제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[3]{54}\times2^{\frac{5}{3}}$의 값은? [2점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$3\times2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{5}{3}}=3\times2^{2}$

2. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+x$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{2h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

목표 : $\frac{1}{2}\cdot f'(3)$

$f'(x)=3x^2-6x+1$

$f'(3)=10$

3. $\cos\theta>0$이고 $\sin\theta+\cos\theta\tan\theta=-1$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

$\sin\theta+\sin\theta=-1$

2 1 $\sqrt{3}$, $\tan\theta=\boxed{-}\frac{1}{\sqrt{3}}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases}2x+a & (x<3)\\ \sqrt{x+1}-a & (x\geq3)\end{cases}$$

이 $x=3$에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$6+a=2-a$

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=x(3x+2),\quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=3x^2+2x$

$f(x)=x^3+x^2+4$

6. 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\frac{S_4}{S_2}=5,\quad a_5=48$$

일 때, a_1+a_4의 값은? [3점]

① 39 ② 36 ③ 33 ④ 30 ⑤ 27

$\dfrac{r^2(a_1+a_2)+a_1+a_2}{a_1+a_2}=r^2+1=5$

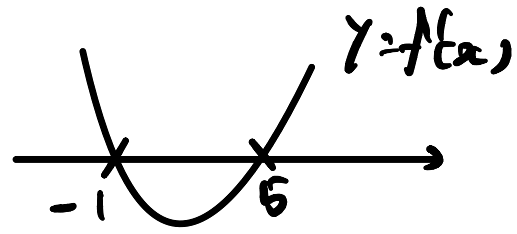
$r=2$

$a_1\cdot 16=48,\ a_1=3,\ a_4=24$

7. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x+1$이 닫힌구간 $[a, b]$에서 감소할 때, $b-a$의 최댓값은? (단, a, b는 $a<b$인 실수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x)=x^2-4x-5$



8. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$(x+1)f(x)+(1-x)g(x)=x^3+9x+1,\quad f(0)=4$$

일 때, $f'(0)+g'(0)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

1, $x=0$ 대입

$f(0)+g(0)=1$, $g(0)=-3$

2, 양변 미분

$f(x)-g(x)+(x+1)f'(x)+(1-x)g'(x)=3x^2+9$

$7+f'(0)+g'(0)=9$

9. 좌표평면 위의 두 점 $(0, 0)$, $(\log_2 9, k)$를 지나는 직선이 직선 $(\log_4 3)x+(\log_9 8)y-2=0$에 수직일 때, 3^k의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

① 16　② 32　③ 64　④ 128　⑤ 256

$$\frac{k}{\log_2 9}\times\left(-\frac{\log_4 3}{\log_9 8}\right)=-1$$

$$\frac{k}{2\cancel{\log_2 3}}\times\frac{\frac{1}{2}\cancel{\log_2 3}}{\frac{3}{2}\log_3 2}=\frac{k}{6\log_3 2}=1$$

$$3^{6\log_3 2}=2^6$$

10. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-6t-2,\quad v_2(t)=-2t+6$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q가 다시 만날 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

$x_1(t)=t^3-3t^2-2t$

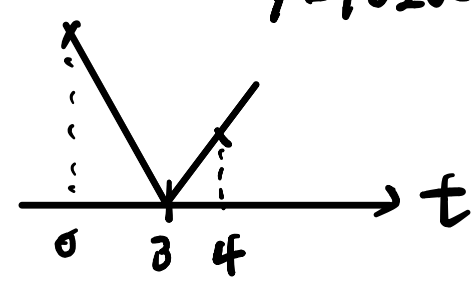
$x_2(t)=-t^2+6t$

$t^3-3t^2-2t=-t^2+6t$인 t?

$t^3-2t^2-8t=0$ 인 $t=0$ or $t=-2$ or $t=4$

$\int_0^4 |v_2(t)|\,dt=?$

$y=|v_2(t)|$



$9+1=10$

11. 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_6=-2,\quad \sum_{k=1}^{8}|a_k|=\sum_{k=1}^{8}a_k+42$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8}a_k$의 값은? [4점]

① 40 ② 44 ③ 48 ④ 52 ⑤ 56

d는 정수 (d < 0)

$$\sum_{k=1}^{8}|a_k| = \sum_{k=1}^{5}|a_k| - a_6 - a_7 - a_8$$

Case 1) $d \le -2$ ($d \ne -1$)

$$\sum_{k=1}^{5}a_k - a_6 - a_7 - a_8 = \sum_{k=1}^{8}a_k + 42$$

$$-3a_7 = 3a_7 + 42$$

$a_7 = -7$, $d = -5$

$a_4 = 8$, $a_5 = 3$ 이므로

$\frac{11}{2} \times 8 = 44$

12. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+3x+a & (x<0)\\ 3x+a & (x\ge 0)\end{cases}$$

