심화서

해설편

REAL

수학1

수1 REAL

1) ⑤

① $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2^4}\times\sqrt[12]{2^3}=\sqrt[12]{2^4\times2^3}=\sqrt[12]{2^7}$
② $\sqrt[3]{-\sqrt{64}}=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$
③ $\sqrt[3]{\sqrt[5]{8}}=\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^3}}=\sqrt[5]{2}$
④ $\dfrac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{-8}}=\dfrac{\sqrt[3]{(-3)^3}}{\sqrt[3]{(-2)^3}}=\dfrac{-3}{-2}=\dfrac{3}{2}$,
$\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^3}=\dfrac{3}{2}$
$\therefore\ \dfrac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{-8}}=\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}$
⑤ $\left(\sqrt[3]{7}\times\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^6=(\sqrt[3]{7})^6\times\dfrac{1}{(\sqrt{7})^6}$
$=\{(\sqrt[3]{7})^3\}^2\times\dfrac{1}{\{(\sqrt{7})^2\}^3}$
$=7^2\times\dfrac{1}{7^3}=\dfrac{1}{7}$

2) 1

$\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}}\times\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}}\times\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x}}}$
$=\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[4]{\sqrt{x}}}\times\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}}\times\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}$
$=\dfrac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[8]{x}}\times\dfrac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[12]{x}}\times\dfrac{\sqrt[8]{x}}{\sqrt[6]{x}}=1$

3) 16

$(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}=\left(3^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{6}}$
$3^{\frac{5}{6}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되려면 $\left(3^{\frac{5}{6}}\right)^n$ 이 자연수이어야 한다. 이때 $\left(3^{\frac{5}{6}}\right)^n=(3^5)^{\frac{n}{6}}$ 에서 3^5은 어떤 자연수의 6 제곱수가 아니므로 $\dfrac{n}{6}$이 음이 아닌 정수일 때 $\left(3^{\frac{5}{6}}\right)^n$ 이 자연수가 된다.
즉, n은 0 또는 6의 배수이고, 이를 만족하는 2 이상 100 이하의 자연수 n의 값은
$6,\ 12,\ 18,\ \cdots,\ 96$
의 16개이다.

다른 풀이

$(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}=\left(3^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{6}}$ 이고
$3^{\frac{5}{6}}=(3^5)^{\frac{1}{6}}=(3^{10})^{\frac{1}{12}}=(3^{15})^{\frac{1}{18}}=\cdots=(3^{80})^{\frac{1}{96}}$
이므로 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$은 3^5의 6제곱근, 3^{10}의 12제곱근, 3^{15}의 18제곱근, $\cdots$, 3^{80}의 96제곱근이다.
따라서 구하는 n의 값은
$6,\ 12,\ 18,\ \cdots,\ 96$
의 16개이다.

4) ①

$-n^2+9n-18=-(n-3)(n-6)$
이므로 $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하기 위해서는
(i) $-n^2+9n-18<0$ 일 때,
즉, $2\le n<3$ 또는 $6<n\le11$ 이고 n이 홀수이어야 하므로 n은 7, 9, 11 이다.
(ii) $-n^2+9n-18>0$ 일 때,
즉, $3<n<6$ 이고 n이 짝수이어어야 하므로 n은 4이다.
(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은
$4+7+9+11=31$

5) $\sqrt[3]{2}$

어떤 음보다 반음 1개만큼 높은 음의 진동수가 어떤 음의 진동수의 x배라 하면
$x^{12}=2\qquad\therefore\ x=\sqrt[12]{2}$
따라서 '미'음의 진동수는 '도'음의 진동수의
$(\sqrt[12]{2})^4=\sqrt[3]{2}$ (배)

6) ⑤

ㄱ. n이 홀수이므로 실수 a의 값에 관계없이
$f(n,\ a)=f(n,\ -a)=1$ (참)
ㄴ. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $2n>0,\ 2n-1>0$이고,
$2n$은 짝수, $2n-1$은 홀수이므로
$f(2n-1,\ 2n)=1,\ f(2n,\ 2n-1)=2$
$\therefore\ f(2n-1,\ 2n)+f(2n,\ 2n-1)=3$ (참)
ㄷ. 자연수 n에 대하여 $2n>0,\ 2n+1>0$이고, $2n$은 짝수, $2n+1$은 홀수이므로
$f(2n,\ 2n)=2,\ f(2n+1,\ 2n+1)=1$
$\therefore\ f(2,\ 2)+f(3,\ 3)+f(4,\ 4)+\cdots+f(100,\ 100)$
$=\{f(2,\ 2)+f(4,\ 4)+\cdots+f(100,\ 100)\}$
$+\{f(3,\ 3)+f(5,\ 5)+\cdots+f(99,\ 99)\}$
$=2\times50+1\times49$
$=149$ (참)
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

7) ③

ㄱ. $\sqrt[3]{x}\sqrt{y}=1$이므로
$(\sqrt[3]{x}\sqrt{y})^6=x^2y^3=1$ (참)
ㄴ. $\sqrt[3]{x}\sqrt{y}=1$이므로
$(\sqrt[3]{x}\sqrt{y})^9=x^3(\sqrt{y})^4(\sqrt{y})^5=x^3y^2(\sqrt{y})^5=1$
이때, $0<y<1$에서 $\sqrt{y}<1$이므로 $(\sqrt{y})^5<1$
$\therefore\ x^3y^2>1$ (참)
ㄷ. ㄱ에서 $x^2y^3=1$이므로
$(\sqrt{x}\sqrt[3]{y^4})^{12}=x^6y^{16}=(x^2y^3)^3y^7=y^7<1$ ($\because\ 0<y<1$)
$\therefore\ \sqrt{x}\sqrt[3]{y^4}<1$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

다른풀이

$\sqrt[3]{x}\sqrt{y}=1$에서 $\sqrt{y}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$
$\therefore\ y=\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2=(x^{-\frac{1}{3}})^2=x^{-\frac{2}{3}}$
ㄱ. $x^2y^3=x^2\times(x^{-\frac{2}{3}})^3=x^2\times x^{-2}=1$ (참)
ㄴ. $x^3y^2=x^3\times(x^{-\frac{2}{3}})^2=x^3\times x^{-\frac{4}{3}}=x^{3-\frac{4}{3}}$
$=x^{\frac{5}{3}}>1$ ($\because\ x>1$) (참)
ㄷ. $\sqrt{x}\sqrt[3]{y^4}=x^{\frac{1}{2}}\times y^{\frac{4}{3}}=x^{\frac{1}{2}}\times(x^{-\frac{2}{3}})^{\frac{4}{3}}=x^{\frac{1}{2}}\times x^{-\frac{8}{9}}$
$=x^{\frac{1}{2}-\frac{8}{9}}=x^{-\frac{7}{18}}<1$ ($\because\ x>1$) (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

다른풀이

ㄴ. $0<y<1<x$에서 $\dfrac{x}{y}>1$
$x^3y^2=x^2y^3\times\dfrac{x}{y}$이므로
$x^3y^2>x^2y^3$
$\therefore\ x^3y^2>1$ ($\because$ ㄱ) (참)

8) 47

$2^a=4+2^p,\ 2^b=4+2^{-p}$에서
$2^p=2^a-4$ …… ㉠
$2^{-p}=2^b-4$ …… ㉡
㉠×㉡을 하면 $1=(2^a-4)(2^b-4)$
$2^{a+b}-4(2^a+2^b)+15=0$ …… ㉢
이때 점 $(a,\ b)$가 직선 $y=-x+6$위에 있으므로
$b=-a+6$ $\therefore\ a+b=6$
위의 식을 ㉢에 대입하여 풀면
$64-4(2^a+2^b)+15=0$
$\therefore\ 2^a+2^b=\dfrac{79}{4}$
㉠+㉡을 하면
$2^p+2^{-p}=2^a+2^b-8=\dfrac{47}{4}$
$\therefore\ 2^{2+p}+2^{2-p}=4\times(2^p+2^{-p})=4\times\dfrac{47}{4}=47$

다른풀이

점 $(a,\ b)$가 직선 $y=-x+6$위에 있으므로
$b=-a+6$에서 $a+b=6$
한편, $2^a=4+2^p,\ 2^b=4+2^{-p}$을 변끼리 곱하면
$2^a2^b=(4+2^p)(4+2^{-p})$
$2^{a+b}=16+4\times2^p+4\times2^{-p}+1$
$2^6=17+2^{2+p}+2^{2-p}$ ($\because\ a+b=6$)
$\therefore\ 2^{2+p}+2^{2-p}=64-17=47$

9) ④

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(a)=180$에서
$[\sqrt[3]{1}]+[\sqrt[3]{2}]+[\sqrt[3]{3}]+\cdots+[\sqrt[3]{a}]=180$ …… ㉠

$[\sqrt[3]{a}\,]=n$이라 하면 $n \le \sqrt[3]{a} < n+1$

$\therefore\ n^3 \le a < (n+1)^3$

(ⅰ) $1^3 \le a < 2^3$, 즉 $1 \le a < 8$일 때,

$[\sqrt[3]{a}\,]=1$이므로

$[\sqrt[3]{1}\,]+[\sqrt[3]{2}\,]+[\sqrt[3]{3}\,]+\cdots+[\sqrt[3]{7}\,]=1\times 7=7$

(ⅱ) $2^3 \le a < 3^3$, 즉 $8 \le a < 27$일 때,

$[\sqrt[3]{a}\,]=2$이므로

$[\sqrt[3]{8}\,]+[\sqrt[3]{9}\,]+[\sqrt[3]{10}\,]+\cdots+[\sqrt[3]{26}\,]$

$=2\times(26-8+1)=38$

$\therefore\ [\sqrt[3]{1}\,]+[\sqrt[3]{2}\,]+[\sqrt[3]{3}\,]+\cdots+[\sqrt[3]{26}\,]$

$=7+38=45$

(ⅲ) $3^3 \le a < 4^3$, 즉 $26 \le a < 64$일 때,

$[\sqrt[3]{a}\,]=3$이므로

$[\sqrt[3]{27}\,]+[\sqrt[3]{28}\,]+[\sqrt[3]{29}\,]+\cdots+[\sqrt[3]{63}\,]$

$=3\times(63-27+1)=111$

$\therefore\ [\sqrt[3]{1}\,]+[\sqrt[3]{2}\,]+[\sqrt[3]{3}\,]+\cdots+[\sqrt[3]{63}\,]$

$=45+111=156$

(ⅳ) $4^3 \le a < 5^3$, 즉 $64 \le a < 125$일 때,

$[\sqrt[3]{a}\,]=4$

이때, ㉠에서

$[\sqrt[3]{1}\,]+[\sqrt[3]{2}\,]+[\sqrt[3]{3}\,]+\cdots+[\sqrt[3]{a}\,]=180$이고,

(ⅲ)에서

$[\sqrt[3]{1}\,]+[\sqrt[3]{2}\,]+[\sqrt[3]{3}\,]+\cdots+[\sqrt[3]{63}\,]=156$이므로

$[\sqrt[3]{64}\,]+[\sqrt[3]{65}\,]+[\sqrt[3]{66}\,]+\cdots+[\sqrt[3]{a}\,]$

$=180-156=24$

$24=4\times 6$이므로 $a=64+6-1=69$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(a)=180$을 만족시키는 자연수 a의 값은 69이다.

10) ③

$40^a=2,\ 40^b=5$에서

$40=2^3\times 5=(40^a)^3\times 40^b=40^{3a+b}$

밑이 40으로 같으므로 $3a+b=1$에서

$1-b=3a$

$\therefore\ 8^{\frac{2(1-a-b)}{1-b}}=8^{\frac{2(3a-a)}{3a}}=8^{\frac{4}{3}}$

$=(2^3)^{\frac{4}{3}}=2^4=16$

11) 26

$n=2^p\times 3^q\times 5^r$에서

$\sqrt{\dfrac{n}{2}}$이 자연수가 되려면 q와 r는 2의 배수이고,

$p=2k_1+1$ (k_1은 음이 아닌 정수) …… ㉠

$\sqrt[3]{\dfrac{n}{3}}$이 자연수가 되려면 p와 r는 3의 배수이고,

$q=3k_2+1$ (k_2는 음이 아닌 정수) …… ㉡

$\sqrt[5]{\dfrac{n}{5}}$이 자연수가 되려면 p와 q는 5의 배수이고,

$r=5k_3+1$ (k_3은 음이 아닌 정수) …… ㉢

즉, p는 ㉠에서 홀수이고 3과 5의 최소공배수이므로 $p=15$, q는 2와 5의 공배수 중에서 ㉡을 만족하는 최솟값이므로 $q=10$, r는 2와 3의 공배수 중에서 ㉢을 만족하는 최솟값이므로 $r=6$이다.

$\therefore\ 2p-q+r=2\times 15-10+6=26$

12) 150

$12^{\frac{2a+b}{1-a}}=\left(\dfrac{60}{5}\right)^{\frac{2a+b}{1-a}}$

$=\left(\dfrac{60}{60^a}\right)^{\frac{2a+b}{1-a}}$ ($\because\ 5=60^a$)

$=(60^{1-a})^{\frac{2a+b}{1-a}}$

$=60^{2a+b}$

$=(60^a)^2\times 60^b$

$=5^2\times 6=150$ ($\because\ 60^a=5,\ 60^b=6$)

다른풀이

$12^{\frac{2a+b}{1-a}}=\left(\dfrac{60}{5}\right)^{\frac{2a+b}{1-a}}$

$=60^{\frac{2a+b}{1-a}}5^{\frac{2a+b}{a-1}}$

$=(60^{2a}\times 60^b)^{\frac{1}{1-a}}(60^a)^{\frac{2a+b}{a-1}}$ ($\because\ 5=60^a$)

$=(25\times 6)^{\frac{1}{1-a}}60^{\frac{a(2a+b)}{a-1}}$ ($\because\ 60^a=5,\ 60^b=6$)

$=150^{\frac{1}{1-a}}60^{\frac{a(2a+b)}{a-1}}$

$=150^{\frac{1}{1-a}}(60^{\frac{2a+b}{a-1}})^a$

$=150^{\frac{1}{1-a}}(150^{\frac{1}{1-a}})^{-a}$

$=150^{\frac{1}{1-a}}150^{\frac{-a}{1-a}}$

$=150^{\frac{1-a}{1-a}}=150$

13) (1) $2^5=32$ (2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=81$

14) (1) $2=\log_4 16$ (2) $-2=\log_2 0.25$

(3) $\frac{1}{2}=\log_{100}10$ (4) $0=\log_3 1$

15) $\frac{1}{27}$

$\log_3 x=-3$에서 $3^{-3}=x$ $\therefore x=\frac{1}{27}$

16) 15

$a=\log_2(2+\sqrt{3})$에서 로그의 정의에 의하여

$2^a=2+\sqrt{3}$

이때 $4^a=(2^a)^2$이므로

$4^a+\frac{4}{2^a}=(2+\sqrt{3})^2+\frac{4}{2+\sqrt{3}}$

$=4+4\sqrt{3}+3+\frac{4(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$=7+4\sqrt{3}+4(2-\sqrt{3})=7+8=15$

17) ③

$\log_{\sqrt{3}}a=2\log_3 a=4\log_9 a=\log_9 a^4$이므로

$\log_9 a^4=\log_9 ab$에서 $a^4=ab$

$a(a^3-b)=0$에서 $b=a^3$

따라서 $\log_a b=\log_a a^3=3$

다른 풀이

$\log_{\sqrt{3}}a=\log_9 ab$에서 $2\log_3 a=\frac{1}{2}\log_3 ab$

$4\log_3 a=\log_3 a+\log_3 b$

$3\log_3 a=\log_3 b$

즉 $3=\frac{\log_3 b}{\log_3 a}=\log_a b$

18) ①

로그의 정의에서 밑이 1이 아닌 양수, 진수는 양수이어야 한다.

ㄱ. 밑의 조건 : $a^2-a+2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>1$

진수의 조건 : $a^2+1>0$

즉, 실수 a의 값에 관계없이 로그를 정의할 수 있다.

ㄴ. (반례) $a=0$일 때 밑은 $2|a|+1=1$이므로 로그를 정의할 수 없다.

ㄷ. (반례) $a=1$일 때 진수는 $a^2-2a+1=0$이므로 로그를 정의할 수 없다.

따라서 실수 a의 값에 관계없이 로그가 정의되는 것은 ㄱ뿐이다.

19) ②

$\log_{25}(a-b)=\log_9 a=\log_{15}b=k$로 놓으면

$a-b=25^k=5^{2k}$ ……㉠

$a=9^k=3^{2k}$ ……㉡

$b=15^k=3^k\times 5^k$ ……㉢

㉠×㉡=㉢^{2}이 성립하므로

$(a-b)a=b^2$

즉, $b^2+ab-a^2=0$

$a>0$이므로 위의 식의 양변을 a^2으로 나누면

$\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b}{a}-1=0$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

이때 진수의 조건에 의하여 $a-b>0,\ a>0,\ b>0$이므로

$0<\frac{b}{a}<1$이다.

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

다른풀이

$\log_{25}(a-b)=\log_9 a=\log_{15}b=k$로 놓으면

$25^k=a-b,\ 9^k=a,\ 15^k=b$

$\therefore\ 25^k=9^k-15^k$

이때, $3^k=A,\ 5^k=B\ (A>0,\ B>0)$로 놓으면

$B^2=A^2-AB \quad \therefore\ B^2+AB-A^2=0$

$A>0$이므로 위의 식의 양변을 A^2으로 나누면

$\left(\frac{B}{A}\right)^2+\frac{B}{A}-1=0$

$\therefore\ \frac{B}{A}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ \left(\because\ \frac{B}{A}>0\right)$

즉, $\left(\frac{5}{3}\right)^k=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{15^k}{9^k}=\frac{5^k}{3^k}=\left(\frac{5}{3}\right)^k=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

20) ④

세 양의 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여

$\log_{(a+b)}c+\log_{(a-b)}c=2\log_{(a+b)}c\times log_{(a-b)}c$가 성립하므로

$\frac{1}{\log_c(a+b)}+\frac{1}{\log_c(a-b)}=\frac{2}{\log_c(a+b)\times log_c(a-b)}$

양변에 $\log_c(a+b)\times log_c(a-b)$를 곱하면

$\log_c(a-b)+\log_c(a+b)=2$

$\log_c(a-b)(a+b)=2$

$\log_c(a^2-b^2)=2$

$a^2-b^2=c^2 \qquad \therefore\ a^2=b^2+c^2$

따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$는 $\angle\mathrm{A}=90°$인 직각삼각형이다.

21) 75

$3^a=5^b=k^c=X$라고 하면 $3=X^{\frac{1}{a}},5=X^{\frac{1}{b}},k=X^{\frac{1}{c}}$이다. 한편 주어진 조건에서 $\frac{1}{c}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}$이므로

$X^{\frac{1}{c}}=X^{\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}}=X^{\frac{1}{2a}}X^{\frac{1}{b}}$이다. 즉, $k=\sqrt{3}\times 5$이다.

따라서 $k^2=75$이다.

22) 13

$\log_4 2n^2-\frac{1}{2}\log_2\sqrt{n}$

$=\log_4 2n^2-\log_4\sqrt{n}$

$=\log_4\frac{2n^2}{\sqrt{n}}$

$=\log_4\left(2n^{\frac{3}{2}}\right)$

이 값이 40 이하의 자연수가 되려면

$2n^{\frac{3}{2}}=4^k\ (k=1,2,3,\cdots,40)$

이어야 한다.

즉, $n=4^{\frac{2k-1}{3}}$에서 $\frac{2k-1}{3}$이 자연수가 되어야 하므로

$k=2,5,8,\cdots,38$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는 13

23) 220

(1) $p,\ q$가 모두 홀수인 경우

$f(pq)=\log_2 pq=\log_2 p+\log_2 q=f(p)+f(q)$

이므로 $f(pq)=f(p)+f(q)$를 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는

$10\times 10=100$

(2) p는 홀수, q는 짝수인 경우

$f(pq)=\log_2 pq=\log_2 p+\log_2 q$

$=\frac{\log_3 p}{\log_3 2}+\log_2 q=\frac{f(p)}{\log_3 2}+f(q)$

$p=1$인 경우에만 $f(pq)=f(p)+f(q)$를 만족시키므로 구하는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 10이다.

(3) p는 짝수, q는 홀수인 경우

(2)와 마찬가지 방법으로 $q=1$인 경우에만 $f(pq)=f(p)+f(q)$를 만족시키므로 구하는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 10이다.

(4) $p,\ q$가 모두 짝수인 경우

$f(pq)=\log_2 pq+\log_2 p+\log_2 q$

$=f(p)+f(q)$

이므로 $f(pq)=f(p)+f(q)$를 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는

$10\times 10=100$

따라서 구하는 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는

$100+10+10+100=220$

24) $\therefore\ x=1$

$t^2-t-12=0$

$t^2-t-12=0$ 에서 $\quad (t+3)(t-4)=0$

$\therefore\ t=4\,(\because\ t>0)$

$t=4$ 에서 $\quad 4^x=4 \quad \therefore\ x=1$

25) ④

방정식 $(2x-1)^{x-3}=11^{x-3}$ 의 지수가 같은 문자로 되어 있으므로 이 방정식이 성립하려면

(ⅰ) 밑이 같은 경우

$2x-1=11$ 에서 $2x=12 \quad \therefore\ x=6$

(ⅱ) (지수)$=0$ 인 경우

주어진 방정식은 $(2x-1)^0=11^0=1$ 로 성립하므로

$x-3=0$ 에서 $x=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 근의 합은 $6+3=9$

26) $a>\dfrac{1}{2}$

집합 A 의 방정식 $2^{x-2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ 에서 $2^{x-2}=2^{-\frac{3}{2}}$

이때, 밑이 2 로 같으므로 $x-2=-\dfrac{3}{2}$ 에서

$x=\dfrac{1}{2} \qquad \therefore\ A=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

한편, 집합 B의 부등식 $2^{x^2}<2^{ax}$ 에서

(밑)$=2>1$ 이므로 $\quad x^2<ax \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때, $A\cap B\neq\varnothing$ 이므로 $\dfrac{1}{2}\in B$이어야 한다.

즉, $x=\dfrac{1}{2}$ 을 ㉠에 대입하면 부등식이 성립해야 하므로

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2<\dfrac{1}{2}a$ 에서 $\dfrac{1}{2}a>\dfrac{1}{4} \quad \therefore\ a>\dfrac{1}{2}$

27) ③

ㄱ. $a>0$일 때, $f(a)=3^a>1$

$b<0$일 때, $g(b)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^b=2^{-b}>1$

이때, $a>0,\ b<0$인 두 점 $(a,\ f(a)),\ (b,\ f(b))$를 지나는 직선의 y절편은 항상 $f(a)$와 $g(b)$사이에 존재하므로 1보다 크다.(참)

ㄴ. 직선 l이 y축과 평행하므로 $a=b$이고,

$a>0$이므로

$$f(a)+g(b)=3^a+\left(\frac{1}{2}\right)^a$$

$$>2^a+\left(\frac{1}{2}\right)^a$$

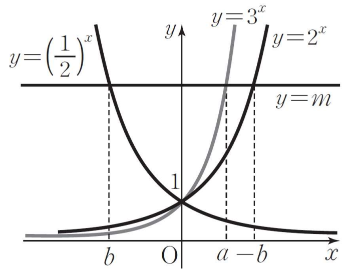
$$>2\sqrt{2^a\times\left(\frac{1}{2}\right)^a}$$

$$=2$$

$\therefore\ \dfrac{f(a)+g(b)}{2}>1$ (참)

ㄷ. 직선 l이 x축과 평행하므로 직선 l의 방정식을 $y=m$ $(m\neq 1)$이라 하면 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$에 대하여

(ⅰ) $m>1$일 때

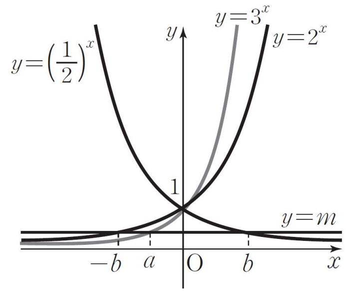


위의 그림에서 $b<0<a$이고,

$3^a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^b=m$이므로 $3^a=2^{-b}$에서 $a<-b$

$\therefore\ a+b<0$

(ⅱ) $m<1$일 때,



위의 그림에서 $a<0<b$이고,

$3^a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^b=m$이므로

$3^{-a}=2^b$에서 $-a<b$

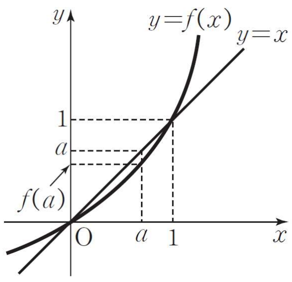
$\therefore\ a+b>0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 항상 $a+b<0$인 것은 아니다.(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

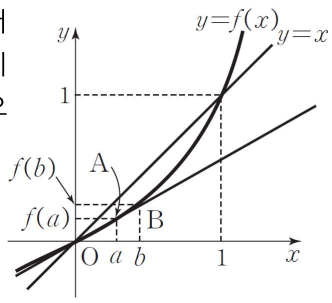
28) ③

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 점 $(1,\ 1)$에서 만나므로 오



른쪽 그림에서 $0<a<1$이면
$f(a)<a$이다. (참)
ㄴ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점
$\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$ $(0<a<b)$에
대하여 직선 AB의 기울기는

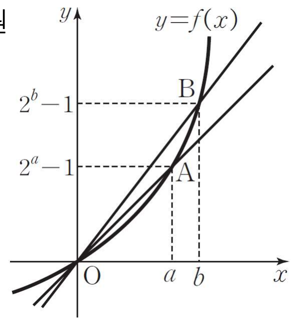
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{2^b-1-(2^a-1)}{b-a}=\frac{2^b-2^a}{b-a}$$



$0<a<b<1$일 때 오른쪽 그림에서 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 직선 $y=x$의 기울기 1보다 작으므로

$$\frac{2^b-2^a}{b-a}<1$$

$\therefore\ b-a>2^b-2^a$ (거짓)



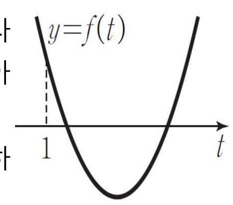
ㄷ. $0<a<b$일 때 오른쪽 그림에서 원점 O에 대하여
(직선 OA의 기울기)
　　　<(직선 OB의 기울기)
이므로

$$\frac{2^a-1}{a}<\frac{2^b-1}{b}$$

$\therefore\ b(2^a-1)<a(2^b-1)$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

29) 19

$9^x-2(a+4)3^x-3a^2+24a=0$에서
$(3^x)^2-2(a+4)3^x-3a^2+24a=0$
$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면
$t^2-2(a+4)t-3a^2+24a=0$ …… ㉠
x가 양수일 때, $t>1$이므로 주어진 방정식의 서로 다른 두 근이 모두 양수가 되려면 t에 대한 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근은 모두 1보다 커야 한다. 즉



$f(t)=t^2-2(a+4)t-3a^2+24a$라 하면 이차함수 $y=f(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.
(ⅰ) 이차방정식 $f(t)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(a+4)^2-(-3a^2+24a)>0$에서

$a^2+8a+16+3a^2-24a>0$, $4a^2-16a+16>0$
$4(a-2)^2>0$ 　$\therefore\ a\neq2$인 실수
(ⅱ) $f(1)>0$에서 $1-2(a+4)-3a^2+24a>0$
$3a^2-22a+7<0$, $(3a-1)(a-7)<0$

$\therefore\ \dfrac{1}{3}<a<7$

(ⅲ) 함수 $y=f(t)$의 그래프의 대칭축은 직선 $t=a+4$이므로 $a+4>1$이어야 한다.
$\therefore\ a>-3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\dfrac{1}{3}<a<2$ 또는 $2<a<7$이다.

