난이도 : 중상

1. $x \neq 0$인 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax + a^2 & (x < 0) \\ x^2 - 4ax + a^2 & (x > 0) \end{cases} \quad (\text{단}, a > 0)$$

기울기가 m이며 곡선 $y = f(x)$에 접하는 모든 직선을 l_1, ⋯, l_n $(n = 1, 2)$ 이라 하고, $n = P(m)$ $(m > -4a)$이라 하자.

이때, 다음 조건을 만족한다.

(가) $\lim_{m \to -6-} P(m) + \lim_{m \to -6+} P(m) = 3$
(나) 집합 $A = \{x \mid P(x) = 1,\ x\text{는 정수}\}$에 대해, $n(A) = k$이다.

$11k$의 값을 구하여라.

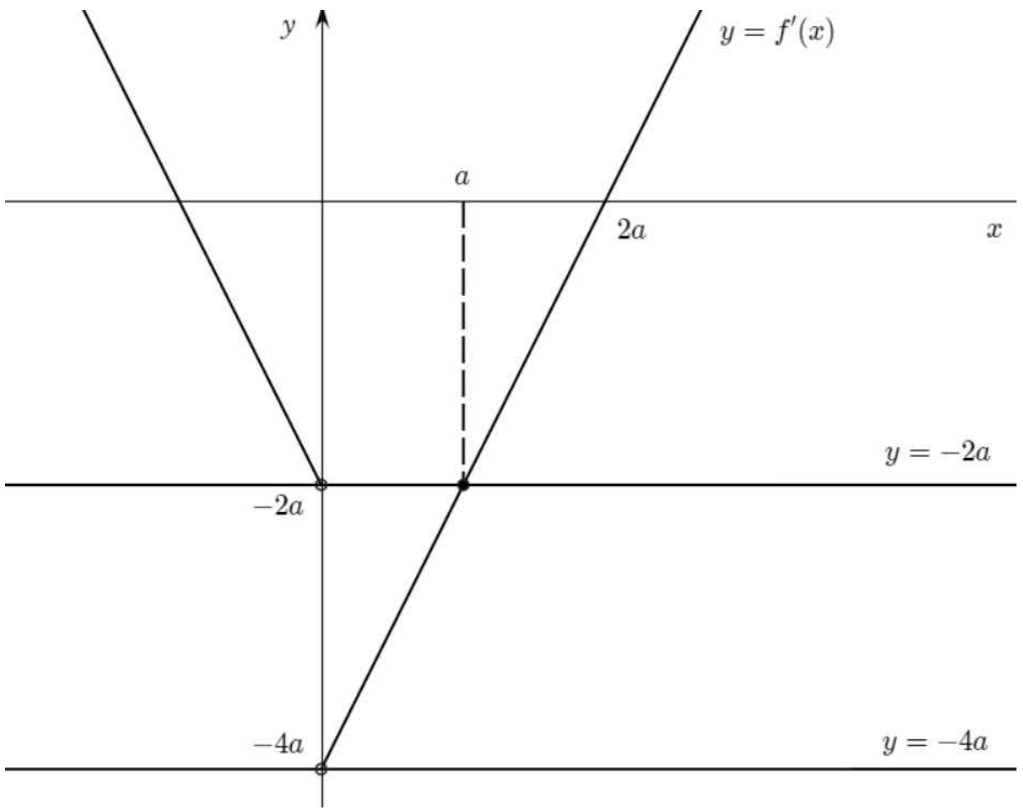
출제의도 : 미분계수의 기하학적 의미를 이해하여 도함수를 나타내고, 특정한 점에서의 좌극한과 우극한을 계산할 수 있는가?

사용된 개념 :
1. 미분계수와 도함수 (고2 수학 2)
2. 함수의 극한 (고2 수학 2)
3. 이차함수의 그래프 (고1 수학 상)

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$ $(x \neq 0)$는 다음과 같다.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x-2a & (x<0) \\ 2x-4a & (x>0) \end{cases}$$

함수 $y=f'(x)$를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.

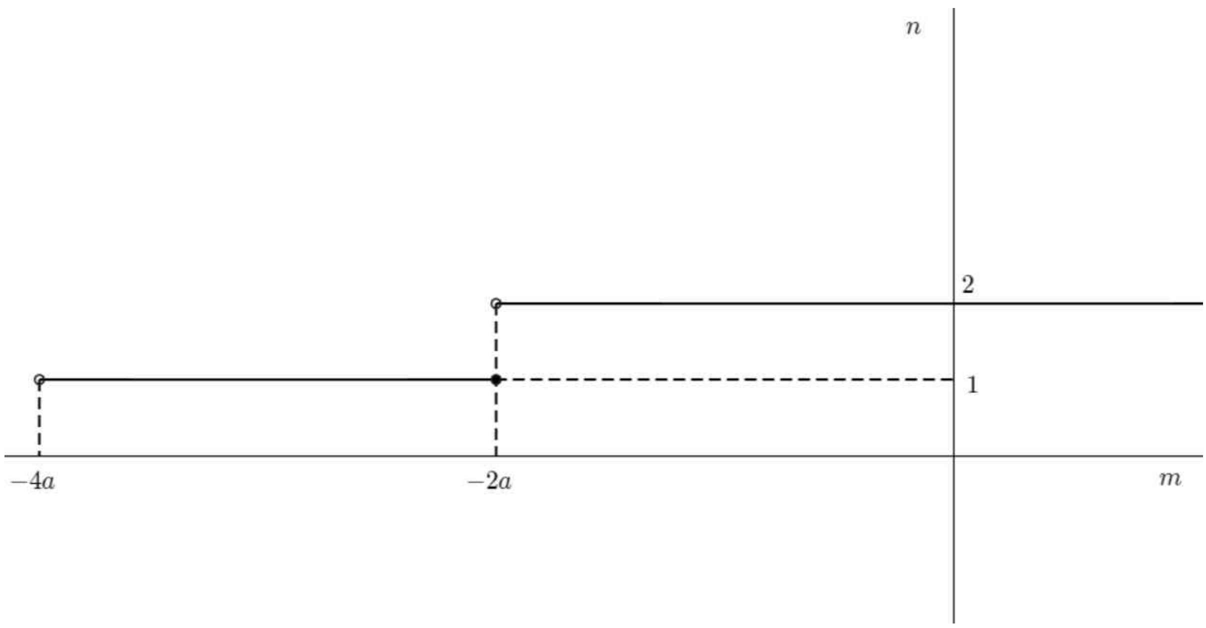


직선 l은 곡선 $y=f(x)$에 접하므로, 기울기 m은 곡선 위의 점 $(t, f(t))$의 x값 $x=t$에서의 미분계수로 나타낼 수 있다.

