**22번 문항(2023 부산대 논술기출)**

자연수 $n$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

$x \geq 0$에서 부등식 $x^n e^{1-x} \leq n!$이 성립함을 보이시오.

보이는 방법은 2가지라고 생각하고 본인이 얼마나 풀 수 있는지 한번 같이 해봅시다.

1. 최댓값을 이용하는 부등식의 증명

먼저, $f(x) = x^n e^{1-x}$라고 두고 생각해봅시다. 함수의 최댓값을 찾기 위해 미분해보고 증감표를 그려보면 아래와 같습니다

$f'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^n e^{1-x} = (n-x)x^{n-1}e^{1-x}$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

따라서, $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값 $f(n) = n^n e^{1-n}$을 가지고, 이는 $x \geq 0$에서 $f(x)$의 최댓값이 되겠네요.

즉 우리가 구해야 되는 상황은 $n^n e^{1-n} \leq n!$ 입니다

논술에서 팩토리얼을 다루는 방법은 $\ln$을 씌우는 것이 거의 다수입니다

그리고 $\ln x$는 양의 실수 전체집합에서 항상 증가하는 함수이므로 부등식의 방향에 영향을 주지 못하겠죠? 따라서 양 변에 $\ln$을 씌우면

$\ln\left(n^n e^{1-n}\right) \leq \ln(n!)$

$n\ln n + 1 - n \leq \sum_{k=1}^{n} \ln k$

이상태론 비교하기 힘듭니다. 하지만 혹시 눈썰미가 있다면 $n\ln n - n + 1$의 꼴을 보고 $\ln x$가 적분된게 아닐까?를 의심해볼 수 있죠. 그렇다면 비교하는 함수의 종류는 동일해집니다 (발견을 $\int^n \ln x dx$로 접근 후 아래 끝에 무엇을 넣어야 $n\ln n - n + 1$이 나오는지를 관찰해보는 순서가 좋아요)

$\int_1^n \ln x dx \leq \sum_{k=1}^{n} \ln k$

자 이제는 이것을 어떻게 보여야 할지 어렵습니다.

자 그래서 이런 성질을 한번 사용해봅시다.

‘ $y=\ln x$ 는 증가함수이므로 $\int_{k-1}^{k}\ln x dx< \ln k$ 이다 ’

이에 대한 증명은 평균값 정리로 보일 수 있는데요

$\ln x$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 평균값 정리에 의하여

$$\int_{k-1}^{k}\ln x dx= F(k)-F(k-1)=\frac{F(k)-F(k-1)}{k-(k-1)}=F'(c)=\ln c \quad (k-1<c<k)$$

그리고 $\ln c<\ln k$이므로 성립합니다

그리고 $\int_{k-1}^{k}$를 $k=2$부터 $k=n$까지 더해버리면 $\int_{1}^{n}$이 되므로

$k$에 $2,\ 3,\ \cdots,\ n$을 차례로 대입하여 더하면 $\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\ln x dx< \sum_{k=2}^{n}\ln k$이 됩니다

그리고 $\int_{1}^{n}\ln x dx \le \sum_{k=1}^{n}\ln k=\sum_{k=2}^{n}\ln k$이므로 참입니다

즉, $x^n e^{1-x} \le n^n e^{1-n} \le n!$가 성립하네요!

2. 수학적 귀납법을 이용하는 풀이

$f'(x)=nx^{n-1}e^{1-x}-x^n e^{1-x}=(n-x)x^{n-1}e^{1-x}$ 이므로

$x\ge 0$ 에서 $f(x)$ 의 증감표는 아래와 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | + | 0 | − |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | | ↘ |

따라서, $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값 $f(n)=n^n e^{1-n}$을 가진다.

이는 $x\ge 0$ 에서 $f(x)$의 최댓값이 된다.

이제 $n^n e^{1-n}\le n!$ 임을 보이자. 까지는 동일합니다

어디서 귀납법을 사용할 수 있는지에 대한 힌트를 얻을 수 있을까요?

