2025학년도 본체만채! 모의고사 1회 빠른 정답				
공통과목				
1번	2번	3번	4번	5번
2	3	4	3	4
6번	7번	8번	9번	10번
5	1	2	3	2
11번	12번	13번	14번	15번
3	4	5	3	1
16번	17번	18번	19번	20번
30	30	25	6	70
21번	22번			
37	40			
선택과목 (확률과 통계)				
23번	24번	25번	26번	27번
2	3	2	4	3
28번	29번	30번		
4	12	500		
선택과목 (미적분)				
23번	24번	25번	26번	27번
2	3	4	4	4
28번	29번	30번		
2	32	8		

1.

$(2^{\sqrt{2}-1})^{\sqrt{2}+1} = 2^1$

2.

$f(x) = x^3 + x^2$

$f'(x) = 3x^2 + 2x$, $\quad f'(1) = 5$

3.

$a_7 - a_6 = 4$

$a_3 \times a_5 \times a_7 = 8$

$ar^6 - ar^5 = 4$

$a^3 r^{12} = 8 \quad , ar^4 = 2$

$2r^2 - 2r - 4 = 0$

$\therefore r = 2\ (r > 0)$, $\quad ar^4 \times r^4 = ar^8 = 2 \times 16 = 32$

4.

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x) \ + \ \lim\limits_{x \to -1-} f(x) = 3 + 3 = 6$

5.

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$2\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{4}$

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$

6.

$f(x) = x^3 + |x| + 2$

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

$= \int_0^1 (x^3 + x + 2)\,dx + \int_{-1}^0 (x^3 - x + 2)\,dx = 5$

7.

$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k = n + 2$

$(-1)^n a_n = 1\ (n \geq 2)$

$\therefore \sum_{k=1}^{2025} a_k = -3$

8.

$f(x) = 2x^3$, $\quad f(x) = -f(-x)$

$\therefore P(a, f(a))$, $Q(-a, -f(a))$,

$\overline{PQ} = \sqrt{(a+a)^2 + 4\{f(a)\}^2}$

$6x^2 = 3t$, $x = a = \pm\sqrt{\frac{t}{2}}$

$\lim\limits_{t \to 0+} \frac{\overline{PQ}}{\sqrt{t}} = \sqrt{2}$

9.

접선 l의 방정식을 구해주어야 한다. $y' = -2x + 6$ 이므로 접선의 기울기는 $(-2) \times 6 = -2$이다.

이 접선은 $(4, 8)$을 지나므로 접선의 방정식은

$l: y = -2(x-4)+8 = -2x+16$ 이다. $(4,8)$을 점 A, $(0,16)$을 점 B라고 하면

$$S = \Delta OAB - \frac{4^3}{6} = \frac{1}{2}\times 16\times 4 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3}$$

$$\therefore 3S = 64$$

10.

$y = 2^x$와 $y = \frac{1}{2}\times 4^x$를 연립하면, 점 A의 좌표는 $(1,2)$임을 알 수 있다. $y = \frac{1}{2}\times 4^x$는 $y = 2^x$을 가로, 세로로 절반만큼 축소시킨 곡선이므로 $B(\frac{1}{2}, 1)$, $C(2,4)$이다. 주어진 두 직선이 서로 직교하며 주어진 로그함수는 원함수($y = 2^x$)의 역함수를 x축 대칭시킨 함수이므로 $\overline{OA} = \overline{OD}$, $\overline{OC} = \overline{OE}$ 이다. 이를 바탕으로 계산하면 사각형의 넓이는 $\frac{35}{4}$이다.

※B, C 의 좌표에 대한 보충 설명
$A(t, mt)$라 하자. 점 A는 $y = 2^x$ 위의 점이므로 $2^t = mt$ 이다. 이를 이용하여 $y = \frac{1}{2}\times 4^x$ 의 x 값에 $\frac{t}{2}$를 대입하면 $\frac{1}{2}\times 4^{\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\times 2^t = \frac{1}{2}mt = m\times\frac{1}{2}t$로, 직선의 방정식을 만족시킨다. 즉, B의 x좌표는 A의 x좌표의 절반이다. 동일한 원리로 A와 C를 비교해주면 C의 x좌표는 A의 x좌표의 2배이다.