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 1, 3, 4, 5, 6이므로 구하는
합은 $1+3+4+5+6=19$

다른풀이

$9^x-2(a+4)3^x-3a^2+24a=0$에서
$(3^x)^2-2(a+4)3^x-3a(a-8)=0$
$3^x=t\ (t>0)$로 놓으면
$t^2-2(a+4)t-3a(a-8)=0$
$(t-3a)(t+a-8)=0$
$\therefore\ t=3a$ 또는 $t=-a+8$
이때, 주어진 방정식의 서로 다른 두 근이 양수이려면 $t>1$이어야 한다. 즉,

$3a>1$에서 $a>\dfrac{1}{3}$ …… ㉡

$-a+8>1$에서 $a<7$ …… ㉢
또한, 두 근이 서로 달라야 하므로
$3a\neq-a+8$, $4a\neq8$ 　$\therefore\ a\neq2$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서 $\dfrac{1}{3}<a<2$ 또는 $2<a<7$

따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 1, 3, 4, 5, 6이므로 그 합은 $1+3+4+5+6=19$

30) ⑤

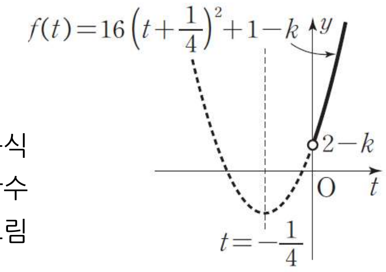
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-2}+2-k>0$에서

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}+2-k>0$

$8\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}+16\times\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}\right\}^2+2-k>0$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}=t\ \ (t>0)$로 놓으면

$16t^2+8t+2-k>0$ …… ㉠



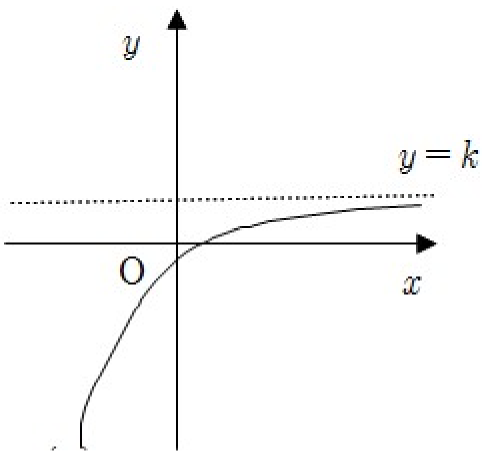
$f(t)=16t^2+8t+2-k$
$=16\left(t+\dfrac{1}{4}\right)^2+1-k$
라 하면 $t>0$일 때, 이차부등식 ㉠이 항상 성립해야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.
$f(0)=2-k\geq0$
$\therefore\ k\leq2$
따라서 구하는 상수 k의 최댓값은 2이다.

31) ①

y축과 평행한 한 직선을 $x=k$(k는 실수)라 하고, 직선 $x=k$와 x축이 만나는 점을 C라 하자.
삼각형 AOB는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로 $\overline{AC}=\overline{BC}$
$2^k=4^{k-2}$
$2^k=2^{2k-4}$
$k=2k-4$, $k=4$
$\overline{OC}=4$, $\overline{AB}=32$
따라서 삼각형 AOB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OC}=64$

32) ④

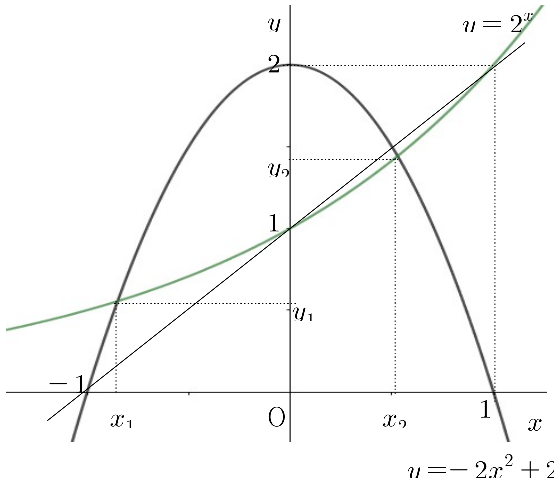
$f(x)=-2^{4-3x}+k$
$=-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-\frac{4}{3}}+k$
이므로 함수 $y=f(x)$ 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x$
의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{4}{3}$ 만큼,
y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동시킨 것이다.
한편, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 제2 사분면을 지나지 않아야 하므로 — 개형은 다음과 같다.



이때, $f(0)\le 0$ 이어야 하므로
$-2^4+k\le 0$
$k\le 16$
따라서, k 의 최댓값은 16 이다.

33) ⑤

두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점 (x_1,y_1), (x_2,y_2)는 그림과 같다.



ㄱ. $0<x<x_2$ 에서 $-2x^2+2>2^x$
$x_2<x<1$ 에서 $-2x^2+2<2^x$
이고
$x=\frac{1}{2}$일 때, $-2\left(\frac{1}{2}\right)^2+2=\frac{3}{2}$
$x=\frac{1}{2}$일 때 $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$
이므로 $\frac{3}{2}>\sqrt{2}$
따라서, $\frac{1}{2}<x_2$ 이다. (참)
ㄴ. 위의 그림에서 두 점 $(0,1)$, (x_2,y_2)를 잇는 직선의 기울기는 1보다 작으므로
$\frac{y_2-1}{x_2}<1$, $y_2-1<x_2$ ⋯㉠
두 점 $(0,1),(x_1,y_1)$을 잇는 직선의 기울기는 1보다 작으므로
$\frac{y_1-1}{x_1}<1$, $y_1-1>x_1$, $x_1<y_1-1$⋯㉡
㉠,㉡의 두 식을 더하면
$x_1+y_2-1<x_2+y_1-1$
$x_1+y_2<x_2+y_1$
$y_2-y_1<x_2-x_1$ (참)
ㄷ. ㄱ과 같은 방법으로 생각하면
$x_1<-\frac{1}{2}$
즉, $-1<x_1<-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<x_2<1$ 이므로
$-\frac{1}{2}<x_1+x_2<\frac{1}{2}$
그런데,
$y_2-y_1=2^{x_2}-2^{x_1}$
$=(-2x_2^2+2)-(-2x_1^2+2)$
$=2(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0$
이므로 $x_1+x_2<0$ 이어야 한다.
따라서, $-\frac{1}{2}<x_1+x_2<0$ 이고
$y_1y_2=2^{x_1}\times2^{x_2}=2^{x_1+x_2}$
에서 밑이 1보다 크므로

$2^{-\frac{1}{2}} < y_1y_2 < 2^0$

$\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1y_2 < 1$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

34) ④

점P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 할 때,

$\mathrm{P}(\alpha,\ 2\alpha+k)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ 2\beta+k)$

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(\alpha-\beta)^2+(2\alpha-2\beta)^2} = (\beta-\alpha)\sqrt{5} = \sqrt{5}$, $\beta-\alpha=1$

점P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 할 때,

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+3}+1=2\alpha+k$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\beta+1}+\frac{8}{3}=2\beta+k$

두식을 같은 변끼리 빼주면

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+3}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\beta+1}-\frac{5}{3}=2\alpha-2\beta$이고, $\beta-\alpha=1$이므로

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+3}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\beta+1}=-2+\frac{5}{3}=-\frac{1}{3}$

얻어진 식에 $\beta=\alpha+1$을 대입하면

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+3}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}=-\frac{1}{3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+3}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}=-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}=-\frac{1}{3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}=1$에서 $\alpha=-2$, $\beta=-1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\beta+1}+\frac{8}{3}=2\beta+k$에 $\alpha=-2$, $\beta=-1$을 대입하면

$1+\frac{8}{3}=-2+k$에서 $k=2+1+\frac{8}{3}=\frac{17}{3}$

35) $0 < x \le \frac{1}{\sqrt{3}}$

36) $\frac{3}{4}$

진수의 조건에서 $x>0$ ……㉠

$x^{\log_{\frac{1}{2}}x} > 4x^3$의 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$인 로그를 취하면

$\log_{\frac{1}{2}}x^{\log_{\frac{1}{2}}x} < \log_{\frac{1}{2}}4x^3$

$(\log_{\frac{1}{2}}x)^2 < \log_{\frac{1}{2}}4 + 3\log_{\frac{1}{2}}x$

$\log_{\frac{1}{2}}x = t$로 놓으면 $t^2 < -2+3t$

$t^2-3t+2<0$, $(t-1)(t-2)<0$

$\therefore\ 1<t<2$

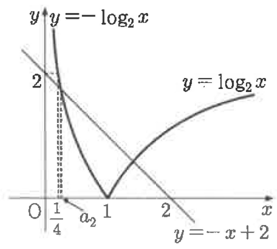
즉 $1<\log_{\frac{1}{2}}x<2$이므로 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$

밑이 1보다 작으므로 $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$ ……㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로 $\alpha+\beta=\frac{3}{4}$

37) ④



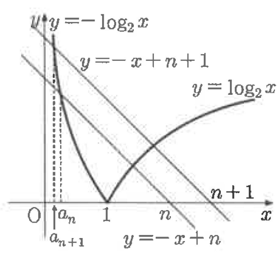
ㄱ. $|\log_2 x|=2$에서

$0<x<1$일 때, $-\log_2 x=2$

$\therefore x=\frac{1}{4}$

즉 오른쪽 그림에서 $a_2>\frac{1}{4}$

[거짓]



ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여

$0<a_{n+1}<a_n$이므로

$0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$[참]

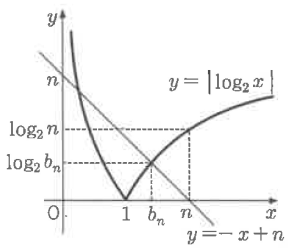
ㄷ. 오른쪽 그림에서

$1<b_n<n$이므로

$\frac{b_n}{n}<1$ … ㉠

점 $(b_n,\ \log_2 b_n)$이 직선

$y=-x+n$위에 있으므로



$\log_2 b_n = -b_n + n$

$\therefore b_n = n - \log_2 b_n$

양변을 n으로 나누면

$\frac{b_n}{n} = 1 - \frac{\log_2 b_n}{n}$

$\log_2 b_n < \log_2 n$이므로

$1 - \frac{\log_2 b_n}{n} > 1 - \frac{\log_2 n}{n}$

$\therefore\ 1 - \frac{\log_2 b_n}{n} > 1 - \frac{\log_2 n}{n}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $1 - \frac{\log_2 b_n}{n} < \frac{b_n}{n} < 1$ [참]

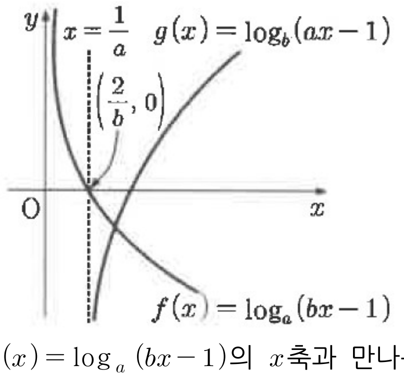
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

38) ②

가로, 세로의 길이가 각각 2, 1인 직사각형 ABCD의 꼭짓점 A는 $y = \log_2 x$의 그래프를 x축으로 -2만큼, y축으로 1만큼 평행이동한 그래프이다.
따라서 점 A가 그리는 도형의 방정식은
$y = \log_2 (x+2) + 1$

39) ②

40) ③



$f(x) = \log_a (bx-1)$의 x축과 만나는 교점의 좌표는
$0 = \log_a (bx-1)$

즉, $bx - 1 = 1$ $\quad \therefore\ x = \frac{2}{b}$ $\cdots\cdots$㉠

$g(x) = \log_b (ax-1)$의 점근선은

$ax - 1 = 0$ $\quad \therefore\ x = \frac{1}{a}$ $\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $y = f(x)$가 x축과 만나는 점의 좌표는
$\left(\frac{2}{b},\ 0\right)$이므로

이 점이 점근선 $x = \frac{1}{a}$ 위에 있어야 하므로

$\frac{2}{b} = \frac{1}{a}$ $\quad \therefore\ b = 2a$

또한, $0 < a < 1 < b$에서 $1 < b$이므로

$1 < 2a$ $\quad \therefore\ \frac{1}{2} < a < 1$

따라서 $b = 2a$ $\left(\frac{1}{2} < a < 1\right)$

[다른 풀이]
곡선 $y = f(x)$와 x축과의 교점의 y좌표는 0이므로

$\log_a (bx-1) = 0$, $bx - 1 = 1$ $\quad \therefore\ x = \frac{2}{b}$

그러므로 x축과의 교점은 $\left(\frac{2}{b},\ 0\right)$

한편,

$y = \log_b (ax-1) = \log_b a\left(x - \frac{1}{a}\right) = \log_b\left(x - \frac{1}{a}\right) + \log_b a$이므로

함수 $y = g(x)$의 그래프는 $y = \log_b x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{a}$만큼, y축의 방향으로 $\log_b a$만큼 평행이동한 것이다.

그러므로 곡선 $y = g(x)$의 점근선은 $x = \frac{1}{a}$

이때 점 $\left(\frac{2}{b},\ 0\right)$이 직선 $x = \frac{1}{a}$ 위에 있어야 하므로

$\frac{2}{b} = \frac{1}{a}$ $\quad \therefore\ b = 2a$

따라서 $b > 1$에서 $a = \frac{1}{2}b$, $a > \frac{1}{2}$이고 조건에서 $a < 1$이므로

$\frac{1}{2} < a < 1$

41) 15

현재의 미세 먼지 농도를 a라 할 때 n년 후의 미세 먼지 농도는

$a \times (1 + 0.05)^n = a \times 1.05^n$

n년 후에 미세 먼지 농도가 현재의 2배 이상이 된다고 하면

$a \times 1.05^n \geq 2a$ $\quad \therefore\ 1.05^n \geq 2$

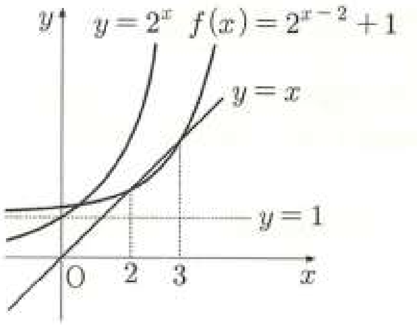
양변에 상용로그를 취하면 $n \log 1.05 \geq log\, 2$

$0.02n \geq 0.3$ $\quad \therefore\ n \geq \frac{0.3}{0.02} = 15$

따라서 최소 15년 후이다.

42) ③

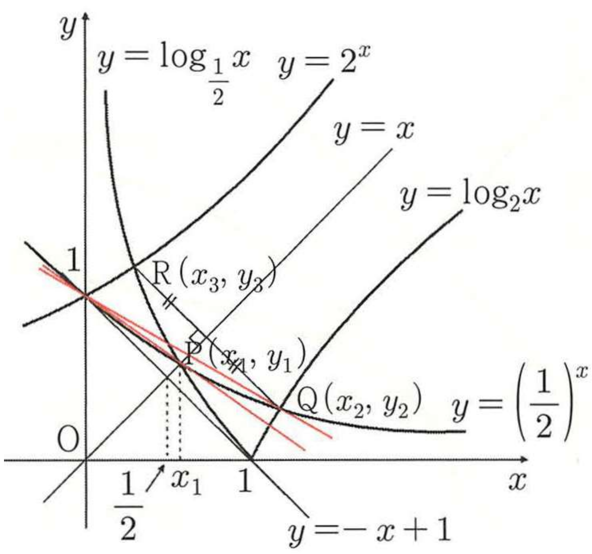
$y=2^{x-2}+1$의 역함수를 구하면 $x=2^{y-2}+1$에서
$2^{y-2}=x-1,\ y-2=\log_2(x-1)$
$\therefore\ y=\log_2(x-1)+2$
$f^{-1}(x)=\log_2(x-1)+2$이고 $g(x)=f^{-1}(x)$
ㄱ. $f^{-1}(5)=\log_2(5-1)+2=4$ 이므로
$f^{-1}(5)\{g(5)+1\}=f^{-1}(5)\{f^{-1}(5)+1\}=4(4+1)=20$ [참]
ㄴ. $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. [참]
ㄷ. $y=2^{x-2}+1$과 $y=x$를 연립하면 $2^{x-2}+1=x$, $2^{x-2}=x-1\quad\therefore\ x=2$ 또는 $x=3$
즉, $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 두 점 $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$에서 만나므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$도 두 점 $(2,\ 2)$와 $(3,\ 3)$에서 만난다. [거짓]



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

43) ③

세 점 $P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)$, $R(x_3,\ y_3)$의 위치관계는 다음과 같다.



$$y=|\log_2 x|=\begin{cases}\log_2 x & (x>1)\\ \log_{\frac{1}{2}} x & (0<x<1)\end{cases}$$

ㄱ. 그림에서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$과 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$는 서로 역함수이므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

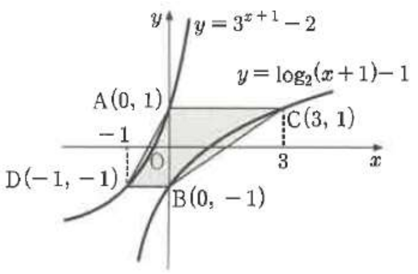
즉 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$과 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 교점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이다.
두 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=-x+1$이고 두 직선 $y=x$와 $y=-x+1$의 교점은 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

$$\therefore\ \frac{1}{2}<x_1<1\quad [참]$$

ㄴ. $y=2^x$의 역함수는 $y=\log_2 x$이고,
$y=-\log_2 x$의 역함수는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^2$이므로
$y=2^x$와 $y=-\log_2 x$의 교점 $R(x_3,\ y_3)$와 $y=\log_2 x$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 교점 $Q(x_2,\ y_2)$는 직선 $y=x$에 대해 대칭이므로
$x_3=y_2,\ x_2=y_3\quad\therefore\ x_2y_2-x_3y_3=0$ [참]
ㄷ. 점 $P(x_1,\ y_1)$은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $y_1=x_1$
점 $(0,\ 1)$과 $P(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선의 기울기는
$\frac{y_2-1}{x_1-0}=\frac{x_1-1}{y_1-0}=\frac{x_1-1}{y_1}$
점 $(0,\ 1)$과 $Q(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 기울기는
$\frac{y_2-1}{x_2-0}=\frac{y_2-1}{x_2}$
그림에서 점 $(0,\ 1)$과 점 $P(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선이 점 $(0,\ 1)$과 $Q(x_2,\ y_2)$을 지나는 직선보다 경사가 급하고 두 직선의 기울기는 모두 음이므로
$\frac{x_1-1}{y_1}<\frac{y_2-1}{x_2}$
$x_2>0,\ y_2>0$이므로 양변에 x_2y_1을 곱하면
$x_2(x_1-1)<y_1(y_2-1)$ [거짓]
따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ이다.

44) ⑤

$y=3^{x+1}-2,\ y=\log_2(x+1)-1$의
각각에 $x=0$을 대입하면
$y=3-2=1,\ y=0-1=-1$
$\therefore\ A(0,\ 1),\ B(0,\ -1)$
점 A, C의 y좌표가 1이므로 점 C의 x좌표는
$\log_2(x+1)-1=1,\ \log_2(x+1)=2\quad\therefore\ x=3$
즉 $C(3,\ 1)$
점 B, D의 y좌표가 -1이므로 점 D의 x좌표는
$3^{x+1}-2=-1,\ 3^{x+1}=1\quad\therefore\ x=-1$에서 $x+1=0$,
즉 $D(-1,\ -1)$



따라서 ABCD의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times(\overline{AC}+\overline{DB})\times\overline{AB}=\frac{1}{2}\times(3+1)\times 2=4$$

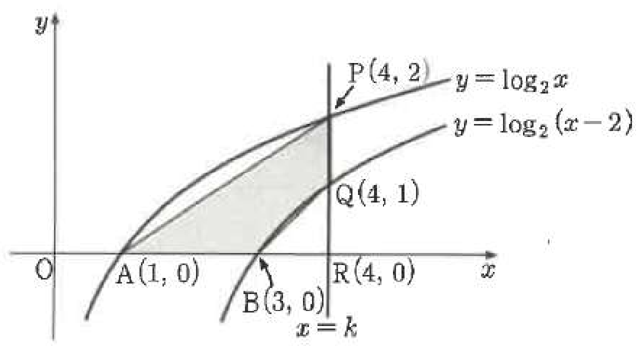
45) ③

두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프가 x축과 만나는 점이 각각 A, B이므로 A(1, 0), B(3, 0)
또한, 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프와 직선 $x=k$가 만나는 점을 각각 P, Q이므로
$\mathrm{P}(\mathrm{k},\ \log_2 \mathrm{k})$, $\mathrm{Q}(\mathrm{k},\ \log_2(\mathrm{k}-2))$
이때 $\mathrm{R}(k,\ 0)$이고 점 Q가 선분 PR의 중점이므로

$$\frac{\log_2 k}{2}=\log_2(k-2),\quad \log_2 k=2\log_2(k-2)$$

$$\log_2 k=\log_2(k-2)^2$$

$k=(k-2)^2$, $k^2-5k+4=0$, $(k-1)(k-4)=0$,
그런데 $k>2$이므로 $k=4$

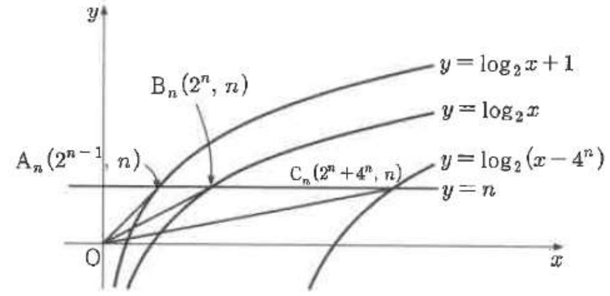


따라서 구하고자 하는 사각형 ABQP의 넓이는 삼각형 ARP의 넓이에서 삼각형 BRQ의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\frac{1}{2}\times(4-1)\times log_2 4-\frac{1}{2}\times(4-3)\times log_2 2=\frac{3}{2}\times 2-\frac{1}{2}\times 1=\frac{5}{2}$$

46) 5

점 A_n은 곡선 $y=\log_2 x+1$과 직선 $y=n$이 만나는 점이므로
$\log_2 x+1=n$, $x=2^{n-1}$
$\therefore\ \mathrm{A}_n(2^{n-1},\ n)$
점 B_n은 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 $y=n$이 만나는 점이므로
$\log_2 x=n$, $x=2^n$
$\therefore\ \mathrm{B}_n(2^n,\ n)$
점 C_n은 곡선 $y=\log_2(x-4^n)$과 직선 $y=n$이 만나는 점이므로
$\log_2(x-4^n)=n$, $x=2^n+4^n$
$\therefore\ \mathrm{C}_n(2^n+4^n,\ n)$



$$\mathrm{S_n}=\frac{1}{2}\times\mathrm{n}\times\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n},\quad \mathrm{T_n}=\frac{1}{2}\times\mathrm{n}\times\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}$$

$$\frac{\mathrm{T_n}}{\mathrm{S_n}}=\frac{\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}}{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}=\frac{2^n+4^n-2^n}{2^n-2^{n-1}}=\frac{4^n}{(2-1)\times 2^{n-1}}=2^{n+1}=64$$

따라서 $n=5$

47) ②

$|a-\log_2 x|\le 1$에서 $|\log_2 x-a|\le 1$이므로
$-1\le log_2 x-a\le 1$
$a-1\le log_2 x\le a+1$
밑이 1보다 크므로 $2^{a-1}\le x\le 2^{a+1}$
즉, x의 최댓값은 2^{a+1}, 최솟값은 2^{a-1}이므로 차는

$$\begin{aligned}2^{a+1}-2^{a-1}&=2^a\left(2-\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{3}{2}\cdot 2^a\\&=18\end{aligned}$$

따라서 $2^a=\frac{2}{3}\cdot 18=12$

48) -5

정사각형 ABCD의 넓이가 9이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=3$
점 A의 x좌표를 k라 하면 점 D의 x좌표도 k이다.
두 점 A, D가 각각 함수
$y=\log_4\frac{1}{x}$, $y=\log_2 x$ 의 그래프 위의 점이므로

$A\left(k,\ \log_4 \frac{1}{k}\right)$, $D(k,\ \log_2 k)$

$\overline{AD}=3$ 이므로 $\log_2 k-\log_4 \frac{1}{k}=3$

$\log_2 k-\log_{2^2} k^{-1}=3$, $\log_2 k+\frac{1}{2}\log_2 k=3$

$\frac{3}{2}\log_2 k=3$, $\log_2 k=2$ $\therefore\ k=4$

$\therefore\ A(4,\ -1)$

이때, $\overline{AB}\perp\overline{BC}$, $\overline{AB}=\overline{BC}$ 이므로

(직선 AC의 기울기)$=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=1$

즉, 직선 AC는 점 $A(4,\ -1)$을 지나고 기울기가 1인 직선이므로 직선의 방정식은

$y-(-1)=x-4$ $\therefore\ y=x-5$

따라서 구하는 y절편은 -5이다.

49) ③

$f(x)=4x^{-4+\log_2 x}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 f(x)=\log_2 4+\log_2 x^{-4+\log_2 x}$

$=2+(-4+\log_2 x)\times log_2 x$

$=(\log_2 x)^2-4\log_2 x+2$

$\log_2 x=t$ 로 놓으면 (밑)$=2>1$ 이므로

$\frac{1}{2}\le x\le 2$에서 $\log_2 \frac{1}{2}\le \log_2 x\le log_2 2$

$\therefore\ -1\le t\le 1$

$\log_2 f(2^t)=t^2-4t+2=(t-2)^2-2$ 에서

$f(2^t)=2^{(t-2)^2-2}$ $(-1\le t\le 1)$ …… ㉠

(밑)$=2>1$ 이므로 ㉠은 $(t-2)^2-2$가 최대일 때 최댓값을 갖고, $(t-2)^2-2$가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

이때, $g(t)=(t-2)^2-2$ 로 놓으면 $-1\le t\le 1$에서 함수 $y=g(t)$는 $t=-1$일 때 최댓값 7, $t=1$일 때, 최솟값 -1을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 최댓값 $M=2^7=128$, 최솟값 $m=2^{-1}=\frac{1}{2}$ 을 갖는다.