$n$은 자연수이고 해당되는 변수는 전부 $n$만 존재하기에 귀납법을 써보면 어떨까? 라는 생각이 가능합니다

귀납법의 순서는 아래의 3가지만 기억합시다

① $n=1$일 때 성립하는지 확인,

② $n=k$가 성립한다고 가정

③ $n=k+1$이 성립함을 ②를 이용하여 증명

자 한번 보여봅시다

$n=1$ 일 때 $(\text{좌변})=1^1e^0=1$, $(\text{우변})=1!=1$이므로 성립

$n=k(k\ge 1)$ 일 때, $k^ke^{1-k}\le k!$ 이 성립한다고 가정
$n=k+1$을 대입하면
$(k+1)^{k+1}e^{-k}\le (k+1)!$
자 여기서 최대한, $n=k$일때의 식을 이용하기 위해 식을 변형시켜봅시다.
제일 특수한 꼴이 $k!$이기도 하니, 양 변에서 $k+1$을 나눠봅시다.
$(k+1)^ke^{-k}\le k!$
이 부등식만 가지고 생각하긴 어려우나, 부등식을 간접적으로 증명해봅시다
(계속해서 $n=k$의 부등식을 사용하려는 노력이 필요합니다)

부등식의 간접증명
예를 들어 $1<3$을 보이기 힘들다고 생각해봅시다
한번에 증명이 안된다고 할 때, 간접적으로
$1<2$, $2<3$이 존재한다면 $1<2<3$을 이용하면 한결 편하게 계산가능합니다
이를 이용해보자면, $(k+1)^ke^{-k}\le k^ke^{1-k}\le k!$ 이면 보이기 편하다는 뜻이죠
그렇다면 $(k+1)^ke^{-k}\le k^ke^{1-k}$를 보이면 되는데, 최대한 간단하게 정리해 줄 수 있는 것들은 날리고, 비슷한것들은 한쪽에 몰아준다면
$\left(\frac{k+1}{k}\right)^k=\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\le e$임을 보이면 됩니다. 저번에 풀어봤던 문제와 상당히 비슷하죠?
$g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\ (x>0)$라 한다면 $g(x)$의 최댓값이 $e$보다 작거나 같음을 보입시다
양변에 자연로그를 취하면, $\ln g(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=x\{\ln(x+1)-\ln x\}$이고 미분하면
$\frac{g'(x)}{g(x)}=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}$ 이므로 $g'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left\{\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}\right\}$이겠네요
$g(x)>0$이므로 $h(x)=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}$ 의 부호만 확인하면 되겠죠?
미분해서 보이거나, 적분으로 해석해서 풀거나 혹은 평균값 정리를 이용하거나

① 미분을 이용하는 방법
$h(x)=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x+1}\ (x>0)$이라 두면
$h'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}<0$ 이고 $\lim_{x\to\infty}h(x)=0$ 이므로 $h(x)>0$ 이고
따라서, $g'(x)>0$ 이므로 $g(x)$는 증가함수이고 $\lim_{x\to\infty}g(x)=e$ 이므로 $g(x)<e$ 이겠네요
② 적분으로 해석해서 푸는 방법

$\ln(x+1)-\ln x-\dfrac{1}{x+1}=\displaystyle\int_x^{x+1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{x+1}\right)dx$ 이고 $x<t<x+1$에서 $\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{x+1}>0$이므로 $\displaystyle\int_x^{x+1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{x+1}\right)dx>0$이므로 $g'(x)>0$이겠네요. 그 이후는 ①과 풀이가 동일합니다

③ 평균값 정리를 이용하는 방법

다음번에 보여드릴 평균값정리를 미리 연습해보죠

평균값 정리에 의하여

$\ln(x+1)-\ln x=\dfrac{\ln(x+1)-\ln x}{x+1-x}=\dfrac{1}{c}\quad(x<c<x+1)$

이고 $\ln(x+1)-\ln x-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{x+1}>0$이므로 참입니다.

따라서, $(k+1)^k e^{-k}\le k^k e^{1-k}\le k!$ 이므로 주어진 부등식은 참입니다!