11.

$g(m)$의 값은 0, 1, 2 중 하나이다. 또, $g(m) = 1$인 m은 최대 2개이다.
그러므로 (나) 식에서 $x = 3, 4, 5, 6, 7$ 중 하나의 점에서 x축과 만난다는 사실을 알 수 있다. 이 경우 $g(-1)$, $g(0)$, $g(1)$의 값은 1이 될 수 없기에 세 함숫값 중 2개는 0, 1개는 2여야 한다. g에 대한 함숫값이 2가 되는 x좌표가 1인지, -1인지에 따라 2가지 경우가 존재한다. 이 중 (나)를 만족하는 것은 $g(-1)$이 2인 경우다.

(나)의 식에서 그래프의 개형을 생각하면 $y = f(x)$는 $(4, 0)$을 지난다. 즉, $f(x) = (x-4)(x-p)\ (-1 < p < 0)$ 꼴로 나타낼 수 있다.

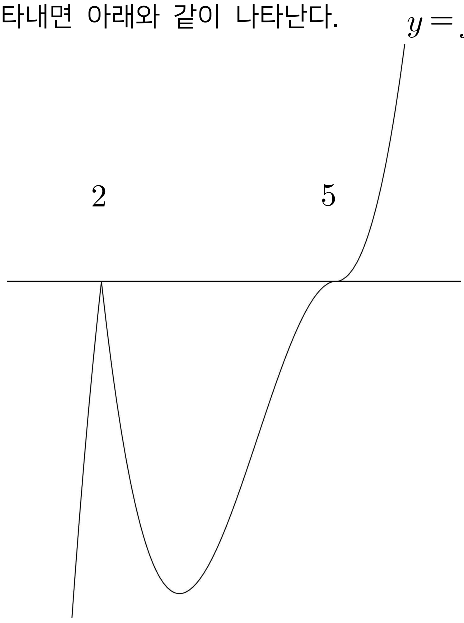
$f(10) = 6\times(10-p)$이고, p의 범위를 고려했을 때 $60 < 60-6p < 66$ 이므로 양의 정수 $f(10)$의 최댓값은 65이다.

12.

(가)의 조건을 해석하자. $(x-2)f(x) = \pm g(x)$에서, 함수 $f(x)$가 연속이라는 조건을 통해 $g(2) = 0$이 됨을 알 수 있다. 또, 함수 $f(x)$는 $y = \frac{g(x)}{x-2}$와 $y = -\frac{g(x)}{x-2}$ 두 함수의 중 하나의 함수를 선택하여 진행하는 함수임을 알 수 있다.

다음으로 (나)의 조건을 해석하면, 임의의 실수 x에 대하여 $\int_5^x f(t)dt \geq 0$이 성립해야 함을 알 수 있다. 해당 조건이 성립하기 위해선, $f(5) = 0$이고 $x > 5$일 때 $f(x) \geq 0$, $x < 5$일 때 $f(x) \leq 0$이 성립해야 함을 알 수 있다.

(가)와 (나)의 조건에서 $g(2) = g(5) = 0$임을 알 수 있는데, $g(x) = |(x-2)f(x)|$에서 $g(x) \geq 0$이 성립해야 하므로, 사차함수 $g(x)$의 식은 $g(x) = (x-2)^2(x-5)^2$으로 결정된다. 따라서 $f(x) = \pm(x-2)(x-5)^2$이 되어야 하고, (나)에서 주어진 조건이 성립하려면 $x < 2, x > 5$일 때 $f(x) = (x-2)(x-5)^2$이 되어야 하고 $2 < x < 5$일 때 $f(x) = -(x-2)(x-5)^2$이 되어야 한다. 이를 그래프로 나타내면 아래와 같이 나타난다.



따라서 구하는 값은 8이 된다.

13.

각 BAC의 사인값을 $\sin\theta$라고 두면, 각 BAD가 $\frac{\pi}{2}$임을 통해 각 CAD의 사인값은 $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$가 되

어야 함을 알 수 있다.