$\therefore\ Mm=128\times\frac{1}{2}=64$

50) 1

$f(x)=\left(\log_a \frac{x}{10}\right)\left(\log_a \frac{x}{4}\right)$

$=(\log_a x-\log_a 10)(\log_a x-\log_a 4)$

$=(\log_a x)^2-(\log_a 10+\log_a 4)\log_a x+\log_a x\times\log_a 4$

이때, $\log_a x=t$, $\log_a 10=\alpha$, $\log_a 4=\beta$로 놓으면 주어진 함수는

$t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta=\left(t-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\alpha\beta-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$

이므로 $t=\frac{\alpha+\beta}{2}$일 때, 최솟값 $\alpha\beta-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$을 갖는다.

즉, $\alpha\beta-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2=-\frac{1}{16}$에서

$\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$, $\frac{\alpha-\beta}{2}=\pm\frac{1}{4}$

$\alpha=\log_a 10$, $\beta=\log_a 4$이므로

$\frac{\log_a 10-\log_a 4}{2}=\frac{1}{4}$ 또는 $\frac{\log_a 10-\log_a 4}{2}=-\frac{1}{4}$

$\log_a \frac{5}{2}=\frac{1}{2}$ 또는 $\log_a \frac{5}{2}=-\frac{1}{2}$

$a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$ 또는 $a^{-\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$

$\therefore\ a=\frac{25}{4}$ 또는 $a=\frac{4}{25}$

따라서 모든 a의 값의 곱은 $\frac{25}{4}\times\frac{4}{25}=1$

51) ②

$A(k,\log_2 k)$, $B(k,-\log_2(8-k))$이고 $\overline{AB}=2$이므로

$|\log_2 k+\log_2(8-k)|=2$

$|\log_2 k(8-k)|=2$

$\log_2 k(8-k)=-2$ 또는 $\log_2 k(8-k)=2$

(i) $\log_2 k(8-k)=-2$일 때

$k(8-k)=\frac{1}{4}$, $4k^2-32k+1=0$

이때 $0<k<8$이므로

$k=\frac{8-3\sqrt{7}}{2}$ 또는 $k=\frac{8+3\sqrt{7}}{2}$

(ii) $\log_2 k(8-k)=2$일 때

$k(8-k)=4$, $k^2-8k+4=0$

이때 $0<k<8$이므로

$k=4-2\sqrt{3}$ 또는 $k=4+2\sqrt{3}$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 k의 값의 곱은

$(\frac{8-3\sqrt{7}}{2})(\frac{8+3\sqrt{7}}{2})(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})$

$=\frac{1}{4}\times 4=1$

52) ③

ㄱ. 점 A의 x좌표는

$\log_a x = 1$

$x = a$

이므로 $\mathrm{A}(a,\ 1)$

또, 점 B의 x좌표는

$\log_{4a} x = 1$

$x = 4a$

이므로 $\mathrm{B}(4a,\ 1)$

그러므로 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times 4a - 4\times a}{1-4},\ \dfrac{1\times 1 - 4\times 1}{1-4}\right)$

즉, $(0,\ 1)$ (참)

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 선분 AB가 x축과 평행하므로 두 점 A,D의 x좌표는 같아야 한다.

한편 점 D의 x좌표는

$\log_{4a} x = -1$

$x = \dfrac{1}{4a}$

이므로 $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{4a},\ -1\right)$

이때 $\mathrm{A}(a,\ 1)$이므로

$a = \dfrac{1}{4a}$

$a^2 = \dfrac{1}{4}$

이때 $\dfrac{1}{4} < a < 1$이므로

$a = \dfrac{1}{2}$ (참)

ㄷ. $\overline{\mathrm{AB}} = 4a - a = 3a$

한편, 점 C의 x좌표는

$\log_a x = -1$

$x = \dfrac{1}{a}$

이므로

$\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{a},\ -1\right)$

그러므로

$\overline{\mathrm{CD}} = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{4a} = \dfrac{3}{4a}$

한편, $\overline{\mathrm{AB}} < \overline{\mathrm{CD}}$이면

$3a < \dfrac{3}{4a}$

$a^2 < \dfrac{1}{4}$

이때 $\dfrac{1}{4} < a < 1$이므로

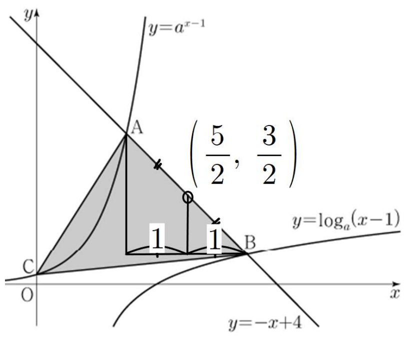
$\dfrac{1}{4} < a < \dfrac{1}{2}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

53) 192

두 함수는 $y = a^x$, $y = \log_a x$를 x축으로 1만큼 평행 이동한 함수이다. $y = a^x$, $y = \log_a x$는 $y = x$ 대칭이고, x축으로 1만큼 평행 이동한 $y = a^{x-1}$, $y = \log_a(x-1)$의 대칭축은 $y = x - 1$

주어진 두 함수가 $y = x - 1$에 대칭이므로 $y = x - 1$과 $y = -x + 4$의 교점 $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$에 점대칭이다.



$\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{2}$이므로 위의 그림의 직각 이등변삼각형을 통해 $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$임을 알 수 있다.

$y = a^{x-1}$에 점 $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$를 대입하면, $a^{\frac{1}{2}} = \dfrac{5}{2}$, $a = \dfrac{25}{4}$

$\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{1}{a}\right)$, $\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{4}{25}\right)$

$\overline{\mathrm{AB}}$를 밑변으로 했을 때, 점 C에서 직선 $x + y - 4 = 0$까지 거리가 높이가 된다.

$x + y - 4 = 0$과 $\left(\dfrac{4}{25},\ 0\right)$사이 거리

$$\frac{\left|\dfrac{4}{25} - 4\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\dfrac{96}{25}}{\sqrt{2}} = \frac{48\sqrt{2}}{25}$$

삼각형 ABC의 넓이 $S = \dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{48\sqrt{2}}{25} = \dfrac{96}{25}$

$\therefore\ 50S = 192$

54) ②

주어진 두 직선의 방정식은 아래와 같다.

$$y = \frac{\log_2 b - \log_2 a}{b - a}(x - a) + \log_2 a$$

$$y = \frac{\log_4 b - \log_4 a}{b - a}(x - a) + \log_4 a$$

두 직선의 y절편이 같으므로

$$-\frac{a}{b-a}\left(\log_2\frac{b}{a}\right) + \log_2 a = -\frac{a}{b-a}\left(\log_4\frac{b}{a}\right) + \log_4 a$$

얻어진 조건식을 간단히 해보자.

$\frac{a}{b-a}\left(\log_4\frac{b}{a}-\log_2\frac{b}{a}\right)=\log_4 a-\log_2 a$

$\frac{a}{b-a}\left(\frac{1}{2}\log_2\frac{b}{a}-\log_2\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{2}\log_2 a-\log_2 a$

$\frac{a}{b-a}\times\left(-\frac{1}{2}\log_2\frac{b}{a}\right)=-\frac{1}{2}\log_2 a$

$a\log_2 b-a\log_2 a=(b-a)\log_2 a,\quad a\log_2 b=b\log_2 a,$

$a\log b=b\log a$

$\log a^b=\log b^a,\ a^b=b^a\ \cdots$ ㉠

$f(1)=a^b+b^a=40\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a^b=b^a=20$,

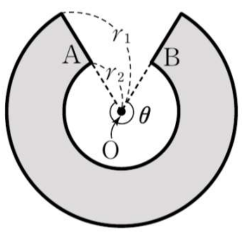
$f(2)=a^{2b}+b^{2a}=(a^b)^2+(b^a)^2=20^2+20^2=800$

55) 제 3사분면

$\cos\theta<0$인 것은 제 2사분면과 제 3사분면이고, $\tan\theta>0$인 것은 제 1사분면과 제 3사분면이므로 θ는 제 3사분면의 각이다.

56) 25

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B를 정하고 $\angle AOB=\theta$라 하면 색칠한 도형의 둘레의 길이가 20이므로



$2(r_1-r_2)+r_1\theta+r_2\theta=20$

$\therefore\ (r_1+r_2)\theta=20-2(r_1-r_2)\cdots\cdots$ ㉠

색칠한 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}{r_1}^2\theta-\frac{1}{2}{r_2}^2\theta$

$=\frac{1}{2}({r_1}^2-{r_2}^2)\theta$

$=\frac{1}{2}(r_1-r_2)(r_1+r_2)\theta$

$=\frac{1}{2}(r_1-r_2)\{20-2(r_1-r_2)\}$ ($\because$ ㉠)

$=-(r_1-r_2)^2+10(r_1-r_2)$

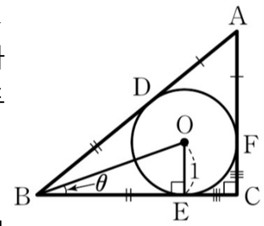
$=-(r_1-r_2-5)^2+25$

이때, ㉠에서 $0<r_1-r_2<10$

따라서 $r_1-r_2=5$일 때, 색칠한 도형의 넓이의 최댓값은 25이다.

57) ②

직각삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA와 내접원 O의 접점을 각각 D, E, F라 하면 원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로 오른쪽 그림에서



$\overline{AD}=\overline{AF},\ \overline{BD}=\overline{BE},\ \overline{CE}=\overline{CF}$

또한, 원의 접선은 그 접점을 지나는 원의 반지름과 서로 수직이므로 $\angle OEB=90^\circ$

직각삼각형 OBE에서 $\overline{BE}=\frac{1}{\tan\theta}$이므로

$\overline{BD}=\overline{BE}=\frac{1}{\tan\theta}$

□OECF는 정사각형이므로 $\overline{CE}=\overline{CF}=\overline{OE}=1$

이때, $\overline{AD}=\overline{AF}=x$라 하면 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$

$\left(\frac{1}{\tan\theta}+x\right)^2=\left(\frac{1}{\tan\theta}+1\right)^2+(x+1)^2$

$\frac{1}{\tan^2\theta}+\frac{2x}{\tan\theta}+x^2=\frac{1}{\tan^2\theta}+\frac{2}{\tan\theta}+1+x^2+2x+1$

$2x\left(\frac{1}{\tan\theta}-1\right)=\frac{2}{\tan\theta}+2$

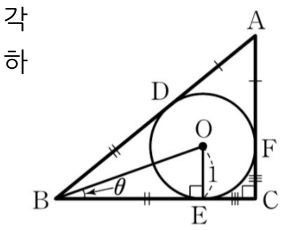
$2x\times\frac{1-\tan\theta}{\tan\theta}=2\times\frac{1+\tan\theta}{\tan\theta}$

$\therefore\ x=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

$\therefore\ \overline{AC}=x+1=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}+1=\frac{2}{1-\tan\theta}$

다른풀이

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 각 변과 내접원의 접점을 각각 D, E, F라 하면



$\overline{AD}=\overline{AF},\ \overline{BD}=\overline{BE},\ \overline{CE}=\overline{CF}$

직각삼각형 OBE에서

$\tan\theta=\frac{\overline{OE}}{\overline{BE}}=\frac{1}{\overline{BE}}$

$\therefore\ \overline{BE}=\overline{BD}=\frac{1}{\tan\theta}$

□OECF는 정사각형이므로 $\overline{CE}=\overline{CF}=\overline{OE}=1$

$\overline{AD}=\overline{AF}=x$라 하면 내접원의 반지름의 길이가 1이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times1\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\theta}+1\right)(x+1)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tan\theta}+2x+2\right)$

$(x+1)\left(\frac{1}{\tan\theta}+1\right)=2(x+1)+\frac{2}{\tan\theta}$

$(x+1)\left(\frac{1}{\tan\theta}-1\right)=\frac{2}{\tan\theta}$

$(x+1)\times\frac{1-\tan\theta}{\tan\theta}=\frac{2}{\tan\theta}$

$\therefore\ \overline{AC}=x+1=\frac{2}{\tan\theta}\times\frac{\tan\theta}{1-\tan\theta}=\frac{2}{1-\tan\theta}$

58) ④

삼각형 OBC에서 $\angle \mathrm{BOC}=\pi-\theta$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{OB}}\times\tan(\pi-\theta)=\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

삼각형 OAD에서 $\angle \mathrm{OAD}=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle \mathrm{AOD}=\pi-\theta$이므로

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{OD}}}=\frac{1}{\overline{\mathrm{OD}}}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{OD}}=\frac{1}{\cos(\pi-\theta)}=-\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \triangle \mathrm{OCD}&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OD}}\times\overline{\mathrm{BC}}\\&=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{\cos\theta}\right)\times(-\tan\theta)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\&=\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}\end{aligned}$$

또한, 부채꼴 OAB에서 $\angle \mathrm{AOB}=\pi-\theta$이므로 그 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 1^2\times(\pi-\theta)=\frac{\pi-\theta}{2}$$

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{BD}}$ 및 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$로

둘러싸인 부분의 넓이는

(삼각형 OCD의 넓이)-(부채꼴 OAB의 넓이)

$$=\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}-\frac{\pi-\theta}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\pi+\theta\right)$$

다른풀이

주어진 원의 방정식은 $x^2+y^2=1$이므로

$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$

점 A에서의 원의 접선의 방정식은

$x\cos\theta+y\sin\theta=1$

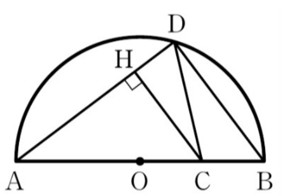
점 D는 접선의 x절편이므로

$x\cos\theta=1 \qquad \therefore\ x=\dfrac{1}{\cos\theta}$

즉, $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$이므로 $\overline{\mathrm{OD}}=-\dfrac{1}{\cos\theta}$

59) 3

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하자. 직각삼각형 ACH에서



$\tan(\angle \mathrm{CAD})=\dfrac{\overline{\mathrm{CH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}$,

직각삼각형 CDH에서 $\tan(\angle \mathrm{ADC})=\dfrac{\overline{\mathrm{CH}}}{\overline{\mathrm{DH}}}$이므로

$$\frac{\tan(\angle \mathrm{ADC})}{\tan(\angle \mathrm{CAD})}=\frac{\dfrac{\overline{\mathrm{CH}}}{\overline{\mathrm{DH}}}}{\dfrac{\overline{\mathrm{CH}}}{\overline{\mathrm{AH}}}}=\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{DH}}}$$

또한, $\overline{\mathrm{AB}}$를 $3:1$로 내분하는 점이 C이므로

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:1 \qquad \therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=3\overline{\mathrm{BC}}$ …… ㉠

한편, 선분 AB가 반원 O의 지름이므로

$\angle \mathrm{ADB}=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\ \triangle \mathrm{ACH}\backsim\triangle \mathrm{ABD}$ (AA 닮음)

$\therefore\ \dfrac{\tan(\angle \mathrm{ADC})}{\tan(\angle \mathrm{CAD})}=\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{DH}}}=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=3$ ($\because$ ㉠)

60) ③

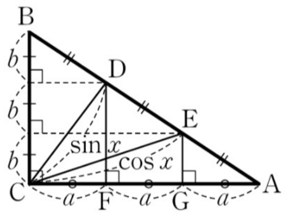
ㄱ. $$\begin{aligned}&\frac{\cos x}{\cos x+1}+\frac{\cos x}{\cos x-1}\\&=\frac{\cos x(\cos x-1)+\cos x(\cos x+1)}{(\cos x+1)(\cos x-1)}\\&=\frac{\cos^2x-\cos x+\cos^2x+\cos x}{\cos^2x-1}\\&=\frac{2\cos^2x}{-\sin^2x}\\&=-\frac{2}{\tan^2x}\ \text{(참)}\end{aligned}$$

ㄴ. $$\begin{aligned}&\frac{1+\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}\\&=\frac{(1+\cos x)^2+\sin^2x}{\sin x(1+\cos x)}\\&=\frac{1+2\cos x+\cos^2x+\sin^2x}{\sin x(1+\cos x)}\\&=\frac{2(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{2}{\sin x}\ \text{(거짓)}\end{aligned}$$

ㄷ. $$\begin{aligned}\left(\tan x+\frac{1}{\cos x}\right)^2&=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}\right)^2\\&=\frac{(\sin x+1)^2}{\cos^2x}\\&=\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2x}\\&=\frac{(1+\sin x)^2}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\\&=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\ \text{(참)}\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

61) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$



$\overline{AC}=3a$, $\overline{BC}=3b$라 하고, 점 D, E에서 $\overline{CA}$에 내린 수선의 발을 각각 F, G라 하면 오른쪽 그림과 같다. 직각삼각형 CDF에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{CD}^2=a^2+(2b)^2$

$=a^2+4b^2=\sin^2 x$ …… ㉠

직각삼각형 CEG에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{CE}^2=(2a)^2+b^2$

$=4a^2+b^2=\cos^2 x$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$5(a^2+b^2)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\therefore\ a^2+b^2=\frac{1}{5}$

따라서 직각삼각형 ABC에서

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AB}^2=(3a)^2+(3b)^2=9(a^2+b^2)=9\times\frac{1}{5}=\frac{9}{5}$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

62) $\frac{7}{8}$

주어진 이차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $2-\sqrt{3}$이면 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.

즉, 이차방정식 $x^2-\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)x+1=0$의 두 근이 $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$

즉, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=4$에서

$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=4$, $\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}=4$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=1^2-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

63) $\frac{5}{2}\pi$

이차방정식 $kx^2-(k+2)x+(k+1)=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{k+2}{k} & \cdots\cdots ㉠\\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{k+1}{k} & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{(k+2)^2}{k^2}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{(k+2)^2}{k^2}$

위의 식에 ㉡을 대입하면

$1+\frac{2(k+1)}{k}=\frac{(k+2)^2}{k^2}$

$\frac{(k+2)^2}{k^2}-\frac{2(k+1)}{k}-1=0$

$k\neq 0$이므로 위의 식의 양변에 k^2을 곱하면

$k^2+4k+4-2k^2-2k-k^2=0$

$-2k^2+2k+4=0$

$k^2-k-2=0$, $(k+1)(k-2)=0$

$\therefore\ k=-1$ 또는 $k=2$

그런데 $k=2$이면 주어진 이차방정식은

$2x^2-4x+3=0$이고, 이 이차방정식의

판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-2)^2-2\times3=4-6=-2<0$

이므로 허근을 갖는다.

$\therefore\ k=-1$

$k=-1$일 때, 주어진 이차방정식은 $-x^2-x=0$이므로

$x^2+x=0$, $x(x+1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=-1$

이때, $0<\theta<2\pi$이므로

(ⅰ) $\sin\theta=0$, $\cos\theta=-1$일 때, $\theta=\pi$

(ⅱ) $\sin\theta=-1$, $\cos\theta=0$일 때, $\theta=\frac{3}{2}\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 θ의 값의 합은

$\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{5}{2}\pi$

64) 24

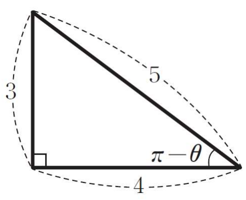
직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ이면 기울기는 $\tan\theta$이므로 직선 $3x+4y+3=0$, 즉

$y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$에서 $\tan\theta=-\frac{3}{4}$

$0<\theta<\pi$이고, $\tan\theta<0$이므로 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이다.

$\therefore\ \sin\theta>0,\ \cos\theta<0$

이때, 오른쪽 그림과 같이 직각을 낀 두 변의 길이가 3, 4인 직각삼각형을 생각하면



$\sin\theta=\frac{3}{5},\ \cos\theta=-\frac{4}{5}$이므로

$\cos(\pi+\theta)+\frac{1}{\sin(\pi-\theta)}+\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=-\cos\theta+\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\tan\theta}$

$=\frac{4}{5}+\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=\frac{19}{5}$

따라서 $p=5,\ q=19$이므로 $p+q=5+19=24$

65) ③

ㄱ. $\sin(90°-\theta)=\cos\theta$이므로

$\sin^2 2^\circ+\sin^2 4^\circ+\sin^2 6^\circ+\cdots+\sin^2 88^\circ+\sin^2 90^\circ$

$=(\sin^2 2^\circ+\sin^2 88^\circ)+(\sin^2 4^\circ+\sin^2 86^\circ)+\cdots$

$\quad+(\sin^2 44^\circ+\sin^2 46^\circ)+\sin^2 90^\circ$

$=(\sin^2 2^\circ+\cos^2 2^\circ)+(\sin^2 4^\circ+\cos^2 4^\circ)+\cdots$

$\quad+(\sin^2 44^\circ+\cos^2 44^\circ)+\sin^2 90^\circ$

$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{22개}+1^2=23$ (참)

ㄴ. $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$이므로

$\cos^2 1^\circ+\cos^2 2^\circ+\cos^2 3^\circ+\cdots+\cos^2 90^\circ$

$=(\cos^2 1^\circ+\cos^2 89^\circ)+(\cos^2 2^\circ+\cos^2 88^\circ)+\cdots$

$\quad+(\cos^2 44^\circ+\cos^2 46^\circ)+\cos^2 45^\circ+\cos^2 90^\circ$

$=(\cos^2 1^\circ+\sin^2 1^\circ)+(\cos^2 2^\circ+\sin^2 2^\circ)+\cdots$

$\quad+(\cos^2 44^\circ+\sin^2 44^\circ)+\cos^2 45^\circ+\cos^2 90^\circ$

$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{44개}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+0=\frac{89}{2}$ (거짓)

ㄷ. $\tan(90^\circ-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$이므로

$\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\tan 3^\circ\times\cdots\times\tan 89^\circ$

$=(\tan 1^\circ\times\tan 89^\circ)\times(\tan 2^\circ\times\tan 88^\circ)\times\cdots$

$\quad\times(\tan 44^\circ\times\tan 46^\circ)\times\tan 45^\circ$

$=\left(\tan 1^\circ\times\frac{1}{\tan 1^\circ}\right)\times\left(\tan 2^\circ\times\frac{1}{\tan 2^\circ}\right)\times\cdots$

$\quad\times\left(\tan 44^\circ\times\frac{1}{\tan 44^\circ}\right)\times\tan 45^\circ$

$=1^{44}\times 1=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

66) 23

$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$이므로

$\left(\frac{1}{\sin^2 1^\circ}+\frac{1}{\sin^2 2^\circ}+\frac{1}{\sin^2 3^\circ}+\cdots+\frac{1}{\sin^2 23^\circ}\right)$

$\quad-(\tan^2 67^\circ+\tan^2 68^\circ+\tan^2 69^\circ+\cdots+\tan^2 89^\circ)$

$=\left(\frac{1}{\sin^2 1^\circ}+\frac{1}{\sin^2 2^\circ}+\frac{1}{\sin^2 3^\circ}+\cdots+\frac{1}{\sin^2 23^\circ}\right)$

$\quad-\left(\frac{1}{\tan^2 23^\circ}+\frac{1}{\tan^2 22^\circ}+\frac{1}{\tan^2 21^\circ}+\cdots+\frac{1}{\tan^2 1^\circ}\right)$

$=\left(\frac{1}{\sin^2 1^\circ}+\frac{1}{\sin^2 2^\circ}+\frac{1}{\sin^2 3^\circ}+\cdots+\frac{1}{\sin^2 23^\circ}\right)$

$-\left(\frac{\cos^2 23^\circ}{\sin^2 23^\circ}+\frac{\cos^2 22^\circ}{\sin^2 22^\circ}+\frac{\cos^2 21^\circ}{\sin^2 21^\circ}+\cdots+\frac{\cos^2 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}\right)$

$=\left(\frac{1}{\sin^2 1^\circ}-\frac{\cos^2 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}\right)+\left(\frac{1}{\sin^2 2^\circ}-\frac{\cos^2 2^\circ}{\sin^2 2^\circ}\right)$

$\quad+\cdots+\left(\frac{1}{\sin^2 23^\circ}-\frac{\cos^2 23^\circ}{\sin^2 23^\circ}\right)$

$=\frac{1-\cos^2 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}+\frac{1-\cos^2 2^\circ}{\sin^2 2^\circ}+\cdots+\frac{1-\cos^2 23^\circ}{\sin^2 23^\circ}$

$=\frac{\sin^2 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}+\frac{\sin^2 2^\circ}{\sin^2 2^\circ}+\cdots+\frac{\sin^2 23^\circ}{\sin^2 23^\circ}$

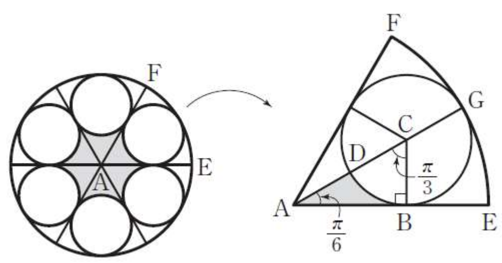
$=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{23개}=23$

67) 16

주어진 원을 다음 [그림 1]과 같이 6등분하여 작은 원이 하나씩 내접하는 똑같은 부채꼴 6개로 쪼개고 그중 하나를 부채꼴 AEF라 하면 부채꼴 AEF의 반지름의 길이는 6, 중심각의 크기는

$\angle\mathrm{EAF}=\frac{1}{6}\times 2\pi=\frac{\pi}{3}$이다.

또한, 구하는 넓이는 [그림 2]의 어두운 부분의 넓이의 12배이다.



