty)$에서 연속이고 증가한다. 따라서 문항 [2]의 결과에 의하여, 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{n^{p+1}+p}{p+1}=1+\int_1^n x^p\,dx \le \sum_{k=1}^n k^p < \int_1^{n+1} x^p\,dx = \frac{(n+1)^{p+1}-1}{p+1}$$

이므로

$$\frac{1}{p+1}\left(1+\frac{p}{n^{p+1}}\right) \le \frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^n k^p < \frac{1}{p+1}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}-\frac{1}{n^{p+1}}\right\}$$

이다. 그런데

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}=0 \text{이고 } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}=1$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^n k^p=\frac{1}{p+1}$$

[4]

함수 $f(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$은 구간 $[1,\infty)$에서 연속이고 증가한다. 따라서 문항 [2]의 결과에 의하여, 모든 자연수 n에 대하여

$$(-1)+\int_1^n\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx \le \sum_{k=1}^n\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) < \int_1^{n+1}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

이고

$$2(\sqrt{n+1}-1)=\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{k}} \le 1+\int_1^n\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2\sqrt{n}-1$$

이므로

$$2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{k}} \le 2-\frac{1}{\sqrt{n}}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{k}}=2$$

24번 문항 해설

[1]

함수 $f(x)=a\sqrt{1+e^x}+\ln\left(\sqrt{1+e^x}-b\right)-\ln\left(\sqrt{1+e^x}+b\right)$를 x에 대해 미분하면

$$f'(x)=\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\left(a+\frac{1}{\sqrt{1+e^x}-b}-\frac{1}{\sqrt{1+e^x}+b}\right)=\sqrt{1+e^x}$$

따라서

$$e^x\left\{a+\frac{2b}{(1+e^x)-b^2}\right\}=2(1+e^x)$$

즉, $e^x\left[a\left\{(1+e^x)-b^2\right\}+2b\right]=2(1+e^x)\left\{(1+e^x)-b^2\right\}$

전개하면 $ae^{2x}+\left\{a(1-b^2)+2b\right\}e^x=2e^{2x}+2(2-b^2)e^x+2(1-b^2)$이고 양변의 계수를 비교하면 $a=2,\ b=1$이다. 따라서 $a+b=3$이다.

[2]

$$g(k)=\int_k^{k+e^{-k}}\sqrt{1+e^{2t}}\,dt=\frac{1}{2}\int_{2k}^{2k+2e^{-k}}\sqrt{1+e^x}\,dx\quad(\leftarrow x=2t)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{f(2k+2e^{-k})-f(2k)\right\}$$

이다. 평균값 정리에 의하여

$$g(k)=\frac{1}{2}f'(c)2e^{-k}=e^{-k}f'(c)=e^{-k}\sqrt{1+e^c}$$

를 만족하는 c가 열린구간 $(2k,\ 2k+e^{-k})$에 적어도 하나 존재한다. 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가한다. 그러므로

$$e^{-k}\sqrt{1+e^{2k}}<g(k)=e^{-k}\sqrt{1+e^c}<e^{-k}\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}$$

이고 $\lim\limits_{k\to\infty}e^{-k}\sqrt{1+e^{2k}}=\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{1+e^{-2k}}=1,\ \lim\limits_{k\to\infty}e^{-k}\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}=\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{e^{2e^{-k}}+e^{-2k}}=1$

이다. 따라서 $\lim\limits_{k\to\infty}g(k)=1$이다.

(다른 풀이)

[1]에 의하여

$$g(k)=\frac{1}{2}\{f(2k+2e^{-k})-f(2k)\}=\left[\sqrt{1+e^x}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)\right]_{2k}^{2k+2e^{-k}}$$

$$=\left(\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}-\sqrt{1+e^{2k}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}-1}{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}+1}\times\frac{\sqrt{1+e^{2k}}+1}{\sqrt{1+e^{2k}}-1}\right)\cdots\cdots(1)$$

한편

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}-\sqrt{1+e^{2k}}\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{e^{2k}\left(e^{2e^{-k}}-1\right)}{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}+\sqrt{1+e^{2k}}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{e^{k}\left(e^{2e^{-k}}-1\right)}{\sqrt{e^{-2k}+e^{2e^{-k}}}+\sqrt{e^{-2k}+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}e^{k}\left(e^{2e^{-k}}-1\right)=\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{2l}=1\ \cdots\cdots(2)$$

$(l=e^{-k}$로 치환$)$

이고

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}-1}{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}+1}\times\frac{\sqrt{1+e^{2k}}+1}{\sqrt{1+e^{2k}}-1}\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{e^{-2k}+e^{2e^{-k}}}-e^{-k}}{\sqrt{e^{-2k}+e^{2e^{-k}}}+e^{-k}}\times\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{e^{-2k}+1}-e^{-k}}{\sqrt{e^{-2k}+1}+e^{-k}}=1\times 1=1$$

따라서

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}-1}{\sqrt{1+e^{2k+2e^{-k}}}+1}\times\frac{\sqrt{1+e^{2k}}+1}{\sqrt{1+e^{2k}}-1}\right)=\ln 1=0\ \cdots\cdots(3)$$

식 (1), (2), (3)으로부터 $\lim_{k\to\infty}g(k)=1+0=1$이다.