삼각형 ABC에서 사인법칙을 적용하면 $\dfrac{\overline{BC}}{\sin\theta}=10k$가 되어야 하고, 삼각형 ACD에서 마찬가지로 사인법칙을 적용하면 $\dfrac{\overline{CD}}{\cos\theta}=6k$가 성립하여야 한다. 여기서, $\overline{BC}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}\overline{CD}$임을 활용하면 $\dfrac{\overline{CD}}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{3}\,\overline{BC}}{5\cos\theta}=6k$에서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$이 되어야 함을 알 수 있다.

따라서 $\overline{CD}=3k=\dfrac{12}{k}$가 성립하여야 하고, $k=2$가 되어야 한다.
$\overline{CD}=6$, $\overline{BC}=10\sqrt{3}$에서, $\overline{BC}\times\overline{CD}=60\sqrt{3}$이 되어야 함을 알 수 있다.

14.

ㄱ. $x(2)=x(0)$이므로 참

ㄴ. ㄴ선지의 $f(0)=4$라는 가정하에서는 $|x(t)|\le 2$인데, 이 중 $|x(t)|=2$일 때는 열린구간 (0, 2)에서 실근을 가질 수 없다. 반면에, $|x(t)|<2$일 때는 (0, 2)에서 실근을 가질 수밖에 없다. 만약 (0, 2) 사이에 실근을 갖지 않는다면, 0과 2사이에 실근이 없으므로 $|x(t)|=2$가 된다.

ㄷ. $ax(x-2)(x-p)\,(p>4)$일 때, 4보다 큰 p가 어떤 상수가 되면 $f(2)=f(0)$은 성립하지만, 구간 (2, 4]에서 실근이 존재하지 않는다. 그러므로 항상 존재하는 것은 아니다. 구체적 반례를 들면 $p=$ 대략 4.91일 때가 그렇다고 할 수 있다. 왜냐하면 이 때, $f(2)=f(0)$이 성립하지만, 구간 (0, 4] 사이에 실근이 존재하는 상황인 것은 아니기 때문이다. 그러므로 ㄷ 선지는 항상 존재하는 상황이라고 볼 수 없으므로 틀린 선지라 할 수 있다.

15.

a_4와 a_7의 값이 주어져 있으므로, a_5와 a_6의 항을 추정해볼 수 있고, a_5의 값은 a_4와의 대소관계를 바탕으로 두 가지 경우로 나누어 생각해볼 수 있다.

1) $a_5\ge a_4$인 경우
$a_6=a_5-2a_4$가 되어야 하고, $a_7=2a_5-2a_4$가 되어야 하기에 $a_5=4$가 되어야 함을 알 수 있다. 이 경우 $a_5=4, a_6=-2$가 된다.

2) $a_5<a_4$인 경우
$a_6=a_5+a_4$가 되어야 하고, $a_7=(a_4+a_5)-2a_5$가 되어야 하기에 $a_5=1$가 되어야 함을 알 수 있다. 이 경우 $a_5=1,\ a_6=4$가 된다.

두 경우 모두 a_8의 값은 6이 되고, $\sum_{k=1}^{8}a_k$을 구하기 위해선, a_1, a_2, a_3의 값을 역추적해보아야 한다.

두 경우에 역추적한 값들을 구해보면, 결과는 아래와 같이 나타난다.

1) $a_5=4$인 경우

가능한 경우는
① $a_1=2, a_2=\dfrac{7}{2}, a_3=-\dfrac{1}{2}$인 경우와
② $a_1=\dfrac{5}{4}, a_2=-\dfrac{7}{4}, a_3=-\dfrac{1}{2}$인 경우 뿐이다.

2) $a_5=1$인 경우

가능한 경우는
③ $a_1=-1, a_2=-1, a_3=1$인 경우와
④ $a_1=2, a_2=-1, a_3=1$인 경우, 그리고
⑤ $a_1=\dfrac{1}{2}, a_2=2, a_3=1$인 경우뿐이다.

해당 경우들 중 ⑤에서 최댓값 $\dfrac{39}{2}$가 도출되고, ②에서 최솟값 12이 도출된다. 따라서 구하는 값의 최댓값과 최솟값의 합은 $\dfrac{63}{2}$가 된다.

16.

$\log_2(x-5)\le\log_2(13-x)$

$5<x\le 9$

$9+8+7+6=30$

17.