[그림 1] [그림 2]

부채꼴 AEF에 내접하는 원의 중심을 C, 점 C에서 $\overline{\mathrm{AE}}$에 내린 수선의 발을 B라 하면

$\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{EAF}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6},\ \angle\mathrm{BCA}=\frac{\pi}{3}$

직선 AC와 이 원이 만나는 점을 각각 D, G라 하고

$\overline{\mathrm{BC}}=r$라 하면 삼각형 ABC에서

$\overline{\mathrm{AC}}=2\mathrm{r}$, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}\,\mathrm{r}$
그런데 $\overline{\mathrm{AG}}=6$, 즉, $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CG}}=6$이므로
$2r+r=6$, $3r=6$ $\quad\therefore\ r=2$
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{3}$
즉, [그림 2]의 어두운 부분의 넓이는
$\triangle\mathrm{ABC}-$(부채꼴 CBD의 넓이)
$=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2-\dfrac{1}{2}\times2^2\times\dfrac{\pi}{3}$
$=2\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\pi$
따라서 [그림 1]의 어두운 부분의 넓이는
$S=12\left(2\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\pi\right)=24\sqrt{3}-8\pi$
이므로 $p=24$, $q=-8$에서
$p+q=24+(-8)=16$

68) ④

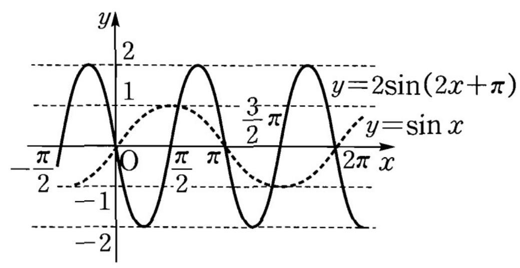
$\sin^2 18^\circ+\cos^2 18^\circ=1$이므로
$\cos^2 18^\circ=1-\sin^2 18^\circ=1-a^2$
이때 $\cos 18^\circ>0$이므로 $\cos 18^\circ=\sqrt{1-a^2}$
따라서 $\tan 198^\circ=\tan(180^\circ+18^\circ)$
$=\tan 18^\circ=\dfrac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ}=\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

69) ③

[해설] 단위원을 10등분하였고 $\angle P_1OP_2=\theta$이므로
$10\theta=2\pi$, $\theta=\dfrac{\pi}{5}$ $\qquad\therefore \pi=5\theta$
$\therefore \cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta+\cdots+\cos9\theta$
$=\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta+\cos4\theta+\cos5\theta$
$+\cos(2\pi-4\theta)+\cos(2\pi-3\theta)+\cos(2\pi-2\theta)+\cos(2\pi-\theta)$
$=2\cos\theta+2\cos2\theta+2\cos3\theta+2\cos4\theta+\cos5\theta$
$=2\{(\cos\theta+\cos2\theta+\cos(\pi-2\theta)+\cos(\pi-\theta)\}+\cos\pi$
$=2(\cos\theta+\cos2\theta-\cos2\theta-\cos\theta)-1=-1$

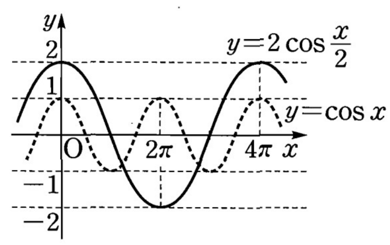
70) 풀이 참조

$y=2\sin(2x+\pi)=2\sin2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$의 그래프는
$y=\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\dfrac{1}{2}$배, y축의 방향으로 2배한 후 x축의 방향으로 $-\dfrac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것과 같다. 따라서 그래프는 아래의 그림과 같고, 치역은 $\{y|-2\le y\le 2\}$, 주기는 π이다.



71) 풀이 참조

$y=2\cos\dfrac{x}{2}$의 그래프는
$y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 2배, y축의 방향으로 2배한것과 같다. 따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고,
치역은 $\{y|-2\le y\le 2\}$, 주기는 4π이다.

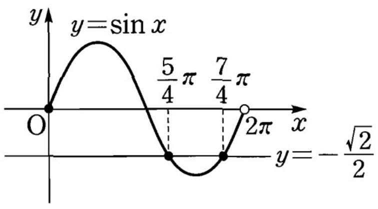


72) ⑤

① 정의역은 $x\ne n\pi+\dfrac{\pi}{2}$(n은 정수)인 실수 전체의 집합이다.
② 치역은 실수 전체의 집합이다.
③ 주기는 π이다.
④ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

73) $x=\frac{5\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

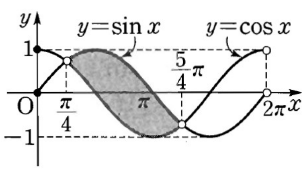
다음 그림과 같이 $0 \le x < 2\pi$ 에서
함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이므로



$x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

74) $\frac{3}{2}\pi$

부등식 $\sin x > \cos x$의 해는
$y=\sin x$의 그래프가
$y=\cos x$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로
오른쪽 그림에서



$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{5}{4}\pi$$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{5}{4}\pi$이므로 $\alpha+\beta=\frac{3}{2}\pi$

75) ④

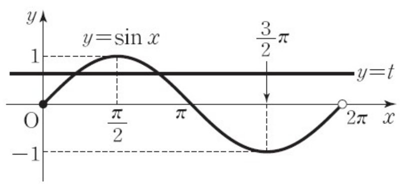
근의 분리로 푸세요.

[다른 풀이]
$\cos^2x+2a\sin x=a^2$에서
$(1-\sin^2x)+2a\sin x=a^2$
$\sin^2x-2a\sin x+a^2-1=0$
$\sin^2x-2a\sin x+(a-1)(a+1)=0$
$(\sin x-a+1)(\sin x-a-1)=0$
$\therefore\ \sin x=a-1$ 또는 $\sin x=a+1$ ……㉠
이때, $-1 \le \sin x \le 1$이므로 ㉠의 해가 존재하려면
$-1 \le a-1 \le 1$ 또는 $-1 \le a+1 \le 1$
즉, $0 \le a \le 2$ 또는 $-2 \le a \le 0$이어야 하므로
$-2 \le a \le 2$

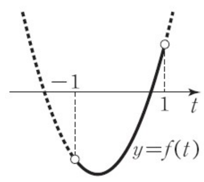
76) $a=\frac{1}{4}$ 또는 $\frac{1}{2}<a<\frac{5}{2}$

근의 분리로 푸세요.

[다른 풀이]
$2\cos^2x-2\sin x+2a-3=0$에서
$2(1-\sin^2x)-2\sin x+2a-3=0$
$\therefore\ 2\sin^2x+2\sin x-2a+1=0$
이때, $\sin x=t$로 놓으면 $0 \le x < 2\pi$에서 $-1 \le t \le 1$이고 주어진 방정식은 $2t^2+2t-2a+1=0$
$0 \le x < 2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 방정식 $\sin x=t$ $(-1<t<1)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.



따라서 x에 대한 방정식 $2\sin^2x+2\sin x-2a+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 t에 대한 방정식 $2t^2+2t-2a+1=0$이 $-1<t<1$에서 중근 또는 하나의 실근만을 가져야 한다.
$f(t)=2t^2+2t-2a+1$이라 하면
(ⅰ) $-1<t<1$에서 중근을 가질 때,
$f(t)=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-2a+\frac{1}{2}$에서
$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2a+\frac{1}{2}=0$ $\quad\therefore\ a=\frac{1}{4}$
(ⅱ) $-1<t<1$에서 하나의 실근만을 가질 때,
$f(-1)f(1)<0$이어야 하므로
$f(-1)=2-2-2a+1=-2a+1$,
$f(1)=2+2-2a+1=-2a+5$
에서 $(-2a+1)(-2a+5)<0$
$(2a-1)(2a-5)<0$ $\quad\therefore\ \frac{1}{2}<a<\frac{5}{2}$

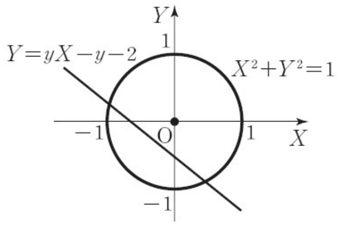


(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 상수 a의 값의 범위는
$a=\frac{1}{4}$ 또는 $\frac{1}{2}<a<\frac{5}{2}$

77) $-\frac{3}{4}$

$\cos x=X$, $\sin x=Y$로 놓으면 $\cos^2x+\sin^2x=1$이므로
$X^2+Y^2=1$ ……㉠
또한, $y=\frac{\sin x+2}{\cos x-1}$에서 $y=\frac{Y+2}{X-1}$이므로
$Y+2=y(X-1)$
$yX-Y-y-2=0$ ……㉡

이때, 오른쪽 그림의 XY좌표평면에서 원 ㉠과 직선 ㉡이 만나려면 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉡ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1보다 작거나 같아야 하므로



$\dfrac{|-y-2|}{\sqrt{y^2+(-1)^2}} \le 1$,

$|y+2| \le \sqrt{y^2+1}$

$|y+2| \ge 0$, $\sqrt{y^2+1} \ge 0$이므로 위의 부등식의 양변을 제곱하면

$(y+2)^2 \le y^2+1$, $4y \le -3$ $\qquad \therefore\ y \le -\dfrac{3}{4}$

따라서 구하는 최댓값은 $-\dfrac{3}{4}$이다.

다른풀이

$\sin x = X$, $\cos x = Y$로 놓으면

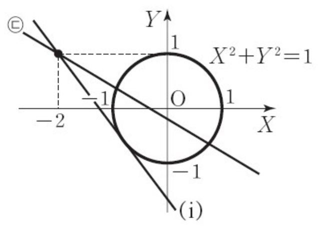
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$이므로 $X^2+Y^2=1$

또한, $y=\dfrac{\sin x+2}{\cos x-1}$에서 $y=\dfrac{X+2}{Y-1}$이므로

$y(Y-1)=X+2$

$\therefore\ X-yY+y+2=0$ $\qquad \cdots\cdots$㉢

이때, ㉢은 XY좌표평면에서 점 $(-2,\ 1)$을 지나는 직선이고, y는 기울기의 역수이므로 y가 최대이려면 직선 ㉢의 기울기가 최소이어야 한다. 원



$X^2+Y^2=1$과 직선 ㉢을 XY좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같고, 직선 ㉢의 기울기가 최소인 경우는 직선 ㉢이 (ⅰ)과 같이 원과 접할 때이다.

따라서 직선 ㉢과 원 $X^2+Y^2=1$의 중심 $(0,\ 0)$ 사이의 거리는 반지름의 길이인 1과 같아야 하므로

$\dfrac{|y+2|}{\sqrt{1+(-y)^2}}=1$, $|y+2|=\sqrt{1+y^2}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$y^2+4y+4=1+y^2$, $4y=-3$ $\qquad \therefore\ y=-\dfrac{3}{4}$

따라서 y의 최댓값은 $-\dfrac{3}{4}$이다.

78) $\dfrac{2}{3}$

79) ②

주어진 그래프에서 함수 $y=f(x)$의 최댓값은 최솟값이 각각 5, -5이므로 $\alpha_1=5$ $(\because\ \alpha_1>0)$

주기가 4이므로 $\dfrac{2\pi}{|\beta_1|}=4$에서 $|\beta_1|=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\ \beta_1=\dfrac{\pi}{2}$ $(\because\ \beta_1>0)$

함수 $f(x)=5\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x-\gamma_1\right)$의 그래프가 점 $(0,\ 5)$를 지나므로

$5=5\sin(-\gamma_1)$, $-5\sin\gamma_1=5$

$\sin\gamma_1=-1$ $\qquad \therefore\ \gamma_1=2n\pi-\dfrac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)

같은 방법으로 주어진 그래프에서 함수 $y=g(x)$의 최댓값과 최솟값이 각각 $\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}$이므로 $\alpha_2=\dfrac{1}{2}$ $(\because\ \alpha_2>0)$

주기가 4이므로 $\dfrac{2\pi}{|\beta_2|}=4$에서 $|\beta_2|=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\ \beta_2=\dfrac{\pi}{2}$ $(\because\ \beta_2>0)$

함수 $g(x)=\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x-\gamma_2\right)$의 그래프가 원점 O를 지나므로

$0=\dfrac{1}{2}\cos(-\gamma_2)$, $\cos\gamma_2=0$

$\therefore\ \gamma_2=2m\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$ (단, m은 정수)

ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 주기가 모두 4이므로 임의의 x에 대하여

$f(x+4)=f(x)$, $g(x+4)=g(x)$

$h(x)=f(x)-g(x)$이므로

$$\begin{aligned}h(x+4)&=f(x+4)-g(x+4)\\&=f(x)-g(x)=h(x)\end{aligned}$$

즉, 주어진 함수의 주기는 4이다. (거짓)

ㄴ. $\alpha_1=5$, $\beta_1=\dfrac{\pi}{2}$, $\gamma_1=2n\pi-\dfrac{\pi}{2}$를 $f(x)=\alpha_1\sin(\beta_1 x-\gamma_1)$에 대입하면

$$\begin{aligned}f(x)&=5\sin\left(\frac{\pi}{2}x-2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\\&=5\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)\\&=5\cos\frac{\pi}{2}x\end{aligned}$$

즉, 두 상수 a, b에 대하여 $f(x)=a\cos bx$ 꼴로 나타낼 수 있다. (참)

ㄷ. $\alpha_2=\dfrac{1}{2}$, $\beta_2=\dfrac{\pi}{2}$, $\gamma_2=2m\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$를 $g(x)=\alpha_2\cos(\beta_2 x-\gamma_2)$에 대입하면

$g(x)=\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x-2m\pi\mp\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\mp\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ g(x)=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}x$ 또는 $g(x)=-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}x$

그런데 주어진 그래프에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$g(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$

ㄴ에서 $f(x)=5\cos\frac{\pi}{2}x$이고, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 주기가 4로 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 10배 확대한 후 x축의 방향으로 $4k-1$ (k는 정수)만큼 평행이동한 것과 같다.

즉, $f(x)=10g(x-4k+1)$ (k는 정수)이므로

$a=10$, $b=4k-1$

이때, $9<b<13$이므로 $9<4k-1<13$

$10<4k<14$ $\quad\therefore\ \frac{5}{2}<k<\frac{7}{2}$

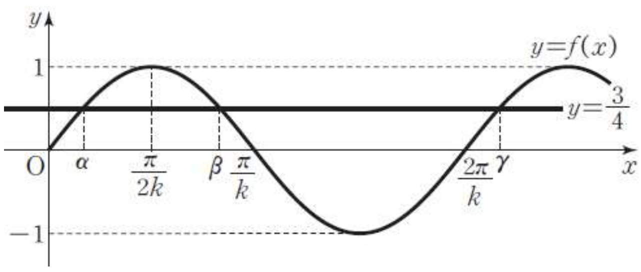
k는 정수이므로 $k=3$ $\quad\therefore\ b=11$

$\therefore\ a+b=10+11=21$(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

80) ③

함수 $f(x)=\sin kx\ \ (x\geq 0)$의 주기가 $\frac{2\pi}{k}$이므로 다음 그림과 같이 $0\leq x\leq\frac{\pi}{k}$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{2k}$에 대하여 대칭이다.



즉, $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2k}$이므로

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{k}$

$\therefore\ f(\alpha+\beta+\gamma)=f\left(\frac{\pi}{k}+\gamma\right)=\sin k\left(\frac{\pi}{k}+\gamma\right)$

$=\sin(\pi+k\gamma)=-\sin k\gamma$

$=-f(\gamma)=-\frac{3}{4}$

81) ④

두 함수 $y=4\sin 3x$, $y=3\cos 2x$의 그래프가 x축과 만나는 점이 각각 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(b,\ 0)$이므로

$4\sin 3a=0$에서 $\sin 3a=0$

$0<a<\frac{\pi}{2}$에서 $0<3a<\frac{3}{2}\pi$이므로 $3a=\pi$

$\therefore\ a=\frac{\pi}{3}$

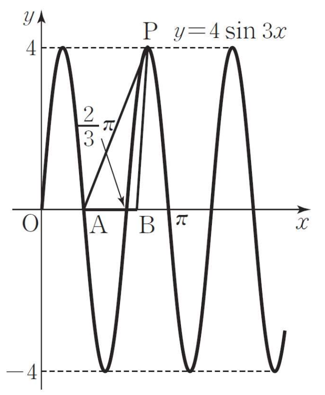
$3\cos 2b=0$에서 $\cos 2b=0$

$\frac{\pi}{2}<b<\pi$에서 $\pi<2b<2\pi$이므로

$2b=\frac{3}{2}\pi$ $\therefore\ b=\frac{3}{4}\pi$

$\therefore\ \mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{3}{4}\pi,\ 0\right)$

함수 $y=4\sin 3x$는 $-4\leq 4\sin 3x\leq 4$에서 최댓값, 최솟값이 각각 4, -4, 주기가 $\frac{2}{3}\pi$이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



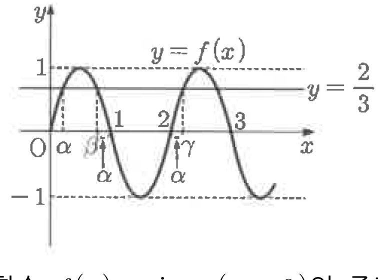
함수 $y=4\sin 3x$의 그래프 위의 임의의 점 P에 대하여 $\triangle\mathrm{ABP}$의 넓이가 최대가 되려면 밑변을 $\overline{\mathrm{AB}}$로 할 때 높이가 최대이어야 한다.

즉, 이때의 점 P의 y좌표는 4이어야 한다.

따라서 $\triangle\mathrm{ABP}$의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{3}\right)\times 4=2\times\frac{5}{12}\pi=\frac{5\pi}{6}$

82) ②



함수 $f(x)=\sin\pi x(x\geq 0)$의 주기는

$\frac{2\pi}{|\pi|}=2$이므로 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha+\beta=1$

주기가 2인 사인함수의 성질에 의하여 $\gamma=2+\alpha$

$\alpha+\beta+\gamma+1=1+(2+\alpha)+1=4+\alpha$

$\alpha+\beta+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$이므로

$f(\alpha+\beta+\gamma+1)=f(4+\alpha)=f(\alpha)=\dfrac{2}{3}$

($\because$ $f(x)$의 주기가 2)

$f\left(\alpha+\beta+\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\sin\dfrac{3}{2}\pi=-1$

따라서

$f(\alpha+\beta+\gamma+1)+f\left(\alpha+\beta+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{3}+(-1)=-\dfrac{1}{3}$

83) ④

구하는 실근의 개수는 두 함수 $y=\dfrac{1}{3}\log_2 x$와

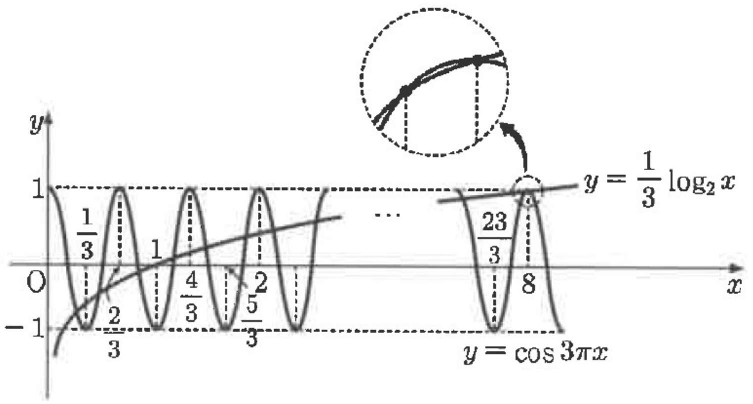
$y=\cos 3\pi x$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

$y=\dfrac{1}{3}\log_2 x$의 그래프는 $(1,\ 0)$과 $(8,\ 1)$을 지나고

함수 $y=\cos 3\pi x$의 그래프는 주기가 $\dfrac{2\pi}{3\pi}=\dfrac{2}{3}$이므로

두 함수 $y=\dfrac{1}{3}\log_2 x$와 $y=\cos 3\pi x$의 그래프를 그리면

다음과 같다.



이때 열린 구간 $\left(\dfrac{2n-2}{3},\ \dfrac{2n}{3}\right)(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12)$에서

두 그래프는 각각 두 개의 교점이 생기고

점 $(8,\ 1)$에서 만나므로 교점의 개수는 $12\times2+1=25$

따라서 구하는 실근 x의 개수는 25

84) 30

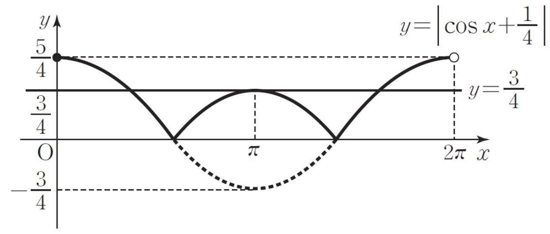
함수 $y=\cos x+\dfrac{1}{4}$의 그래프는

함수 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\dfrac{1}{4}$만큼 평행이동한 그래프이다.

또한, $-\dfrac{3}{4}\leq \cos x+\dfrac{1}{4}\leq\dfrac{5}{4}$에서 이 함수의 최댓값은 $\dfrac{5}{4}$, 최솟값은 $-\dfrac{3}{4}$이고, 주기는 2π이다.

함수 $y=\left|\cos x+\dfrac{1}{4}\right|$의 그래프는

함수 $y=\cos x+\dfrac{1}{4}$의 그래프에서 $y\geq0$인 부분은 그래도 두고, $y<0$인 부분만 x축에 대하여 대칭이동시킨 것이므로 다음 그림과 같다.



방정식 $\left|\cos x+\dfrac{1}{4}\right|=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 두 함수 $y=\left|\cos x+\dfrac{1}{4}\right|$, $y=k$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 $k=\dfrac{3}{4}$

따라서 $\alpha=\dfrac{3}{4}$이므로

$40\alpha=40\times\dfrac{3}{4}=30$

85) 10

86) ②

$4\cos^2 x-1=0$에서

$(2\cos x+1)(2\cos x-1)=0$

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos x=\dfrac{1}{2}$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$

한편, $\sin x\cos x<0$ 이므로

x는 제 2사분면의 각 또는 제 4사분면의 각이다.

따라서 구하는 x의 값은 $x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$이므로 모든 합은 $\dfrac{7}{3}\pi$이다.

87) ③

$f(x)=\tan\frac{\pi x}{a}$의 주기가 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=a$

그림의 삼각형이 정삼각형이므로 $\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$이고 직선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$

$\overline{\mathrm{OB}}=\frac{a}{2}$이므로 점 B의 좌표는 $\left(\frac{a}{4},\ \frac{a}{4}\sqrt{3}\right)$

$f(x)=\tan\frac{\pi x}{a}$에 대입하면, $\tan\frac{\pi}{4}=1=\frac{a}{4}\sqrt{3}$

$\therefore\ a=\frac{4}{\sqrt{3}}$

정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{16}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

88) 15° 또는 105°

사인법칙에 의하여 $\frac{5}{\sin 30^\circ}=\frac{5\sqrt{2}}{\sin C}$이므로

$5\sin C=5\sqrt{2}\sin 30^\circ$ $\quad\therefore\ \sin C=5\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0^\circ<C<180^\circ$이므로

$C=45^\circ$ 또는 $C=135^\circ$

$A=180^\circ-(B+C)$이므로 $A=105^\circ$ 또는 $A=15^\circ$

89) $105°$

코사인법칙에 의하여

$b^2=2^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-2\cdot 2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot cos45°=8$

$\therefore\ b=2\sqrt{2}\,(\because b>0)$

사인법칙에 의하여 $\frac{2\sqrt{2}}{\sin45°}=\frac{2}{\sin C}$

$\therefore\ \sin C=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

$0°<C<180°$이므로 $C=30°$ 또는 $C=150°$

그런데 $B+C<180°$이므로 $C=30°$

이때 $A+B+C=180°$이므로

$A=180°-(45°+30°)=105°$

90) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{3^2+(\sqrt{7})^2-2^2}{2\cdot3\cdot\sqrt{7}}=\frac{12}{6\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

$\sin^2A+\cos^2A=1$에서

$\sin^2A=1-\cos^2A=1-\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$

$\therefore\ \sin A=\frac{\sqrt{21}}{7}$ $(\because\ 0^\circ<A<180^\circ)$

$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

91) 30

$\triangle\mathrm{ABD}$에서 $\angle\mathrm{A}=180°-(50°+40°)=90°$

즉, $\triangle\mathrm{ABD}$는 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{BD}}$는 원의 지름이다.

