* 후천적 오개념

선천적 오개념과는 달리, 내신 혹은 수능 공부를 하면서 문제를 빨리 풀기 위한 '문제풀이 도구나 스킬'에 의해 생긴 후천적 오개념은 항상 경계하며 공부해야 한다. 제대로 수학을 공부한 학생이라면 있을 수 없는 오개념이므로, 이 오개념은 공부를 엉터리로 한 나만 갖고 있는 오개념, 즉

나만 감점 당할 수 있는 아킬레스건

이 될 수 있는 치명적인 오개념이다. 이러한 후천적 오개념은 대부분 정확한 논리가 아닌 감에 의존하여 공부하는 학생들에게 많이 생긴다.

이것의 예시로는

'미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 $(a,\, b)$가 항상 존재한다.'

라는 명제가 있다.

얼핏 보기에는 일반적인 평균값의 정리로 착각할 수 있지만, 이는 평균값의 정리가 아니라 오개념이다.

(반례 : $f(x)=x^3$, $c=0$일 때, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\, b)$가 존재하지 않는다.)

진짜 평균값의 정리는

'미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 $a<c<b$가 항상 존재한다.'

이다.

누군가는 '선생님, 이런 걸 누가 이렇게 잘못 알고 있나요~ 저는 제대로 알고 있습니다.' 라고 할 수 있다.

하지만 그런 학생들 중 최소 절반 이상 역시 이 오개념을 갖고 있는 경우가 많다.

[2편]에서 본격적으로 소개할 문제이겠지만, 미리 스포일러를 당해보도록 하자.

* 연습문제 1 2016 9월 평가원 30번

어떤 양수 $k$에 대하여 함수 $f(x)=k(x^2-2x-1)e^x$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| $0 \le a < b$ 인 임의의 두 실수 $a$, $b$에 대하여 $f(b)-f(a)+b-a \ge 0$이다. |

가능한 $k$의 범위를 구하시오. (미적분 학습이 안된 학생들은 Box 조건만 해석 해보세요.)

방금 문제에 대한 한 학생의 잘못된 풀이다.

“

조건의 부등식을 변형하면 $f(b)-f(a)+b-a \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}+1 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq -1$

평균값의 정리에 의하여 $\dfrac{f(a)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 $c$가 구간 $(a,\ b)$ 사이에 적어도 하나 존재하므로

$f'(c) \geq -1$ 임을 알 수 있다. 이때 $0 \leq a < c < b$ 이므로,

$f'(c) \geq -1$라는 조건은 $x > 0$일 때 $f'(x) \geq -1$과 동치이다.

”

위 풀이를 뒷받침하는 논리는

“

위 부등식이 $0 \leq a < b$인 임의의 두 실수 $a$, $b$에 대하여 성립하므로

$a$, $b$의 모든 조합을 통해 모든 양수의 값을 $c$의 값으로 만들어 낼 수 있다.

따라서 $f'(c) \geq -1$는 $f'(x) \geq -1$가 된다.

”

라는 논리다. 얼핏 보면 맞는 말 같지만, 앞 페이지에서 오개념이라고 했던 문장과 정확히 일맥상통한다.

우리는 이렇듯 아무렇지 않게 후천적 오개념을 활용하고 있었을지도 모른다. 하지만 수능은 정답만 묻는 시험이기 때문에, 후천적 오개념이 오개념인지 모르고 넘어갔을 가능성이 매우 높다.
이를 방지하기 위해서는 수능도 풀이를 논리적으로 분석해보는 습관을 들이면 좋다.

아래 연습문제도 Box 부분을 해석해보고, 아래 QR코드[20]의 강의를 통해 연습문제 1, 2에 대한 제대로 된 해석을 학습하자.

* 연습문제 2 2024 6월 평가원 22번
정수 $a\ (a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=x^3-2ax^2$ 이라 하자.
다음 조건을 만족시키는 모든 정수 $k$의 값의 곱이 $-12$가 되도록 하는 $a$가 $-2$ 뿐임을 보이시오.

| |
|---|
| 함수 $f(x)$에 대하여 $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\} \times \left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\} < 0$$ 을 만족시키는 세 실수 $x_1,\ x_2,\ x_3$이 열린구간 $\left(k,\ k+\dfrac{3}{2}\right)$에 존재한다. |

[QR코드]

20) 여러 문제의 이해를 돕는 QR코드가 해설집에도 있다. 어려운 문제에 대한 해설을 돕는 강의가 있으니 참고하여 학습하도록 하자.