$g(x)=(x^2+3)f(x)$

$g'(2)=4f(2)+7f'(2)=16+14=30$

18.

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=20$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=-30$

$\sum_{k=1}^{10}(2b_k)=50$, $\therefore \sum_{k=1}^{10}b_k=25$

19.

$f(x)=x^3+9(a-3)x^2+243x$

$f'(x)=3x^2+18(a-3)x+243$

$=3(x^2+6(a-3)x+81)$

$36(a-3)^2 \geq 324$

$6 \geq a \geq 0$

$\therefore M=6$

20.

$g(x)$의 부호가 바뀌는 지점에선, $f(x+1), f(x-1)$의 함숫값이 동일해야 한다. 따라서
$f(0)=f(-2), f(2)=f(4)$가 성립해야 함을 알 수 있다.

실수 a, c에 대하여 $f(x)=ax(x+2)(x-k)+c$라고 잡자. 여기에서, $f(2)=f(4)$가 성립하므로
$8a(2-k)=24a(4-k)$가 성립해야 하고, $k=5$가 된다.

또, $f'(-1)=$-2라는 조건에서 $a=2$가 되어야 함을 알 수 있다. 따라서 $f(x)=2x(x+2)(x-5)+c$가 되고, $f'(5)=70$이 되어야 함을 알 수 있다.

21.

(나) 조건은 등차수열의 귀납적 정의로 나타나 있고, 이는 주어진 범위에서 b_n이 등차수열임을 의미한다. $b_n=a_n+|a_{n+3}|$에서 a_n은 늘 등차수열이므로, $|a_{n+3}|$이 등차수열이 되려면 주어진 범위에서 a_{n+3}의 부호가 늘 일정해야 한다.

따라서 $a_{k+3}, a_{k+4}, a_{k+5}$의 부호가 모두 같고, $a_{k+6}, a_{k+7}, a_{k+8}$의 부호가 모두 같음을 알 수 있다. 문제의 조건에 의하여 수열 a_n의 모든 항은 0이 될 수 없고, 첫째항이 양수이므로 a_{k+5}는 양수, a_{k+6}은 음수가 되어야 한다. 또, a_n의 모든 항이 정수가 되어야 하므로 공차는 음의 정수가 되어야 한다.

모든 항이 0이 아닌 정수가 되어야 하므로, $|d|$는 50의 약수가 될 수 없다. 또, 자연수 k에 대하여 a_{k+5}가 양수가 되어야 하고, $k \geq 1$이므로 a_6은 반드시 양수가 되어야 한다. $a_6=a_1+5d$에서, $5|d|<50$이 되어야 함을 알 수 있다.

이를 모두 만족하는 자연수 $|d|$는 3, 4, 6, 7, 8, 9 뿐이다. 따라서 정답은 이를 모두 더한 값인 37이 된다.

22.

(가) 조건에서 좌변의 부호는 항상 0보다 크거나 같고, 우변의 부호는 항상 0보다 작거나 같다. 따라서 (가) 조건을 만족시키려면 좌변과 우변이 반드시 함께 0이 되어야 한다.

(나) 조건에서 $f(x)$=0 의 실근은 두 개이고, (가)에 주어진 방정식의 모든 실근이 두 개가 되어야 하므로 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근은 모두 (가)의 실근이 되어야 한다.

$g(x)=0$이 되는 x의 값은 -1과 0이고, $f'(x-k)=0$이 되는 x의 값은 두 개 존재하는데, $f(x)=0$과 $f'(x-k)=0$을 동시에 만족할 수 있는 x는 최대 1개 존재할 수 있으므로, (가)에 제시된 방정식의 두 근 중 하나는 반드시 -1 또는 0이 되어야 한다. 이를 바탕으로, (가)의 방정식의 근이 될 수 있는 경우를 두 가지로 나누어서 생각

해볼 수 있다.

① 방정식의 두 근이 -1, 4인 경우
② 방정식의 두 근이 0, 3인 경우

① 방정식의 두 근이 -1, 4인 경우
$f(4)=2k$라는 조건에 모순이 되어 성립하지 않는다. 따라서 (가)의 방정식을 만족하는 경우는 ②가 된다.