이때, 원의 반지름의 길이를 R라 하면 $2R=20\sqrt{3}$

따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(50°+70°)}=2\mathrm{R},\ \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=20\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}=20\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=30$

92) ⑤

$\angle\mathrm{A}=2\alpha$, $\overline{\mathrm{AD}}=x$라 하면 삼각형의 내각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=6:4=3:2$

이때, $\overline{\mathrm{BC}}=5\sqrt{3}$이므로

$\overline{\mathrm{BD}}=3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{CD}}=2\sqrt{3}$

$\triangle\mathrm{ABD}$에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos\alpha=\frac{6^2+x^2-(3\sqrt{3})^2}{2\times6\times x}=\frac{x^2+9}{12x}$

$\triangle\mathrm{ADC}$에서 코사인법칙의 변형에 의하여

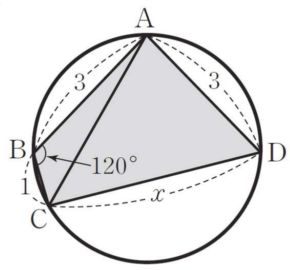
$\cos\alpha=\frac{4^2+x^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times4\times x}=\frac{x^2+4}{8x}$

이때, $\frac{x^2+9}{12x}=\frac{x^2+4}{8x}$에서 $x^2-6=0$

$\therefore\ x=\sqrt{6}$ $(\because\ x>0)$

93) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$를 긋고 $\overline{CD}=x$ 라 하면



$\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2$

$=1^2+3^2-2\times1\times3\times cos\,120°$

$=1+9-2\times1\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=13$

이때, 사각형 $ABCD$가 원에 내접하므로

$\angle B+\angle D=180°$, $120°+\angle D=180°$

$\therefore\ \angle D=60°$

또한, $\triangle ACD$에서 코사인법칙에 의하여

$13=3^2+x^2-2\times3\times x\times cos\,60°$

$13=9+x^2-2\times3\times x\times\frac{1}{2}$

$x^2-3x-4=0$, $(x+1)(x-4)=0$

$\therefore\ x=4\ (\because\ x>0)$

$\therefore\ \square ABCD$

$=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\times3\times1\times sin\,120°+\frac{1}{2}\times3\times4\times sin\,60°$

$=\frac{1}{2}\times3\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{4}+3\sqrt{3}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

94) ④

원 O의 반지름의 길이를 R라 하면

네 삼각형 ABC, ABD, ABE, ABF에서

사인법칙의 변형에 의하여

$\sin(\angle CAB)=\frac{\overline{BC}}{2R}=\frac{1}{5}$

$\sin(\angle DAB)=\frac{\overline{BD}}{2R}=\frac{2\overline{BC}}{2R}=2\times\frac{\overline{BC}}{2R}$

$=2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

$\sin(\angle EAB)=\frac{\overline{BE}}{2R}=\frac{3\overline{BC}}{2R}=3\times\frac{\overline{BC}}{2R}$

$=3\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

$\sin(\angle FAB)=\frac{\overline{BF}}{2R}=\frac{4\overline{BC}}{2R}=4\times\frac{\overline{BC}}{2R}$

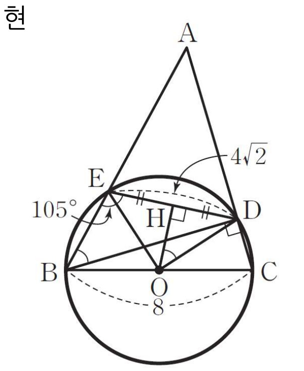
$=4\times\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

$\therefore\ \sin(\angle DAB)+\sin(\angle EAB)+\sin(\angle FAB)$

$=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$

95) $4\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 현 DE에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{HD}=2\sqrt{2}$, $\overline{OD}=4$이므로

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OD}^2-\overline{HD}^2}$

$=\sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$

$\triangle ODH$는

$\angle OHD=90°$인 직각이등변삼각형이므로

$\angle HOD=45°$

같은 방법으로 $\angle HOE=45°$

즉, $\angle EOD=90°$이고,

한 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이므로

$\angle EBD=\frac{1}{2}\angle EOD=\frac{1}{2}\times90°=45°$

$\triangle BDE$에서

$\angle EDB=180°-(105°+45°)=30°$

$\therefore\ \angle ADE=\angle ADB-\angle EDB=90°-30°=60°$

또한, $\angle DEB=105°$이므로

$\angle AED=180°-\angle DEB=180°-105°=75°$

$\triangle AED$에서 $\angle EAD=180°-(60°+75°)=45°$

따라서 $\triangle AED$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AE}}{\sin 60°}=\frac{\overline{ED}}{\sin 45°}$에서 $\frac{\overline{AE}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\therefore\ \overline{AE}=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

96) 23

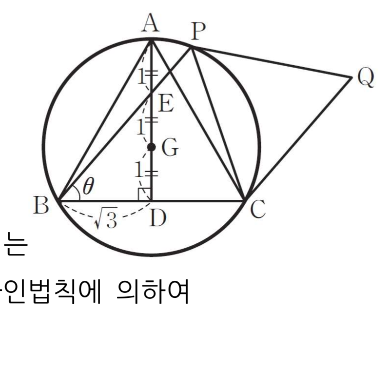
정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$이고, 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면

$\overline{BD}=\sqrt{3}$, $\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{3}=3$

무게중심 G는 중선 AD를 2 : 1로 내분하므로 선분 AG의 중점을 E라 하면

$\overline{AE}=\overline{EG}=\overline{GD}=1$

직각삼각형 EBD에서



$\overline{BD}=\sqrt{3}$, $\overline{ED}=2$이므로

$\overline{BE}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{7}$

또한, $\angle PBC=\theta$라 하면

$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{7}}$

이때, 주어진 원의 반지름의 길이는

$\overline{AG}=2$이므로 삼각형 PBC에서 사인법칙에 의하여

$2\times 2=\dfrac{\overline{\mathrm{PC}}}{\sin\theta}$에서 $4=\dfrac{\overline{\mathrm{PC}}}{\dfrac{2}{\sqrt{7}}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PC}}=\dfrac{8}{\sqrt{7}}$

따라서 정삼각형 PCQ의 넓이는

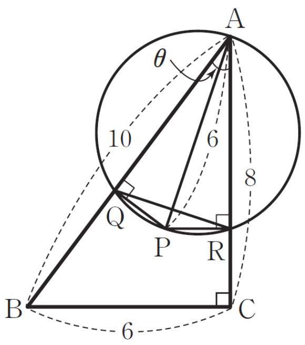
$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\overline{\mathrm{PC}}^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\dfrac{8}{\sqrt{7}}\right)^2=\dfrac{16}{7}\sqrt{3}$

이므로 $p=7,\ q=16$

$\therefore\ p+q=23$

97) ⑤

오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AP}}$가 원의 지름이고 사각형 AQPR가 내접하는 원을 그리자.



이때, 이 원의 반지름의 길이가 3이므로 $\angle\mathrm{QAR}=\theta$라 하면

$\triangle\mathrm{AQR}$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{QR}}}{\sin\theta}=6$

또한, $\triangle\mathrm{ABC}$는 직각삼각형이므로

$\sin\theta=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

따라서 $\dfrac{\overline{\mathrm{QR}}}{\sin\theta}=6$에서 $\dfrac{\overline{\mathrm{QR}}}{\dfrac{3}{5}}=6$

$\therefore\ \overline{\mathrm{QR}}=6\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{18}{5}$

98) $30\,\mathrm{m}$

세 지점에서 올려다 본 건물의 꼭대기를 D라 하고, 건물의 높이를 $x\,\mathrm{m}$라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{x}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}x\,(\mathrm{m})$

$\overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{x}{\sin 45^\circ}=\sqrt{2}\,x\,(\mathrm{m})$

$\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{x}{\sin 30^\circ}=2x\,(\mathrm{m})$

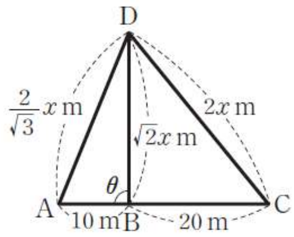
이때, 오른쪽 그림과 같이

$\angle\mathrm{ABD}=\theta$ 라 하면

$\triangle\mathrm{ABD}$, $\triangle\mathrm{BCD}$에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$$\cos\theta=\dfrac{10^2+(\sqrt{2}\,x)^2-\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}x\right)^2}{2\times 10\times\sqrt{2}\,x}$$

$$=\dfrac{100+\dfrac{2}{3}x^2}{20\sqrt{2}\,x}$$



$\cos(\pi-\theta)=\dfrac{20^2+(\sqrt{2}\,x)^2-(2x)^2}{2\times 20\times\sqrt{2}\,x}=\dfrac{400-2x^2}{40\sqrt{2}\,x}$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$이므로

$\dfrac{100+\dfrac{2}{3}x^2}{20\sqrt{2}\,x}=-\dfrac{400-2x^2}{40\sqrt{2}\,x}$

$200+\dfrac{4}{3}x^2=-400+2x^2,\ \dfrac{2}{3}x^2=600$

$x^2=900\quad\therefore\ x=30\ (\because\ x>0)$

따라서 이 건물의 높이는 $30\,\mathrm{m}$이다.

99) ⑤

ㄱ. $a=5$이면 $\triangle\mathrm{ABC}$는 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{BC}}$는 원의 지름이다.

$\therefore\ R=\dfrac{5}{2}$ (참)

ㄴ. $\triangle\mathrm{ABC}$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin A}=2R,\ a=2R\sin A$

$\therefore\ a=2\times 4\times sin A=8\sin A$ (참)

ㄷ. $1<a\le\sqrt{13}$의 각 변을 제곱하면

$1<a^2\le 13$이고

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos A=\dfrac{3^2+4^2-a^2}{2\times 3\times 4}=\dfrac{25-a^2}{24}$

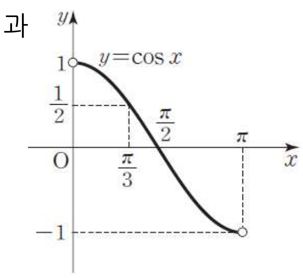
이므로 $-13\le -a^2<-1,\ 12\le 25-a^2<24$

$\dfrac{1}{2}\le\dfrac{25-a^2}{24}<1\ \ \therefore\ \dfrac{1}{2}\le\cos A<1$

이때, $\angle\mathrm{A}$는 삼각형의 한 내각이므로

$0<\angle\mathrm{A}<\pi$이고, $0<x<\pi$에서

함수 $y=\cos x$의 그래프는 다음 그림과 같으므로



$0<\angle\mathrm{A}\le\dfrac{\pi}{3}$

따라서 $\angle\mathrm{A}$의 최댓값은 $\dfrac{\pi}{3}$이다. (참)

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

100) $\dfrac{\sqrt{3}}{7}$

$\overline{\mathrm{BD}}=\mathrm{a}$라 하면 $\triangle\mathrm{ODB}$가 직각삼각형이고

$\angle\mathrm{BOD}=\dfrac{\pi}{6}$이므로 $\overline{\mathrm{OB}}=2\mathrm{a}$, $\overline{\mathrm{OD}}=\sqrt{3}\,\mathrm{a}$이다.

이때, $\angle\mathrm{ABD}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$, $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{OB}}=2\times2a=4a$이므로

$\triangle\mathrm{ADB}$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}}^2=(4a)^2+a^2-2\times4a\times a\times cos\,\dfrac{\pi}{3}$

$=16a^2+a^2-2\times4a\times a\times12=13a^2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{13}\,\mathrm{a}$ ($\because\ \overline{\mathrm{AD}}>0$)

또한, $\triangle\mathrm{ADB}$에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{(4a)^2+(\sqrt{13}a)^2-a^2}{2\times4a\times\sqrt{13}\,a}=\dfrac{16a^2+13a^2-a^2}{8\sqrt{13}\,a^2}$

$=\dfrac{7}{2\sqrt{13}}$

$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{7}{2\sqrt{13}}\right)^2}$

$=\sqrt{1-\dfrac{49}{52}}=\sqrt{\dfrac{3}{52}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$

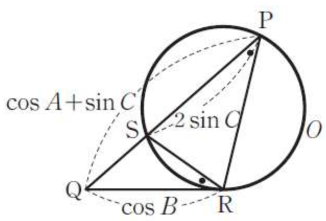
$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}}{\dfrac{7}{2\sqrt{13}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{7}$

101) ④

$\overline{\mathrm{PQ}}=\cos\mathrm{A}+\sin\mathrm{C}$, $\overline{\mathrm{PS}}=2\sin\mathrm{C}$이므로

$\overline{\mathrm{QS}}=\cos\mathrm{A}-\sin\mathrm{C}$

두 삼각형 PQR, RQS에서



$\angle\mathrm{QPR}=\angle\mathrm{QRS}$, $\angle\mathrm{PQR}=\angle\mathrm{RQS}$ (공통)

이므로

$\triangle\mathrm{PQR}\backsim\triangle\mathrm{RQS}$ (AA 닮음)

즉, $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{RQ}}=\overline{\mathrm{QR}}:\overline{\mathrm{QS}}$에서

$\overline{\mathrm{QR}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QS}}$이므로

$\cos^2B=(\cos A+\sin C)\times(\cos A-\sin C)$

$\cos^2B=\cos^2A-\sin^2C$

$1-\sin^2B=(1-\sin^2A)-\sin^2C$

$\sin^2A-\sin^2B+\sin^2C=0$

이때, $\triangle\mathrm{ABC}$에서 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙의 변형에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$이므로

$\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2-\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2+\left(\dfrac{c}{2R}\right)^2=0$

$\dfrac{a^2-b^2+c^2}{4R^2}=0$

$\therefore\ b^2=a^2+c^2$ ($\because\ R\neq0$)

따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$는 $\angle\mathrm{B}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

102) $\dfrac{25}{4}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\mathrm{a}$, $\overline{\mathrm{AB}}=\mathrm{c}$, $\overline{\mathrm{AC}}=\mathrm{b}$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙의 변형에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

조건 (나)에서 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}\cos\mathrm{C}-\overline{\mathrm{AB}}\cos\mathrm{A}$이므로

$b=a\times\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-c\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2b}$

$2b^2=a^2+b^2-c^2-(b^2+c^2-a^2)$

$2b^2=2a^2-2c^2\quad\therefore\ a^2=b^2+c^2$

즉, $\triangle\mathrm{ABC}$는 $\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다. ……㉠

또한, 조건 (다)에서

$\sin A=2\sin\dfrac{A-B+C}{2}\sin C$이고,

$A+B+C=\pi$에서 $A-B+C=\pi-2B$

$\therefore\ \dfrac{A-B+C}{2}=\dfrac{\pi}{2}-B$

즉, $\sin A=2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B\right)\sin C$에서

$\sin A=2\cos B\sin C$이므로

$\dfrac{a}{2R}=2\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\times\dfrac{c}{2R}$

$a=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{a}$ ($\because\ R\neq0$)

$a^2=a^2+c^2-b^2$, $b^2=c^2\quad\therefore\ b=c$

즉, $\triangle\mathrm{ABC}$는 $b=c$인 이등변삼각형이다. ……㉡

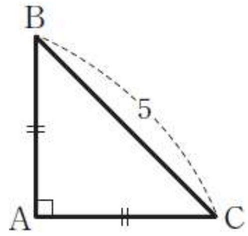
㉠, ㉡에서 삼각형 ABC는 $\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$인

직각이등변삼각형이고, 조건 (가)에서

$\overline{BC}=5$이므로 $\overline{AB}=\overline{AC}=\frac{5}{\sqrt{2}}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{25}{4}$



103) $\frac{2}{3}$

$\overline{AP}=a$, $\overline{AQ}=b$라 하면

직각이등변삼각형 ABP에서 피타고라스 정리에 의하여

$\sqrt{a^2+a^2}=6$, $\sqrt{2a^2}=6$ $\therefore$ $a=3\sqrt{2}$ ($\because$ $a>0$)

또한, 직각이등변삼각형 ACQ에서

피타고라스 정리에 의하여

$\sqrt{b^2+b^2}=4$, $\sqrt{2b^2}=4$ $\therefore$ $b=2\sqrt{2}$($\because$ $b>0$)

이때, $\angle PAB=\angle QAC=45°$이므로

$\angle PAQ=90°+\angle BAC$이고,

삼각형 APQ의 넓이가 4이므로

$\triangle APQ=\frac{1}{2}\times a\times b\times sin(\angle PAQ)$

$=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\sin(90°+\angle BAC)$

$=6\cos(\angle BAC)=4$

$\therefore$ $\cos(\angle BAC)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

104) 103

$\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CA}=5$이므로

삼각형 ABC에서 코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos A=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AC}}$

$=\frac{6^2+5^2-4^2}{2\times6\times5}=\frac{3}{4}$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ($\because$ $0<A<\pi$)

$\therefore$ $\triangle ABC=12\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$

$=\frac{1}{2}\times6\times5\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$

또한, $\overline{PF}=x$라 하면 $\overline{PD}=\sqrt{7}$, $\overline{PE}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ 이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\left(6x+4\sqrt{7}+\frac{5\sqrt{7}}{2}\right)$

$=3x+\frac{13\sqrt{7}}{4}$

즉, $\frac{15\sqrt{7}}{4}=3x+\frac{13\sqrt{7}}{4}$에서

$3x=\frac{2\sqrt{7}}{4}$ $\therefore$ $x=\frac{\sqrt{7}}{6}$

이때, □AFPE에서 $\angle FPE=\pi-A$이므로

$\triangle EFP=\frac{1}{2}\times\overline{PF}\times\overline{PE}\times\sin(\angle FPE)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{6}\times\frac{\sqrt{7}}{2}\times\sin(\pi-A)$

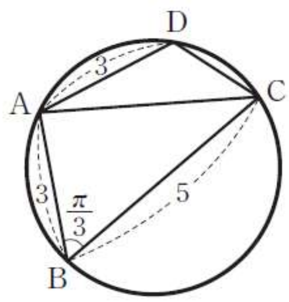
$=\frac{7}{24}\times\sin A$

$=\frac{7}{24}\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{7\sqrt{7}}{96}$

따라서 $p=96$, $q=7$이므로

$p+q=103$

105) ④



사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$\angle ADC=\pi-\angle ABC=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=3^2+5^2-2\times3\times5\times cos\frac{\pi}{3}$

$=34-30\times\frac{1}{2}=19$ ……㉠

또한, 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=3^2+\overline{DC}^2-2\times3\times\overline{DC}\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$=9+\overline{DC}^2-6\times\overline{DC}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=9+\overline{DC}^2+3\overline{DC}$ ……㉡

㉠=㉡에서 $9+\overline{DC}^2+3\overline{DC}=19$이므로

$\overline{DC}^2+3\overline{DC}-10=0$

$(\overline{DC}+5)(\overline{DC}-2)=0$

$\therefore$ $\overline{DC}=2$ ($\because$ $\overline{DC}>0$)

이때,

□ABCD

$= \triangle \mathrm{ABC} + \triangle \mathrm{ACD}$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \sin \frac{2}{3}\pi$

$= \frac{15\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{4}$ ……ⓒ

또한, $\angle \mathrm{DAB} = \theta$라 하면 $\angle \mathrm{DCB} = \pi - \theta$이므로

$\square \mathrm{ABCD}$

$= \triangle \mathrm{DAB} + \triangle \mathrm{DBC}$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin\theta + \frac{1}{2} \times 2 \times 5 \times \sin(\pi - \theta)$

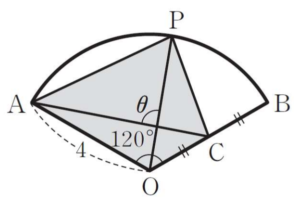
$= \frac{9}{2}\sin\theta + 5\sin\theta$

$= \frac{19}{2}\sin\theta$ ……ⓓ

ⓒ=ⓓ에서 $\frac{19}{2}\sin\theta = \frac{21\sqrt{3}}{4}$

$\therefore \sin(\angle \mathrm{DAB}) = \sin\theta = \frac{21\sqrt{3}}{38}$

106) $4\sqrt{7}$



$\overline{\mathrm{OB}}$의 중점이 C이므로

$\overline{\mathrm{OC}} = \overline{\mathrm{BC}} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

삼각형 AOC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \times 4 \times 2 \times \cos 120°$

$= 16 + 4 - 2 \times 4 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 28$

$\therefore \overline{\mathrm{AC}} = 2\sqrt{7}$ ($\because \overline{\mathrm{AC}} > 0$)

이때, 사각형 AOCP의 두 대각선 AC, OP가 이루는 각 중 작은 각의 크기를 $\theta\left(0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$,

사각형 AOCP의 넓이를 S라 하면

$S = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AC}} \times \overline{\mathrm{OP}} \times \sin\theta$

$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} \times 4 \times \sin\theta$

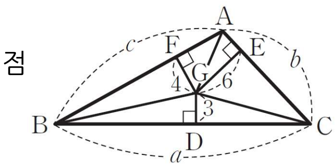
$= 4\sqrt{7}\sin\theta$

그런데 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$에서 $0 < \sin\theta \leq 1$이므로

$0 < S \leq 4\sqrt{7}$ (단, 등호는 $\theta = 90°$일 때 성립)

따라서 구하는 사각형 AOCP의 넓이의 최댓값은 $4\sqrt{7}$이다.

107) 3



오른쪽 그림과 같이

$\overline{\mathrm{BC}} = a$, $\overline{\mathrm{CA}} = b$, $\overline{\mathrm{AB}} = c$라 하면 점 G는 $\triangle \mathrm{ABC}$의 무게중심이므로

$\triangle \mathrm{ABG} = \triangle \mathrm{BCG} = \triangle \mathrm{CAG}$

즉, $\frac{1}{2} \times 4 \times c = \frac{1}{2} \times 3 \times a = \frac{1}{2} \times 6 \times b$에서

$2c = \frac{3}{2}a = 3b$

이때, $\frac{3}{2}a = 3b$에서 $a = 2b$, $2c = 3b$에서 $c = \frac{3}{2}b$이므로

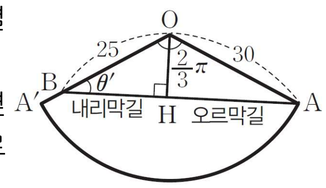
$a : b : c = 2b : b : \frac{3}{2}b = 4 : 2 : 3$

따라서 $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 4 : 2 : 3$이므로

$\sin A = 4k$, $\sin B = 2k$, $\sin C = 3k$ (k는 양수)라 하면

$\frac{\sin A \sin C}{\sin^2 B} = \frac{4k \times 3k}{(2k)^2} = 3$

108) 291



주어진 직원뿔 모양의 산의 옆면을 펼치면 오른쪽 그림과 같다.

이때, 밑면인 원의 둘레의 길이는 옆면인 부채꼴의 호의 길이와 같으므로

부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$2\pi \times 10 = 30\theta$ $\therefore \theta = \frac{2}{3}\pi$

$\triangle \mathrm{OAB}$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2 = 30^2 + 25^2 - 2 \times 30 \times 25 \times \cos \frac{2}{3}\pi$

$= 900 + 625 - 2 \times 30 \times 25 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 2275$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}} = 5\sqrt{91}$ ($\because \overline{\mathrm{AB}} > 0$)

또한, 점 O에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle \mathrm{OAB} = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{91} \times \overline{\mathrm{OH}} = \frac{1}{2} \times 30 \times 25 \times \sin \frac{2}{3}\pi$

$\sqrt{91} \times \overline{\mathrm{OH}} = 150 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{OH}} = \frac{75\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$

직각삼각형 OBH에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{BH}}^2 = \overline{\mathrm{OB}}^2 - \overline{\mathrm{OH}}^2 = 625 - \frac{5625 \times 3}{91}$

$= 625\left(1 - \frac{27}{91}\right) = \frac{625 \times 64}{91}$

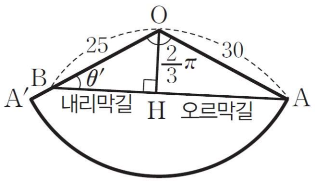
$\therefore \overline{\mathrm{BH}} = \frac{200}{\sqrt{91}}$ ($\because \overline{\mathrm{BH}} > 0$)

따라서 $\frac{200}{\sqrt{91}} = \frac{a}{\sqrt{b}}$이므로 $a = 200$, $b = 91$

$\therefore a + b = 291$

다른풀이

주어진 직원뿔 모양의 산의 옆면을 펼치면 오른쪽 그림과 같다.



이때, 밑면인 원의 둘레의 길이는 옆면인 부채꼴의 호의 길이와 같으므로 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$2\pi\times 10=30\theta \qquad \therefore\ \theta=\frac{2}{3}\pi$

$\triangle$OAB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2=25^2+30^2-2\times25\times30\times cos\frac{2}{3}\pi$

$=1525-1500\times\left(-\frac{1}{2}\right)=2275$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=5\sqrt{91}\ \ (\because\ \overline{\mathrm{AB}}>0)$

또한, $\angle\mathrm{OBA}=\theta'$이라 하면

코사인법칙의 변형에 의하여

$\cos\theta'=\frac{25^2+(5\sqrt{91})^2-30^2}{2\times25\times5\sqrt{91}}$

$=\frac{2000}{250\sqrt{91}}=\frac{8}{\sqrt{91}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BH}}=25\cos\theta'=25\times\frac{8}{\sqrt{91}}=\frac{200}{\sqrt{91}}$

따라서 $a=200$, $b=91$이므로

$a+b=291$

109) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$=3^2+1^2-2\times3\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=13$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{13}\ \ (\because\ \overline{\mathrm{BC}}>0)$

삼각형 ABC의 외접원 O의

반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$2R=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle\mathrm{BAC})}=\frac{\sqrt{13}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DE}}=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$

선분 ED가 원의 지름이므로 $\angle\mathrm{EAD}=\frac{\pi}{2}$이고,

선분 AD가 $\angle$A를 이등분하므로

$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}=\frac{\pi}{3}$

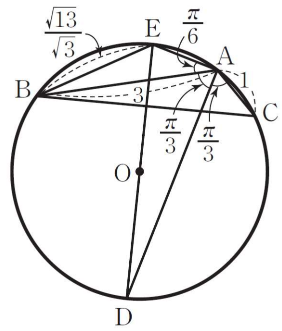
$\therefore\ \angle\mathrm{EAB}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

삼각형 AEB가 원 O에 내접하므로

사인법칙의 변형에 의하여

$\overline{\mathrm{BE}}=2R\sin(\angle\mathrm{EAB})=2\mathrm{R}\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$



따라서 삼각형 AEB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BE}}^2=\overline{\mathrm{AE}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2-2\times\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\cos\frac{\pi}{6}$

$\left(\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\right)^2=\overline{\mathrm{AE}}^2+3^2-2\times\overline{\mathrm{AE}}\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{\mathrm{AE}}^2-3\sqrt{3}\,\overline{\mathrm{AE}}+\frac{14}{3}=0$

$3\overline{\mathrm{AE}}^2-9\sqrt{3}\,\overline{\mathrm{AE}}+14=0$

$(\sqrt{3}\,\overline{\mathrm{AE}}-2)(\sqrt{3}\,\overline{\mathrm{AE}}-7)=0$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AE}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$ 또는 $\overline{\mathrm{AE}}=\frac{7}{\sqrt{3}}$ ⋯⋯㉠

그런데 $\triangle$AED는 $\overline{\mathrm{DE}}=\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$인 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\right)^2-\overline{\mathrm{AE}}^2}$

㉠에서

$\overline{\mathrm{AE}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$이면 $\overline{\mathrm{AD}}=4$, $\overline{\mathrm{AE}}=\frac{7}{\sqrt{3}}$이면 $\overline{\mathrm{AD}}=1$

이때, $\overline{\mathrm{AE}}<\overline{\mathrm{AD}}$이므로

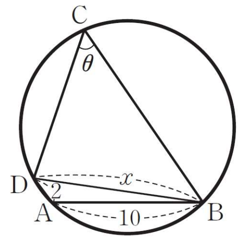
$\overline{\mathrm{AE}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

110) 50

$\angle\mathrm{BCD}=\theta\ \ (0<\theta<\pi)$라 하면 $\cos\theta=\frac{3}{5}$이고,

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$\angle\mathrm{BAD}=\pi-\theta$



선분 BD의 길이를 x라 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=2^2+10^2$

$\quad-2\times2\times10\times cos(\pi-\theta)$

$=104+40\cos\theta$

$=104+40\times\frac{3}{5}$

$=128$

$\therefore\ x=\sqrt{128}=8\sqrt{2}\ \ (\because\ x>0)$ $\qquad\therefore\ \overline{\mathrm{BD}}=8\sqrt{2}$

이때, $\cos\theta=\frac{3}{5}$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$

삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\theta}=2\mathrm{R}$ 에서 $2R=\frac{8\sqrt{2}}{\frac{4}{5}}$

$\therefore\ R=5\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi\times(5\sqrt{2})^2=50\pi$이므로

$a=50$

111) ④

$\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{CA}}=b$, $\overline{\mathrm{AB}}=c$라 하고

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times a\times\overline{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\times \mathrm{b}\times\overline{\mathrm{BE}}=\frac{1}{2}\times \mathrm{c}\times\overline{\mathrm{CF}}$

에서

$a=\frac{2\mathrm{S}}{\overline{\mathrm{AD}}}$, $b=\frac{2\mathrm{S}}{\overline{\mathrm{BE}}}$, $c=\frac{2\mathrm{S}}{\overline{\mathrm{CF}}}$

$\therefore\ a:b:c=\frac{2\mathrm{S}}{\overline{\mathrm{AD}}}:\frac{2\mathrm{S}}{\overline{\mathrm{BE}}}:\frac{2\mathrm{S}}{\overline{\mathrm{CF}}}=\frac{1}{\overline{\mathrm{AD}}}:\frac{1}{\overline{\mathrm{BE}}}:\frac{1}{\overline{\mathrm{CF}}}$

$=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$ ($\because$ $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{CF}}=2:3:4$)

$=6:4:3$

즉, $a=6k$, $b=4k$, $c=3k$ (k는 양수)라 하면

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

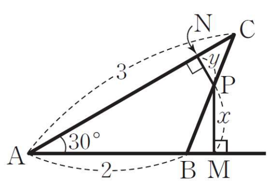
$=\frac{(6k)^2+(4k)^2-(3k)^2}{2\times6k\times4k}$

$=\frac{43}{48}$

112) 28

$\overline{\mathrm{PM}}=\mathrm{x}$, $\overline{\mathrm{PN}}=\mathrm{y}$라 하면

$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ABP}+\triangle\mathrm{APC}$에서



$\frac{1}{2}\times2\times3\times sin30°$

$=\frac{1}{2}\times2\times x+\frac{1}{2}\times3\times y$

$\frac{3}{2}=x+\frac{3}{2}y$ $\qquad\therefore\ 2x+3y=3$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

한편, $\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{PM}}}+\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{PN}}}=\frac{2}{\mathrm{x}}+\frac{3}{\mathrm{y}}$이고,

$3\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)=(2x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)$ ($\because$ ㉠)

$=13+\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}$

$=13+6\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

이때, $\frac{x}{y}>0$, $\frac{y}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$3\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)=13+6\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

$\geq 13+6\times2\sqrt{\frac{x}{y}\times\frac{y}{x}}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

$=13+12=25$

즉, $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\geq\frac{25}{3}$이므로 $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}$, 즉 $\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{PM}}}+\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{PN}}}$의

최솟값은 $\frac{25}{3}$이다.

