2024 3월 고3 수학 풀이

2024년 4월 4일 목요일 오전 11:25

2024학년도 3월 고3 전국연합학력평가 문제지 1

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[3]{54}\times2^{\frac{5}{3}}$의 값은? [2점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$\sqrt[3]{2\times3^3}\times2^{\frac{5}{3}}$

$=2^{\frac{1}{3}}\times3\times2^{\frac{5}{3}}$

$=2^2\times3$

$=12$

2. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+x$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{2h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}f'(3)$ //

$f'(x)=3x^2-6x+1$이므로 $f'(3)=10$

$\therefore \frac{1}{2}f'(3)=5$

3. $\cos\theta>0$이고 $\sin\theta+\cos\theta\tan\theta=-1$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

$\boxed{\cos\theta\tan\theta=\cos\theta\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta}$

$2\sin\theta=-1$ $\begin{cases}\sin\theta=-\frac{1}{2}\\ \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because \cos\theta>0)\end{cases}$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases}2x+a & (x<3)\\ \sqrt{x+1}-a & (x\ge3)\end{cases}$$

이 $x=3$에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$\boxed{\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3+}f(x)=f(3)}$

$6+a=2-a$ $\therefore a=-2$

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=x(3x+2),\quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 3x^2 + 2x$

$\underline{f(x) = x^3 + x^2 + C}$

$f(1) = 6$ 이므로 $2 + \underbrace{C}_{4} = 6$

따라서 $f(0) = C = 4$

6. 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\frac{S_4}{S_2}=5,\quad a_5=48$$

일 때, a_1+a_4의 값은? [3점]

① 39 ② 36 ③ 33 ④ 30 ⑤ 27

$S_4 = \dfrac{a(r^4-1)}{r-1}$, $S_2 = \dfrac{a(r^2-1)}{r-1}$

$\hookrightarrow \dfrac{S_4}{S_2} = \dfrac{r^4-1}{r^2-1} = \dfrac{(r^2+1)\cancel{(r^2-1)}}{\cancel{r^2-1}} = r^2+1$

$r^2+1 = 5$ 이므로 $r=2$ $(\because r>1)$

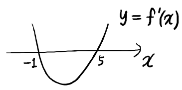
$a_5 = ar^4 = 16a = 48$ $\therefore a=3$

$a_1 + a_4 = a + ar^3 = 3 + 24 = 27$

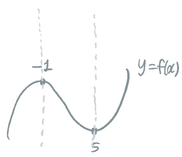
7. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x+1$ 이 닫힌구간 $[a, b]$에서 감소할 때, $b-a$의 최댓값은? (단, a, b는 $a<b$인 실수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5)$



$-1 \le a < b \le 5$ 이므로 $b - a \le 6$



$f'(-1) = f'(5) = 0$ 인데

그러면 등호 떼고 $-1 < a < b < 5$ 여야 하는거 아니냐

하는 사람이 있을까봐 첨언하자면

함수가 감소한다는 것의 엄밀한 정의는

$x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대해 $f(x_1) > f(x_2)$가

항상 성립하는 것이다.

-1과 5를 포함해서 $-1 \le x_1 < x_2 \le 5$로 구간을

잡아도 감소함수의 정의에 위배되는 x_1과 x_2는 전혀 없다.

8. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$(x+1)f(x)+(1-x)g(x)=x^3+9x+1,\quad f(0)=4$$

일 때, $f'(0)+g'(0)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

양변에 $x=0$ 대입

$\underbrace{f(0)}_{4}+g(0)=1$ $\therefore g(0)=-3$

양변 미분

$f(x)+(x+1)f'(x)-g(x)+(1-x)g'(x)$

$=3x^2+9$

위 식에 $x=0$ 대입

$\underbrace{f(0)}_{4}+f'(0)-\underbrace{g(0)}_{-3}+g'(0)=9$

$\therefore f'(0)+g'(0)=2$

직선 l

9. 좌표평면 위의 두 점 $(0, 0)$, $(\log_2 9, k)$를 지나는 직선이 직선 $(\log_4 3)x+(\log_9 8)y-2=0$에 수직일 때, 3^k의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

직선 m

① 16 ② 32 ③ 64 ④ 128 ⑤ 256

직선 l의 기울기 $=\dfrac{k}{\log_2 9}$

직선 m의 기울기 $=-\dfrac{\log_4 3}{\log_9 8}$

두 직선의 기울기가 수직이면 기울기 곱이 -1이므로

$\dfrac{k}{\cancel{\log_2 9}_{\,4}}\times\left(-\dfrac{\cancel{\log_4 3}}{\log_9 8}\right)=-1$

$\log_2 9=\log_{2^2}9^2=\log_4 81=4\log_4 3$

$k=4\log_9 8=\log_9 8^4$

$=\log_3 8^2=\log_3 64$

$\therefore 3^k=64$

10. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-6t-2,\quad v_2(t)=-2t+6$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q가 다시 만날 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

시각 t에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$

$x_1(t)=\int(3t^2-6t-2)\,dt=t^3-3t^2-2t$

$x_2(t)=\int(-2t+6)\,dt=-t^2+6t$

둘 다 $t=0$일 때 원점에 있었기 때문에 적분 상수는 0

$x_1(t_1)=x_2(t_1)$을 만족시키는 t_1을 구하면

$t_1^3-3t_1^2-2t_1=-t_1^2+6t_1$

$t_1^3-2t_1^2-8t_1=0$

$t_1(t_1+2)(t_1-4)=0$ $\therefore t_1=4$

$t=0$부터 $t=4$까지 Q가 움직인 거리는

$\int_0^4|v_2(t)|\,dt=\int_0^4|-2t+6|\,dt$

$=\int_3^4(2t-6)\,dt+\int_0^3(-2t+6)\,dt$

$=1+9=10$

11. 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_6 = -2, \quad \sum_{k=1}^{8}|a_k| = \sum_{k=1}^{8}a_k + 42$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8}a_k$의 값은? [4점]

① 40 ② 44 ③ 48 ④ 52 ⑤ 56

$a_1 \sim a_4$: 확실히 0보다 크거나 같음

a_5 : 공차가 -1일 때만 음수

$a_6 \sim a_8$: 확실히 음수

공차가 -1이면 등식이 성립하지 않으므로 $a_5 \geq 0$ 이다

따라서 $\underbrace{|a_6|}_{-a_6} + \underbrace{|a_7|}_{-a_7} + \underbrace{|a_8|}_{-a_8} = a_6 + a_7 + a_8 + 42$

↳ $a_6 + a_7 + a_8 = -21$

↳ $a_6 + (a_6 + d) + (a_6 + 2d) = -21$

↳ $3\underbrace{a_6}_{-2} + 3d = -21$ $\quad \therefore d = -5$

공차가 -5이므로 $a_n = -5n + k$ (k는 상수) 이고,

$a_6 = -2$를 만족시키려면 $k = 28$이어야 한다.