② 방정식의 두 근이 0, 3인 경우
삼차함수 $f(x)$는 $x^2(x-3)$또는 $x(x-3)^2$이 되어야 한다. 두 경우를 나누어 생각해보자.

1) $f(x)$=$x^2(x-3)$가 되는 경우
$f'(x-k)=a(x-k)(x-2-k)$에서, 3이 $f'(x-k)=0$의 한 실근이 되어야 하므로 k의 값으로 가능한 것들은 $k=3, k=1$이 되어야 한다. 그러나, 두 경우 모두 $f(4)=2k$가 되어야 한다는 조건에 모순이 된다.

2) $f(x)$=$x(x-3)^2$가 되는 경우
$f'(x-k)=a(x-1-k)(x-3-k)$에서, 3이 $f'(x-k)=0$의 한 실근이 되어야 하므로 k의 값으로 가능한 것은 $k=2$가 되어야 한다. 이 경우, $f(4)=4$가 되어 주어진 조건이 모두 부합한다.

따라서 구하는 $k=2$가 되고, $f(5)=20$이 되어 구하는 정답은 40이 됨을 알 수 있다.

[확률과 통계]

23.

해설: x^3의 계수는 ${}_7\mathrm{C}_3\times a^3=35a^3$이므로 $a=2$이다.

24.

해설: $\mathrm{P}(A\cup B)+\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=1$
$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$이다. A와 B는 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{16}$이다.

25.

해설: 전체=$\mathrm{P}(a+b\geq 5)+\mathrm{P}(a+b\leq 4)$이므로 전체에서 $a+b\leq 4$일 확률을 빼면 된다. $a+b=4$인 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{8}{8}$이고, $a+b=3$인 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{7}{8}$이다.
$a+b=2$인 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{4}{8}$이고, $a+b=1$인 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{1}{8}$이다. 다 더하면 $\frac{1}{6}\times\frac{20}{8}$이므로
이것은 곧, $\frac{1}{6}\times\frac{5}{2}=\frac{5}{12}$이기에 답은 $\frac{7}{12}$이다.

26.

해설: 위 문제는 학생 A와 이웃하여 앉는 여학생이 있다는 것을 사건 a라 하고,
학생 B와 이웃하여 앉는 남학생이 있다는 것을 사건 b라 할 때, n(a∩b)를 구하는 문제가 된다. 한편, 120−(n(a^c)+n(b^c)−n($a^c\cap b^c$)) 중 n(a^c)$=12$, n(b^c)$=12$이고, n($a^c\cap b^c$)$=4$이다.
따라서 답은 100이다.

27.

해설: 모든 실수 x에 대하여 $f(2a-x)=g(x)$가 성립한다는 조건과 (가)조건을 통해, $a=30$. (나)를 통해 $k=30$임을 알 수 있다.

$\mathrm{P}(X\geq 25)+\mathrm{P}(Y\leq 35)$의 값이 0.3174이기에, $\sigma(X)=5$임을 알 수 있고, 또 $\sigma(Y)=5$임을 알 수 있다.

답 60이다.

28.

해설: 주사위의 눈의 수가 3의 배수일 때의 확률이 $\frac{1}{3}$이고,

이때, 흰 공이 2개일 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}$이다.

주사위의 눈의 수가 3의 배수가 아닐 때의 확률이 $\frac{2}{3}$이고,

이때, 흰 공이 2개일 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}$이다. 따라서

$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}=\frac{1}{2}$이다.

29.

해설: $a=\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{4}$,$b=\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{4}$

,$d=\overline{x_2}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다.

$d-a=12.25=0.49+1.96\times\frac{\sigma}{4}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

$d-b=4.41=0.49+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}-1.96\times\frac{\sigma}{4}$

이므로, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=4,\sigma=8$이 된다. 그러므로, $n=4$이다.

답 12

30.

해설:$f(1)\leq 1, f(2)\leq 2, f(3)\leq 2, f(4)\leq 2$이고,

$f(5)\geq 3, f(6)\geq 3, f(7)\geq 3, f(8)\geq 4$이다.

따라서, $f(1)=1$이므로, $1\leq f(2)\leq f(3)\leq f(4)\leq 2$이다. 이 경우의 수는 4이다.