이다. 함수

$$g(x)=\int_{-4}^{x}f(t)\,dt$$

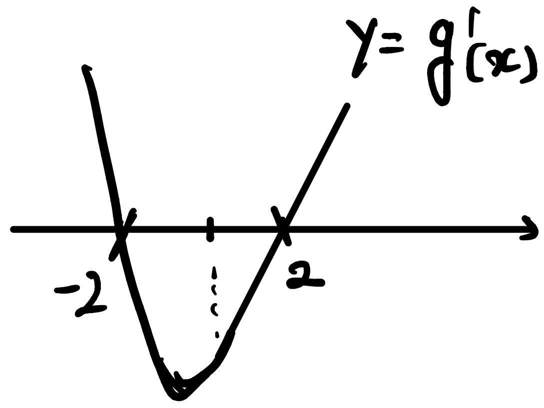
가 $x=2$에서 극솟값을 가질 때, 함수 $g(x)$의 극댓값은? [4점]

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

$g(-4)=0$, $g'(x)=f(x)$

$g'(2)=f(2)=0$ 이므로 $a=-6$

$$f(x)=\begin{cases}3(x-1)(x+2) & (x<0)\\ 3(x-2) & (x\ge 0)\end{cases}$$



목표: $g(-2)$

$$g(-2)=\int_{-4}^{-2}(3x^2+3x-6)\,dx$$

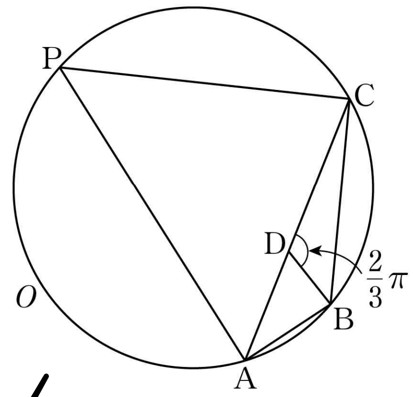
$$=\left[x^3+\frac{3}{2}x^2-6x\right]_{-4}^{-2}$$

$$=56-18-12=26$$

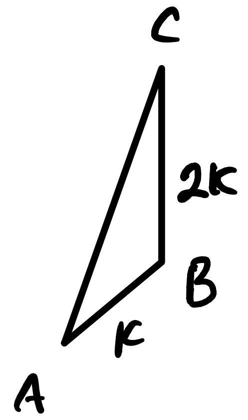
13. 그림과 같이

$$2\overline{AB}=\overline{BC},\quad \cos(\angle ABC)=-\frac{5}{8}$$

인 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, $\overline{QA}=6\sqrt{10}$이다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 $\angle CDB=\frac{2}{3}\pi$일 때, 삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이는? [4점]

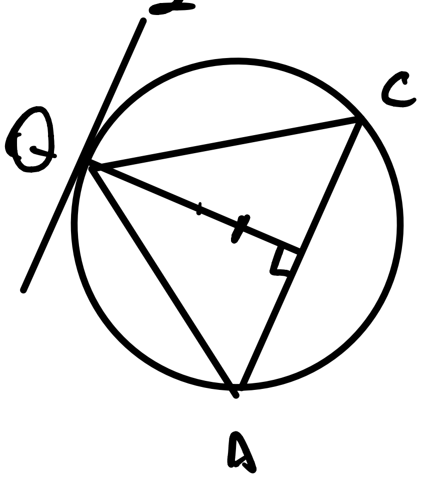


① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{6}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{6}$



$\overline{AC}^2 = 5K^2 - 4K^2\cdot\left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{15}{2}K^2$