$\therefore a_n = -5n + 28$

$$\sum_{k=1}^{8} a_k = \sum_{k=1}^{8}(-5k + 28)$$

$$= -5 \times \frac{8 \times 9}{2} + 28 \times 8$$

$$= 44$$

12. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3x + a & (x < 0) \\ 3x + a & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 함수

$$g(x) = \int_{-4}^{x} f(t)\,dt$$

$g'(2) = 0$

가 $x = 2$에서 극솟값을 가질 때, 함수 $g(x)$의 극댓값은? [4점]

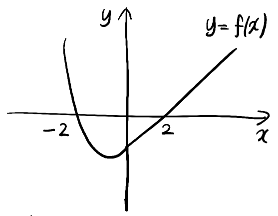
① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

$g'(x) = f(x)$ 이므로 $f(2) = 0$

$x \geq 0$일 때 $f(x) = 3x + a$이므로 $f(2) = 6 + a = 0$

$\therefore a = -6$

따라서 $f(x) = \begin{cases} 3(x-1)(x+2) & (x < 0) \\ 3x - 6 & (x \geq 0) \end{cases}$



$x = -2$에서 $f(x)$ $(= g'(x))$가 $+$에서 $-$로 바뀌므로

$g(x)$는 $x = -2$에서 극댓값 갖는다.

$$g(-2) = \int_{-4}^{-2} f(t)\,dt$$

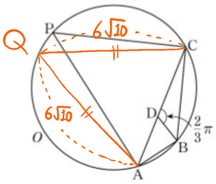
$$= \int_{-4}^{-2} (3t^2 + 3t - 6)\,dt$$

$$= 26$$

13. 그림과 같이

$$2\overline{AB}=\overline{BC},\quad \cos(\angle ABC)=-\frac{5}{8}$$

인 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, $\overline{QA}=6\sqrt{10}$ 이다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 $\angle CDB=\frac{2}{3}\pi$일 때, 삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이는? [4점]



① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{6}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

구하고자 하는 답을 R이라 하자. 사인 법칙에 의해

$$R=\frac{\overline{BC}}{2\sin(\angle CDB)}=\frac{\overline{BC}}{\sqrt{3}} \text{ 이다.}$$

$$\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

즉, $\overline{BC}$를 구하는 것이 목표이다.

삼각형 AQC는 $\overline{QA}=\overline{QC}=6\sqrt{10}$인 이등변삼각형이다.
그리고 $\angle ABC+\angle AQC=\pi$ 이므로

$$\cos(\angle AQC)=\cos(\pi-\angle ABC)$$
$$=-\cos(\angle ABC)=\frac{5}{8} \text{ 이다.}$$

제2코사인 법칙에 의해

$$\overline{AC}^2=\overline{AQ}^2+\overline{CQ}^2-2\,\overline{AQ}\cdot\overline{CQ}\cdot\cos(\angle AQC)$$
$$=(6\sqrt{10})^2+(6\sqrt{10})^2-2\times6\sqrt{10}\times6\sqrt{10}\times\frac{5}{8}$$
$$=270$$

삼각형 ABC에 대해서도 제2코사인 법칙을 적용하면 ($\overline{AB}=x$라 하자.)

$$\underbrace{\overline{AC}^2}_{270}=\underbrace{\overline{AB}^2}_{x^2}+\underbrace{\overline{BC}^2}_{(2x)^2}-2\,\underbrace{\overline{AB}}_{x}\cdot\underbrace{\overline{BC}}_{2x}\cdot\underbrace{\cos(\angle ABC)}_{-\frac{5}{8}}$$

$$270=\frac{15}{2}x^2 \rightarrow x^2=36 \rightarrow x=6$$

$$\therefore R=\frac{\overline{BC}}{\sqrt{3}}=\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$$

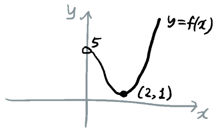
14. 두 정수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+\frac{a^2}{4}+b^2 & (x\le 0) \\ x^3-3x^2+5 & (x>0) \end{cases}$$

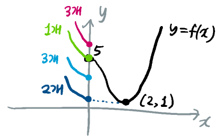
이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 2가 되도록 하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$y=x^3-3x^2+5$는 $x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소이다.
따라서 $x>0$일 때 $y=f(x)$ 그래프 개형은 다음과 같다.



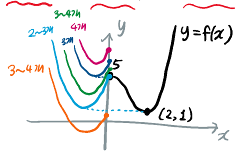
$x<0$인 부분은 아래로 볼록한 이차함수인데,
어떻게 그려야 조건을 만족시킬지 고민해보자.



먼저 이차함수의 그래프가 올라가는 부분이 모두 잘린 경우만 생각해보면
이차함수가 점 (0, 1)을 지날때에만 조건을 만족시키는 k의 개수가 2개이다. ($k=1$ 또는 $k=5$)

이렇게 함수를 구성하기 위해서는 $f(0)=1$, $a\ge0$ 을 만족시키면 되는데, 이 조건을 만족시키는 순서쌍 (a,b)에는
$(0, 1)$, $(0,-1)$, $(2,0)$ 이 존재한다.

올라가는 부분이 모두 잘려야 하기 때문에



이번에는 올라가는 부분이 일부 남아있는 경우를 고려하자.

극솟값 m
- $m>5$ … 1, 5, m, y절편에서 불연속 (4개)
- $m=5$ … 1, 5, y절편에서 불연속 (3개)
- $1<m<5$ … 1, 5, m, y절편에서 불연속 (y절편=5이면 3개, 아니면 4개)
- $m=1$ … 1, 5, y절편에서 불연속 (y절편=5이면 2개, 아니면 3개)
- $m<1$ … m, 1, 5, y절편에서 불연속 (3~4개)

극솟값이 1이면서 y절편이 5인 경우를 찾아보면
$(a, b)=(-2, 2)$ 또는 $(-2, -2)$ 이다. 따라서 순서쌍 (a,b)의 총 개수는 5

$a=2$이면 올라가는 부분이 모두 잘려서 해당사항 ×

15. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n & (a_n>n) \\ 3n-2-a_n & (a_n\le n)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_5=5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱은? [4점]

① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

$$a_5=\begin{cases} a_4 & (a_4>4) \\ 10-a_4 & (a_4\le 4)\end{cases}$$

$a_5=5$이려면 $\underline{a_4=5}$

$$a_4=\begin{cases} a_3 & (a_3>3) \\ 7-a_3 & (a_3\le 3)\end{cases}$$

$a_4=5$이려면 $a_3=5$ 또는 $a_3=2$

$$a_3=\begin{cases} a_2 & (a_2>2) \\ 4-a_2 & (a_2\le 2)\end{cases}$$

(i) $a_3=5$ 이려면 $a_2=5$ 또는 $a_2=-1$

(ii) $a_3=2$이려면 $a_2=2$

$$a_2=\begin{cases} a_1 & (a_1>1) \\ 1-a_1 & (a_1\le 1)\end{cases}$$

(i) $a_2=5$ 이려면 $a_1=5$ 또는 $a_1=-4$

~~(ii)~~ $a_2=-1$을 만족시키는 a_1 없음

(iii) $a_2=2$이려면 $a_1=2$ 또는 $a_1=-1$

따라서 a_1으로 가능한 수는

5, −4, 2, −1 이고 이를 모두 곱하면 40

단답형

16. 방정식 $4^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-9}$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

3

$(2^2)^x=(2^{-1})^{x-9}$

$2^{2x}=2^{-x+9}$

$2x=-x+9$

$\therefore x=3$

17. $\int_0^2(3x^2-2x+3)dx-\int_2^0(2x+1)dx$의 값을 구하시오. [3점]

16

$\int_0^2(3x^2-2x+3)\,dx+\int_0^2(2x+1)\,dx$

$=\int_0^2(3x^2-2x+3+2x+1)\,dx$

$=\int_0^2(3x^2+4)\,dx$

$=\left[x^3+4x\right]_0^2$

$=16$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{9} a_k = 137,\ \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{9} 2a_k = 101$$

일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점] 113

$\sum_{k=1}^{10} a_k = x$, $\sum_{k=1}^{9} a_k = y$ 라 하자.

$$\begin{cases} x + y = 137 \\ x - 2y = 101 \end{cases}$$

이므로 연립방정식을 풀면 $x = 125$, $y = 12$

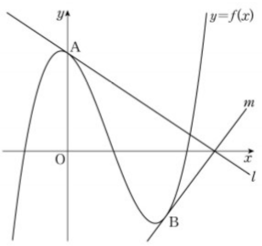
따라서

$$a_{10} = \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{9} a_k$$

$$= x - y = 113$$

19. 실수 a에 대하여 함수 $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + ax + 2$이다.

곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $A(0, 2)$, $B(2, f(2))$에서의 접선을 각각 l, m이라 하자. 두 직선 l, m이 만나는 점이 x축 위에 있을 때, $60 \times |f(2)|$의 값을 구하시오. [3점] 80



$(0, 2)$에서 접선의 방정식

$\rightarrow y = f'(0)x + 2 \rightarrow y = ax + 2$

이 직선이 x축과 만나는 점은 $(-\frac{2}{a}, 0)$이다.

$(2, f(2))$에서 접선의 방정식

$\rightarrow y = f'(2)(x-2) + f(2) \rightarrow y = (a+2)(x-2) + 2a$

이 직선도 점 $(-\frac{2}{a}, 0)$을 지난다.

따라서 $0 = (a+2)(-\frac{2}{a} - 2) + 2a$ $\quad \therefore a = -\frac{2}{3}$

$f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + 2$이므로 $60 \times |f(2)| = 60 \times \frac{4}{3} = 80$

20. 두 함수 $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$, $g(x) = \cos\frac{\pi}{3}x$에 대하여

$0 \le x < 12$에서 방정식

$$f(g(x)) = g(x)$$

를 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합을 구하시오. [4점] 36

$f(g(x)) = g(x)$에서 $g(x) = t$라 하자.

$f(t) = t \rightarrow 2t^2 + 2t - 1 = t$

$\rightarrow 2t^2 + t - 1 = 0$

$\rightarrow (2t-1)(t+1) = 0$

$t = \frac{1}{2}$ 또는 $t = -1$이므로 $\underbrace{g(x) = \frac{1}{2}}_{(\text{i})}$ 또는 $\underbrace{g(x) = -1}_{(\text{ii})}$

(i) $\cos\frac{\pi}{3}x = \frac{1}{2}$의 실근을 구하면

$\frac{\pi}{3}x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi, \frac{11}{3}\pi$

$\therefore x = 1, 5, 7, 11$

이 외의 실근은 $0 \le x < 12$ 범위 조건에 맞지 않으므로 무시

(ii) $\cos\frac{\pi}{3}x = -1$의 실근을 구하면

$\frac{\pi}{3}x = \pi, 3\pi$

$\therefore x = 3, 9$

이 외의 실근은 $0 \le x < 12$ 범위 조건에 맞지 않으므로 무시

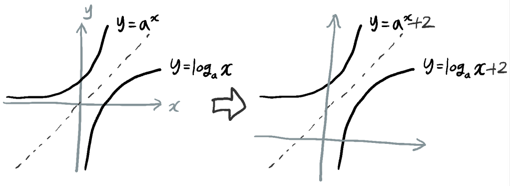
(i)에서와 (ii)에서 얻은 결과를 모두 합하면

$1 + 5 + 7 + 11 + 3 + 9 = 36$

21. $a>2$인 실수 a에 대하여 기울기가 -1인 직선이 두 곡선

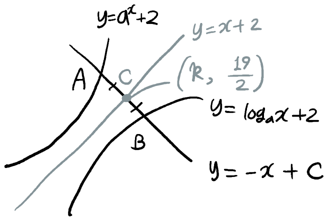
$$y=a^x+2,\quad y=\log_a x+2$$

와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심의 y좌표가 $\frac{19}{2}$이고 넓이가 $\frac{121}{2}\pi$일 때, a^2의 값을 구하시오. [4점] 13

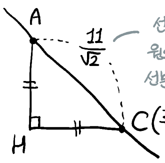


$y=x$ 대칭 $\qquad$ $y=x+2$ 대칭

(다같이 y축 방향으로 2만큼 평행이동)



위 그림에서 $k=\frac{15}{2}$이고, $c=17$이다.



선분 AB를 지름으로 하는 원의 넓이가 $\frac{121}{2}\pi$이고 선분 AC는 이 원의 반지름이기 때문이다.

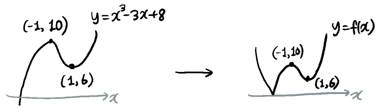
위 그림에서 $\overline{AH}=\overline{CH}=\frac{11}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{11}{2}$이므로

점 A의 좌표는 $\left(\frac{15}{2}-\frac{11}{2},\ \frac{19}{2}+\frac{11}{2}\right)=(2,\ 15)$이다.

이는 곡선 $y=a^x+2$ 위의 한 점이므로

$15=a^2+2 \qquad \therefore a^2=13$

22. 함수 $f(x)=|x^3-3x+8|$과 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서만 미분가능하지 않다. $\alpha\beta=m+n\sqrt{6}$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이다.) [4점] 2



편의상 $\alpha<\beta$라 하자.