한편, $3\leq f(5)\leq f(6)\leq f(7)\leq f(8)\leq 8$에서

3,3,3,3 인 경우를 빼야 한다.

왜냐하면, $f(8)\neq 3$이기 때문이다. 그러므로, 구하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{H}_4-1=125$이다.

답 500

[미적분]

23.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+4n}-\sqrt{n^2-2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2-2n}}=3$$

24.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{t^2+2}$$

$$\frac{dy}{dt}=-\pi\sin\pi t$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\pi}{\frac{4}{9}}=-\frac{9}{4}\pi$$

25.

$$\int_1^2\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{6x+1}{3x^2+x+1}\right)dx$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\ln\left(3x^2+x+1\right)\right]_1^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\ln 3$$

26.

$S_1=$부채꼴 $A_1E_1P_1+\triangle P_1E_1Q_1+$사각형

$P_1Q_1C_1D_1-(\triangle A_1E_1P_1+$부채꼴 $P_1E_1Q_1)$

부채꼴 $A_1E_1P_1=\frac{100}{3}\pi$, $\triangle P_1E_1Q_1=25\sqrt{3}$, 사각형

$P_1Q_1C_1D_1=100-50\sqrt{3}$, $\triangle A_1E_1P_1=25\sqrt{3}$, 부채꼴

$P_1E_1Q_1=\frac{50}{3}\pi$이므로 $S_1=\frac{50}{3}\pi-50\sqrt{3}+100$

O_2의 지름이 $\overline{C_1D_1}$의 길이와 같으므로 O_2의 반지름 길이= O_1 반지름 길이$\times\frac{1}{2}$

공비= $\frac{1}{2}$이므로 무한등비급수 공식을 사용하면 $\lim_{n \to \infty} T_n$

$$= \frac{\frac{50}{3}\pi - 50\sqrt{3} + 100}{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{200}{9}\pi - \frac{200\sqrt{3}}{3} + \frac{400}{3}$$

27.

주어진 함수의 그래프를 그려보면,

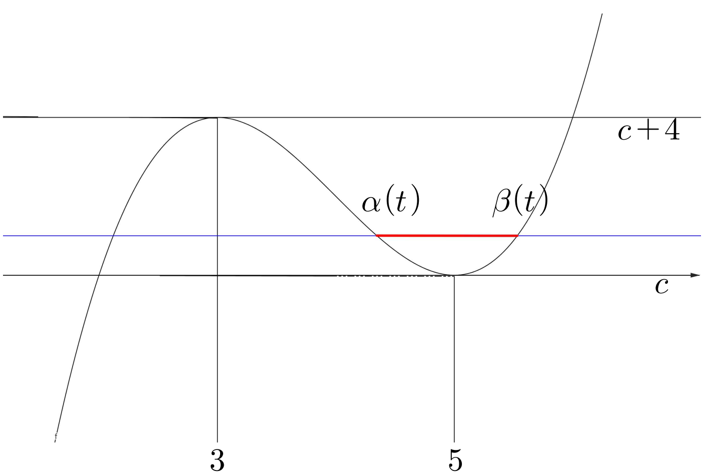
$\alpha_1 = -\frac{7}{4}\pi,\ \alpha_2 = -\frac{3}{4}\pi,\ \alpha_3 = \frac{1}{4}\pi$가 되어야 함을 알 수 있다. 이를 바탕으로 주어진 계산을 진행하면

$\int_{\alpha_1}^{\alpha_3} f(x)\,dx = \int_{-\frac{7}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} e^{-x}\sin x\,dx$가 되어야 함을 알 수 있고, 이를 계산하면 $\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{\frac{7}{4}\pi} - e^{-\frac{\pi}{4}})$가 나온다.

28.

$\int_t^k f(x)\,dx = 0$은, 함수 $f(x)$의 임의의 부정적분 $F(x)$를 도입하여 $F(k) = F(t)$와 같은 조건으로 해석할 수 있다. $F(3) = c+4,\ F(5) = c$라고 가정하자.

해당 방정식을 만족하는 실수 k는 작은 것부터 순서대로 $t, \alpha(t), \beta(t)$가 되고 $g(t)$는 아래의 그림에서 붉은색으로 표시된 부분의 길이가 된다고 해석할 수 있다.



