“미분가능하다” $\neq$ “도함수의 극한값이 존재한다”.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다.

$\Leftrightarrow$ $f'(a)$의 값이 존재한다. 즉, 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\in\mathbb{R}$$

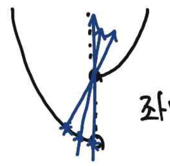
$x=a$에서 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 극한값이 존재한다.

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to a}f'(x)=\lim_{x\to a-}f'(x)=\lim_{x\to a+}f'(x)=L\in\mathbb{R}$$

“정의되었다.”와 “극한값이 존재한다.”는 당연히 다른 소리다.

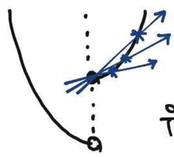
간단히 평균변화율의 극한 vs 순간변화율의 극한으로 이해해도 좋다.

ex1) $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ x^2+1 & (x\geq 0) \end{cases}$, $x=0$에서 미분가능성을 조사해 보자.



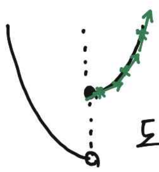
좌미분계수. 양의 무한대로 발산.

∴ $x=0$에서 미분가능하지 않다.



우미분계수. 0으로 수렴.

도함수의 좌극한. 0으로 수렴.



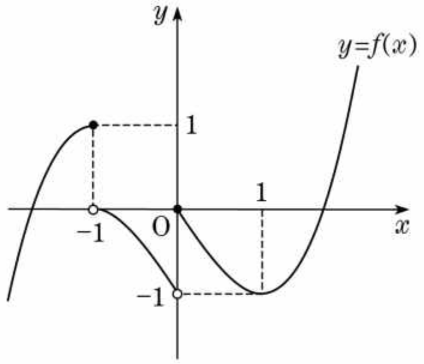
도함수의 우극한. 0으로 수렴.

∴ $x=0$에서 도함수의 극한값 존재.

ex2) 13학년도 3월 학평 B형 20번, 풀이는 문제 아래에

20. 함수 $f(x)$가 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(x^3-3x) & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 0) \\ \frac{1}{2}(x^3-3x)-1 & (-1<x<0) \end{cases}$$



옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0} f'(x)=-\frac{3}{2}$

ㄷ. $\lim_{x\to -1+0} f(f'(x))=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

ㄱ. $x=0$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

ㄴ. $f'(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}$ $(x\neq -1,\, 0)$에서 $\lim_{x\to 0} f'(x)=-\frac{3}{2}$

ㄷ. $x\to -1+$일 때 $f'(x)\to 0-$

$\therefore f'(x)\to 0-$일 때 $f(f'(x))\to -1$

ㄴ만 옳고 답은 2번.

“미분가능하지 않고 도함수의 극한이 존재하는 경우”를 살펴보았다.
자연스럽게 다음 두 가지 경우를 떠올릴 수 있을 것이다.

1. 미분가능하지만 도함수의 극한이 존재하지 않는 경우
2. 미분가능하고 도함수의 극한도 존재하지만 도함수는 불연속인 경우

다음의 예시를 보자.

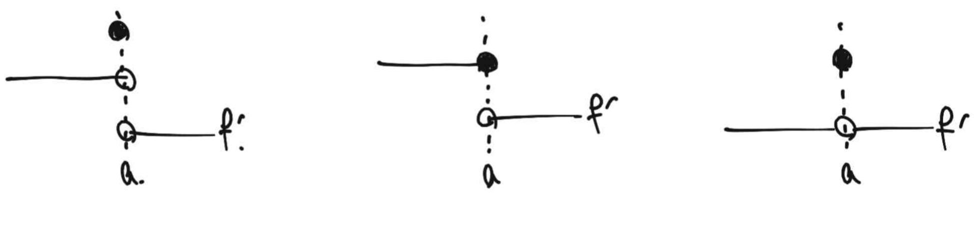
ex3) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

$-1\le \sin\dfrac{1}{x}\le 1$, $-x^2\le x^2\sin\dfrac{1}{x}\le x^2$이므로 조임 정리에 의해
$f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(미분가능성) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$에서
$-|x|\le x\sin\dfrac{1}{x}\le |x|$이므로 조임 정리에 의해 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(도함수의 극한) $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$이다.
이때 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}\right)=0$이고 $\cos\dfrac{1}{x}$은 -1과 1 사이에서 진동하므로
극한값이 존재하지 않는다.