즉, $m=f'(t)$이다. 이때, 방정식 $m=f'(t)$의 근의 개수가
직선 l의 개수, 즉, n의 값이다.
이때, $m\le -4a$이면, 직선 l은 존재하지 않는다.
이를 바탕으로 m에 대한 함수 $n=P(m)$을 정의하면 다음과 같다.

$$P(m)=\begin{cases}1\ (-4a<m\le -2a)\\2\ (m>-2a)\end{cases}$$

함수 $n=P(m)$을 mn 좌표평면 위에 나타내보자.



이때, $\lim\limits_{m\to -2a-}P(m)+\lim\limits_{m\to -2a+}P(m)=3$ 이므로,
조건 (가)에 의해 $-2a=-6$, 즉, $a=3$ 이다.
조건 (나)에 의해, $A=\{x\mid -4a<x\le -2a,\ x\text{는 정수}\}$ 이므로,
$n(A)=k=-2a+4a=2a=6$,

$\therefore\ 11k=11\times 6=66$

난이도 : 상

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases}-3 & (x<-3)\\ [x] & (-3\le x<0)\\ -x+2 & (0\le x<2 \text{ 또는 } x>2)\\ 2 & (x=2)\end{cases}$$

다음 조건을 만족시키는 이차함수 $P(x)$는 두 개 존재한다.

두 함수를 각각 $P_1(x)$, $P_2(x)$라 하자.

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(가) 함수 $y=f(x)P(x)$은 구간 $(-\infty,\infty)$에서 불연속인 점을 2개 가진다.

(나) 모든 실수 x에 대해, $P(a-x)=P(a+x)$가 성립한다.

(다) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2P(x)}{\sqrt{x^4+3x-2}+x^2}=1$

집합 A, B에 대해 다음과 같이 정의한다.

$A=\{x\mid P_1(x)=k\}$, $B=\{x\mid P_2(x)=k\}$

함수 $g(k)$에 대해, $g(k)=n(A\cup B)$로 정의한다.

함수 $y=g(k)$가 불연속이 되는 실수 k의 값의 개수를 n이라 하고,

모든 a의 값의 합을 m이라 하자.

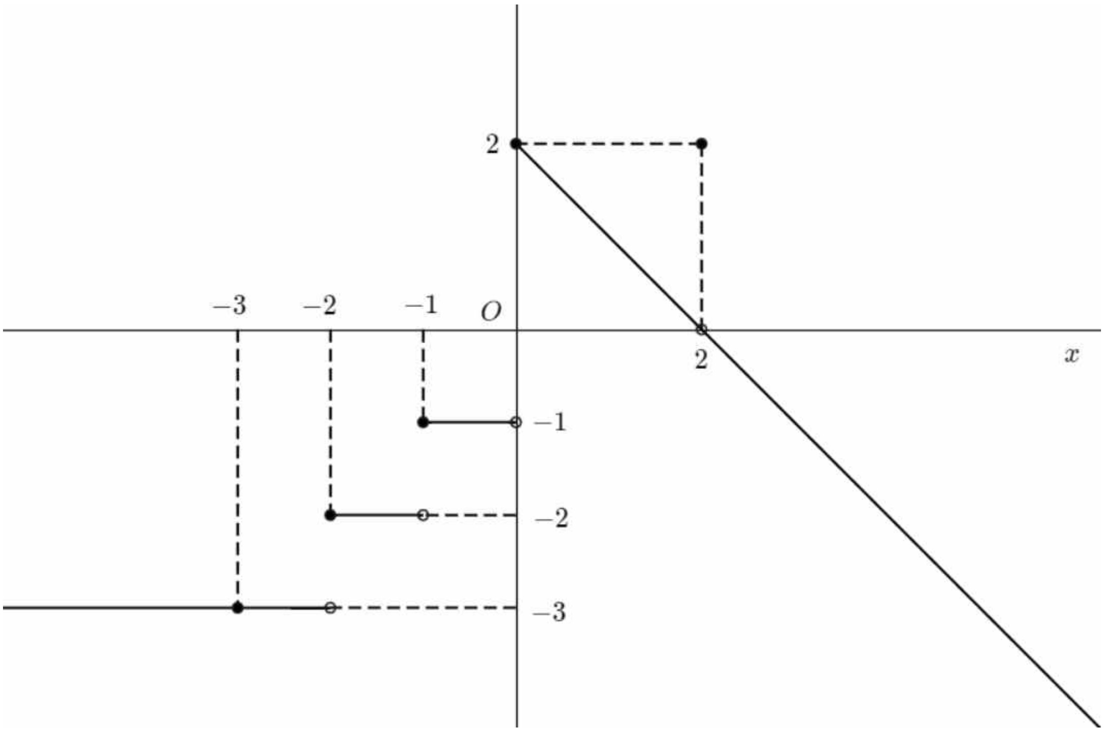
m^2+n^2의 값을 구하여라.

출제의도 : 불연속 함수와 연속함수의 곱의 형태로 이루어진 함수가 연속이 되는 조건을 이해하여, 미지의 함수의 개형을 추론하고, 특정 함수가 불연속이 되는 점을 그래프를 이용하여 인식할 수 있는가?

사용된 개념:

1. 함수의 극한 (고2 수학 2)
2. 함수의 연속 (고2 수학 2)
3. 이차함수의 그래프 (고1 수학 상)
4. 이차방정식의 근 (고1 수학 상)
5. 집합의 합의 연산 (고1 수학 하)

좌표평면 위에 함수 $y=f(x)$를 나타내보자.



이차함수 $P(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $y=f(x)P(x)$가 불연속인 점이 2개이려면 함수 $y=f(x)$가 불연속인 점 두 개에서 $P(x)=0$이여야 한다.

조건 (나)에 의해 이차함수 $y=P(x)$는 $x=a$를 기준으로 선대칭을 이룬다.

위에 서술한 조건을 모두 만족하는 a의 값은 $-1, 0$이다.