삼차함수 $F(x)$를 세 부분으로 나누어, $x < 3$인 부분은 $F_1(x)$, $3 \le x < 5$인 부분은 $F_2(x)$, $x \ge 5$인 부분은 $F_3(x)$로 정의하자. 그러면,

$F_1(t) = F_2(\alpha(t)) = F_3((\beta(t))$가 성립하기에

$\alpha(t) = F_2^{-1}(F_1(t))$

$\beta(t) = F_3^{-1}(F_1(t))$

라고 정의할 수 있다. 따라서

$g(t) = F_3^{-1}(F_1(t)) - F_2^{-1}(F_1(t))$가 되고,

$\int_2^3 f(t)g(t)\,dt$에서 $F_1(t) = p$라고 치환하면

구하는 값은 $\int_c^{c+4} F_3^{-1}(p) - F_2^{-1}(p)\,dp$가 된다.

역함수의 적분법, 또는 넓이 공식 등을 활용하여 기하적으로 해당 값을 계산하면, 구하는 값은 삼차함수 $F(x)$와 $y = c+4$로 둘러싸인 넓이와 같게 되어 정답은 $\frac{9}{4}$가 됨을 알 수 있다.

29.

$f(g(F^{-1}(x))) = \frac{4}{3}e^{2x}$의 양변에 $F(x)$를 합성하면,

$f(g(x)) = \frac{4}{3}e^{2F(x)}$가 성립함을 알 수 있다. 해당 식의 양변에 $\frac{\pi}{6}$을 대입하면 $f(g(\frac{\pi}{6})) = \frac{4}{3}e^{2F(\frac{\pi}{6})}$이 됨을 알 수 있다.

한편, $f(g(x)) = \frac{4}{3}e^{2F(x)}$의 양변을 미분하면

$f'(g(x))g'(x) = \frac{8}{3}e^{2F(x)}f(x)$가 되는데, 해당 식의 양변에 마찬가지로 $\frac{\pi}{6}$을 대입하면

$f'(g(\frac{\pi}{6}))g'(\frac{\pi}{6}) = \frac{8}{3}e^{2F(\frac{\pi}{6})}f(\frac{\pi}{6})$가 성립함을 알 수 있다.

주어진 식을 계산하여 정리하면, $g'(\frac{\pi}{6}) = \frac{4}{3}$가 된다.

마지막으로, $g(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{3}$를 $f(g(x)) = \frac{4}{3}e^{2F(x)}$에 대입하면

$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{4}{3}e^{2F(\frac{\pi}{6})} = 2$가 됨을 알 수 있고,

이는 $F(\frac{\pi}{6}) = \ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$임을 의미한다. 이때, c는 $\sec c + \tan c = \sqrt{2}$를 만족시키고, 이를 정리하면 $\tan c = \frac{1}{2\sqrt{2}}$가 됨을 알 수 있다. 따라서 구하는 값인

$\dfrac{3g'(\frac{\pi}{6})}{(\tan c)^2}$는 32가 된다.

30.

(가) 조건은, $h(p), h(q)$ 중 하나는 0이고, 나머지 하나는 2가 되어야 함을 의미한다. 일반성을 잃지 않고, $h(p)=0, h(q)=2$라고 가정하고서 $h(p)=0$이라는 조건을 해석해보자.

우선, 함수 $|f(x)-mx-\frac{1}{2}k|$이 미분가능하지 않을 m의 후보는 $x<0$에서 $x+k$와 만나는 경우, $x>0$에서 axe^{-x}와 접하지 않으면서 만나는 경우, 그리고 $x=0$일 때가 있다.

따라서 $h(p)=0$이 성립하려면 $x<0$에서 $x+k$와 만나지 않아야하고, $x>0$에서 axe^{-x}와 접하거나 만나지 않아야 하며 $x=0$일 때 미분 가능해야 한다.