$\lim\limits_{t\to\alpha-}g'(t)=f'(\alpha)$였다가
$\lim\limits_{t\to\alpha+}g'(t)=f'(\alpha+2)$

$\lim\limits_{t\to\beta-}g'(t)=f'(\beta)$였다가
$\lim\limits_{t\to\beta+}g'(t)=f'(\beta+2)$

먼저 α부터 구하면

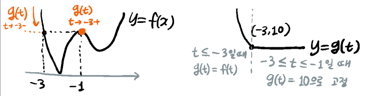
$f(\alpha)=f(\alpha+2)$이므로

$|\underbrace{\alpha^3-3\alpha+8}_{\text{음수}}|=|\underbrace{\alpha^3+6\alpha^2+9\alpha+10}_{\text{양수}}|$

$-\alpha^3+3\alpha-8=\alpha^3+6\alpha^2+9\alpha+10$

↳ $2\alpha^3+6\alpha^2+6\alpha+18=0 \qquad \therefore \alpha=-3$

그렇다면 $g(t)$가 정말 $t=-3$에서 미분 불가한지 확인하자.



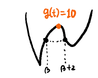
$g(t)$가 $t=-3$에서 미분 불가함이 확인되었다.

다음으로 β를 구하자.

역시 $f(\beta)=f(\beta+2)$인데, 이번에는 절댓값 안이 둘 다 양수다.

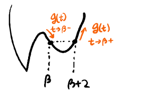
$\beta^3-3\beta+8=\beta^3+6\beta^2+9\beta+10$

↳ $6\beta^2+12\beta+2=0 \qquad \therefore \beta=\frac{-3\pm\sqrt{6}}{3}$



$\beta=\frac{-3-\sqrt{6}}{3}$이라면

$\lim\limits_{t\to\beta}g(t)=g(\beta)=10$이므로 $g'(\beta)=0$이다.
(미분 가능)



$\beta=\frac{-3+\sqrt{6}}{3}$이라면

$g(t)$의 $t=\beta$에서 좌미분계수는 음수
〃 우미분계수는 양수

↳ $g(t)$는 $t=\beta$에서 미분 불가

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=\frac{-3+\sqrt{6}}{3}$이므로 $\alpha\beta=3-\sqrt{6}$이다.

$p=3$, $q=-1$이므로 $p+q=2$

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

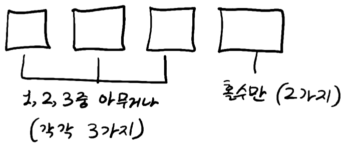
23. ${}_{3}\mathrm{H}_{3}$의 값은? [2점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$${}_{3}H_{3} = {}_{3+3-1}C_{3}$$
$$= {}_{5}C_{3} = 10$$

24. 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리 자연수 중 홀수의 개수는? [3점]

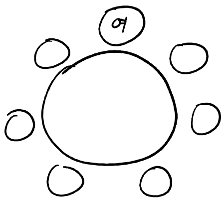
① 30 ② 36 ③ 42 ④ 48 ⑤ 54



$$3 \times 3 \times 3 \times 2 = 54$$

25. 남학생 5명, 여학생 2명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 여학생끼리 이웃하여 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 200 ② 240 ③ 280 ④ 320 ⑤ 360



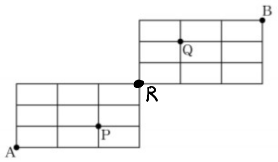
(1) 여학생 한 명 아무 곳에나 앉힘 → 1가지

(2) 나머지 여학생을 (1)의 여학생 옆에 앉힘 → 2가지

(3) 남학생 5명 앉힘 → $5! = 120$가지

따라서 경우의 수는 $1 \times 2 \times 120 = 240$

26. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 갈 때, P 지점을 지나면서 Q 지점을 지나지 않는 경우의 수는? [3점]



① 72 ② 81 ③ 90 ④ 99 ⑤ 108

(1) A → P → R 로 가는 경우의 수는

$$\underbrace{\frac{3!}{2!}}_{A\to P} \times \underbrace{\frac{3!}{2!}}_{P\to R} = 9$$

(2) R → B로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!3!} = 20 \cdots ㉠$$

R → Q → B 로 가는 경우의 수는

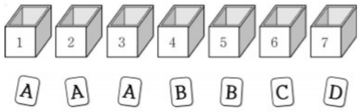
$$\underbrace{\frac{3!}{2!}}_{R\to Q} \times \underbrace{\frac{3!}{2!}}_{Q\to B} = 9 \cdots ㉡$$

R → B로 가는데 Q를 거치지 않는 경우의 수는

$$㉠ - ㉡ = 20 - 9 = 11$$

따라서 구하려는 경우의 수는 $9 \times 11 = 99$

27. 그림과 같이 문자 A, A, A, B, B, C, D가 각각 하나씩 적혀 있는 7장의 카드와 1부터 7까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 7개의 빈 상자가 있다.



각 상자에 한 장의 카드만 들어가도록 7장의 카드를 나누어 넣을 때, 문자 A가 적혀 있는 카드가 들어간 3개의 상자에 적힌 수의 합이 홀수가 되도록 나누어 넣는 경우의 수는? (단, 같은 문자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 144 ② 168 ③ 192 ④ 216 ⑤ 240

(i) A를 홀수 상자에만 집어넣기

A를 넣을 홀수 상자 3개 선택 : ${}_4C_3 = 4$

B, B, C, D 넣는 경우의 수 : $\frac{4!}{2!} = 12$

$\rightarrow 4 \times 12 = 48$

(ii) A를 짝수 상자 2개, 홀수 상자 1개에 집어넣기

A를 넣을 상자 3개 선택 : $\underbrace{{}_3C_2}_{짝} \times \underbrace{{}_4C_1}_{홀} = 12$

B, B, C, D 넣는 경우의 수 : $\frac{4!}{2!} = 12$

$\rightarrow 12 \times 12 = 144$

이상으로 구하는 경우의 수는 $48 + 144 = 192$

28. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는? [4점]

(가) $ab^2c = 720$
(나) a와 c는 서로소가 아니다.

① 38 ② 42 ③ 46 ④ 50 ⑤ 54

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$

따라서 $ab^2c = 2^4 \times 3^2 \times 5$이다.

이 조건을 만족시키도록 a, b, c에 2, 3, 5를 각각 분배해주면 된다.