따라서 $p=3$, $q=25$이므로 $p+q=28$

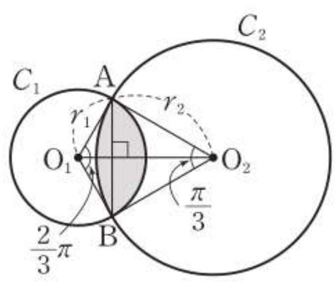
113) ③

114) $30\pi-36\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 사인법칙 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$가 성립하고, 넓이 S는 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$이다.

두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하고 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면 호 AB에 대한 원주각

의 크기가 각각 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$이므로 중심각의 크기는 각각 $\frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{3}$이다.



따라서

$\angle O_1BA = \angle O_1AB = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2}{3}\pi\right)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

$\angle O_2BA = \angle O_2AB = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$

이므로 삼각형 AO_1B에 사인법칙을 적용하면

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle AO_1B)} = \frac{r_1}{\sin(\angle O_1BA)}$

즉, $\frac{6\sqrt{3}}{\sin\frac{2}{3}\pi} = \frac{r_1}{\sin\frac{\pi}{6}}$에서

$r_1 = \frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{1}{2} = 6$

이고 삼각형 ABO_2는 정삼각형이므로

$r_2 = \overline{AB} = 6\sqrt{3}$

따라서 색칠된 부분의 넓이는

$\{(\text{부채꼴 } AO_1B\text{의 넓이}) - (\text{삼각형 } AO_1B\text{의 넓이})\}$

$+ \{(\text{부채꼴 } AO_2B\text{의 넓이}) - (\text{삼각형 } AO_2B\text{의 넓이})\}$

$= \frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\times 6^2\times\sin\frac{2}{3}\pi$

$+ \frac{1}{2}\times(6\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\times(6\sqrt{3})^2\times\sin\frac{\pi}{3}$

$= 12\pi - 9\sqrt{3} + 18\pi - 27\sqrt{3}$

$= 30\pi - 36\sqrt{3}$

115) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

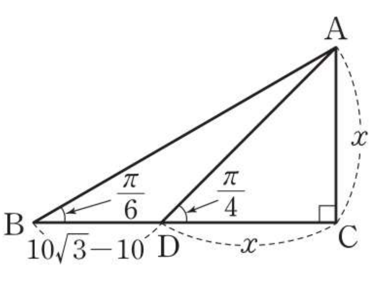
삼각형 ABC에서 $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$이 성립한다.

$\angle CAD = \pi - \left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$이므로 삼각형 ADC는

$\overline{AC} = \overline{DC}$인 직각이등변삼각형이다.

따라서 $\overline{AC} = \overline{DC} = x$라 하면 $\overline{AD} = \sqrt{2}x$

삼각형 ABC에서



$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}, \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$이므로

$\overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x$

$\overline{BC} = \frac{\overline{AC}}{\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}x$

이때 $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC}$이므로

$\sqrt{3}x = (10\sqrt{3}-10) + x$

$(\sqrt{3}-1)x = 10(\sqrt{3}-1)$

$x = 10$

따라서 삼각형 ABD에서

$\overline{AB} = 2x = 20, \overline{BD} = 10\sqrt{3}-10$

$\overline{AD} = \sqrt{2}x = 10\sqrt{2}$

이므로

$\cos(\angle BAD)$

$= \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AD}}$

$= \frac{20^2 + (10\sqrt{2})^2 - (10\sqrt{3}-10)^2}{2\times 20\times 10\sqrt{2}}$

$= \frac{400+200-(300-200\sqrt{3}+100)}{400\sqrt{2}}$

$= \frac{200+200\sqrt{3}}{400\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

116) 4

삼각형 ABC에서 코사인법칙

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$가 성립한다.

2. 이웃하는 두 변의 길이가 a, b이고 그 끼인 각의 크기가 h인 평행사변형의 넓이 S는 $S = ab\sin\theta$이다.

3. 두 대각선의 길이가 a, b이고 두 대각선이 이루는 각의 크기가 h인 사각형의 넓이 S는 $S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$이다.

삼각형 ABC에 코사인법칙을 적용하면

$\overline{AC}^2 = 1^2 + 2^2 - 2\times 1\times 2\times cos\frac{\pi}{3}$

$= 1+4-2 = 3$

이므로 $\overline{AC} = \sqrt{3}\ (\overline{AC} > 0)$

삼각형 BCD에서

$\overline{CD} = \overline{AB} = 1, \angle BCD = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2 = 2^2 + 1^2 - 2\times 2\times 1\times cos\frac{2}{3}\pi$

$=4+1+2=7$
$\overline{BD}=\sqrt{7}\ (\overline{BD}>0)$
따라서 평행사변형 $ABCD$의 넓이는
$\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\theta$
$1\times2\times sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}\times\sin\theta$
$2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times7\times sin\theta$
$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{7}}$
이므로 $\sin^2\theta=\frac{4}{7}$

117) ①
$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}=3:4$ 이므로 $\overline{\mathrm{AD}}$는 $\angle\mathrm{A}$의 이등분선이 된다.
$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ADC}$
$\frac{1}{2}\times15\times20\times sin120^\circ=\frac{1}{2}\times15\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin60^\circ$
$+\frac{1}{2}\times20\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin60^\circ$ $\quad\therefore\ \overline{\mathrm{AD}}=\frac{60}{7}$

118) 26

119) ②

사인법칙에 따라 $\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle\mathrm{BCD})}=2\mathrm{R}$이므로
$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}}=4\sqrt{7},\ \overline{\mathrm{BD}}=8$
$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R,\ \overline{\mathrm{BC}}=4\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{21}$
코사인 2법칙에 따라
$\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2-2\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\cos(\angle\mathrm{BCD})=\overline{\mathrm{BD}}^2$
$84+x^2-4\sqrt{21}x\times\frac{\sqrt{21}}{7}=64,\ x^2-12x+20=0$
$x=2$ 또는 10에서 삼각형 BCD의 세변의 길이이므로
$x=\overline{\mathrm{CD}}=2$
$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{CD}}=10$

120) ②

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_{10}-a_1=9d$ 이므로
$d=\frac{a_{10}-a_1}{9}=\frac{-12-6}{9}=-2$
$\therefore\ a_n=6-2(n-1)=8-2n$
$a_n\geq0$ 이려면
$8-2n\geq0\quad\therefore\ n\leq4$
따라서 $n\leq4$ 일 때 $a_n\geq0$이고
$n\geq5$ 일 때 $a_n<0$이다.
$\therefore\ |a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$
$=(a_1+a_2+a_3+a_4)-(a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{20})$
$=(6+4+2+0)-\{(-2)+(-4)+(-6)+\cdots+(-32)\}$
$=(6+4+2+0)+(2+4+6+\cdots+32)$
$=\frac{6+0}{2}\times4+\frac{2+32}{2}\times16$
$=12+272=284$

121) 25
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=k,\ \alpha\beta=125$ …… ㉠
$\beta-\alpha$는 α와 β의 등비중항이므로
$(\beta-\alpha)^2=\alpha\beta$
$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\alpha\beta$
$(\alpha+\beta)^2=5\alpha\beta$
위의 식에 ㉠을 대입하면
$k^2=5\times125=625$
$\therefore\ k=25\ (\because\ k>0)$

122) ①

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9$
$=\{2^1+(-1)^1\}+\{2^2+(-1)^2\}+\cdots\{2^9+(-1)^9\}$
$=(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^9)$
$\quad+\{(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^9\}$
$=\dfrac{2(2^9-1)}{2-1}+\{(-1)+1+(-1)+\cdots+(-1)\}$
$=(2^{10}-2)+(-1)$
$=2^{10}-3$

123) ③

ㄱ. $a_n=2^{1-n}$의 양변에 상용로그를 취하면
$\log a_n=\log 2^{1-n}=(1-n)\log 2$
이므로 모든 자연수 n에 대하여
$\log a_{n+1}-\log a_n=-n\log 2-(1-n)\log 2=-\log 2$
따라서 수열 $\{\log a_n\}$은 첫째항이 0이고 공차가 $-\log 2$인 등차수열이다. (참)
ㄴ. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로
$$S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2-2^{1-n}$$
$\therefore\ S_n+a_n=(2-2^{1-n})+2^{1-n}=2$
따라서 수열 $\{S_n+a_n\}$은 모든 항이 2이므로 공비가 1인 등비수열이다. (참)
ㄷ. ㄴ에서 $S_n=2-a_n=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$
$a_n=2^{1-n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$에서
$\dfrac{1}{2}a_{n+1}+2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}+2$
$\therefore\ S_n\neq\dfrac{1}{2}a_{n+1}+2$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

참고
Ⅲ. 수열 단원에서는 학습 위계상 등비수열을 $a_n=2^{1-n}$과 같이 표현할 수 없었지만, 지수와 로그 단원에서는 지수의 범위를 정수로 확장하면 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항이
$$a_n=a_1r^{n-1}$$
일 때, 첫째항을
$$a_1\times r^{1-1}=a_1\times r^0$$
으로 표현하는 것이 가능하다.

124) ③

ㄱ. $a_n=n$이면 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$
이때 $S_nT_n=n^2(n^2-1)$에서
$T_n=n^2(n^2-1)\times\dfrac{1}{S_n}$
$=n^2(n+1)(n-1)\times\dfrac{2}{n(n+1)}$
$=2n(n-1)$
따라서 등차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=T_1=0$, 공차가 T_n의 이차항의 계수의 2배인 4이므로
$b_n=0+4(n-1)=4n-4$ (참)
ㄴ. S_n의 이차항의 계수가 $\dfrac{d_1}{2}$, T_n의 이차항의 계수가 $\dfrac{d_2}{2}$이므로 S_nT_n의 사차항의 계수는 $\dfrac{d_1d_2}{4}$
따라서 $\dfrac{d_1d_2}{4}=1$이므로
$d_1d_2=4$ (참)
ㄷ. n에 대한 두 이차식 S_n과 T_n은 모두 등차수열의 합이므로 상수항은 0이다.
따라서 S_n과 T_n은 각각 n을 인수로 가지며
$S_1=a_1\neq 0$
이므로 S_n은 $n-1$을 인수로 갖지 않는다. 즉,
$S_n=\dfrac{d_1}{2}n(n+1)$, $T_n=\dfrac{d_2}{2}n(n-1)$
이고 $d_1\neq 1$이면 $a_n\neq n$이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

Tip 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n
$S_n=pn^2+qn+r$ (p, q, r는 상수) ……㉠
즉, S_n이 n에 대한 이차식일 때
$r=0$이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등차수열이며
$r\neq 0$이면 $n\geq 2$일 때
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=pn^2+qn+r-\{p(n-1)^2+q(n-1)+r\}$
$=2pn-p+q$ ……㉡
이때 ㉠에서
$a_1=S_1=p+q+r$
이고 이것은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 다르므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항을 제외하고 제2항부터 등차수열을 이룬다.

125) 16

수열 $\{S_{2n}\}$은 공차가 2인 등차수열이고, 수열 $\{S_{2n-1}\}$은
공차가 -3인 등차수열이므로
$a_8=S_8-S_7$
$=(S_2+3\times2)-\{S_1+3\times(-3)\}$
$=(S_2-S_1)+15$
$=a_2+15=1+15=16$

참고 수열 $\{S_{2n-1}\}$은 공차가 -3인 등차수열이므로
$S_{2n-1}=S_1+(n-1)\times(-3)$
$=a_1-3n+3$
수열 $\{S_{2n}\}$은 공차가 2인 등차수열이므로
$S_{2n}=S_2+(n-1)\times2$
$=(a_1+a_2)+2n-2$
$=a_1+2n-1$ $(\because\ a_2=1)$
$n\geq2$일 때
$a_{2n-1}=S_{2n-1}-S_{2n-2}$
$=(a_1-3n+3)-\{a_1+2(n-1)-1\}$
$=-5n+6$
$a_{2n}=S_{2n}-S_{2n-1}$
$=(a_1+2n-1)-(a_1-3n+3)$
$=5n-4$

126) 25

b는 3과 1의 최소공배수이고, c는 1과 4의 최소공배수이므로
$b=3$, $c=4$
e와 12의 최대공약수가 3이므로 4와 서로소인 자연수 s에 대하여
$e=3s$ ……㉠
로 나타낼 수 있다.
12와 f의 최대공약수가 4이므로 3과 서로소인 자연수 t에 대하여
$f=4t$ ……㉡
로 나타낼 수 있다.
12는 e와 f의 등비중항이므로
$ef=12^2$
위의 식에 ㉠, ㉡을 대입하면
$12st=12^2$ $\therefore\ st=12$
이때 s는 4와 서로소, t는 3과 서로소이므로
$s=3$, $t=4$
이것을 ㉠, ㉡에 대입하면
$e=9$, $f=16$
$\therefore\ e+f=9+16=25$

127) ③

x좌표가 k인 점 P_n중에서 y좌표가 가장 큰 점의 좌표는 $(k,\ 2^k)$ 따라서 x좌표가 k인 점은
$(k,\ 1)$, $(k,\ 2)$, $(k,\ 3)$, $\cdots$, $(k,\ 2^k)$
으로 모두 2^k개이다,
점 P_n의 좌표가 $(10,\ 2^{10})$일 때,
점 P_1부터 점 P_n까지의 점의 개수는 n이므로
$n=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{10}$
$=\dfrac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2^{11}-2$

128) ⑤

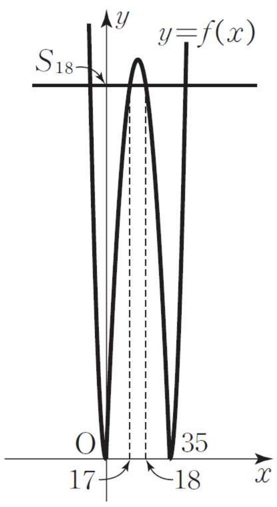
$a_n=3+(-1)^n$에서 $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=2$, $a_4=4$, $\cdots$
$\mathrm{P}_1\left(2\cos\dfrac{2\pi}{3},\ 2\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$, 즉 $(-1,\ \sqrt{3})$
$\mathrm{P}_2\left(4\cos\dfrac{4\pi}{3},\ 4\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$, 즉 $(-2,\ -2\sqrt{3})$
$\mathrm{P}_3\left(2\cos\dfrac{6\pi}{3},\ 2\sin\dfrac{6\pi}{3}\right)$, 즉 $(2,\ 0)$
$\mathrm{P}_4\left(4\cos\dfrac{8\pi}{3},\ 4\sin\dfrac{8\pi}{3}\right)$, 즉 $(-2,\ 2\sqrt{3})$
$\mathrm{P}_5\left(2\cos\dfrac{10\pi}{3},\ 2\sin\dfrac{10\pi}{3}\right)$, 즉 $(-1,\ -\sqrt{3})$
$\mathrm{P}_6\left(4\cos\dfrac{12\pi}{3},\ 4\sin\dfrac{12\pi}{3}\right)$, 즉 $(4,\ 0)$
$\mathrm{P}_7\left(2\cos\dfrac{14\pi}{3},\ 2\sin\dfrac{14\pi}{3}\right)$, 즉 $(-1,\ \sqrt{3})$
이때 점 P_{n+6}의 좌표는 점 P_n의 좌표와 같다.
따라서 $2009=6\times334+5$ 이므로
P_{2009}와 같은 점은 P_5

129) 43

$S_{17}=S_{18}$이므로
$S_{18}-S_{17}=0$ $\therefore\ a_{18}=0$
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 첫째항이 34이므로
$a_{18}=34+(18-1)\times d=0$
$\therefore\ d=-2$

$\therefore\ S_n=\dfrac{n\{2\times34+(n-1)\times(-2)\}}{2}$

$=-n(n-35)\quad\cdots$ ㉠



$f(x)=|-x(x-35)|$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 자연수 x에 대하여 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $1\le n\le35$인 자연수 n에 대하여 $f(18)\ge|f(n)|$

즉, $1\le n\le35$인 자연수 n에 대하여 $|S_n|>S_{18}$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $n>35$인 자연수 n에 대하여 $|S_n|>S_{18}$이 성립하려면 $-S_n>S_{18}$이어야 한다.

즉, ㉠에 의하여 $S_{18}=-18(18-35)=306$이므로

$n(n-35)>306$이 성립해야 한다.

이 때, $n=42$이면 $n(n-35)=42\times7=294$이고

$n=43$이면 $n(n-35)=43\times8=344$이므로

$-S_n>S_{18}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 43이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $|S_n|>S_{18}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 43이다.

130) ②

공차가 양수인 등차수열 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_m$에 대하여 조건 (나), (다)에서 홀수 번째 항들의 합이 짝수 번째 항들의 합보다 크므로 m은 홀수이다.

또한 홀수 m에 대하여 자연수 $1, 2, 3, \cdots, m$중에서

홀수는 $\dfrac{m+1}{2}$개, 짝수는 $\dfrac{m-1}{2}$개다.

조건 (나)에서 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_m=90$이므로

$$\frac{\frac{m+1}{2}(a_1+a_m)}{2}=90$$

$\therefore\ (m+1)(a_1+a_m)=360\quad\cdots\cdots$ ㉠

조건 (다)에서 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{m-1}=72$이므로

$$\frac{\frac{m+1}{2}(a_2+a_{m-1})}{2}=72,\quad (m+1)(a_2+a_{m-1})=288$$

이 때, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2+a_{m-1}=(a_1+d)+a_{m-1}=a_1+a_m$이므로

$(m-1)(a_1+a_m)=288\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$2(a_1+a_m)=72\qquad\therefore\ a_1+a_m=36$

이를 ㉠에 대입하면

$36(m+1)=360,\ m+1=10\qquad\therefore\ m=9$

$\therefore\ a_1+a_m+m=36+9=45$

131) ③

ㄱ. $S_{14}=S_{28}$에서

$a_1+a_2+\cdots+a_{14}$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_{14})+(a_{15}+a_{16}+\cdots+a_{28})$

$\therefore\ a_{15}+a_{16}+a_{17}+\cdots+a_{28}=0$ (참)

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$a_{15}+a_{28}=a_{16}+a_{27}=\cdots=a_{19}+a_{24}=\cdots=a_{21}+a_{22}$

즉, ㄱ에서 $7(a_{19}+a_{24})=0$이므로

$a_{19}+a_{24}=0\qquad\therefore\ a_{19}=-a_{24}$

$\therefore\ |a_{19}|=|a_{24}|$ (참)

ㄷ. 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 ㄴ에서

$a_{19}+a_{24}=0$이므로

$a_1+18d+a_1+23d=0,\ 2a_1=-41d$

$\therefore\ a_1=-\dfrac{41}{2}d$

이때, $a_1>0$이므로 $d<0$이고,

$$a_n=-\frac{41}{2}d+(n-1)d=d\left(n-\frac{43}{2}\right)$$

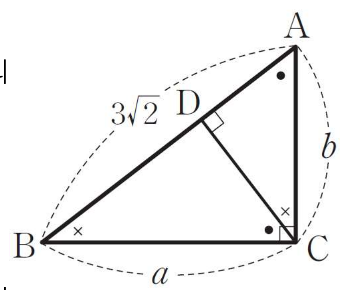
S_n의 값이 최대가 되는 것은 $a_n>0$인 항만을 모두 더 했을 때이므로

$d\left(n-\dfrac{43}{2}\right)\ge0\quad\therefore\ n\le21.5\quad(\because\ d<0)$

즉, $n=21$일 때, S_n은 최댓값을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

132) ②



$\overline{BC}=a,\ \overline{AC}=b$라 하면

$\triangle ABC$에서 피타고라스 정리에 의하여

$a^2+b^2=(3\sqrt2)^2$

$\therefore\ a^2+b^2=18\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\triangle ABC\backsim\triangle CBD$이므로

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{BD}$에서

$3\sqrt2:a=a:\overline{BD}$

$\therefore\ \overline{BD}=\dfrac{a^2}{3\sqrt2}$

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BC}:\overline{CD}$에서 $3\sqrt2:b=a:\overline{CD}$

$\therefore\ \overline{CD}=\dfrac{ab}{3\sqrt2}$

$\triangle ABC\backsim\triangle ACD$이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{AD}$에서 $3\sqrt2:b=b:\overline{AD}$

$\therefore\ \overline{AD}=\dfrac{b^2}{3\sqrt2}$

즉, 세 삼각형의 넓이는

$\triangle ACD = \frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{AD} = \frac{1}{2}\times\frac{ab}{3\sqrt{2}}\times\frac{b^2}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{36}ab^3$

$\triangle CBD = \frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{CD} = \frac{1}{2}\times\frac{a^2}{3\sqrt{2}}\times\frac{ab}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{36}a^3b$

$\triangle ABC = \frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AC} = \frac{1}{2}ab$

세 삼각형 ACD, CBD, ABC의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\times\frac{1}{36}a^3b = \frac{1}{36}ab^3 + \frac{1}{2}ab$

그런데 $a>0$, $b>0$에서 $ab\neq 0$이므로 양변에 $\frac{36}{ab}$을 곱하면

$2a^2 = b^2+18 \qquad \therefore\ b^2 = 2a^2-18 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$3a^2-18=18$, $3a^2=36$

$a^2=12 \quad \therefore\ a=2\sqrt{3}\,(\because\ a>0)$

위의 값을 ㉡에 대입하면

$b^2 = 2\times 12 - 18 = 6 \qquad \therefore\ b=\sqrt{6}\,(\because\ b>0)$

$\therefore\ \triangle ABC = \frac{1}{2}\mathrm{ab} = \frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{6} = 3\sqrt{2}$

다른풀이

$\triangle ABC = \triangle ACD + \triangle CBD \quad \cdots\cdots$ ㉢

세 삼각형 ACD, CBD, ABC의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\triangle CBD = \triangle ACD + \triangle ABC \quad \cdots\cdots$ ㉣

㉢을 ㉣에 대입하면

$2\triangle CBD = 2\triangle ACD + \triangle CBD$

즉, $\triangle CBD = 2\triangle ACD$이므로

$\triangle ACD : \triangle CBD = 1 : 2$

이 때, 두 삼각형 ACD, CBD는 각각 변 AD와 변 BD를 밑변으로 하고 높이가 서로 같은 삼각형이므로 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

즉, $\overline{AD} : \overline{BD} = 1 : 2$이고 $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$이므로

$\overline{AD} = \sqrt{2}$, $\overline{BD} = 2\sqrt{2}$

$\triangle ABC \backsim \triangle ACD$에서

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AD}$, $3\sqrt{2} : \overline{AC} = \overline{AC} : \sqrt{2}$

$\overline{AC}^2 = 6 \qquad \therefore\ \overline{AC} = \sqrt{6}\,(\because\ \overline{AC}>0)$

$\triangle ABC \backsim \triangle CBD$에서

$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{BD}$, $3\sqrt{2} : \overline{BC} = \overline{BC} : 2\sqrt{2}$

$\overline{BC}^2 = 12 \qquad \therefore\ \overline{BC} = 2\sqrt{3}\,(\because\ \overline{BC}>0)$

$\therefore\ \triangle ABC = \frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}$

$= \frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times 2\sqrt{3} = 3\sqrt{2}$

133) ②

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n = ar^{n-1}$이므로

$7a_n + a_{n+1} = 7ar^{n-1} + ar^n$

$= (7a+ar)r^{n-1}$

즉, 수열 $\{7a_n + a_{n+1}\}$의 첫째항은 $7a+ar$, 공비는 r이므로

$7a+ar=18$, $r=2$

$r=2$를 $7a+ar=18$에 대입하면

$9a=18 \qquad \therefore\ a=2$

따라서 $a_n = 2\times 2^{n-1} = 2^n$ 이므로

$a_2 = 2^2 = 4$

134) ⑤

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\frac{a_{11}}{a_1} + \frac{a_{12}}{a_2} + \frac{a_{13}}{a_3} + \frac{a_{14}}{a_4} + \frac{a_{15}}{a_5}$

$= \frac{a_1r^{10}}{a_1} + \frac{a_1r^{11}}{a_1r} + \frac{a_1r^{12}}{a_1r^2} + \frac{a_1r^{13}}{a_1r^3} + \frac{a_1r^{14}}{a_1r^4}$

$= r^{10}+r^{10}+r^{10}+r^{10}+r^{10} = 5r^{10} = 20$

$\therefore\ r^{10} = 4$

$\therefore\ \frac{a_{40}}{a_{20}} = \frac{a_1r^{39}}{a_1r^{19}} = r^{20} = (r^{10})^2 = 4^2 = 16$

135) ⑤

조건 (가)에서 $\frac{d}{a} = \frac{e}{d}$이므로 a, d, e 또는 e, d, a는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

또한, 조건 (나)에서 $a=kd$, $b=\frac{e}{k}$이므로

$k = \frac{a}{d} = \frac{e}{b} \qquad \therefore\ ab = de$

따라서 a, d, e, b 또는 b, e, d, a는

이 순서대로 등비수열을 이룬다.