따라서 $m=-1+0=-1$이다.

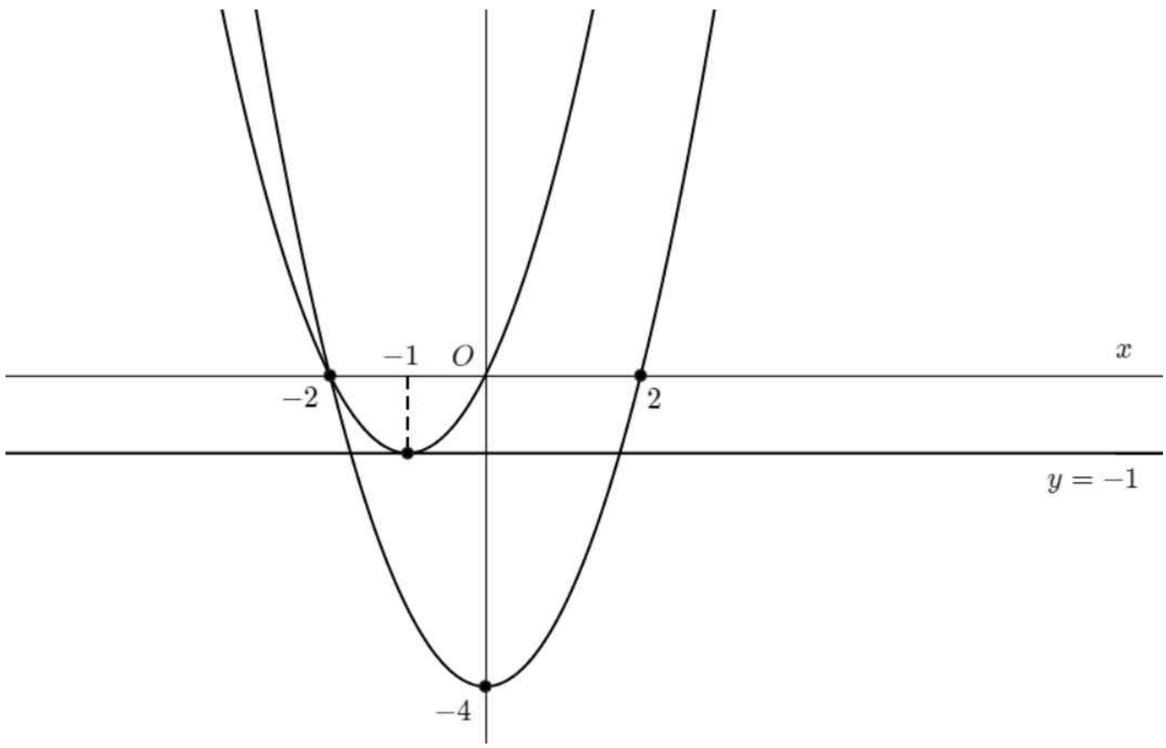
(1) $a=-1$인 경우, $P(x)=bx(x+2)$,

(2) $a=0$인 경우, $P(x)=b(x-2)(x+2)$,

따라서 $\begin{cases} P_1(x)=bx(x+2) \\ P_2(x)=b(x-2)(x+2) \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} P_1(x)=b(x-2)(x+2) \\ P_2(x)=bx(x+2) \end{cases}$,

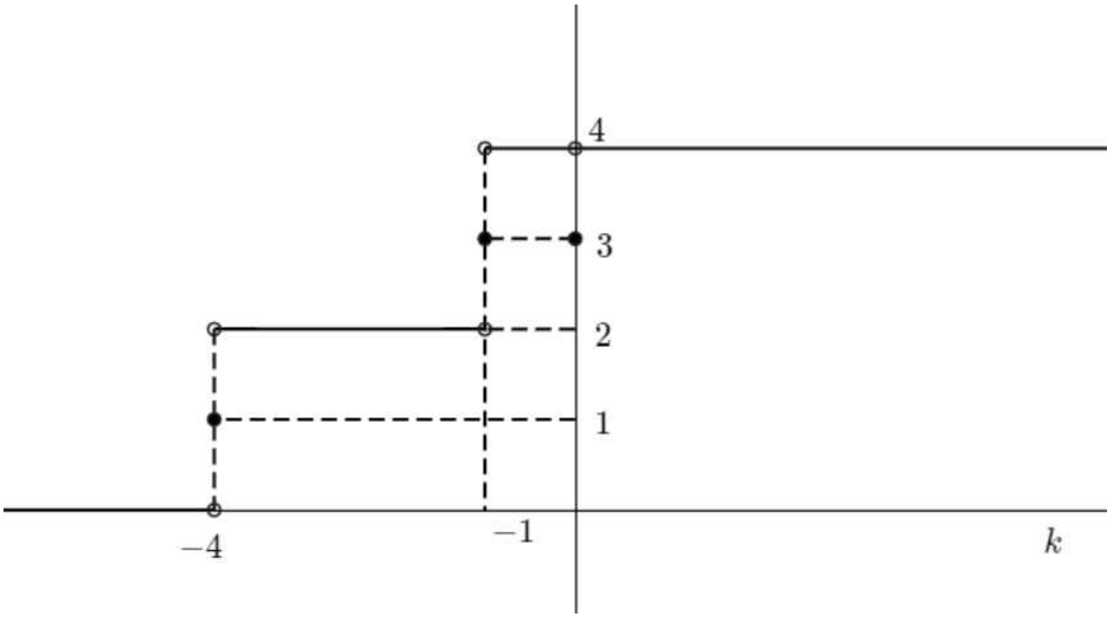
이때, 조건 (다)에 의해 $\frac{2b}{2}=b=1$이다.

함수 $y=P_1(x)$, $y=P_2(x)$를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



이때, k에 대한 함수 $g(k)$는 방정식 $P_1(x)=k$의 근과 방정식 $P_2(x)=k$의 근의 집합의 원소의 개수이다.

함수 $y=g(k)$를 좌표평면 위에 나타내보자.



함수 $y=g(k)$가 불연속이 되는 실수 k는 $-4, -1, 0$이다.

따라서 $n=3$이다.

$$\therefore\ m^2+n^2=(-1)^2+3^2=1+9=10$$

난이도 : 중상

3. 함수 $f(x)=x^2$에 대해, 함수 $g(x)$와 함수 $h(x)$는 다음과 같다.