[3]

$G(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면 $F(x)=G(x)+C$ (C는 상수)가 성립한다. 따라서

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}F(2x)=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{x}{2}}F(x)=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{x}{2}}\{G(x)+C\}=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{x}{2}}G(x)$$

의 값을 구하면 된다. 문제 1에 의해

$$G(x) = 2\int_0^x \sqrt{1+e^t}\,dt + \int_0^x \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1}\right)dt$$
$$= 2\{f(x)-f(0)\} + \int_0^x \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1}\right)dt \ \cdots\cdots (4)$$

이다. 한편 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 $f'(x)$가 증가하고, 구간 $(-1,\ \infty)$에서 $\dfrac{x-1}{x+1}$도 증가하므로 임의의 양수 t에 대하여

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \le \frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1} \le 1$$

$$-\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) \le \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right) \le 0 \ \cdots\cdots (5)$$

제시문 <라>에 의하여, 임의의 양수 x에 대하여

$$-\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)x \le \int_0^x \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)dt \le 0$$

제시문 <다>에 의하여

$$0 = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}}x \le \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}}\int_0^x \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1}\right)dt \le 0$$

식 (4), (5)와 제시문 <다>에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}}G(x) &= 2\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}}\{f(x)-f(0)\} + \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}}\int_0^x \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^t}-1}{\sqrt{1+e^t}+1}\right)dt \\ &= 2\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}} f(x) + 0 = 2\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}} f(x) \\ &= 4\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{1+e^x} + 2\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right) \\ &= 4+0=4\end{aligned}$$

이다.

25번 문항 해설

$S_n = \int_0^{\pi} \left| e^{-x} \sin nx \right| dx$ 이다. 닫힌 구간 $[0, \pi]$ 에서 방정식 $e^{-x}\sin nx = 0$ 의 근은

$$x = 0,\ \frac{\pi}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)\pi}{n},\ \pi$$

이다. $k=1,\ \cdots,\ n$ 에 대해

$$a_k = \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left| e^{-x}\sin nx \right| dx = \left| \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} e^{-x}\sin nx\, dx \right|$$

라 하면 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 이다. 부분적분법을 이용하면

$$\int e^{-x}\sin nx\, dx = -\frac{e^{-x}(\sin nx + n\cos nx)}{n^2+1}$$

이다. 따라서 $a_k = \left| \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} e^{-x}\sin nx\, dx \right| = \frac{ne^{-\frac{k\pi}{n}}}{n^2+1}\left(1+e^{\frac{\pi}{n}}\right)$ 이므로

$$S_n = \frac{n}{n^2+1}\sum_{k=1}^{n}\left\{e^{-\frac{(k-1)\pi}{n}} + e^{-\frac{k\pi}{n}}\right\}$$

$$= \frac{n}{n^2+1}\left[\left\{\left(e^0 + e^{-\frac{\pi}{n}}\right) + \left(e^{-\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{2\pi}{n}}\right) + \cdots + \left(e^{-\frac{(n-1)\pi}{n}} + e^{-\frac{n\pi}{n}}\right)\right\} + \left(e^{-\frac{n\pi}{n}} - e^{-\frac{n\pi}{n}}\right)\right]$$

$$= \frac{2n}{n^2+1}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k\pi}{n}} + \frac{n}{n^2+1}\left(1-e^{-\pi}\right)$$

이다. $0 \le 1-e^{-\pi} \le 1$ 이므로 수열의 극한값의 대소 관계에 의해

$$\lim_{n\to\infty} 0 \le \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\left(1-e^{-\pi}\right) \le \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0$$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\left(1-e^{-\pi}\right) = 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+1} = 2$ 이고, 정적분과 급수의 관계에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k\pi}{n}} = \int_0^1 e^{-\pi x}dx = \frac{1-e^{-\pi}}{\pi}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k\pi}{n}} + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\left(1-e^{-\pi}\right)$$

$$= \frac{2\left(1-e^{-\pi}\right)}{\pi}$$

이다.