(i) $b^2 = 2^4 \times 3^2$일 때

a, c는 5 하나만 나눠가지게 되므로 a, c는 서로소일 수밖에 없다 (0가지)

(ii) $b^2 = 2^2 \times 3^2$일 때

$ac = 2^2 \times 5$이므로 $\underbrace{a, c\text{는 2를 하나씩 나눠갖고}}_{1가지}$ $\underbrace{5\text{는 아무나 가지면 된다.}}_{2가지}$ (2가지)

(iii) $b^2 = 3^2$일 때

$ac = 2^4 \times 5$이므로 $\underbrace{a, c\text{는 2를 적어도 하나 가지고}}_{5-2=3가지}$ $\underbrace{5\text{는 아무나 가지면 된다.}}_{2가지}$ (6가지)

(iv) $b^2 = 2^4$일 때

$ac = 3^2 \times 5$이므로 a, c는 $\underbrace{\text{3을 하나씩 나눠가지고}}_{1가지}$ $\underbrace{5\text{는 아무나}}_{2가지}$ (2가지)

(v) $b^2 = 2^2$일 때

$ac = 2^2 \times 3^2 \times 5$이므로 a와 c는 $\underbrace{\text{2와 3중 적어도 하나는 하나씩 나눠가지고}}_{3\times3-2\times2=5가지}$ $\underbrace{5\text{는 아무나}}_{2가지}$ (10가지)

(vi) $b^2 = 1$일 때

$ac = 2^4 \times 3^2 \times 5$이므로 a와 c는 $\underbrace{\text{2와 3이 모두 한쪽에만 독점되지 않게 분배하고}}_{5\times3-2\times2=11가지}$ $\underbrace{5\text{는 아무나}}_{2가지}$ (22가지)

(i)~(vi)를 모두 합산하면 42가지

단 답 형

29. 세 명의 학생에게 서로 다른 종류의 초콜릿 3개와 같은 종류의 사탕 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.
(단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점] 117

(가) 적어도 한 명의 학생은 초콜릿을 받지 못한다.
(나) 각 학생이 받는 초콜릿의 개수와 사탕의 개수의 합은 2 이상이다.

초콜릿 나눠주는 방법 : 2+1+0 또는 3+0+0

(i) 초콜릿을 2개, 1개, 0개 나눠줄 때

초콜릿 나눠주는 경우의 수

$$\underbrace{{}_3C_2 \times {}_1C_1}_{\text{초콜릿 종류 선택}} \times \underbrace{3!}_{\text{2개, 1개를 어떤 학생에게 분배할지}} = 18$$

사탕 나눠주는 경우의 수

↳ 초콜릿을 못 받은 학생에게 사탕 2개, 초콜릿을 1개만 받은 학생에게 사탕 1개를 미리 주고 나머지 2개는 아무렇게나 분배

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6\text{가지}$$

$$\therefore 18 \times 6 = 108\text{가지}$$

(ii) 초콜릿 몰빵일 때

초콜릿 몰빵하는 경우의 수 : 3가지

사탕 나눠주는 경우의 수

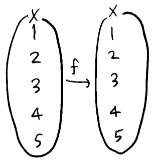
↳ 초콜릿을 못 받은 2명에게 2개씩 나눠주고 나머지 하나는 아무에게나 주기 : 3가지

$$\therefore 3 \times 3 = 9\text{가지}$$

이상으로 구하는 경우의 수는 108 + 9 = 117

30. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오. [4점] 90

(가) $f(1) \le f(2) \le f(3)$
(나) $1 < f(5) < f(4)$
(다) $f(a) = b$, $f(b) = a$를 만족시키는 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b가 존재한다.



(다)에서 편의상 $a < b$라 하자.

(다) 조건을 만족시킬 수 있는 경우를 생각해보면 일단 (가) 조건에 의해 $a \in \{1,2,3\}$, $b \in \{1,2,3\}$일 수는 없다.

둘은 동시에 만족시킬 수 없다는 뜻이니 헷갈리지 않도록 주의

따라서 $a = 4$, $b = 5$인 경우와 $a \in \{1,2,3\}$, $b \in \{4,5\}$인 경우로 나누자.

(i) $a = 4$, $b = 5$인 경우

$f(4) = 5$, $f(5) = 4$이므로 (나) 조건에 위배되지 않는다.

(가) 조건에 따라서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값만 구하면 되므로

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35\text{가지}$$

(ii) $a \in \{1,2,3\}$, $b \in \{4,5\}$인 경우

(나) 조건 위배

$(a, b) = (1, 4) \to f(4) = 1$이므로 (나) 조건 위배

$(a, b) = (1, 5) \to f(5) = 1$이므로 (나) 조건 위배

$(a, b) = (2, 4) \to f(4) = 2$이므로 $f(5) = 1 \to$ (나) 조건 위배

$(a, b) = (2, 5) \to f(2) = 5$, $f(5) = 2$

$f(1)$ 선택하는 경우의 수 : $f(1) \le f(2) = 5$이므로 5가지
$f(3)$ 〃 〃 〃 : $f(3) \ge f(2) = 5$이므로 1가지
$f(4)$ 〃 〃 〃 : $f(4) > f(5) = 2$이므로 3가지

15가지

$(a, b) = (3, 4) \to f(3) = 4$, $f(4) = 3$

$f(1)$, $f(2)$ 선택하는 경우의 수 : $f(1) \le f(2) \le 4$이므로 ${}_4H_2 = 10$가지
$f(5)$ 선택하는 경우의 수 : 2만 가능하므로 1가지

10가지

$(a, b) = (3, 5) \to f(3) = 5$, $f(5) = 3$

$f(1)$, $f(2)$ 선택하는 경우의 수 : $f(1) \le f(2) \le 4$이므로 ${}_5H_2 = 15$가지
$f(4)$ 선택하는 경우의 수 : 4, 5 가능하므로 2가지

30가지

파란색 밑줄 모두 합산하면 90가지

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{2^n-3^n}$의 값은? [2점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

분자 분모를 3^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+3^{-1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1} = \frac{2\times 0+\frac{1}{3}}{0-1} = -\frac{1}{3}$$

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty} na_n=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a_n+b_n}{1+2b_n}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

분자 분모를 n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+\frac{b_n}{n}}{\frac{1}{n}+2\frac{b_n}{n}} = \frac{1+3}{0+2\times 3} = \frac{2}{3}$$

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2n+3 < a_n < 2n+4$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{(a_n+1)^2+6n^2}{na_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

분자 분모를 n^2으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{a_n+1}{n}\right)^2+6}{\frac{a_n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n}\right)^2+6}{\frac{a_n}{n}} \cdots ㉠$$

이때, $2n+3 < a_n < 2n+4$ 에서

$\frac{2n+3}{n} < \frac{a_n}{n} < \frac{2n+4}{n}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{2n+4}{n}$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 2$

이를 이용해 ㉠의 값을 계산하면

$$\frac{(2+0)^2+6}{2} = 5$$

26. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n = a_1+2$$

를 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n+n}{a_n-n+1} = 3$일 때, a_{10}의 값은? (단, $a_1 > 0$) [3점]