$\overline{AC} = \frac{\sqrt{30}}{2}K$



△QAC가 이등변 △

∠ABC=θ면 ∠AQC=π−θ이므로

$\overline{AC}^2 = 720 - 720\cos(\pi-\theta)$

$= 270$, $\overline{AC} = 3\sqrt{30}$, $K=6$

따라서 $\overline{BC}=12$

$\frac{12}{\sin\frac{2}{3}\pi} = 8\sqrt{3}$

$r = 4\sqrt{3}$

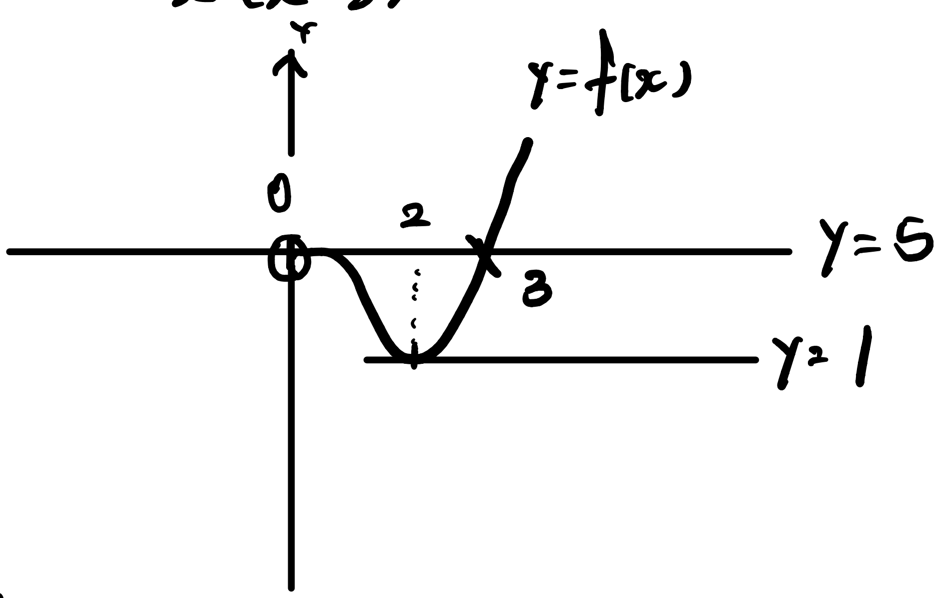
14. 두 정수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+\frac{a^2}{4}+b^2 & (x\le 0) \\ x^3-3x^2+5 & (x>0) \end{cases}$$

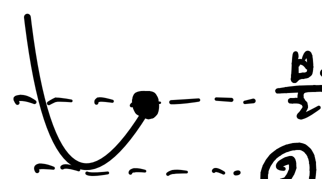
이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 2가 되도록 하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$$f(x)=\begin{cases} (x-a)^2-\frac{3}{4}a^2+b^2 & (x\le 0) \\ x^2(x-3)+5 & (x>0) \end{cases}$$



Case 1) $a<0$



g(t) 불연속 점 2개이려면 ...

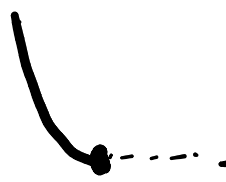
'삼차함수 불연속 라인과 겹치는 경우 고려'

$f(a)=1$, $f(0)=5$이면 OK

$\therefore -\frac{3}{4}a^2+b^2=1$, $\frac{a^2}{4}+b^2=5$

$a=-2$, $b=\pm 2$, 2개

Case 2) $a\ge 0$



$f(0)=1$이어야!

$a=0 \to b=\pm 1$, 2개

$a=2 \to b=0$, 1개

15. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n & (a_n > n) \\ 3n-2-a_n & (a_n \le n) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_5=5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱은? [4점]

① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

$$a_n=\begin{cases} a_{n+1} & (a_{n+1} > n) \\ -a_{n+1}+3n-2 & (a_{n+1} \ge 2n-2) \end{cases}$$

$-a_{n+1}+3n-2 \le n$

$\downarrow$

$a_{n+1} \ge 2n-2$

a_5 a_4 a_3 a_2 a_1

5 5 5 5 $\frac{5}{-4}$

-1 X

2 2 $\frac{2}{-1}$

$5\times(-4)\times 2\times(-1)=40$

단답형

16. 방정식 $4^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-9}$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$2x=-x+9$ 인 $x=3$

3

17. $\int_0^2 (3x^2-2x+3)\,dx-\int_2^0 (2x+1)\,dx$의 값을 구하시오. [3점]

$\int_0^2 (3x^2+4)\,dx$

$=[x^3+4x]_0^2=16$

16

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{9} a_k = 137,\ \ \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{9} 2a_k = 101$$

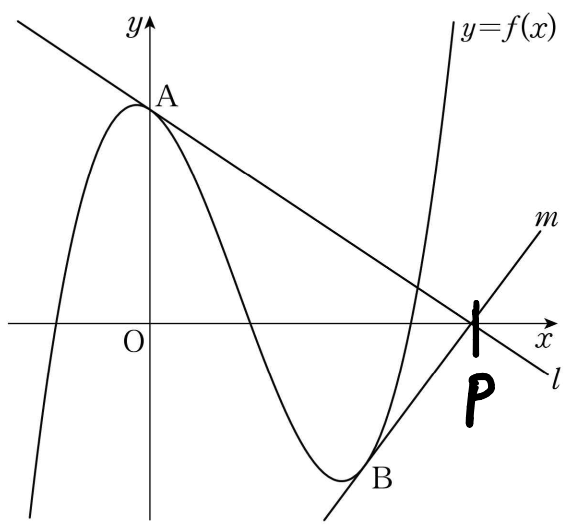
일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