위의 예시는 도함수가 진동해 극한값이 존재하지 않는 경우다.
그렇다면 도함수의 좌극한과 우극한이 각각 다른 값으로 수렴하는 경우는 어떨까?
같은 값으로 수렴하는 경우는 또 어떨까?
즉, 다음과 같은 도함수의 그래프가 존재할까?



결론부터 말하자면 “존재하지 않는다.” ⋯ (*)
쉽게 풀어서 설명하겠지만 학부 2학년 해석학 내용이니 보기 싫은 사람은 5페이지로 가자.

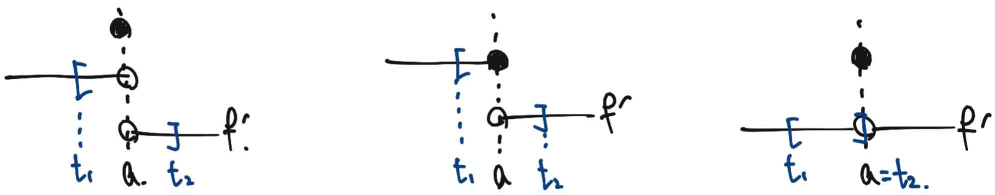
$(*)$을 보이기 전에 다음을 소개한다.

<사잇값 성질>
구간 $[a, b]$ 내 임의의 x, y $(x < y)$와 $f(x)$, $f(y)$ 사이의 모든 실수 L에 대해
$f(c) = L$인 실수 $c \in (x, y)$를 항상 찾을 수 있을 때, 함수 f는 구간 $[a, b]$ 사이에서
사잇값 성질을 가진다고 한다.

"연속함수이다. $\rightarrow$ 사잇값 성질을 가진다."는 참이지만 역은 성립하지 않는다.

<다르부 정리>
함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 미분가능하고 $f'(a) \neq f'(b)$일 때,
$f'(a)$와 $f'(b)$ 사이의 실수 k에 대하여 $f'(c) = k$인 실수 $c \in (a, b)$가 존재한다.
즉, 미분가능한 함수의 도함수가 연속이 아니더라도 사잇값 성질은 반드시 만족한다.
(증명을 찾아보는 건 여러분의 몫으로 남긴다.)

세 가지 경우 모두 $f'(x)$가 실수 전체에서 정의되었으므로
함수 $f(x)$는 실수 전체에서 미분가능하다.
이제 실수 a를 포함하는 닫힌 구간을 잡아보자.



다르부 정리에 의하면 각각의 경우에서 $f'(t_1)$과 $f'(t_2)$ 사이에 실수가 빈틈없이 차있어
언제나 $f'(t_1)$, $f'(t_2)$ 사이의 실수 k에 대해 $f'(c) = k$인 실수 $c \in (t_1, t_2)$를 찾을 수 있다.
그러나 세 경우 모두 다르부 정리를 만족시키지 못한다. 따라서 $(*)$이 참이다.

여기까지 읽고 “그래서 뭐 어쩌라고...?” 싶은 사람도 있을 것이다.
이제 미분가능성에 대한 문제를 풀 때 도함수의 극한을 이용할 수 있었던 이유를 말해보고자 한다.

3페이지와 4페이지의 내용을 요약하자면, 다르부 정리에 의해
미분계수(도함수의 함숫값)는 도함수의 좌극한 또는 우극한(각각 수렴하는 경우)과
동떨어져 존재할 수 없다.
즉, 미분계수, 도함수의 좌극한, 도함수의 우극한이 각각 어떤 실수로서 존재한다면
모두 같은 값으로 존재해야 한다는 말이다.
물론 “미분가능하다.”와 “도함수가 연속이다.”는 동치가 아니다. ex2 같은 반례가 존재한다.

이제 세줄요약과 미분가능성에 관한 문제 하나로 칼럼을 마치자.

1. 미분계수와 도함수극한은 당연히 다른 내용이다.
2. 다르부 정리에 의해 도함수의 극한값과 미분계수가 각각 존재한다면 동떨어져 존재할 수 없다.
3. 2에 의해 미분가능성에 관한 문제를 풀 때 도함수극한을 이용한 풀이가 정당화된다.

ex4) 21학년도 수능 나형 30번, 풀이는 6페이지부터

30. 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고,
함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고,
$h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

함수 $f(x)=|x-a|=\begin{cases} -x+a & (x<a) \\ x-a & (x \geq a) \end{cases}$ 의 $x=a$에서 미분가능성을 조사하여 보자.