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

수열 $\{a_n\}$은 공차가 a_1+2인 등차수열이므로

$$a_n = (a_1+2)n-2$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n+n}{a_n n - n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(a_1+2)n+n}{(a_1+2)n-n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2a_1+5)n}{(a_1+1)n+1}$$

$$= \frac{2a_1+5}{a_1+1}$$

이 값이 3이므로 $a_1 = 2$

따라서 $a_n = 4n-2$ 이므로 $a_{10} = 38$

27. $a_1=3$, $a_2=6$인 등차수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 양수인 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(b_k)^2 = n^3 - n + 3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n b_{2n}}$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 6

$$a_n(b_n)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k(b_k)^2 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k(b_k)^2$$

$$= (n^3 - n + 3) - (n^3 - 3n^2 + 2n + 3)$$

$$= 3n^2 - 3n$$

이때, 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=3$, $a_2=6$인 등차수열이므로 $a_n = 3n$

따라서 $(b_n)^2 = \frac{3n^2-3n}{a_n} = \frac{3n^2-3n}{3n} = n-1$ 이므로

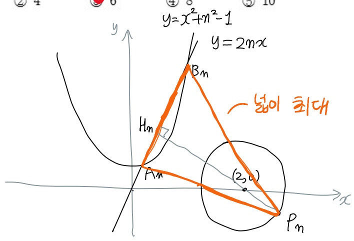
$b_n = \sqrt{n-1}$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n b_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{n-1}\sqrt{2n-1}}$

$$= \frac{3}{\sqrt{1}\times\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

28. 자연수 n에 대하여 직선 $y=2nx$가 곡선 $y=x^2+n^2-1$과 만나는 두 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 원 $(x-2)^2+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 삼각형 A_nB_nP의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 P_n이라 할 때, 삼각형 $A_nB_nP_n$의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

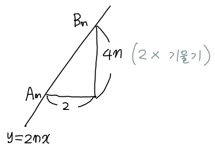


점 P_n에서 직선 $y=2nx$에 내린 수선의 발을 점 H_n이라 하자. 삼각형 $A_nB_nP_n$의 넓이는

$$S_n = \frac{1}{2}\times\overline{A_nB_n}\times\overline{P_nH_n} \text{ 이다.}$$

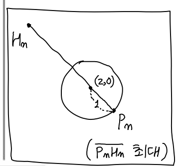
(1) $\overline{A_nB_n}$ 구하기

두 점 A_n, B_n의 x좌표는 방정식 $x^2+n^2-1=2nx$의 두 실근이다. $x^2-2nx+n^2-1=(x-n-1)(x-n+1)$ 이므로 두 점의 x좌표 차는 2이다.



위 그림에서 $\overline{A_nB_n} = \sqrt{16n^2+4}$ 이다.

(2) $\overline{P_nH_n}$의 최댓값 구하기



$\overline{P_nH_n}$이 최대가 되기 위해서는 왼쪽 그림처럼 세 점이 일직선 위에 있으면 된다. 이때 $\overline{H_nP_n}$의 길이는

(점 (2,0)과 직선 $y=2nx$ 사이의 거리) $+\underbrace{1}_{\text{원의 반지름}}$

$$= \frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}} + 1 \text{ 이다.}$$

이상으로 $S_n = \frac{1}{2}\sqrt{16n^2+4}\left(\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}+1\right)$ 이므로

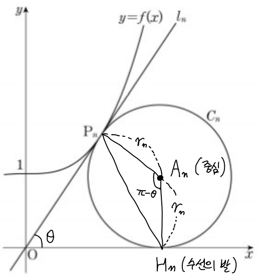
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}\times4\times3 = 6$$

단 답 형

29. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\frac{4}{n^3}x^3+1$$

이라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선을 l_n, 접선 l_n의 접점을 P_n이라 하자. x축과 직선 l_n에 동시에 접하고 점 P_n을 지나는 원 중 중심의 x좌표가 양수인 것을 C_n이라 하자. 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $40\times\lim_{n\to\infty}n^2(4r_n-3)$의 값을 구하시오. [4점] 270



점 P_n의 좌표를 $(t_n,\ f(t_n))$라 하자.

점 P_n에서 접선의 기울기 $f'(t_n)$은 원점 O와 점 P_n을 지나는 직선의 기울기 $\frac{f(t_n)}{t_n}$과 같으므로 $f'(t_n)=\frac{f(t_n)}{t_n}$이다.

$f'(t_n)=\frac{f(t_n)}{t_n} \Rightarrow \frac{12}{n^3}t_n^2=\frac{\frac{4}{n^3}t_n^3+1}{t_n} \Rightarrow t_n=\frac{n}{2}$

따라서 $f'(t_n)=\frac{3}{n}$이고, 점 P_n의 좌표는 $\left(\frac{n}{2},\frac{3}{2}\right)$이다.

직선 l_n의 기울기가 $\frac{3}{n}$이므로 직선 l_n과 x축이 이루는 예각 θ에 대하여 $\tan\theta=\frac{3}{n}$이다.
제2코사인법칙을 사용하기 위해 $\cos\theta$의 값을 구하면 $\cos\theta=\frac{n}{\sqrt{n^2+9}}$이다.

그림에서 $\overline{P_nH_n}^2=\overline{OP_n}^2+\overline{OH_n}^2-2\cdot\overline{OP_n}\cdot\overline{OH_n}\cdot\cos\theta$ … ㉠ $\triangle OP_nH_n$에 제2코사인법칙 적용

$=\overline{A_nP_n}^2+\overline{A_nH_n}^2-2\cdot\overline{A_nP_n}\cdot\overline{A_nH_n}\cdot\cos(\pi-\theta)$ … ㉡ $\triangle A_nP_nH_n$에 〃 〃

㉠을 계산하면 $2\overline{OP_n}^2(1-\cos\theta)$이고, ㉡을 계산하면 $2r_n^2(1+\cos\theta)$이다.

㉠ = ㉡이므로 $r_n=\overline{OP_n}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

이전에 구한 $\overline{OP_n}$과 $\cos\theta$ 식 대입 후 정리

$=\frac{\sqrt{n^2+9}}{2}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{n^2+9}-n}{\sqrt{n^2+9}+n}}$

분자 분모에 $\sqrt{\sqrt{n^2+9}+n}$ 곱하기

$=\frac{\sqrt{n^2+9}}{2}\cdot\sqrt{\frac{9}{(\sqrt{n^2+9}+n)^2}}$

$=\frac{\sqrt{n^2+9}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{n^2+9}+n}=\frac{3\sqrt{n^2+9}}{2(\sqrt{n^2+9}+n)}$

따라서 $4r_n-3=\frac{6\sqrt{n^2+9}}{\sqrt{n^2+9}+n}-3=\frac{3\sqrt{n^2+9}-3n}{\sqrt{n^2+9}+n}=\frac{27}{(\sqrt{n^2+9}+n)^2}$

$\lim_{n\to\infty}n^2\times(4r_n-3)=\lim_{n\to\infty}\frac{27n^2}{(\sqrt{n^2+9}+n)^2}=\frac{27}{4}$이므로 $40\times\lim_{n\to\infty}(4r_n-3)=270$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 자연수 m에 대하여 구간 $(0,\infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)\left(\frac{x}{m}\right)^n+x}{\left(\frac{x}{m}\right)^n+1}$$

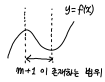
라 하자. 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능하고, $g'(m+1)\le 0$이다.
> (나) $g(k)g(k+1)=0$을 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이다.
> (다) $g(l)\ge g(l+1)$을 만족시키는 자연수 l의 개수는 3이다.