26번 문항 해설

[1]

함수 $y=\frac{x}{4}$의 그래프와 $y=f(x)$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점은

$(0,\ 0)$, $\left(\frac{8}{5},\ \frac{2}{5}\right)$, $\left(\frac{8}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{16}{5},\ \frac{4}{5}\right)$

이고 영역 P 는 두 개의 삼각형으로 이루어져 있다.

첫 번째 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{8}{5}=\frac{3}{5}$,

두 번째 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{16}{5}-\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{15}$

$g(4)=\frac{3}{5}+\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$

[2]

자연수 $1\le l\le n$에 대하여 영역 P에서 x축의 닫힌 구간 $[2l-2, 2l]$위에 놓인 부분은 다음의 세 점이다.

$(2l-1,\ 1)$, $\left(\frac{(2l-2)m}{m-1},\ \frac{2l-2}{m-1}\right)$, $\left(\frac{2lm}{m+1},\ \frac{2l}{m+1}\right)$

을 꼭짓점으로 하는 삼각형이다. 따라서 이 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2l-1}{m}\right)\times\left(\frac{2lm}{m+1}-\frac{(2l-2)m}{m-1}\right)=1+2\left(\frac{(l-1)^2}{m-1}-\frac{l^2}{m+1}\right)$이고

$g(m)=\sum_{l=1}^{n}\left(1+\frac{2(l-1)^2}{m-1}-\frac{2l^2}{m+1}\right)=n+\frac{1}{3}\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{m-1}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{m+1}\right)$

따라서 $3(n-g(m))=\frac{n(n+1)(2n+1)}{m+1}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{m-1}$이다.

따라서 $f(n)=n(n+1)(2n+1)$이다.

[3]

부등식 $2n-1\le m\le 2n+1$을 만족하는 n에 대하여

$$1-\frac{1}{m}\le\frac{2n}{m}\le 1+\frac{1}{m}$$

따라서 $\lim_{m\to\infty}\frac{n}{m}=\frac{1}{2}$이 성립한다. [수학2-ⅱ]에서

$\frac{g(m)}{m}=\frac{n}{m}-\frac{1}{3}\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{m+1}-\frac{(n-1)(2n-1)}{m-1}\right)$

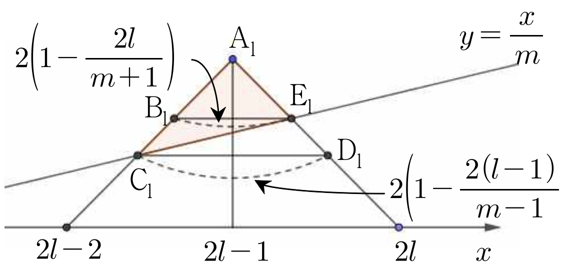
$=\frac{n}{m}-\frac{1}{3}\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{6mn-4n^2-2}{(m+1)(m-1)}\right)$

$$=\frac{n}{m}-\frac{1}{3}\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{6\frac{n}{m}-4\left(\frac{n}{m}\right)^2-\frac{2}{m^2}}{\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)}\right)$$

따라서 $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{g(m)}{m}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\left(6\times\frac{1}{2}-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{6}$

[별해]

m이 충분히 클 때, m을 근사적으로 $2n$이라 할 수 있다.
닫힌 구간 $[2l-2,\ 2l]\ (l=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$에서 직선 $y=\frac{x}{m}$이 $y=f(x)$와 만나는 점을 차례로 C_l, E_l이라 하고, 점 C_l, E_l에서 x축에 평행한 선과 $y=f(x)$와 만나는 점을 각각 D_l, B_l



이라 하면 l번째 삼각형의 넓이는

$(\triangle A_lB_lE_l$의 넓이$)<(\triangle A_lC_lE_l$의 넓이$)<(\triangle A_lC_lD_l$의 넓이$)$

$\left(1-\frac{2l}{m+1}\right)^2<(\triangle A_lC_lE_l$의 넓이$)<\left(1-\frac{2(l-1)}{m-1}\right)^2$

$$\sum_{l=1}^{n}\left(1-\frac{2l}{m+1}\right)^2<g(m)<\sum_{l=1}^{n}\left(1-\frac{2(l-1)}{m-1}\right)^2$$

양변을 m으로 나누고 $m\to\infty$를 하면

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{n}\left(1-\frac{2l}{m+1}\right)^2\le\lim_{m\to\infty}\frac{g(m)}{m}\le\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{n}\left(1-\frac{2(l-1)}{m-1}\right)^2$$