우선 $x<0$에서 $x+k$와 만나지 않으려면 기울기 $m \geq 1$이 성립해야 한다. 또, $x=0$일 때 미분가능하려면 $x<0$에서 $|f(x)-mx-\frac{1}{2}k|$의 미분계수인 1-m과 $x>0$에서 $|f(x)-mx-\frac{1}{2}k|$의 미분계수인 $m-a$가 일치해야 하고, 이를 만족하기 위해서는 $m=\frac{1+a}{2}$가 되어야 한다. 앞서 $m \geq 1$이 성립해야 한다고 했으므로, $a \geq 1$이 되어야 함을 알 수 있다. 따라서 a는 1보다 크거나 같은 양수이다. 따라서 $h(p)=0$을 만족시키는 $p=\frac{1+a}{2}$이고, $h(q)=2$를 만족하는 음수 q가 존재해야 한다.

다음으로 (나) 조건을 살펴보자.

우선, $h(m)$이 불연속이 될 수 있는 m의 후보들을 생각해보면 아래와 같이 나와야 한다.
① $m=1$이 되어 $x<0$인 부분과의 만남의 유무가 달라지는 경우
② $x>0$에서의 함수와 접하는 경우
③ $x>0$에서의 함수의 점근선인 $y=0$
④ $h(p)=0$이 되는 p

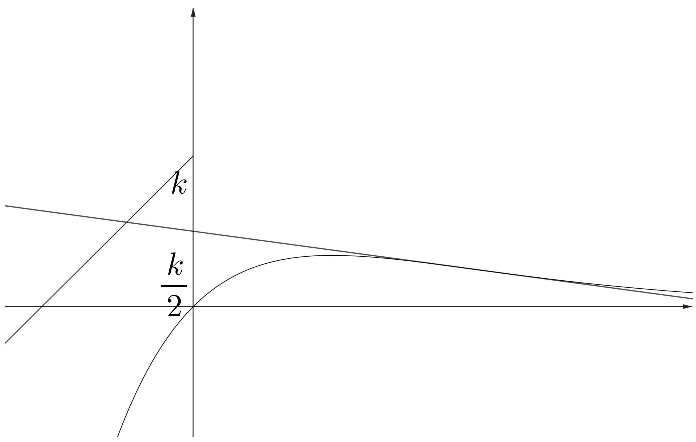
②가 되는 경우는 함수의 개형에 따라 2개가 존재할 수도 있고, 변곡접선이 그려지는 경우에는 1개가 존재하며, 변곡접선도 그릴 수 없는 경우에는 0개가 가능하다. 따라서, 최대 5개의 가능한 경우들 중에서 3개의 경우에서만 불연속이 되도록 그래프가 그려져야 한다. 가능한 경우를 모두 생각해보자.

1) $m=0$일 때 접하면서 $a=1$인 경우

이 경우는 점근선의 경우와, $m=0$에서 접하는 두 가지의 경우가 하나로 중첩되고 ①인 경우와 ④인 경우가 하나로 중첩되고, $m=0$이 아닌 다른 기울기에서 접하게 되는 경우가 발생하여 불연속점이 세 가지가 된다. 그러나 이 경우에는 $h(q)=2$가 되는 음수 q가 생기지 않아 모순이 발생한다.

2) 변곡접선을 가지면서 $a=1$인 경우

이 경우에는 ①인 경우와 ④인 경우가 하나로 중첩되고, 접하는 경우가 하나만 존재하며 $m=0$일 때 불연속이 되어 총 세 개의 불연속점이 생긴다. 이 경우에는, 변곡접선을 만드는 기울기 m에서 $h(m)=2$가 성립하기에 주어진 조건을 모두 만족시킨다. 해당 경우는 아래와 같이 나온다.



$y=xe^{-x}$의 변곡점은 $x=2$에서 생기고, 해당 점에서 그린 변곡접선은 $y=-\frac{1}{e^2}(x-2)+\frac{2}{e^2}=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$이 된다. 따라서 $k=\frac{8}{e^2}$이 되고,

$m_1=-\frac{1}{e^2}, m_2=0, m_3=1$ 이 되어 구하는 값은 8이 된다.

3) 접선을 가지지 않는 경우
해당 경우는 ①, ③, ④의 경우에서 각각 불연속이 된다. 그러나, 이 경우에는 $h(q)=2$가 되는 음수 q가 생기지 않아 모순이 발생한다.