$g(12)$의 값을 구하시오. [4점] 84

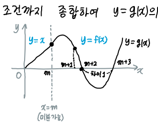
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x>m)\\ \frac{f(m)+m}{2} & (x=m)\\ x & (x<m)\end{cases}$$

(가)에서 $g'(m+1)\le 0$이므로 $f'(m+1)\le 0$ ⇨



(나)에서 어떤 연속하는 두 자연수가 $g(x)=0$의 해이다. 이 외의 자연수 해는 없음
m이 자연수이고 $g(x)$가 $(0,\infty)$에서 미분 가능하다는 조건에 의해 $g(1)=1$이므로
$x=1$은 $g(x)=0$의 해가 아니다.

(다) 조건까지 종합하여 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 그려보면 다음과 같다.



표시된 점들은 (다) 조건을 만족시키는 점들이다.
마지막 점은 (나) 조건에 의해 반드시 x축 위에 있어야 한다.

위 그림에 따르면 $f(m)=m$, $f(m+2)=f(m+3)=0$이므로

$f(x)=\underbrace{(x-m-2)(x-m-3)}_{f(m+2)=f(m+3)=0}\underbrace{\left(x-\frac{5}{6}m\right)}_{f(m)=m}$ 이다

더 따질 조건을 생각해보면 $g(x)$가 $x=m$에서 미분 가능해야 하므로 $f'(m)=1$ 이어야 한다

$f'(x)=(x-m-3)\left(x-\frac{5}{6}m\right)+(x-m-2)\left(x-\frac{5}{6}m\right)+(x-m-3)(x-m-2)$ 에서 $f'(m)=6-\frac{5}{6}m=1$

$\therefore m=6$

따라서 $f(x)=(x-8)(x-9)(x-5)$이므로 $f(12)=4\times3\times7=84$

> ★ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 타원 $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점 사이의 거리는? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

타원의 초점은

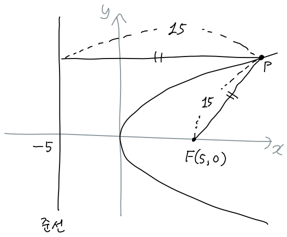
$(\pm\sqrt{17-8},\ 0)$ 이므로

$(3,0)$ 과 $(-3,0)$ 이다.

두 점 사이의 거리는 6

24. 초점이 F인 포물선 $y^2=20x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}=15$일 때, 점 P의 x좌표는? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13



$-5+15=10$

25. 두 초점이 x축 위에 있고, 두 초점 사이의 거리가 30인 쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=\frac{3}{4}x$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 에서

$c^2=a^2+b^2=15^2$ 이고

한 점근선의 방정식이 $y=\frac{3}{4}x$ 이므로 $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$

$$\begin{cases} a^2+b^2=15 \\ \frac{b}{a}=\frac{3}{4} \end{cases}$$

연립하여 풀면 $a=12$, $b=9$ 이다.

주축의 길이는 $2a=24$

26. 두 실수 a, b에 대하여 포물선

$C:(y-a+1)^2=(a+b)x+1$ (단, $a+b\neq 0$)

이 있다. 포물선 C가 원점을 지나고 초점과 준선 사이의 거리가 2일 때, $a-b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

원점을 지나므로 $x=0$, $y=0$ 대입하면 등식 성립

$\rightarrow$ $(-a+1)^2=1$ $\rightarrow$ $a=0$ 또는 $a=2$

(i) $a=0$일 때

$C:(y+1)^2=bx+1$

이므로 초점과 준선 사이의 거리는 $\frac{|b|}{2}$ 이다.

즉, $\frac{|b|}{2}=2$ 이므로 $b=\pm 4$

$\therefore$ $a-b=4$ 또는 $a-b=-4$

(ii) $a=2$일 때

$C:(y-1)^2=(2+b)x+1$

이므로 초점과 준선 사이의 거리는 $\frac{|2+b|}{2}$ 이다.

즉, $\frac{|2+b|}{2}=2$ 이므로 $b=-6$ 또는 $b=2$

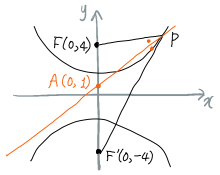
$\therefore$ $a-b=8$ 또는 $a-b=0$

이상으로 $M=8$, $m=-4$ 이므로

$M-m=12$

27. 두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=-1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 각 FPF′의 이등분선이 점 (0, 1)을 지날 때, $\overline{FP}+\overline{F'P}$의 값은? [3점]

① 24　② 28　③ 32　④ 36　⑤ 40



각의 이등분선 성질에 의해

$\overline{PF} : \overline{PF'} = \overline{FA} : \overline{F'A}$

$= 3 : 5$

어떤 실수 a에 대해 $\overline{PF}=3a$, $\overline{PF'}=5a$라 하자.

쌍곡선의 성질에 의해

$\overline{PF'}-\overline{PF}=2\sqrt{9}=6$이므로 $2a=6$이다.

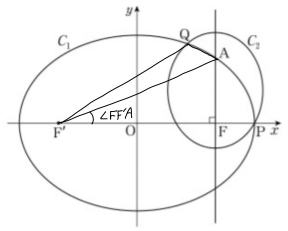
따라서 $a=3$이므로 $\overline{PF}=9$, $\overline{PF'}=15$

$\therefore \overline{PF}+\overline{PF'}=24$

28. 두 초점이 F(c, 0), F′($-c$, 0) ($c>0$)이고 장축의 길이가 18인 타원을 C_1이라 하자. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 타원 C_1과 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하고, 두 초점이 F, A이고 점 P(9, 0)을 지나는 타원을 C_2라 하자. 두 타원 C_1과 C_2가 만나는 점 중 점 P가 아닌 점을 Q라 하자.