$g(x)=f(x-a)+b$, $h(x)=-f(x-c)+d$,

좌표평면 위의 곡선 $y=g(x)$ 위의 임의의 점 $P(x_1, y_1)$,

곡선 $y=h(x)$ 위의 임의의 점 $Q(x_2, y_2)$가 존재한다.

$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$의 값을 m이라 하면, 모든 점 P, Q에 대해,

$m \leq 0$ 또는 $m \geq 2$이다.

이때, 다음 조건을 만족한다.

(가) $m=0$을 만족하는 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식을 $t_1(x)=q_1$라 하면, 임의의 실수 r에 대해서 $\lim\limits_{x \to r} t_1(x)=2$이다.

(나) $m=2$를 만족하는 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식을 $t_2(x)=2x+q_2$라 하면, x축, y축, 직선 $y=t_2(x)$로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\dfrac{1}{4}$이다. (단, $q_2 \neq 1$)

방정식 $g(x)=k$의 근의 개수를 $I_1(k)$라 하고, 방정식 $h(x)=k$의 근의 개수를 $I_2(k)$라 하자.

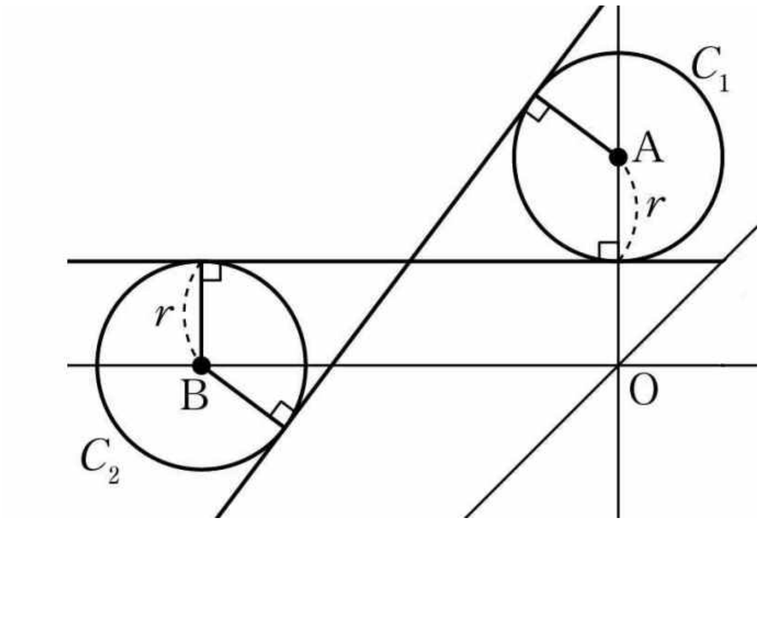
$I(k)=I_1(k)+I_2(k)$일 때, 함수 $y=I(k)$가 불연속이 되는 점의 개수를 n이라 할 때, n의 값을 구하여라.

(단, a, b, c, d는 상수)

출제의도 : 곡선과 곡선 간의 공통접선을 기하학적으로 이해하며, 공통내접선의 기울기가 의미하는 바를 이해하여 주어진 공통내접선을 가지는 곡선을 추론할 수 있고, 특정 함수의 연속성을 판단할 수 있는가?

사용된 개념:
1. 함수의 극한 (고2 수학 2)
2. 함수의 연속 (고2 수학 2)
3. 이차함수의 그래프 (고1 수학 상)
4. 이차방정식의 근 (고1 수학 상)
5. 함수의 평행이동과 대칭이동 (고1 수학 상)

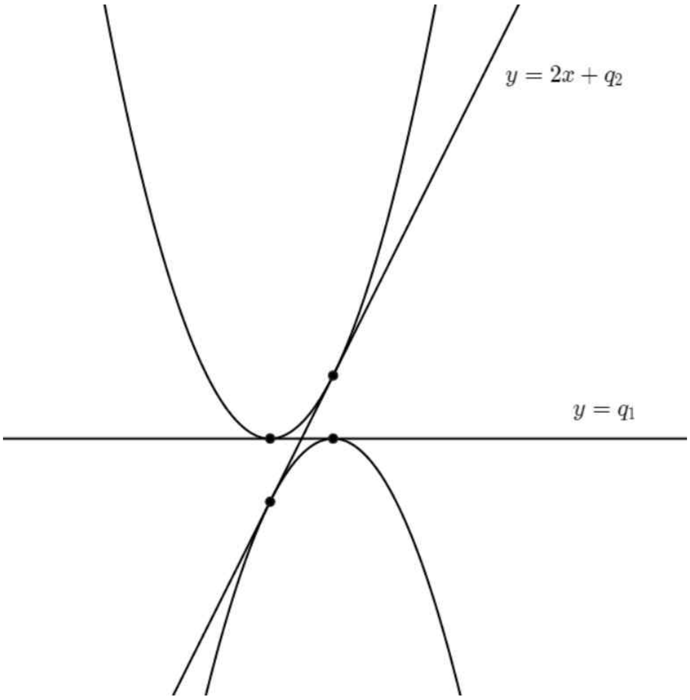
● 아래의 그림과 같이 만나지 않는 두 곡선 사이에서 두 개의 공통내접선을 그을 수 있다. 이때, 각각의 공통내접선의 기울기는 두 곡선 위의 점들을 이은 기울기의 범위를 알려주는 경계값이 된다.



점 P와 점 Q를 이은 직선의 기울기가 m인데, m의 경계값은 $0, 2$이다.

따라서 곡선 $y=g(x)$와 곡선 $y=h(x)$는 기울기가 0인 직선과 기울기가 2인 직선을 공통내접선으로 가진다.

따라서, 개형을 그려보면 다음 그림과 같다.



한편, 조건 (가)에 의해, $\lim_{x \to r} t_1(x) = q_1 = 2$이다.

조건 (나)에서,주어진 영역의 넓이를 S라고 하자.