(미분가능성) $\lim_{x \to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-1$, $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=1$

따라서 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

(도함수의 극한) $f'(x)=\begin{cases} -1 & (x<a) \\ 1 & (x>a) \end{cases}$ 에서

$\lim_{x \to a-} f'(x)=-1$, $\lim_{x \to a+} f'(x)=1$이므로 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

미분가능한 함수 $f(x)$에 대해

함수 $\mathrm{g}(x)=|x-a|f(x)$의 $x=a$에서 미분가능성을 조사하여 보자.

(미분가능성)

$\lim_{x \to a-} \frac{\mathrm{g}(x)-\mathrm{g}(a)}{x-a}=\lim_{x \to a-}\left\{\frac{|x-a|}{x-a} \cdot f(x)\right\}=-f(a)$, $\lim_{x \to a+} \frac{\mathrm{g}(x)-\mathrm{g}(a)}{x-a}=f(a)$

따라서 $f(a)=0$일 때 $\mathrm{g}(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고,

$f(a) \neq 0$이면 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

(도함수의 극한)

$\mathrm{g}'(x)=\begin{cases} -\{f(x)+(x-a)f'(x)\} & (x<a) \\ f(x)+(x-a)f'(x) & (x>a) \end{cases}$ 에서

$f(a)=0$이면 함수 $\mathrm{g}(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고

$f(a) \neq 0$이면 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

즉 $\mathrm{g}(x)$를 미분가능하게 만들려면 $f(x)$가 $x-a$를 인수로 가지면 된다.

이를 바탕으로 문제를 풀어보자.

$x<1$에서 함수 $|f(x)-g(x)|$는 인수를 가지지 않거나
$|x-a|$로 묶어냈을 때 인수를 최소 하나 더 가져야 한다.
이때 $h(0)=0$이므로 $|x|$로 묶어냈을 때 인수를 최소 하나 더 가져야 한다.
또한 $g(x)$는 일차함수이므로 $f(x)$의 $x=0$에서의 기울기가 0이 아닌 접선이 된다.
인수를 하나 더 가지는 경우, 두 개 더 가지는 경우로 나눠보자.

i) 인수를 하나 더 가지는 경우,
즉 $f(x)-g(x)=x^2(x-\alpha)$ $(\alpha \neq 0)$로 나타낼 수 있는 경우

$x<1$에서 함수 $h(x)$가 미분가능하려면 $\alpha \geq 1$이어야 한다.
이때 $x=0$ 근처에서 $x^2>0$, $x-\alpha<0$이고 $f(x)-g(x)<0$이므로
$|f(x)-g(x)|=g(x)-f(x)$이다.

$$\therefore h(x)=\begin{cases} g(x)-f(x) & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

$h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로
$g(1)-f(1)=f(1)+g(1)$, $f(1)=0$
$g'(1)-f'(1)=f'(1)+g'(1)$, $f'(1)=0$
$f(1)=0$, $f'(1)=0$이므로 $f(x)$를 $f(x)=(x-1)^2(x-p)$로 다시 쓸 수 있다.
$g(x)=f'(0)(x-0)+f(0)=(2p+1)x-p$

$f(x)=0$의 세 근의 합은 $p+2$이므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 세 근은 $0, 0, p+2$이다.
$\alpha=p+2 \geq 1$, $p \geq -1$

$$\begin{aligned} h(2) &= f(2)+g(2) \\ &= (2-p)+(3p+2)=5 \end{aligned}$$
$$\therefore p=\frac{1}{2},\ f(x)=(x-1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right),\ g(x)=2x-\frac{1}{2}$$

ii) 인수를 두 개 더 가지는 경우, 즉 $f(x)-\mathrm{g}(x)=x^3$인 경우

$x>0$에서 $|f(x)-\mathrm{g}(x)|=f(x)-\mathrm{g}(x)=x^3$

$$\therefore h(x)=\begin{cases} x^3 & (x<1) \\ f(x)+\mathrm{g}(x) & (x\ge 1) \end{cases}$$

$h(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$f(1)+\mathrm{g}(1)=f(1)-\mathrm{g}(1)$, $\mathrm{g}(1)=0$

$f'(1)-\mathrm{g}'(1)=f'(1)+\mathrm{g}'(1)$, $\mathrm{g}'(1)=0$

이는 $\mathrm{g}(x)$가 일차함수라는 조건에 모순이다.

$\therefore x\ge 2$에서 $h(x)=f(x)+\mathrm{g}(x)=(x-1)^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)$

$h(4)=39$