$\cos(\angle FF'A)=\frac{12}{13}$일 때, $\overline{F'Q}-\overline{AQ}$의 값은? [4점]

① $14-\sqrt{34}$　② $20-2\sqrt{34}$　③ $15-\sqrt{34}$
④ $21-2\sqrt{34}$　⑤ $16-\sqrt{34}$



$\cos(\angle FF'A)=\frac{12}{13}$이므로 $\overline{F'A}:\overline{FF'}:\overline{FA}=13:12:5$이다.

$\overline{FF'}=2C$이므로 $\overline{F'A}=\frac{13}{6}C$, $\overline{FA}=\frac{5}{6}c$ 이다.

타원의 성질에 의해 $\overline{F'A}+\overline{FA}=$ (장축의 길이) $=18$이므로

$3C=18$이다. 따라서 $C=6$

타원 C_2에서 $\overline{AF}=\frac{5}{6}C=5$이고, $\overline{FP}=3$ ($\because$ F가 (6,0)) 이므로

피타고라스의 정리에 의해 $\overline{AP}=\sqrt{34}$ 이다.

따라서 타원 C_2의 한 점에서 두 초점(A, F) 사이의 거리 합은

$\overline{FP}+\overline{AP}=3+\sqrt{34}$ 이다.

점 Q는 타원 C_1, C_2 위에 있는 점이므로

타원 C_1의 성질에 의해 $\overline{FQ}+\overline{F'Q}=18$ ⋯ ㉠

타원 C_2의 성질에 의해 $\overline{FQ}+\overline{AQ}=3+\sqrt{34}$ ⋯ ㉡

㉠−㉡을 하면 $\overline{F'Q}-\overline{AQ}=15-\sqrt{34}$

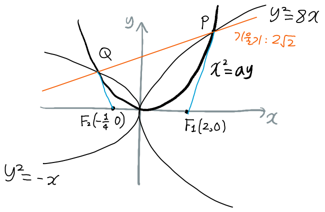
단 답 형

29. 포물선 $x^2 = ay\,(a>0)$이 두 포물선

$$C_1 : y^2 = 8x, \quad C_2 : y^2 = -x$$

와 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 각각 P, Q라 하고, 두 포물선 C_1, C_2의 초점을 각각 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{F_2}$라 하자. 직선 PQ의 기울기가 $2\sqrt{2}$ 일 때, $\overline{\mathrm{F_1P}}+\overline{\mathrm{F_2Q}}=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29



두 양수 k, m에 대하여

점 P의 좌표를 $(k, \sqrt{8k})$, 점 Q의 좌표를 $(-m, \sqrt{m})$이라 하자.

두 점이 모두 포물선 $x^2=ay$ 위에 있으므로

$k^2 = a\sqrt{8k}$, $\quad m^2 = a\sqrt{m}$

이므로 $\underbrace{a = \frac{k^2}{\sqrt{8k}} = \frac{m^2}{\sqrt{m}}}_{㉠}$ 이다.

그리고 직선 PQ의 기울기가 $2\sqrt{2}$ 이므로

$\underbrace{\frac{\sqrt{8k}-\sqrt{m}}{k+m} = 2\sqrt{2}}_{㉡}$ 이다.

㉠의 양변을 제곱해서 정리하면 $k^3 = 8m^3$이다.

즉, $k = 2m$

이 결과를 ㉡에 대입하면 $\frac{4\sqrt{m}-\sqrt{m}}{2m+m} = \frac{3\sqrt{m}}{3m} = 2\sqrt{2}$

$\therefore m = \frac{1}{8}$, $k = \frac{1}{4}$

점 P의 x좌표는 $\frac{1}{4}$이고 포물선 C_1의 준선의 방정식은 $x=-2$이므로

$\overline{F_1P} = \frac{1}{4} - (-2) = \frac{9}{4}$

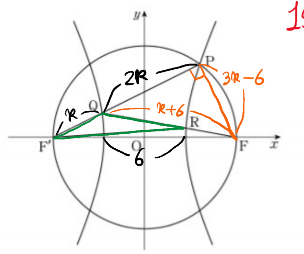
점 Q의 x좌표는 $-\frac{1}{8}$이고 포물선 C_2의 준선의 방정식은 $x = \frac{1}{4}$이므로

$\overline{F_2Q} = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8}$

이상으로 $\overline{F_1P} + \overline{F_2Q} = \frac{21}{8}$ 이므로 $p + q = 29$

30. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)\,(c>0)$을 초점으로 하고 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선이 선분 FF′을 지름으로 하는 원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 선분 F′P가 쌍곡선과 만나는 점 중 점 P가 아닌 점을 Q라 하고, 선분 FQ가 쌍곡선과 만나는 점 중 점 Q가 아닌 점을 R이라 하자. 점 Q가 선분 F′P를 1 : 2로 내분할 때, 삼각형 QF′R의 넓이를 S라 하자. $20S$의 값을 구하시오. [4점]

150



$\overline{F'Q} : \overline{QP} = 1:2$이므로 $\overline{F'Q} = k$, $\overline{QP} = 2k$라 하자.

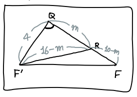
쌍곡선의 성질에 의해 $\overline{F'P} - \overline{FP} = 6$이므로 $\overline{FP} = 3k-6$

〃 〃 〃 $\overline{FQ} - \overline{F'Q} = 6$이므로 $\overline{FQ} = k+6$

피타고라스의 정리에 의해

$\overline{FQ}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{FP}^2$ 이므로

$(k+6)^2 = (2k)^2 + (3k-6)^2 \qquad \therefore k=4$



다음으로 $\overline{QR} = m$ 이라 하자.

$\overline{FQ} = 10$이므로 $\overline{FR} = 10-m$이고 쌍곡선의 성질에 의해 $\overline{F'R} = \overline{FR}+6 = 16-m$이다.

삼각형 F′RQ에 제2코사인 법칙을 적용하면

$(16-m)^2 = 16 + m^2 - 8m\cos(\angle F'QR)$

이때, $\cos(\angle F'QR) = -\cos(\angle PQF) = -\frac{\overline{PQ}}{\overline{FQ}} = -\frac{4}{5}$ 이다.

이어서 계산하면

$(16-m)^2 = 16 + m^2 + \frac{32}{5}m$

$m^2 - 32m + 256 = m^2 + \frac{32}{5}m + 16 \qquad \therefore m = \frac{175}{12}$

이제 S를 구해보자.

$S = \triangle QF'R = \underbrace{\frac{5}{8}}_{\overline{QR}/\overline{QF}} \triangle F'QF = \frac{5}{8} \times \underbrace{\frac{1}{3}}_{\overline{F'Q}/\overline{F'P}} \triangle F'PF = \frac{5}{24}\triangle F'PF$

$= \frac{5}{24} \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{F'P} \times \overline{FP}\right) = \frac{5}{24} \times 36 = \frac{15}{2} \qquad \therefore 20S = 150$

★ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.