조건 (다)에서 $a<c$이므로 a, d, e, b, c 또는

b, e, d, a, c는 이 순서대로 등비수열을 이루고, 이때의 c는 제 5항이다. $\quad \therefore\ n=5$

136) $150\sqrt{2}$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\dfrac{a_1(r^{10}-1)}{r-1}=50\sqrt{2}$ …… ㉠

$a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30}$은 첫째항이 $a_{21}=a_1r^{20}$이고 공비가 r, 항의 개수가 10인 등비수열의 합이므로

$a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30}=\dfrac{a_1r^{20}(r^{10}-1)}{r-1}=450\sqrt{2}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$50\sqrt{2}\,r^{20}=450\sqrt{2}$, $r^{20}=9$

$\therefore\ r^{10}=3\ (\because\ r^{10}>0)$

따라서 $a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}$은 첫째항이 $a_{11}=a_1r^{10}$이고 공비가 r, 항의 개수가 10인 등비수열의 합이므로

$a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}=\dfrac{a_1r^{10}(r^{10}-1)}{r-1}$

$=r^{10}\times\dfrac{a_1(r^{10}-1)}{r-1}$

$=3\times50\sqrt{2}\ (\because\ ㉠)=150\sqrt{2}$

다른풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r,

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=S_{10}$

$a_{21}+a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{30}$

$=a_1r^{20}+a_2r^{20}+a_3r^{20}+\cdots+a_{10}r^{20}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})r^{20}$

$=S_{10}r^{20}$

이때, $S_{10}=50\sqrt{2}$, $S_{10}r^{20}=450\sqrt{2}$이므로

$r^{20}=\dfrac{S_{10}r^{20}}{S_{10}}=\dfrac{450\sqrt{2}}{50\sqrt{2}}=9$, $(r^{10})^2=9$

$\therefore\ r^{10}=3\ (\because\ r^{10}>0)$

$\therefore\ a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}$

$=a_1r^{10}+a_2r^{10}+a_3r^{10}+\cdots+a_{10}r^{10}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})r^{10}=S_{10}r^{10}$

$=50\sqrt{2}\times3=150\sqrt{2}$

137) $\dfrac{31}{8}$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라하자.

첫째항부터 제5항까지의 합이 $\dfrac{31}{2}$이므로

$\dfrac{a_1(r^5-1)}{r-1}=\dfrac{31}{2}$ …… ㉠

또한, 첫째항부터 제5항까지의 곱이 32이므로

$a_1\times a_1r\times a_1r^2\times a_1r^3\times a_1r^4=32$

$a_1{}^5r^{10}=32$, $(a_1r^2)^5=32$

$\therefore\ a_1r^2=2$ …… ㉡

$\therefore\ \dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}$

$=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_1r}+\dfrac{1}{a_1r^2}+\dfrac{1}{a_1r^3}+\dfrac{1}{a_1r^4}$

$=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_1}\times\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{a_1}\times\left(\dfrac{1}{r}\right)^2+\dfrac{1}{a_1}\times\left(\dfrac{1}{r}\right)^3+\dfrac{1}{a_1}\times\left(\dfrac{1}{r}\right)^4$

$=\dfrac{\dfrac{1}{a_1}\left\{1-\left(\dfrac{1}{r}\right)^5\right\}}{1-\dfrac{1}{r}}=\dfrac{\dfrac{1}{a_1}\times\dfrac{r^5-1}{r^5}}{\dfrac{r-1}{r}}$

$=\dfrac{r^5-1}{a_1r^4(r-1)}=\dfrac{a_1(r^5-1)}{a_1{}^2r^4(r-1)}$

$=\left(\dfrac{1}{a_1r^2}\right)^2\times\dfrac{a_1(r^5-1)}{r(r-1)}$

$=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\dfrac{31}{2}\ (\because\ ㉠,\ ㉡)$

$=\dfrac{31}{8}$

다른풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라하자.

첫째항부터 제5항까지의 합이 $\dfrac{31}{2}$이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4$

$=a(1+r+r^2+r^3+r^4)=\dfrac{31}{2}$ …… ㉢

첫째항부터 제5항까지의 곱이 32이므로

$a_1a_2a_3a_4a_5=a\times ar\times ar^2\times ar^3\times ar^4$

$=a^5r^{10}=(ar^2)^5=32$

$\therefore\ ar^2=2$ …… ㉣

$\therefore\ \dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}$

$=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{ar}+\dfrac{1}{ar^2}+\dfrac{1}{ar^3}+\dfrac{1}{ar^4}$

$=\dfrac{1}{ar^4}(1+r+r^2+r^3+r^4)$

$=\dfrac{1}{(ar^2)^2}\times a(1+r+r^2+r^3+r^4)$

$=\dfrac{1}{2^2}\times\dfrac{31}{2}\ (\because\ ㉢,\ ㉣)=\dfrac{31}{8}$

138) ③

x에 대한 이차방정식

$x^2-nx+4(n-4)=0$

을 풀면

$(x-4)(x-n+4)=0$

$x=4$ 또는 $x=n-4$

한편, 세 수$1,\ \alpha,\ \beta$가 등차수열을 이루므로

$2\alpha=\beta+1$ ------㉠

이때, 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $\alpha=4$이고 $\beta=n-4$인 경우

이때, $\alpha<\beta$이므로

$n>8$

또, ㉠에서

$8=(n-4)+1$

$n=11$

그러므로 조건을 만족시킨다.

(ⅱ)$\alpha=n-4$ 이고 $\beta=4$

이때, $\alpha<\beta$이므로

$n<8$

또, ㉠에서

$2(n-4)=4+1$

$n=\frac{13}{2}$

n은 자연수가 아니므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서, (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수 n의 값은 11이다.

139) 풀이 참조

(1)

$\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^k=\frac{6(3^n-1)}{3-1}=3^{n+1}-3$

(2)

$\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^{k-1}=\frac{2(3^n-1)}{3-1}=3^n-1$

(3)

$\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot3^k=\frac{6(3^{n-1}-1)}{3-1}=3^n-3$

(4)

$\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot3^{k-1}=\frac{2(3^{n-1}-1)}{3-1}=3^{n-1}-1$

140) 풀이 참조

(1)

$\sum_{k=1}^{n}3\cdot2^k=\frac{6(2^n-1)}{2-1}=3\cdot2^{n+1}-6$

(2)

$\sum_{k=1}^{n}3\cdot2^{k-1}=\frac{3(2^n-1)}{2-1}=3\cdot2^n-3$

(3)

$\sum_{k=1}^{n-1}3\cdot2^k=\frac{6(2^{n-1}-1)}{2-1}=3\cdot2^n-6$

(4)

$\sum_{k=1}^{n-1}3\cdot2^{k-1}=\frac{3(2^{n-1}-1)}{2-1}=3\cdot2^{n-1}-3$

141) 204

수열 $1,\ 1+3,\ 1+3+5,\ \cdots$의 제 k항을 a_k라 하면

$a_k=1+3+5+\cdots+(2k-1)$

$=\sum_{i=1}^{k}(2i-1)=2\cdot\frac{k(k+1)}{2}-k=k^2$

이 때 $2k-1=15$에서 $k=8$이므로 주어진 수열의 합은

$\sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}k^2=\frac{8\cdot9\cdot17}{6}=204$

142) 14

$\sum_{k=1}^{10}(a_{k+1})^2=28$에서 $\sum_{k=1}^{10}\left\{(a_k)^2+2a_k+1\right\}=28$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1=28$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k}^{10}a_k=18$ $\cdots$ ㉠

또, $\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+1)=16$에서 $\sum_{k=1}^{10}\left\{(a_k)^2+a_k\right\}=16$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+\sum_{k=1}^{10}a_k=16$

이 식의 양변에 2를 곱하면

$2\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k=32$ $\cdots$ ㉡

따라서 ㉡에서 ㉠을 변끼리 빼면 $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=14$

143) ①

$S_{k+1}-S_k=a_{k+1}$이므로

$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_kS_{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$

$=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\left(\frac{1}{S_3}-\frac{1}{S_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{10}}-\frac{1}{S_{11}}\right)$

$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{11}}$

$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{S_{11}}$ $(\because\ a_1=S_1)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{S_{11}}$

이때 $\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}=\frac{1}{3}$ 이므로

$\frac{1}{2}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{3},\ \frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ S_{11}=6$

144) ②

이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$x^2-2x-1=(x-\alpha)(x-\beta)$

$(k-\alpha)(k-\beta)=k^2-2k-1$

$\sum_{k=1}^{10}(k-\alpha)(k-\beta)=\sum_{k=1}^{10}(k^2-2k-1)$

$=\sum_{k=1}^{10}k^2-2\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}1$

$=\frac{10\times11\times21}{6}-2\times\frac{10\times11}{2}-10\times1$

$=385-110-10=265$

145) ④

점$\left(n,\ \frac{3}{n}\right)$과 두 점 $(n-1,\ 0),\ (n+1,\ 0)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 a_n이므로

$a_n=\frac{1}{2}\times\{(n+1)-(n-1)\}\times\frac{3}{n}$

$=\frac{1}{2}\times2\times\frac{3}{n}=\frac{3}{n}$

따라서 $\sum_{n=1}^{10}\frac{9}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{10}\frac{9}{\frac{3}{n}\times\frac{3}{n+1}}$

$=\sum_{n=1}^{10}(n^2+n)$

$=\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}$

$=385+55$

$=440$

146) 5

$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{15}=\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{m-1}a_k$

$=f(15)-f(m-1)$

$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{15}<0$ 에서

$\therefore\ f(15)-f(m-1)<0$

$\therefore\ f(15)<f(m-1)$

그런데 $f(3)=f(15)$이므로

$3<m-1<15$

따라서 $m-1=4$일 때 m이 최소이므로 m의 최솟값은 5이다.

147) ⑤

ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}+2}=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$[참]

ㄴ. $f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4}{4+2\cdot4^x}$

$=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{2+4^x}=\frac{4^x+2}{4^x+2}=1$[참]

ㄷ. $\sum_{k=1}^{100}f\left(\frac{k}{101}\right)+f\left(\frac{2}{101}\right)+f\left(\frac{3}{101}\right)+\cdots+f\left(\frac{99}{101}\right)+f\left(\frac{100}{101}\right)$

$=\left\{f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(\frac{100}{101}\right)\right\}+\left\{f\left(\frac{2}{101}\right)+f\left(\frac{99}{101}\right)\right\}$

$+\cdots\left\{f\left(\frac{50}{101}\right)+f\left(\frac{51}{101}\right)\right\}$

$=\left\{f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(1-\frac{1}{101}\right)\right\}+\left\{f\left(\frac{2}{101}\right)+f\left(1-\frac{2}{101}\right)\right\}$

$+\cdots\left\{f\left(\frac{50}{101}\right)+f\left(1-\frac{50}{101}\right)\right\}$

$=1\times50$ $(\because$ ㄴ$)$

$= 50$[참]
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

148) 103

$4^k - (2^n + 4^n)2^k + 8^n \le 1$에서
$(2^k - 2^n)(2^k - 4^n) \le 1$
이때 k, n은 자연수이므로 $(2^k - 2^n)$과 $(2^k - 4^n)$은 각각 정수이고
$2^k - 4^n < 2^k - 2^n$
이므로 주어진 부등식을 만족시키기 위해서는
$2^k - 4^n \le 0$, $2^k - 2^n \ge 0$
이 되어야 한다.
즉, $2^k \le 4^n$, $2^k \ge 2^n$이므로
$2^n \le 2^k \le 4^n \quad \therefore\ 2^n \le 2^k \le 2^{2n}$
위의 부등식을 만족시키는 자연수 k의 값의 범위는
$n \le k \le 2n$
$\therefore\ a_n = n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (2n-1) + 2n$
$= \dfrac{n+2n}{2} \times (n+1) = \dfrac{3n(n+1)}{2}$
$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n}$
$= \displaystyle\sum_{n=1}^{20} \frac{2}{3n(n+1)}$
$= \dfrac{2}{3} \displaystyle\sum_{n=1}^{20} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$
$= \dfrac{2}{3}\left\{\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{20} - \dfrac{1}{21}\right)\right\}$
$= \dfrac{2}{3}\left(1 - \dfrac{1}{21}\right)$
$= \dfrac{2}{3} \times \dfrac{20}{21} = \dfrac{40}{63}$
따라서 $p = 63$, $q = 40$이므로
$p + q = 103$

149) 10

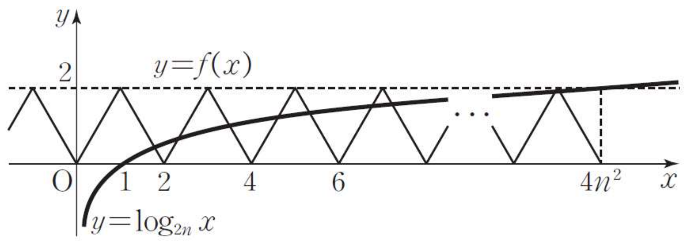
$1 \times (2n-1) + 2 \times (2n-3) + 3 \times (2n-5) + \cdots + n \times 1$
$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} [k \times \{2n - (2k-1)\}]$
$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \{-2k^2 + (2n+1)k\}$
$= -2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 + (2n+1)\sum_{k=1}^{n} k$
$= -2 \times \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2n+1) \times \dfrac{n(n+1)}{2}$
$= n(n+1)(2n+1)\left(-\dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{2}\right)$
$= \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
즉, $\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = 385$이고
385를 소인수분해 하면 $385 = 5 \times 7 \times 11$이므로
$n(n+1)(2n+1) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$
$= 10 \times 11 \times (2 \times 10 + 1)$
$\therefore n = 10$

150) -483

(ⅰ) $x = 10$일 때,
$f(10) = [\log 10]\left[\log \dfrac{1}{10}\right]$
$= 1 \times (-1) = -1$
(ⅱ) $10 < x < 100$일 때,
$1 < \log x < 2$이므로 $[\log x] = 1$
$\dfrac{1}{100} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{10}$에서 $-2 < \log \dfrac{1}{x} < -1$이므로
$\left[\log \dfrac{1}{x}\right] = -2$
$\therefore\ f(x) = [\log x]\left[\log \dfrac{1}{x}\right]$
$= 1 \times (-2) = -2$
(ⅲ) $x = 100$일 때,
$f(100) = [\log 100]\left[\log \dfrac{1}{100}\right]$
$= 2 \times (-2) = -4$
(ⅳ) $100 < x < 1000$일 때,
$2 < \log x < 3$이므로 $[\log x] = 2$
$\dfrac{1}{1000} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{100}$에서 $-3 < \log \dfrac{1}{x} < -2$이므로
$\left[\log \dfrac{1}{x}\right] = -3$
$\therefore\ f(x) = [\log x]\left[\log \dfrac{1}{x}\right]$
$= 2 \times (-3) = -6$
(ⅰ) ~ (ⅳ)에서
$\displaystyle\sum_{k=10}^{150} f(k) = f(10) + \sum_{k=11}^{99} f(k) + f(100) + \sum_{k=101}^{150} f(k)$
$= (-1) + (-2) \times 89 + (-4) + (-6) \times 50$
$= -1 - 178 - 4 - 300 = -483$

151) 553

곡선 $y=\log_{2n}x$가 점 $(4n^2,\ 2)$를 지나므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=\log_{2n}x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



자연수 k에 대하여 $k \le x \le k+1\ (1 \le k \le 4n^2-1)$에서
곡선 $y=\log_{2n}x$와 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수는 1이므로
$a_n=4n^2-1$

$\therefore \quad \sum_{n=1}^{7}a_n=\sum_{n=1}^{7}(4n^2-1)$

$=4\times\dfrac{7\times8\times15}{6}-7$

$=560-7=553$

152) $\dfrac{1}{101}$

$f(x)=\sum_{k=1}^{100}\left\{x-\dfrac{1}{k(k+1)}\right\}^2$

$=\sum_{k=1}^{100}\left\{x^2-\dfrac{2}{k(k+1)}x+\dfrac{1}{k^2(k+1)^2}\right\}$

$=100x^2-2x\sum_{k=1}^{100}\dfrac{1}{k(k+1)}+\sum_{k=1}^{100}\dfrac{1}{k^2(k+1)^2}$

이때,

$\sum_{k=1}^{100}\dfrac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{100}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\ \cdots\ +\left(\dfrac{1}{100}-\dfrac{1}{101}\right)$

$=1-\dfrac{1}{101}=\dfrac{100}{101}$

이므로

$f(x)=100x^2-\dfrac{200}{101}x+\sum_{k=1}^{100}\dfrac{1}{k^2(k+1)^2}$

$=100\left(x-\dfrac{1}{101}\right)^2-\dfrac{100}{101^2}+\sum_{k=1}^{100}\dfrac{1}{k^2(k+1)^2}$

따라서 x^2의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는

$x=\dfrac{1}{101}$ 일 때 최솟값을 갖는다.

153) ①

36의 양의 약수는
$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36$ 이고,
$f(1),\ f(4),\ f(9),\ f(36)$은 홀수,
$f(2),\ f(3),\ f(6),\ f(12),\ f(18)$은 짝수이다. 따라서

$\sum_{k=1}^{9}\left\{(-1)^{f(a_k)}\times\log_{a_k}\right\}$

$=-\log1+\log1+\log3-\log4+\log6-\log9+\log12+\log18-\log36$

$=\log\dfrac{2\times3\times6\times12\times18}{1\times4\times9\times36}$

$=\log6$

$=\log2+\log3$

154) ④

$S_n=\dfrac{n\{2\times50+(n-1)\times(-4)\}}{2}$

$=-2n^2+52n$

$=-2(N-13)^2+2\times13^2$

이므로 S_n의 값은 $n=13$일 때 최대이다.

따라서 $\sum_{k=m}^{m+4}S_k$의 값은 $m=11$일 때 최대가 된다.

155) 162

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r(r는 정수)라 하면
첫째항이 2이므로 $a_n=2r^{n-1}$
$a_2=2r,\ a_3=2r^2$이므로
조건 (가)에서
$4<2r+2r^2 \le 12$
즉, $2<r+r^2 \le 6$
$r^2+r>2$에서
$r^2+r-2=(r+2)(r-1)>0$이므로
r<-2 또는 r>1 ----㉠
$r^2+r \le 6$에서
$r^2+r-6=(r+3)(r-2) \le 0$이므로
$-3 \le r \le 2$ ----㉡
㉠, ㉡에서
$-3 \le r<2$ 또는 $1<r \le 2$
r는 정수이므로 r=-3 또는 r=2
(i) r=2인 경우

조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m}(2\times 2^{k-1})$$
$$= \frac{2(2^m-1)}{2-1}$$
$$= 2(2^m-1)$$

$2(2^m-1)=122$에서

$2^m-1=61$, $2^m=62$

이 때 $2^m=62$를 만족시키는

m의 값은 존재하지 않는다.

(ii) r=-3인 경우

조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m}\{2\times(-3)^{k-1}\}$$
$$= \frac{2\{1-(-3)^m\}}{1-(-3)}$$
$$= \frac{1-(-3)^m}{2}$$

$\frac{1-(-3)^m}{2}=122$에서

$1-(-3)^m=244$

$(-3)^m=-243$

즉, $(-3)^m=(-3)^5$이므로 m=5

$i)$, (ii)에 의하여 r=-3, m=5 이므로

$a_m=a_5=2\times(-3)^4=162$

156) ④

$$\sum_{k=1}^{m} a_k$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\log_2\sqrt{\frac{2(k+1)}{k+2}}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\log_2\frac{2(k+1)}{k+2}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\log_2\frac{2\times2}{3}+\log_2\frac{2\times3}{4}+\log_2\frac{2\times4}{5}+\cdots+\log_2\frac{2\times(m+1)}{m+2}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\log_2\left\{\frac{2\times2}{3}\times\frac{2\times3}{4}\times\frac{2\times4}{5}\times\cdots\times\frac{2\times(m+1)}{m+2}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}$$

$\sum_{k=1}^{m} a_k = N$(N은 100 이하의 자연수)

라 하면

$\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}=N$

$\frac{2^{m+1}}{m+2}=2^{2N}$

$2^{m+1-2N}=m+2$

따라서 $m+2$는 2의 거듭제곱이어야 한다.

(ⅰ) $m+2=2^2$, 즉 $m=2$일 때

$2^{3-2N}=2^2$

$3-2N=2$, $N=\frac{1}{2}$

N은 100 이하의 자연수이므로

$m\neq2$

(ⅱ) $m+2=2^3$, 즉 $m=6$일 때

$2^{7-2N}=2^3$

$7-2N=3$, $N=2$

(ⅲ) $m+2=2^4$, 즉 $m=14$일 때

$2^{15-2N}=2^4$

$15-2N=4$, $N=\frac{11}{2}$

N은 100 이하의 자연수이므로

$m\neq14$

(ⅳ) $m+2=2^5$, 즉 $m=30$일 때

$2^{31-2N}=2^5$

$31-2N=5$, $N=13$

(ⅴ) $m+2=2^6$, 즉 $m=62$일 때

$2^{63-2N}=2^6$

$63-2N=6$, $N=\frac{57}{2}$

N은 100 이하의 자연수이므로

$m\neq62$

(ⅵ) $m+2=2^7$, 즉 $m=126$일 때

$2^{127-2N}=2^7$

$127-2N=7$, $N=60$

(ⅶ) $m+2\geq2^8$일 때

$N>100$

(ⅰ) ~ (ⅶ)에서

$m=6$, 30, 126

따라서 모든 m의 값의 합은

$6+30+126=162$

157) 30

$a_1=2$이므로

$a_2=\frac{a_1}{2-3a_1}=\frac{2}{2-6}=-\frac{1}{2}$

$a_3=1+a_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$a_4 = \dfrac{a_3}{2-3a_3} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2-\frac{3}{2}} = 1$

$a_5 = 1 + a_4 = 1 + 1 = 2$

⋮

이때,

$a_n = a_{n+4}$(n은 자연수)

이므로

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$= a_5 + a_6 + a_7 + a_8$

⋮

$= a_{37} + a_{38} + a_{39} + a_{40}$

$= 3$

따라서

$\sum_{n=1}^{40} a_n = 10 \times 3 = 30$

158) 11

조건 (가)에서 $a_{n+2} = a_n - 4$이므로

$a_2 = p$라 놓으면

$a_1 = 7$

$a_2 = p$

$a_3 = a_1 - 4 = 7 - 4 = 3$

$a_4 = a_2 - 4 = p - 4$

$a_5 = a_3 - 4 = -1$

$a_6 = a_4 - 4 = p - 8$

$\therefore \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 7 + p + 3 + (p-4) + (-1) + (p-8)$

$= 3p - 3$

조건(나)에서 $a_{n+6} = a_n$이므로

$a_7 = a_1, a_8 = a_2,\ a_9 = a_3,\ \cdots,\ a_{12} = a_6$

수열 $\{a_n\}$은 주기가 6인 수열이므로

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$이 반복된다.

즉, $7,\ p,\ 3,\ p-4,\ -1,\ p-8$이 반복된다.

$\therefore \quad \sum_{k=1}^{50} a_k = \sum_{k=1}^{48} a_k + a_{49} + a_{50}$

$= 8(3p-3) + 7 + p$

$= 25p - 17$

$= 258$

이때 $25p = 275$이므로 $p = 11$

따라서 $a_2 = p = 11$

159) 21

주어진 조건에 의하여

$\mathrm{A_n}(\mathrm{x_n},\ 0),\ \mathrm{P_n}\left(\mathrm{x_n},\ \dfrac{1}{\mathrm{x_n}}\right),\ \mathrm{Q}_n\left(\dfrac{1}{x_n},\ x_n\right),\ \mathrm{R}_n\left(\dfrac{1}{x_n},\ 0\right),$

점 A_{n+1}은 점 R_n을 x축의 방향으로

1만큼 평행이동한 것이므로

$\mathrm{A_{n+1}}\left(\dfrac{1}{\mathrm{x_n}} + 1,\ 0\right)$

이때 $\mathrm{A_{n+1}}(\mathrm{x_{n+1}},\ 0)$이므로

$x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n} + 1$

$x_1 = 2$이므로

$x_2 = \dfrac{1}{x_1} + 1 = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$

$x_3 = \dfrac{1}{x_2} + 1 = \dfrac{2}{3} + 1 = \dfrac{5}{3}$

$x_4 = \dfrac{1}{x_3} + 1 = \dfrac{3}{5} + 1 = \dfrac{8}{5}$

$x_5 = \dfrac{1}{x_4} + 1 = \dfrac{5}{8} + 1 = \dfrac{13}{8}$

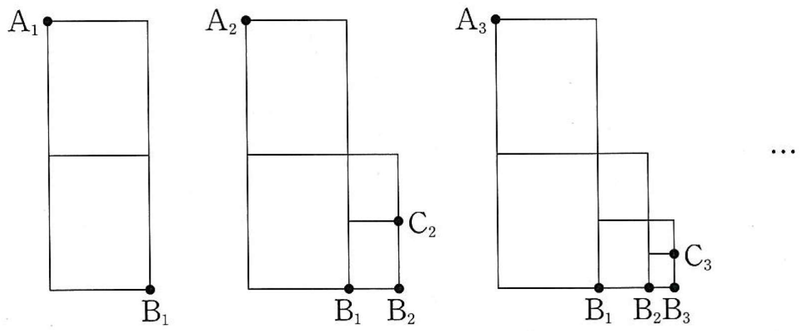
따라서 $p = 8,\ q = 13$이므로

$\therefore \quad p + q = 8 + 13 = 21$

160) 255

점 A_1에서 점 B_1까지 최단 거리로 가는 경로의 수가 3이므로

$a_1 = 3$



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

그림1과 그림2의 가짓수의 관계식은 $a_2 = 2a_1 + 1$

그림2과 그림3의 가짓수의 관계식은 $a_3 = 2a_2 + 1$

따라서 가짓수의 관계식은 $a_{n+1} = 2a_n + 1$

[다른 풀이]

점 A_1에서 점 B_1까지 최단 거리로 가는 경로의 수가 3이므로

$a_1 = 3$

$n \geq 2$일 때

[그림 n]에서 점 B_n의 바로 위의 꼭짓점을 C_n이라 하면 점 A_n에서 점 C_n을 거쳐 점 B_n까지 최단거리로 가는 경로의 수는 2^n이다.
점 A_n에서 점 C_n을 거치지 않고 점 B_n까지 최단거리로 가는 경로의 수는 점 A_n에서 점 B_{n-1}까지 최단거리로 가는 경로의 수 a_{n-1}과 같으므로

$a_n = 2^n + a_{n-1}$

$a_1 = 3$이므로

$a_2 = 2^2 + a_1 = 4 + 3 = 7$

$a_3 = 2^3 + a_2 = 8 + 7 = 15$

$a_4 = 2^4 + a_3 = 16 + 15 = 31$

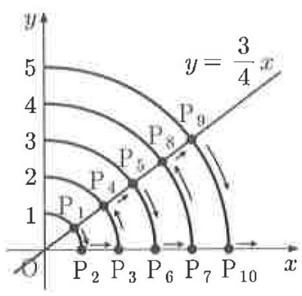
$a_5 = 2^5 + a_4 = 32 + 31 = 63$

$a_6 = 2^6 + a_5 = 64 + 63 = 127$

$\therefore\ a_7 = 2^7 + a_6 = 128 + 127 = 255$

161) ①

다음 그림에서 4개의 점을 묶으면



1번째 묶음 : P_1, P_2, P_3, P_4

2번째 묶음 : P_5, P_6, P_7, P_8

⋮

7번째 묶음 : P_{25}, P_{26}, P_{27}, P_{28}

⋮

이때 n번째 묶음의 첫째항은 P_{4n-3}이고 이것은 중심이 O이고 반지름의 길이가 $2n-1$인 원과 직선 $y=\frac{3}{4}x$의 교점이다.
즉 제 7번째 묶음의 첫째항 P_{25}는 반지름의 길이가 13인 원과 직선 $y=\frac{3}{4}x$의 교점이므로 $x^2+y^2=13^2$과 $y=\frac{3}{4}x$를 연립하여 x좌표를 구하면

$x^2+\frac{9}{16}x^2=13^2$, $\frac{25}{16}x^2=13^2$, $x^2=\frac{52^2}{5^2}$

따라서 $x=\frac{52}{5}$

다른 풀이

그림에서 점 P_n의 좌표는 $n=4k$ 또는 $4k+1$일 때, 직선 $y=\frac{3}{4}x$위에 있고 $n=4k+2$ 또는 $4k+3$일 때, x축 위에 있다.
(단, k는 정수)
$25=4\cdot6+1$로 나타낼 수 있으므로 점 P_{25}는 반지름이 13인 원과 직선 $y=\frac{3}{4}x$와의 교점이다. 또한 x축의 양의 방향과 직선 $y=\frac{3}{4}x$가 이루는 예각을 θ라 하면 점 P_{25}의 x좌표는 $13\cos\theta$ $\left(\text{단, } \tan\theta=\frac{3}{4}\right)$

따라서 $13\cos\theta = 13\times\frac{4}{5}=\frac{52}{5}$

162) ④

[그림1]에 적혀 있는 모든 수의 합은
$6+(1+2+3+4+5)$

[그림2]에 적혀 있는 모든 수의 합은
$6+(1+2+3+4+5)+(1+2+3+\cdots+7)$

[그림3]에 적혀 있는 모든 수의 합은
$6+(1+2+3+4+5)+(1+2+3+\cdots+7)$
$+(1+2+3+\cdots+9)$

[그림4]에 적혀 있는 모든 수의 합은
$6+(1+2+3+4+5)+(1+2+3+\cdots+7)$
$+(1+2+3+\cdots+9)+(1+2+3+\cdots+11)$

[그림5]에 적혀 있는 모든 수의 합은
$6+(1+2+3+4+5)+(1+2+3+\cdots+7)$
$+(1+2+3+\cdots+9)+(1+2+3+\cdots+11)$
$+(1+2+3+\cdots+13)$

[그림6]에 적혀 있는 모든 수의 합은
$6+(1+2+3+4+5)+(1+2+3+\cdots+7)$
$+(1+2+3+\cdots+9)+(1+2+3+\cdots+11)$
$+(1+2+3+\cdots+13)+(1+2+3+\cdots+15)$
$=6+3\times5+4\times7+5\times9+6\times11+7\times13+8\times15$
$=6+15+28+45+66+91+120$
$=371$

Tip

[그림 $n-1$]을 활용하여 [그림 n]을 얻는 경우 '[그림 $n-1$]에서의 정보'와 '[그림 n]과 [그림 $n-1$]의 차이'를 합하여 규칙을 추론한다. 이때 처음부터 계산을 하지 않고 식을 모두 그대로 남겨 두어야 규칙성을 발견하기 쉽다.