$3\sum_{k=1}^{10} a_k = 274+101 = 375$

$\sum_{k=1}^{10} a_k = 125,\ \sum_{k=1}^{9} a_k = 12$

$a_{10} = 113$

19. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3-\frac{5}{2}x^2+ax+2$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(2,\ f(2))$에서의 접선을 각각 l, m이라 하자. 두 직선 l, m이 만나는 점이 x축 위에 있을 때, $60\times|f(2)|$의 값을 구하시오. [3점]



$f'(x)=3x^2-5x+a,\ f'(0)=a,\ f'(2)=a+2$

$f(2)=2a$이므로 $l: y=ax+2,\ m: y=(a+2)(x-2)+2a$
$=(a+2)x-4$

$P(-\frac{2}{a},0)$, 또는 $P(\frac{4}{a+2},0)$

$-\frac{\cancel{2}\,1}{a}=\frac{\cancel{4}\,2}{a+2},\ -a-2=2a,\ a=-\frac{2}{3}$

$f(2)=-\frac{4}{3}$, 80

20. 두 함수 $f(x)=2x^2+2x-1$, $g(x)=\cos\frac{\pi}{3}x$에 대하여 $0\le x<12$에서 방정식

$$f(g(x))=g(x)$$

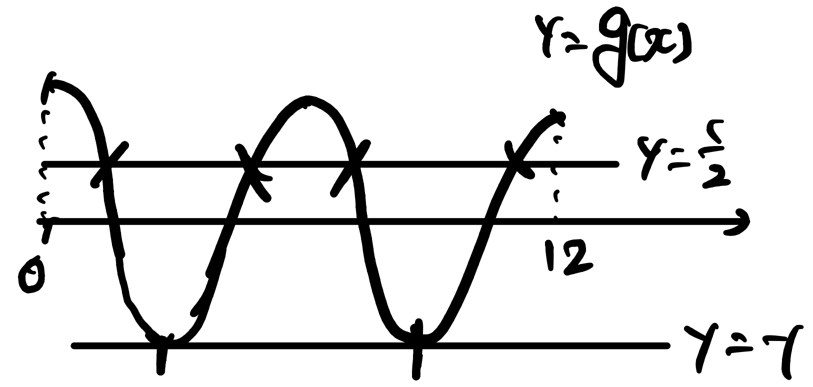
를 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합을 구하시오. [4점]

$f(t)=t$인 t?

$2t^2+t-1=(2t-1)(t+1)=0$인

$t=-1$ or $t=\frac{1}{2}$

목표: $g(x)=-1$ or $g(x)=\frac{1}{2}$인 x



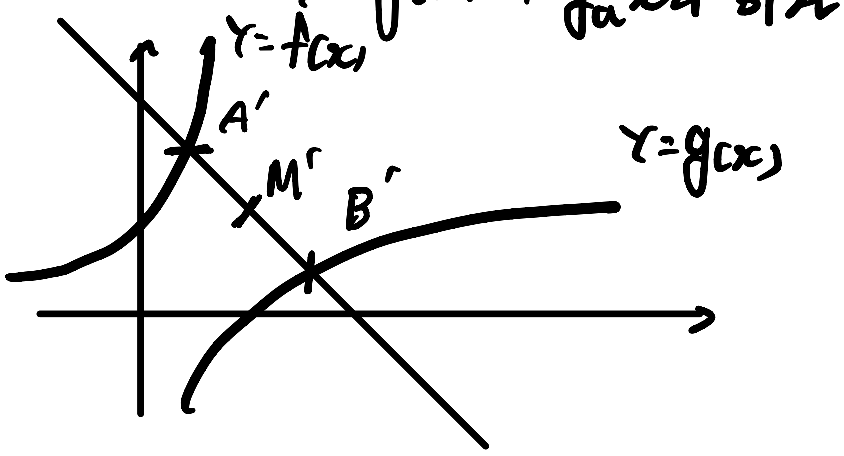
$6\times6=36$

21. $a>2$인 실수 a에 대하여 기울기가 -1인 직선이 두 곡선

$$y=a^{x}+2,\quad y=\log_{a}x+2$$

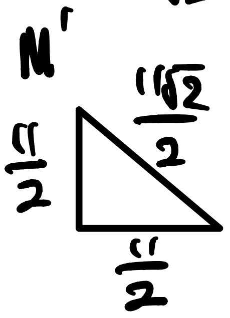
와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심의 y좌표가 $\frac{19}{2}$이고 넓이가 $\frac{121}{2}\pi$일 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]