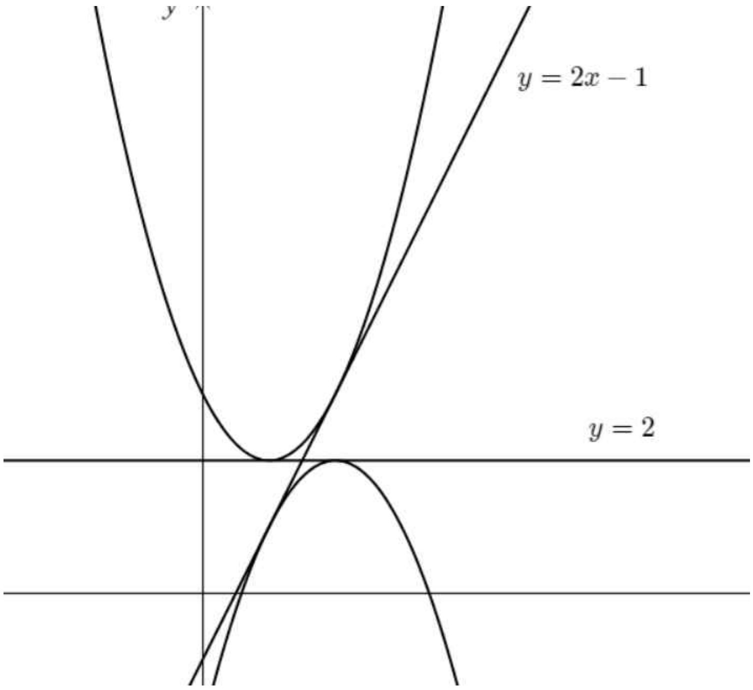
(1) $q_2 > 0$인 경우) $S = \frac{1}{2} \times -(-\frac{q_2}{2}) \times q_2 = \frac{(q_2)^2}{4}$

(2) $q_2 < 0$인 경우) $S = \frac{1}{2} \times (-\frac{q_2}{2}) \times (-q_2) = \frac{(q_2)^2}{4}$

조건(나),(1),(2)에서 $S = \frac{(q_2)^2}{4} = \frac{1}{4}$,

$q_2 = -1$ ($\because$ $q_2 \neq 1$)

공통내접선들의 직선의 방정식은 각각 $y=2$, $y=2x-1$이다.
따라서 공통내접선에 접하는 곡선 $y=g(x)$와 $y=h(x)$를 그리면
다음과 같다.



함수 $g(x)$는 $g(x)=(x-a)^2+2=x^2-2ax+a^2+2$로 나타낸다.

이때, 직선 $y=2x-1$과 접하므로,

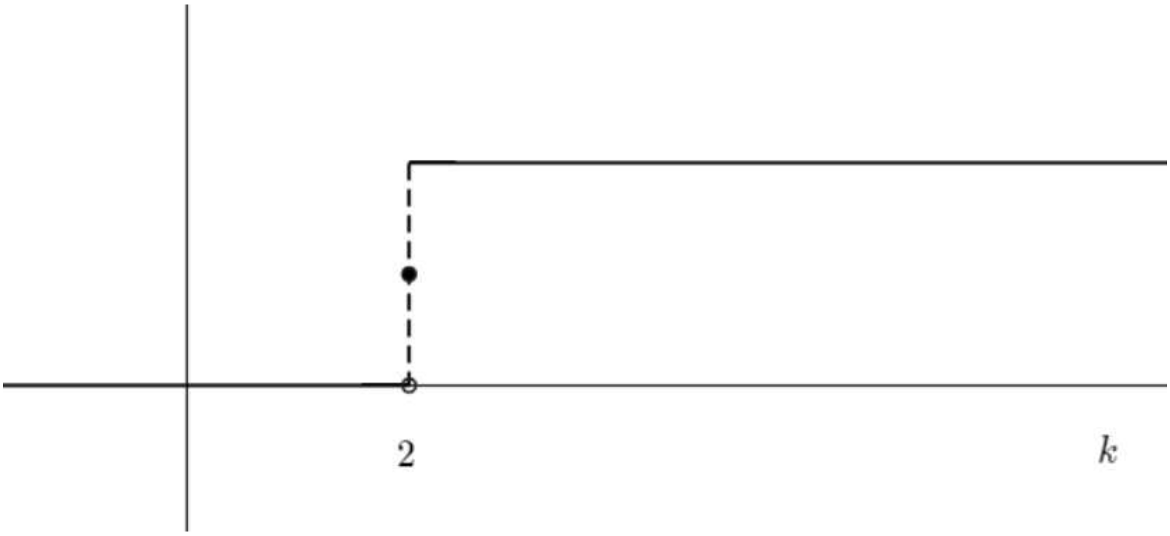
방정식 $x^2-2(a+1)x+a^2+3=0$이 중근을 가진다.

$$\frac{D}{4}=2a-2=0,\ a=1,$$

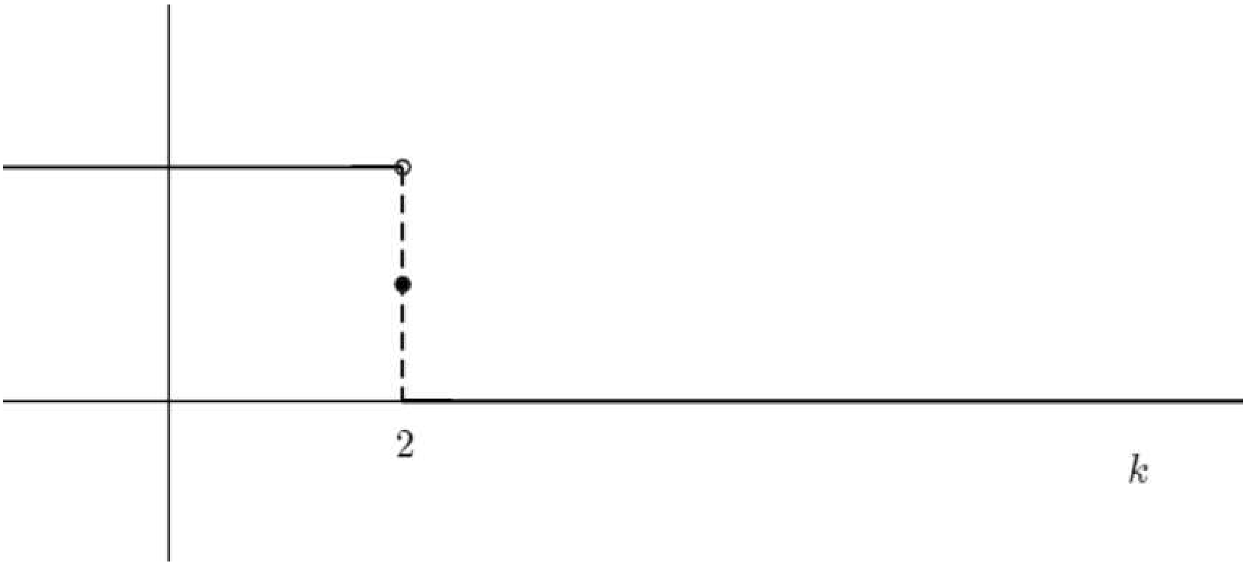
같은 방법으로 함수 $h(x)$를 구할 수 있다.