163) 23

점 P_n의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라 하면
조건 (가)에 의하여
$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$
선분 P_nP_{n+1}의 중점의 x좌표는 $\dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}$,
선분 $P_{n+2}P_{n+3}$의 중점의 x좌표는 $\dfrac{x_{n+2}+x_{n+3}}{2}$이므로
조건(나)에 의하여
$x_n + x_{n+1} = x_{n+2} + x_{n+3}$
따라서 $x_{n+3} = x_n + x_{n+1} - x_{n+2}$이므로
$x_4 = x_1 + x_2 - x_3 = (-1)+1-(-1) = 1$
$x_5 = x_2 + x_3 - x_4 = 1+(-1)-1 = -1$
$x_6 = x_3 + x_4 - x_5 = -1+1-(-1) = 1$
$\vdots$
즉, 자연수 k에 대하여
$x_{2k-1} = -1,\ x_{2k} = 1$이므로
$x_{25} = -1 \qquad \therefore\ a = -1$
조건(가)에 의하여 $y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 2$
선분 P_nP_{n+1}의 중점의 y좌표는 $\dfrac{y_n + y_{n+1}}{2}$, 선분 $P_{n+2}P_{n+3}$의 중점의 xy좌표는 $\dfrac{y_{n+2}+y_{n+3}}{2}$이므로 조건(나)에 의하여
$y_n + y_{n+1} = y_{n+2} + y_{n+3}$
따라서 $y_{n+3} = y_n + y_{n+1} - y_{n+2}$이므로
$y_4 = y_1 + y_2 - y_3 = 0+0-2 = -2$
$y_5 = y_2 + y_3 - y_4 = 0+2-(-2) = 4$
$y_6 = y_3 + y_4 - y_5 = 2+(-2)-4 = -4$
$\vdots$
즉, 자연수 k에 대하여
$y_{2k} = -2k+2,\ y_{2k-1} = 2k-2$이므로
$y_{25} = 2\times 13 - 2 = 24 \qquad \therefore\ b = 24$
$\therefore\ a+b = (-1)+24 = 23$

참고
수열 $\{a_n\}$에 대하여
$$a_n + a_{n+1} = a_{n+2} + a_{n+3} \quad \cdots\cdots ㉠$$
이 성립하면
$$a_{n+1} + a_{n+2} = a_{n+3} + a_{n+4} \quad \cdots\cdots ㉡$$
이므로 ㉡−㉠에서
$$a_{n+2} - a_n = a_{n+4} - a_{n+2}$$
따라서 두 수열 $\{a_{2n-1}\}$, $\{a_{2n}\}$은 각각 등차수열을 이룬다.
이 문제에서 $y_n + y_{n+1} = y_{n+2} + y_{n+3}$이므로 수열 $\{y_{2n-1}\}$, $\{y_{2n}\}$은 각각 등차수열을 이룬다.

164) ③

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
ㄱ. 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_1 = 28$,
$a_3 = 22$이므로
$28 + 2d = 22$
$2d = -6\ \therefore\ d = -3$
즉, 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은
$a_n = 28 + (n-1)\times(-3)$
$\quad = -3n + 31$
$\therefore\ a_6 = -3\times 6 + 31 = 13$ (참)
ㄴ. $\displaystyle\sum_{k=1} tona_k - \sum_{k=2}^{n} a_{k-1}$
$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$
$= a_n = -3n + 31$ (참)
ㄷ. $a_n = -3n + 31 < 0$에서
$n > \dfrac{31}{3} = 10.3\times\times\times$
즉 수열 $\{a_n\}$이 처음으로 음이 되는 항은 제11항이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

165) 8

${a_{n+1}}^2 + 4{a_n}^2 + (a_1 - 2)^2 = 4a_{n+1}a_n$ 에서
$(a_1 - 2)^2 + {a_{n+1}}^2 - 4a_{n+1}a_n + 4{a_n}^2 = 0$
$\therefore\ (a_1 - 2)^2 + (a_{n+1} - 2a_n)^2 = 0$
이때, $a_n,\ a_{n+1}$은 실수이므로
$a_1 - 2 = 0,\ a_{n+1} - 2a_n = 0$
$\therefore\ a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n$
즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2,
공비가 2인 등비수열이므로 일반항 a_n은
$a_n = 2\times 2^{n-1} = 2^n$
이때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k = 510$이므로
$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} 2^k = \frac{2(2^m - 1)}{2-1} = 2^{m+1} - 2 = 510$
즉, $2^{m+1} = 512 = 2^9$이므로
$m + 1 = 9 \qquad \therefore\ m = 8$

166) $-\frac{1}{2}$

수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$a_{n+2}x^2+(a_n+a_{n+2})x+a_n=0$

$(a_{n+2}x+a_n)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-\frac{a_n}{a_{n+2}}$ 또는 $x=-1$

$\therefore\ b_n=-\frac{a_n}{a_{n+2}}$ $(\because\ b_n\neq-1)$

이때, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$\frac{b_n}{b_n+1}=\frac{-\frac{a_n}{a_{n+2}}}{-\frac{a_n}{a_{n+2}}+1}=\frac{-\frac{a_n}{a_{n+2}}}{\frac{-a_n+a_{n+2}}{a_{n+2}}}$$

$$=\frac{-a_n}{a_{n+2}-a_n}$$

$$=\frac{-a_1-(n-1)d}{2d}$$

$$=-\frac{a_1}{2d}+(n-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

따라서 등차수열 $\left\{\frac{b_n}{b_n+1}\right\}$의 공차는 $-\frac{1}{2}$이다.

167) ④

$S_n=1-(n+1)a_n$에서 $S_1=1-2a_1$

$S_1=a_1$이므로

$a_1=1-2a_1,\ 3a_1=1\qquad\therefore\ a_1=\frac{1}{3}$

$n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\{1-(n+1)a_n\}-\{1-na_{n-1}\}$

$=na_{n-1}-(n+1)a_n$

$(n+2)a_n=na_{n-1}\qquad\therefore\ a_n=\frac{n}{n+2}a_{n-1}\ (n\geq2)$

위의 식의 n 대신에 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_2}=\frac{2}{4}a_1$$

$$\cancel{a_3}=\frac{3}{5}\cancel{a_2}$$

$$\cancel{a_4}=\frac{4}{6}\cancel{a_3}$$

$$\vdots$$

$$\times\ \big)\ a_n=\frac{n}{n+2}\cancel{a_{n-1}}$$

$$a_n=a_1\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\cdots\times\frac{n-1}{n+1}\times\frac{n}{n+2}$$

$$=\frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{2}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{6}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n+1}}\times\frac{\cancel{n}}{n+2}\quad\left(\because\ a_1=\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{2}{(n+1)(n+2)}\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

이때, $a_1=\frac{1}{3}$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{10}\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}(k^2+3k+2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\times11\times21}{6}+3\times\frac{10\times11}{2}+20\right)$$

$$=285$$

168) ②

$na_n=(n-1)S_n$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠에 $n=2$를 대입하면 $2a_2=(2-1)S_2=a_1+a_2$

$\therefore\ a_2=a_1=1$ $(\because\ a_1=1)$

㉠에서 $S_n=\frac{n}{n-1}a_n$이므로 $n\geq3$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{n-1}a_n-\frac{n-1}{n-2}a_{n-1}$

$\frac{1}{n-1}a_n=\frac{n-1}{n-2}a_{n-1}$

$\therefore\ a_n=\frac{(n-1)^2}{n-2}a_{n-1}$ $(n\geq3)$

위의 식의 n 대신에 $3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ n$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\cancel{a_3}=\frac{2^2}{1}a_2$$

$$\cancel{a_4}=\frac{3^2}{2}\cancel{a_3}$$

$$\cancel{a_5}=\frac{4^2}{3}\cancel{a_4}$$

$$\vdots$$

$$\times\ \big)\ a_n=\frac{(n-1)^2}{n-2}\cancel{a_{n-1}}$$

$$a_n=\frac{2^2}{1}\times\frac{3^2}{2}\times\frac{4^2}{3}\times\cdots\times\frac{(n-1)^2}{n-2}\times a_2$$

$$=1\times\frac{2^{\cancel{2}}}{1}\times\frac{3^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\times\frac{4^{\cancel{2}}}{\cancel{3}}\times\cdots\times\frac{(n-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{n-3}}\times\frac{(n-1)^2}{\cancel{n-2}}$$

$(\because\ a_2=1)$

$=1\times2\times3\times4\times\cdots\times(n-2)\times(n-1)^2$

$=(n-1)\times(n-1)!$ $(n\geq2)$

$\therefore\ a_{20}=19\times 19!$

169) 54

$\overline{P_{n-1}P_n}=a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 하면 규칙 (가), (나)에서

$a_1=3,\ a_2=2,\ a_n a_{n+2}=a_{n+1}+1$

이때, $a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n}$의 n 대신에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례대로 대입하면

$a_3=\dfrac{2+1}{3}=1,\ a_4=\dfrac{1+1}{2}=1,\ a_5=\dfrac{1+1}{1}=2,$

$a_6=\dfrac{2+1}{1}=3,\ a_7=\dfrac{3+1}{2}=2,\ a_8=\dfrac{2+1}{3}=1$

$a_9=\dfrac{1+1}{2}=1,\ a_{10}=\dfrac{1+1}{1}=2,\ \cdots$

즉, 수열 $\{a_n\}$은

$\begin{cases} a_1=3,\ a_2=2,\ a_3=1.\ a_4=1,\ a_5=2 \\ a_{n+5}=a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$

따라서 $x_{30}=a_1+a_3+\cdots+a_{29}$,

$y_{30}=a_2+a_4+\cdots+a_{30}$ 이므로

$x_{30}+y_{30}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{29}+a_{30}$

$=6(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$

$=6(3+2+1+1+2)=54$

170) 10

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$ ⋯⋯ ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면 $a_1=\dfrac{1}{2}\left(a_1+\dfrac{1}{a_1}\right)$

$\dfrac{1}{2}a_1=\dfrac{1}{2a_1},\ a_1^2=1\qquad \therefore\ a_1=1\ (\because\ a>0)$

㉠에 $n=2$를 대입하면 $a_1+a_2=\dfrac{1}{2}\left(a_2+\dfrac{1}{a_2}\right)$

$1+\dfrac{1}{2}a_2-\dfrac{1}{2a_2}=0,\ a_2^2+2a_2-1=0$

$\therefore\ a_2=\sqrt{2}-1\ (\because\ a_2>0)$

㉠에 $n=3$을 대입하면

$a_1+a_2+a_3=\dfrac{1}{2}\left(a_3+\dfrac{1}{a_3}\right)$

$1+\sqrt{2}-1+\dfrac{1}{2}a_3-\dfrac{1}{2a_3}=0,\ a_3^2+2\sqrt{2}a_3-1=0$

$\therefore\ a_3=\sqrt{3}-\sqrt{2}\ (\because\ a_3>0)$

$\vdots$

$\therefore\ a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\displaystyle\therefore\ \sum_{k=1}^{100}a_k=\sum_{k=1}^{100}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$

$=\cancel{1}+(\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{1})+(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{2}})+\cdots+(\sqrt{100}-\cancel{\sqrt{99}})$

$=\sqrt{100}=10$

다른풀이

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이라 하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$에서

$S_n=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$

$\therefore\ 2S_n=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ ⋯⋯ ㉡

㉡에 $n=1$을 대입하면

$2S_1=a_1+\dfrac{1}{a_1},\ 2a_1=a_1+\dfrac{1}{a_1}$

$a_1=\dfrac{1}{a_1},\ a_1^2=1\qquad \therefore\ a_1=1\ (\because\ a_1>0)$

또한, ㉡의 n 대신에 $n-1$을 대입하면

$2S_{n-1}=a_{n-1}+\dfrac{1}{a_{n-1}}\ (n\geq 2)$ ⋯⋯ ㉢

㉡$-$㉢을 하면

$2a_n=a_n+\dfrac{1}{a_n}-a_{n-1}-\dfrac{1}{a_{n-1}}$

$a_n-\dfrac{1}{a_n}=-a_{n-1}-\dfrac{1}{a_{n-1}}$ ⋯⋯ ㉣

위의 식의 양변을 각각 제곱하면

${a_n}^2-2+\dfrac{1}{a_n^2}={a_{n-1}}^2+2+\dfrac{1}{{a_{n-1}}^2}$

이때, ${a_n}^2+\dfrac{1}{{a_n}^2}=X_n$으로 놓으면

$X_n-2=X_{n-1}+2\qquad \therefore\ X_n=X_{n-1}+4\ (n\geq 2)$

즉, 수열 $\{X_n\}$은 공차가 4이고 첫째항이

$X_1={a_1}^2+\dfrac{1}{{a_1}^2}=2$인 등차수열이므로

$X_n=2+4(n-1)=4n-2$

$a_n^2+\dfrac{1}{a_n^2}=X_n$이므로 $a_n^2+\dfrac{1}{a_n^2}=4n-2$

$a_n^2+2+\dfrac{1}{a_n^2}=4n,\ \left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)^2=4n$

$\therefore\ a_n+\dfrac{1}{a_n}=2\sqrt{n}\ \ (\because\ a_n>0)$

위의 식의 양변에 각각 a_n을 곱하여 정리하면

$a_n^2-2\sqrt{n}a_n+1=0$

$\therefore\ a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ 또는 $a_n=\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$

그런데 ㉣에서

$a_n+a_{n-1}=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=\dfrac{a_{n-1}-a_n}{a_n a_{n-1}}$

이고, $a_n > 0$, $a_{n-1} > 0$이므로

$a_{n-1} > a_n$

$\therefore a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

다른풀이

$\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$이라 하면 $a_n = S_n - S_{n-1}$이므로

$\sum_{k-1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$에서

$S_n = \frac{1}{2}\left(S_n - S_{n-1} + \frac{1}{S_n - S_{n-1}}\right)$

$2S_n = S_n - S_{n-1} + \frac{1}{S_n - S_{n-1}}$

위의 식의 양변에 $S_n - S_{n-1}$을 곱하면

$2S_n(S_n - S_{n-1}) = (S_n - S_{n-1})^2 + 1$

$2S_n^2 - 2S_nS_{n-1} = S_n^2 - 2S_nS_{n-1} + S_{n-1}^2 + 1$

${S_n}^2 = {S_{n-1}}^2 + 1$

이때, ${S_n}^2 = b_n$으로 놓으면 $b_n = b_{n-1} + 1$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1 = S_1^2 = a_1^2 = 1$이고

공차가 1인 등차수열이므로

$b_n = 1 + (n-1) = n$

따라서 ${S_n}^2 = n$이므로 $S_n = \sqrt{n}$ ($\because a_n > 0$)

$\therefore \sum_{k=1}^{100} a_k = S_{100} = \sqrt{100} = 10$

171) 129

$a_{n+1} = (-1)^n \times n - 7a_n$의 n 대신에 $1, 2, 3, \cdots, 2020$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
a_2 &= -1 - 7a_1 \\
a_3 &= 2 - 7a_2 \\
a_4 &= -3 - 7a_3 \\
&\vdots \\
+)\ \underline{a_{2021}} &\underline{= 2020 - 7a_{2020}}
\end{aligned}$$

$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2021}$

$= \{(-1+2) + (-3+4) + \cdots + (-2019+2020)\}$

$-7(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2020}) = 1010 - 7\sum_{n=1}^{2020} a_n$

$\sum_{n=1}^{2020} a_n - a_1 + a_{2021} = 1010 - 7\sum_{n=1}^{2020} a_n$

이때, $a_1 = a_{2021} + 22$이므로

$\sum_{k=1}^{2020} a_n - 22 = 1010 - 7\sum_{n=1}^{2020} a_n$

$8\sum_{n=1}^{2020} a_n = 1010 + 22 = 1032$

$\therefore \sum_{n=1}^{2020} a_n = 129$

172) 26

주어진 이차방정식의 서로 다른 두 실근이 α_n, β_n이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n + \beta_n = a_n + a_{n+2}$, $\alpha_n\beta_n = -a_{n+1}$

이때, 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로

$\alpha_n + \beta_n = 2a_{n+1}$

$\therefore \alpha_n + \beta_n = 2a_{n+1}$, $\alpha_n\beta_n = -a_{n+1}$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{10}(\alpha_n + 1)(\beta_n + 1) = \sum_{n=1}^{10}(\alpha_n\beta_n + \alpha_n + \beta_n + 1)$

$= \sum_{n=1}^{10}(-a_{n+1} + 2a_{n+1} + 1)$ ($\because$ ㉠)

$= \sum_{n=1}^{10}(a_{n+1} + 1) = 180$

$\therefore a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{11} + 10 = 180$ …… ㉡

㉡의 양변에 각각 a_1을 더하면

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{11} + 10 = a_1 + 180$

$\frac{11 \times (6 + a_{11})}{2} + 10 = 6 + 180$ ($\because a_1 = 6$)

$\therefore a_{11} = 26$

173) ④

$a_{20} = a_{10} - 1$에서 $a_{20} = 1$이므로

$a_{10} = 2$

또, $a_{10} = a_5 - 1$에서

$a_5 = 3$

$a_5 = 2a_2 + 1$에서

$a_2 = 1$

$a_2 = a_1 - 1$에서

$a_1 = 2$

한편,

$a_{2n} + a_{2n+1} = (a_n - 1) + (2a_n + 1) = 3a_n$

이므로

$a_2 + a_3 = 3a_1$

$a_4+a_5+a_6+a_7=3a_2+3a_3=3^2a_1$

$a_8+a_9+\cdots+a_{15}=3a_4+3a_5+\cdots+3a_7=3^3a_1$

$a_{16}+a_{17}+\cdots+a_{31}=3a_8+3a_9+\cdots+3a_{15}=3^4a_1$

$a_{32}+a_{33}+\cdots+a_{63}=3a_{16}+3a_{17}+\cdots+3a_{31}=3^5a_1$

따라서

$\sum_{n=1}^{63}a_n$

$=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+\cdots+a_7)+(a_8+\cdots+a_{15})$
$\quad+(a_{16}+\cdots+a_{31})+(a_{32}+\cdots+a_{63})$

$=a_1(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)$

$=2\times\frac{3^6-1}{3-1}=728$

174) 33

$a_3=a_2-a_1=-6$

$a_4=a_3-a_2=-9$

$a_5=a_4-a_3=-3$

$a_6=a_5-a_4=6$

$a_7=a_6-a_5=9$

$a_8=a_7-a_6=3$

…

즉, 수열 $\{a_n\}$의 각 항은 9, 3, -6, -9, -3, 6, …이 반복되므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+6}$ 이 성립한다.

이때, 9, 3, -6, -9, -3, 6 중에서 $|a_k|=3$을 만족시키는 항의 개수는 2이고 $100=6\times16+4$ 이므로 구하는 100이하의 자연수 k의 개수는

$16\times2+1=33$

175) ③

(가): $\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)$

$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)+\{5(m+1)-3\}\frac{1}{m+1}$

$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)+\boxed{\frac{5m+2}{m+1}}$

(나): $\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)$

$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left\{\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{m+1}\right\}$

$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{\boxed{m}}\right)+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}(5k-3)$

(다): $\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}(5k-3)+\frac{5m+2}{m+1}$

$=\frac{1}{m+1}\left\{\sum_{k=1}^{m}(5k-3)+(5m+2)\right\}$

$=\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}(\boxed{5k-3})$

∴ (가): $5m+2$, (나): m, (다): $5k-3$

참고

$\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)$

$=\frac{m(5m+3)}{4}+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)$

에서 우변을 정리하면 다음과 같다.

$\frac{m(5m+3)}{4}+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)$

$=\frac{m(5m+3)}{4}+\frac{1}{m+1}\left\{5\sum_{k=1}^{m+1}k-(m+1)\times3\right\}$

$=\frac{m(5m+3)}{4}+\frac{1}{m+1}\left\{5\times\frac{(m+1)(m+2)}{2}-3(m+1)\right\}$

$=\frac{m(5m+3)}{4}+\frac{5(m+2)}{2}-3$

$=\frac{m(5m+3)+10(m+2)-12}{4}=\frac{5m^2+13m+8}{4}$

$=\frac{(m+1)(5m+8)}{4}=\frac{(m+1)\{5(m+1)+3\}}{4}$

따라서 주어진 등식은 $n=m+1$일 때도 성립한다.

176) ②

(가): $a_{k+1}=\frac{1!+2!+3!+\cdots+k+1!}{(k+2)!}$

$=\frac{1}{k+2}\left(\frac{1!+2!+3!+\cdots+k!}{(k+1)!}+\frac{(k+1)!}{(k+1)!}\right)$

$=\boxed{\frac{1}{k+2}}(1+a_k)$

(나): $\frac{1}{k+2}(1+a_k)<\frac{1}{k+2}\left(1+\frac{2}{k+1}\right)$ $\left(\because\ a_k<\frac{2}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{k+2}+\boxed{\frac{2}{(k+1)(k+2)}}$

∴ (가): $\frac{1}{k+2}$, (나): $\frac{2}{(k+1)(k+2)}$

177) ⑤

모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n,\ 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OP}_n}+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로

$a_{n+1}=a_n+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$과 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OP}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

이고 점 Q_n의 좌표는 $(a_n,\ \sqrt{3a_n})$이므로

$a_n : \sqrt{3a_n}=\sqrt{3a_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

$a_n\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=3a_n$

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\boxed{3}$

이다.

이때, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\times 3$

$=3n-2$

따라서, 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은

$A_n=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$

$=\dfrac{1}{2}\times a_{n+1}\times\sqrt{3a_n}$

$=\dfrac{1}{2}\times(\boxed{3n+1})\times\sqrt{9n-6}$

이다.

따라서, $p=3$, $f(n)=3n+1$이므로

$p+f(8)=3+25=28$

178) ②

조건 (가)에서

$a_4=(a_2)^2+1$

$a_8=a_2\times a_4+1$

$=a_2\times\{(a_2)^2+1\}+1$

$=(a_2)^3+a_2+1$

조건 (나)에서

$a_3=a_2\times a_1-2$ $\cdots\cdots$ ㉠

조건 (가)에서

$a_2=a_2\times a_1+1$이므로

$a_2\times a_1=a_2-1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a_3=a_2-3$

또,

$a_7=a_2\times a_3-2$

$=a_2\times(a_2-3)-2$

$=(a_2)^2-3a_2-2$

$a_{15}=a_2\times a_7-2$

$=a_2\times\{(a_2)^2-3a_2-2\}-2$

$=(a_2)^3-3(a_2)^2-2a_2-2$

이때, $a_8-a_{15}=63$이므로

$\{(a_2)^3+a_2+1\}-\{(a_2)^3-3(a_2)^2-2a_2-2\}=63$

$(a_2)^2+a_2-20=0$

$(a_2+5)(a_2-4)=0$

$a_2=-5$ 또는 $a_2=4$

(i) $a_2=-5$일 때,

㉡에서

$a_1=\dfrac{6}{5}$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_2=4$일 때,

㉡에서

$a_1=\dfrac{3}{4}$

이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서

$a_1=\dfrac{3}{4}$, $a_2=4$

따라서 $a_8=69$이므로

$\dfrac{a_8}{a_1}=\dfrac{69}{\dfrac{3}{4}}=92$