$f(x)=a^x$, $g(x)=\log_a x$라 하자



$M'\left(\frac{15}{2}, \underbrace{\frac{15}{2}}_{\frac{19}{2}-2}\right)$

$y=\frac{11}{\sqrt{2}}=\frac{11\sqrt{2}}{2}$이므로



B', $B'(13, 2)$

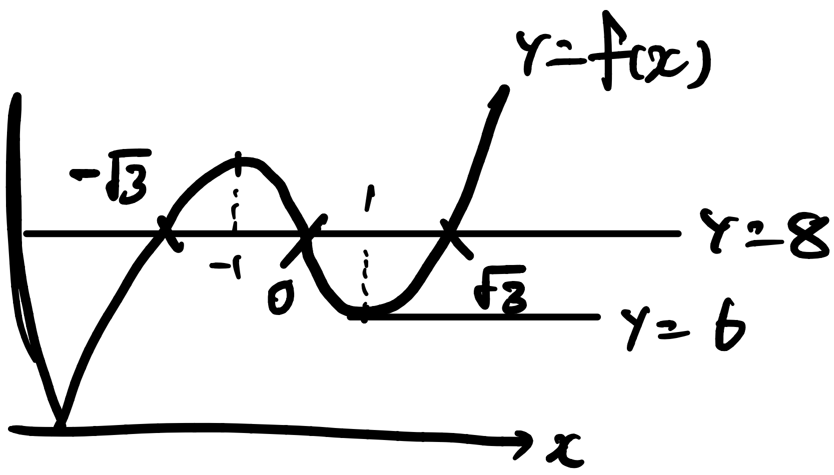
$A'(2, 13)$, $a^2=13$

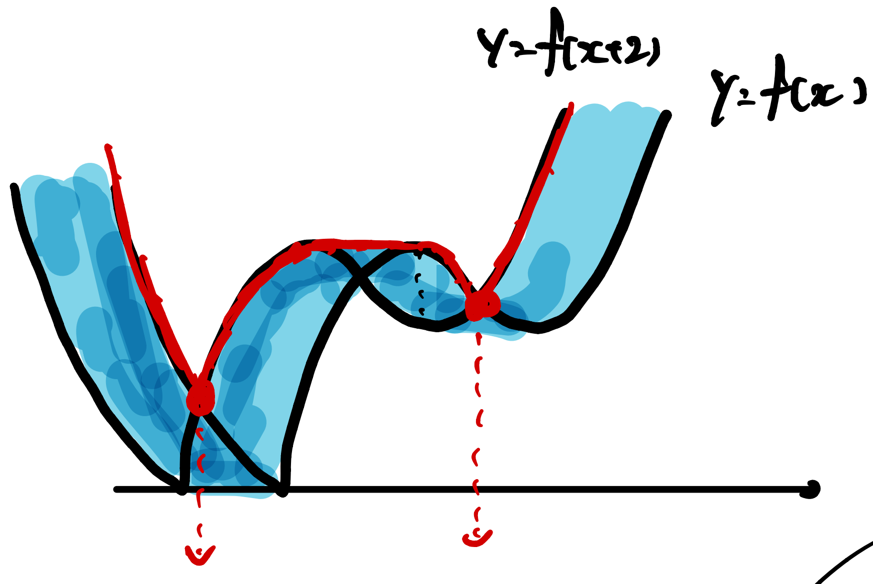
13

22. 함수 $f(x)=|x^3-3x+8|$과 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t, t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서만 미분가능하지 않다. $\alpha\beta=m+n\sqrt{6}$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이다.) [4점]

$h(x)=x^3-3x+8$

$=x(x^2-3)+8$





1) $-h(x)=h(x+2)$인 $x=\alpha$

$h(x+2)=(x+2)^3-3x+2$

$=x^3+6x^2+9x+10$

$-x^3+3x-8=x^3+6x^2+9x+10$인 x?

$2x^3+6x^2+6x+18=0$인 $x=-3$ (조립제법)

2) $h(x)=h(x+2)$인 $x=\beta$

$x^3-3x+8=x^3+6x^2+9x+10$인 x? ...

$3x^2+6x+1=0$인 양수 $x=-1+\frac{\sqrt{6}}{3}$

2

※ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.