$m=2n$을 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{l=1}^{n}\left(1-\frac{2l}{2n+1}\right)^2\le\lim_{m\to\infty}\frac{g(m)}{m}\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{l=1}^{n}\left(1-\frac{2(l-1)}{2n-1}\right)^2$$

$\frac{2l}{2n+1}<\frac{l}{n}$이고, $\frac{2(l-1)}{2n-1}>\frac{2(l-1)}{2n}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{l=1}^{n}\left(1-\frac{l}{n}\right)^2\le\lim_{m\to\infty}\frac{g(m)}{m}\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{l=1}^{n}\left(1-\frac{(l-1)}{n}\right)^2$$

에서 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{l=1}^{n}\left(1-\frac{l}{n}\right)^2=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{l=1}^{n}\left(1-\frac{(l-1)}{n}\right)^2=\int_0^1\frac{1}{2}(1-x)^2dx=\frac{1}{6}$ 이므로

제시문3에 의해 $\lim_{m \to \infty} \frac{g(m)}{m} = \frac{1}{6}$ 이다.

27번 문항 해설

[1]

함수 g를 미분하면

$$g'(x)=\cos x-\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\cos x-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

이다. 제시문 (가)를 이용하면, $0<x<1$일 때

$$g'(x)=\cos x-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}>\sqrt{1-x^2}-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=\sqrt{1-x^2}\left(1-\frac{\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)^2}\right)>0$$

이므로 g는 증가한다.

[2]

함수 $h(x)=\sin x-\frac{1}{x+n}$에 대하여 제시문 (가)의 $\sin x<x\,(0<x<1)$을 이용하면

$h\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=\sin\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)-\frac{1}{\frac{1}{n+\sqrt{n}}+n}<\frac{1}{n+\sqrt{n}}-\frac{1}{\frac{1}{n+\sqrt{n}}+n}<0$ 임을 알 수 있다. 문제 [1]번의 결과와 $g(0)=0$인 사실을 이용하면, $0<x\le 1$일 때 $g(x)>0$이므로

$\sin x>\frac{x}{1+x^2}$ 이다. 이 부등식을 이용하면

$$h\left(\frac{1}{n}\right)=\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{\frac{1}{n}+n}>\frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}-\frac{1}{\frac{1}{n}+n}=0$$

이다. 따라서 제시문 (나)에 의해

$\frac{1}{n+\sqrt{n}}<a_n<\frac{1}{n}$ 임을 알 수 있다.

[3]

문제 [2]의 결과와 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+\sqrt{n}}=0,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=1$를 이용하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\qquad \lim_{n\to\infty}na_n=1$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_0^{a_n}\sin x\,dx=\lim_{n\to\infty}n^2(1-\cos a_n)=\lim_{n\to\infty}n^2a_n^2\cdot\frac{\sin^2 a_n}{a_n^2}\cdot\frac{1}{1+\cos a_n}=\frac{1}{2}$$

이다.

28번 문항 해설

[1]

가정에 의해 수열 $\{a_n\}$이 $\dfrac{1}{(a_n)^2}<1+\dfrac{1}{(a_n)^2}\le\dfrac{1}{(a_{n+1})^2}$ 이므로 $a_n>a_{n+1}$이다.

$f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{1}{a_{n+1}}\sqrt{x^2-(a_{n+1})^2}$ 이라 하면 $f(a_{n+1})=\ln(1+a_{n+1})>0$이고,

제시문 1에 의해

$$f(a_n)=\ln(1+a_n)-\frac{1}{a_{n+1}}\sqrt{(a_n)^2-(a_{n+1})^2}<a_n-\sqrt{\frac{(a_n)^2}{(a_{n+1})^2}-1}\le 0$$

$$\left(\because\ 1+\frac{1}{(a_n)^2}\le\frac{1}{(a_{n+1})^2}\right)$$

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a_{n+1},\ a_n]$에서 연속이고 $f(a_n)<0<f(a_{n+1})$이므로 사잇값 정리와 그림에 의하여 $f(x)=0$의 한 개의 근 b_n이 열린 구간 $(a_{n+1},\ a_n)$에 존재한다.

따라서 $a_{n+1}<b_n<a_n$이다.

[2]

제시문 2에 의해

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{(a_n)^2}&=1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le 1+n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\\&=1+(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\\&=1+\frac{1}{(a_{n+1})^2}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<\frac{1}{(a_{n+1})^2}\end{aligned}$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 [1]의 조건을 만족한다. 따라서 [1]에 의해

$a_{n+1}<b_n<a_n$이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,a_n=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ 이고

수열의 극한의 성질에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,b_n=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ 이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,b_n\times\dfrac{\ln(1+b_n)}{b_n}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ (단, e는 자연상수)이다.