$$\begin{cases} g(x)=x^2-2x+3 \\ h(x)=-x^2+4x-2 \end{cases},$$

한편, 함수 $y=I_1(k)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $y=I_2(k)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서, 함수 $I(k)=I_1(k)+I_2(k)=\begin{cases}0+2\ (x<2)\\1+1\ (x=2)\\2+0\ (x>2)\end{cases}$,

즉, $I(k)=2$

$\therefore n=0$

난이도 : 최상

4. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여, 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x)=\lim_{t\to x+}\frac{|f(t)|}{f(t)}+\lim_{t\to x-}\frac{|f(t)|}{f(t)}$$

함수 $y=g(x)$가 불연속이 되는 점은 3개 존재하고,

삼차함수 $h(x)=kx^3-3akx^2-9a^2kx+11a^3k\ (a>0)$에 대해,

함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

집합 $C_r=\{(x,y)\,|\,y=f(x)=r,\ r\text{은 정수}\}$와 세 점 $A(m,n)$, $B(p,q)$, $P(t,f(t))$가 존재한다. (단, $m<t<p$)

$(m,n)\in C_0$, $(p,q)\in C_0$이고, 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은 $512\sqrt{3}$이다. $\sum_{r=1}^{135} n(C_r)$의 값을 구하여라.

출제의도 : 주어진 조건을 이해하여 함수의 그래프의 개형을 추론하고, 곱의 형태로 이루어진 함수가 연속이 되는 조건을 이용하여 함수식을 나타낼 수 있는가?

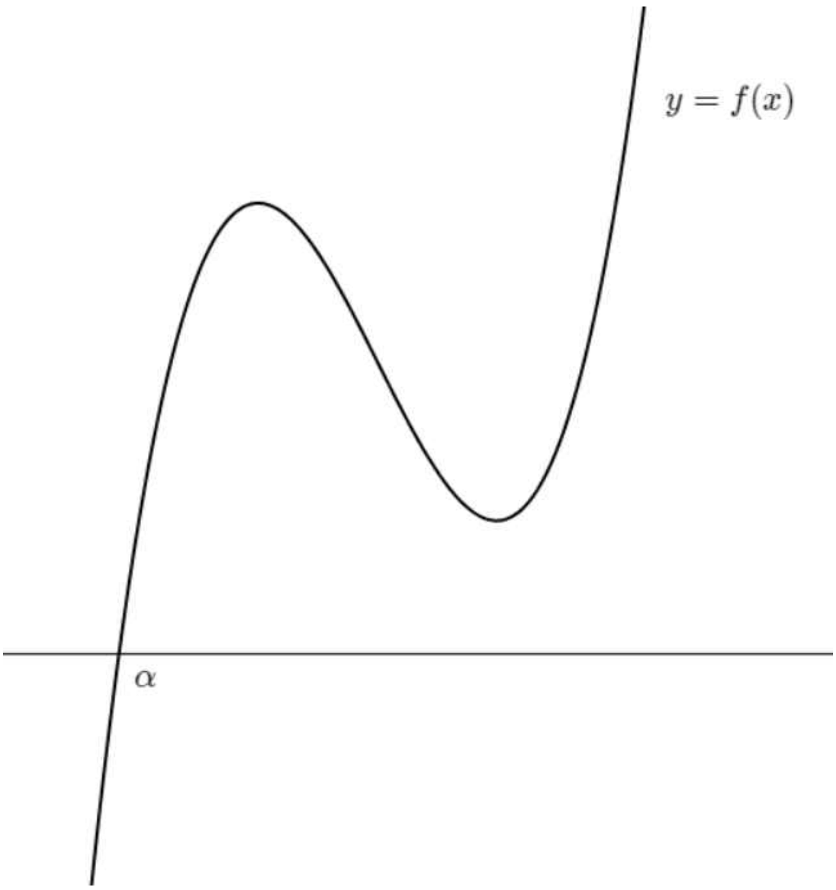
사용된 개념:

1. 함수의 극한 (고2 수학 2)
2. 함수의 연속 (고2 수학 2)
3. 함수의 극댓값과 극솟값 (고2 수학 2)
4. 함수의 그래프 (고2 수학 2)
5. 수열의 합 (고2 수학 1)
6. 집합의 정의 (고1 수학 하)

$$\frac{|f(t)|}{f(t)}=\begin{cases}1 & (f(t)>0)\\ -1 & (f(t)<0)\end{cases}$$ 이다. ⋯ ㉠

한편, 삼차함수 $y=f(x)$는 직선 $y=0$과의 위치관계에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다.

(1) 방정식 $f(x)=0$이 1개의 실근을 가지는 경우



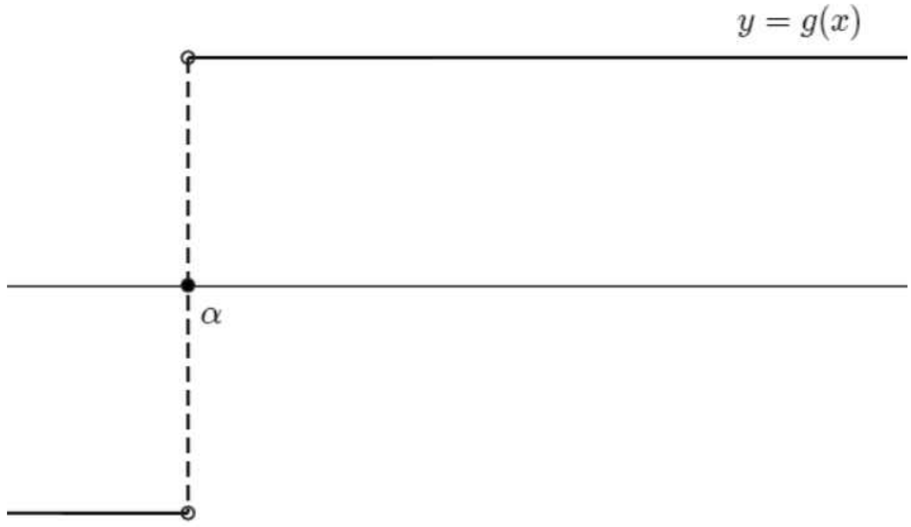
㉠에 의해,

$x=\alpha$일 때, $g(\alpha)=\lim_{t\to\alpha+}\frac{|f(t)|}{f(t)}+\lim_{t\to\alpha-}\frac{|f(t)|}{f(t)}=1-1=0$,

$x<\alpha$일 때, $g(x)=\lim_{t\to x+}\frac{|f(t)|}{f(t)}+\lim_{t\to x-}\frac{|f(t)|}{f(t)}=-1-1=-2$,

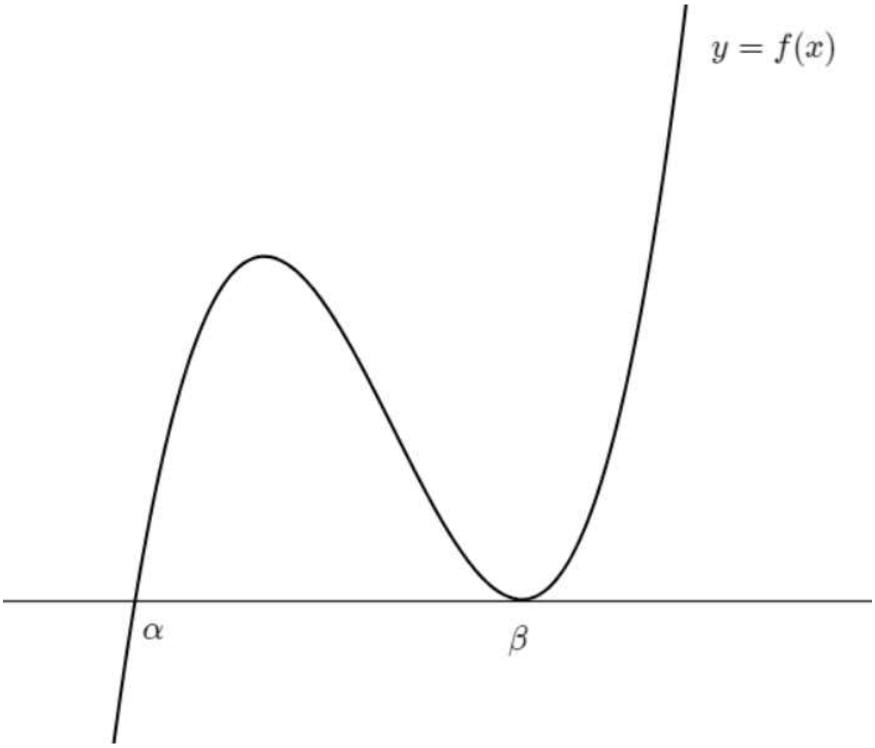
$x>\alpha$일 때, $g(x)=\lim_{t\to x+}\frac{|f(t)|}{f(t)}+\lim_{t\to x-}\frac{|f(t)|}{f(t)}=1+1=2$

$y = g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때, 불연속이 되는 점은 1개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(2) 방정식 $f(x)=0$이 2개의 실근을 가지는 경우



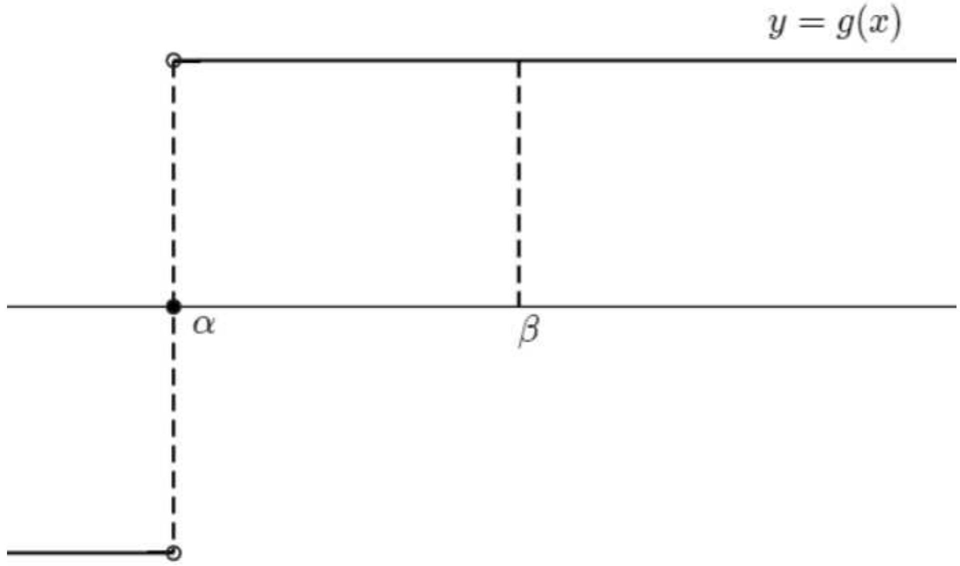
㉠에 의해,

$x=\alpha$일 때, $g(\alpha)=\lim_{t\to\alpha+}\frac{|f(t)|}{f(t)}+\lim_{t\to\alpha-}\frac{|f(t)|}{f(t)}=1-1=0$,

$x<\alpha$일 때, $g(x)=\lim_{t\to x+}\frac{|f(t)|}{f(t)}+\lim_{t\to x-}\frac{|f(t)|}{f(t)}=-1-1=-2$,

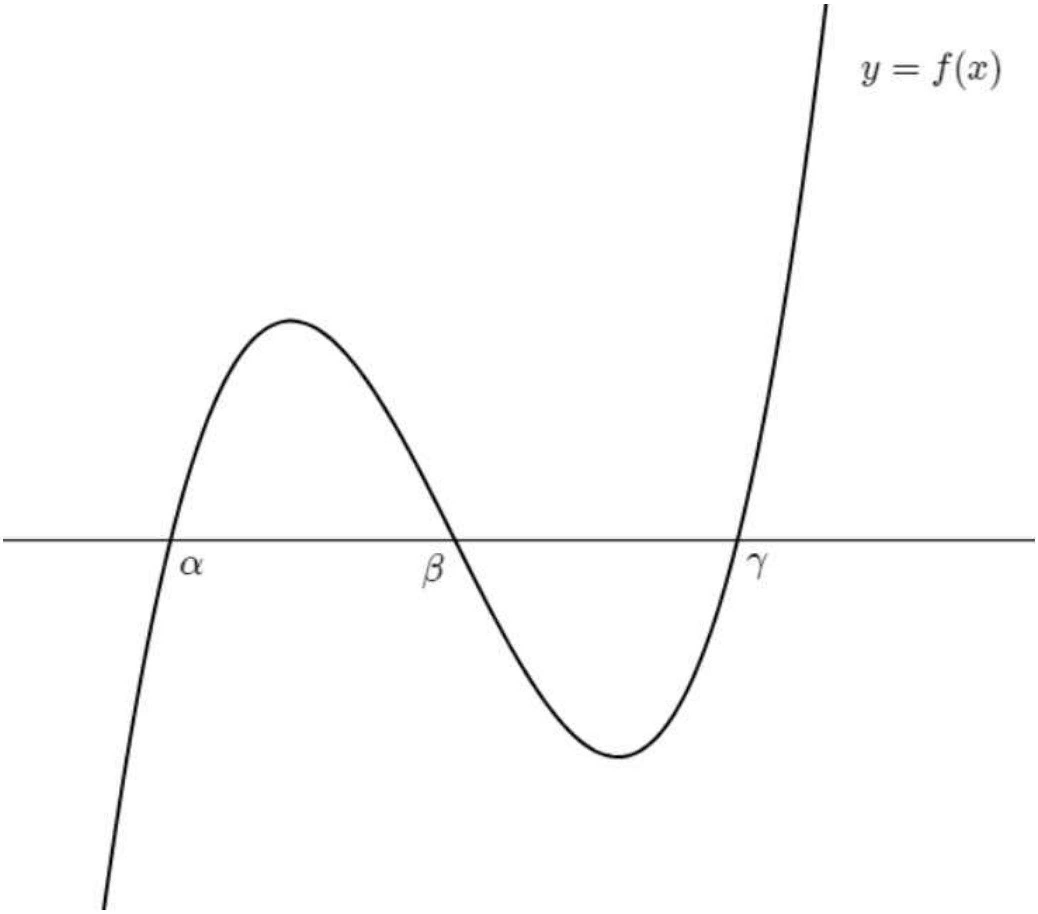
$x>\alpha$일 때, $g(x)=\lim_{t\to x+}\frac{|f(t)|}{f(t)}+\lim_{t\to x-}\frac{|f(t)|}{f(t)}=1+1=2$

$y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때, 불연속이 되는 점은 1개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(2) 방정식 $f(x)=0$이 3개의 실근을 가지는 경우



㉠에 의해,

$$x=\alpha \text{일 때, } g(\alpha)=\lim_{t\to\alpha+}\frac{|f(t)|}{f(t)}+\lim_{t\to\alpha-}\frac{|f(t)|}{f(t)}=1-1=0,$$

$$x=\beta \text{일 때, } g(\beta)=\lim_{t\to\alpha+}\frac{|f(t)|}{f(t)}+\lim_{t\to\alpha-}\frac{|f(t)|}{f(t)}=1-1=0,$$

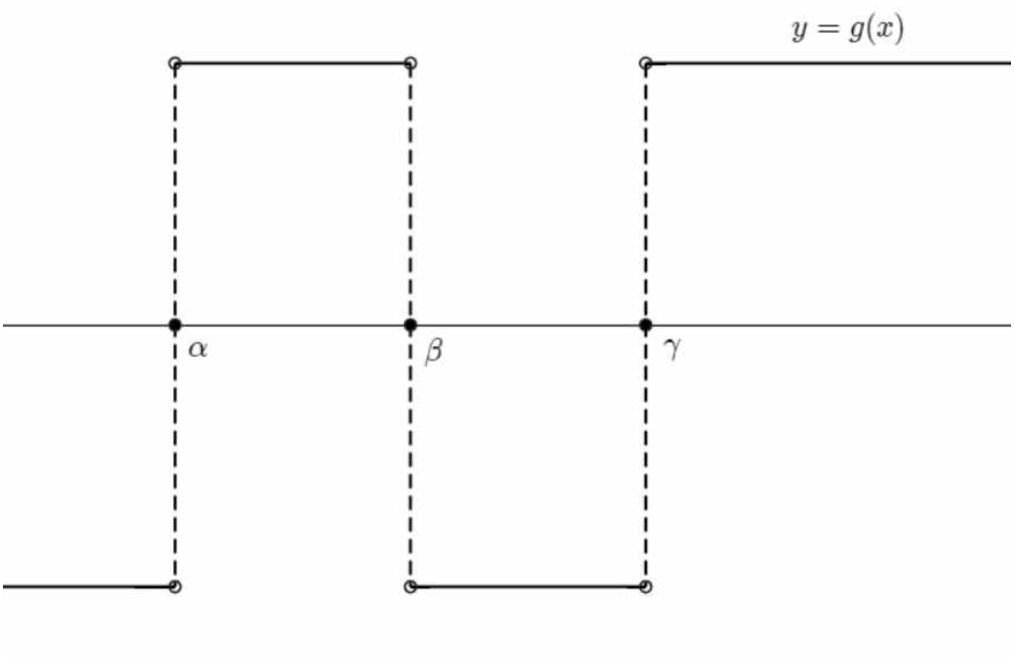
$$x=\gamma \text{일 때, } g(\gamma)=\lim_{t\to\alpha+}\frac{|f(t)|}{f(t)}+\lim_{t\to\alpha-}\frac{|f(t)|}{f(t)}=1-1=0,$$

$x<\alpha$ 또는 $\beta<x<\gamma$일 때,

$$g(x)=\lim_{t\to x+}\frac{|f(t)|}{f(t)}+\lim_{t\to x-}\frac{|f(t)|}{f(t)}=-1-1=-2,$$

$$\alpha<x<\beta \text{ 또는 } x>\gamma \text{ 일 때, } g(x)=\lim_{t\to x+}\frac{|f(t)|}{f(t)}+\lim_{t\to x-}\frac{|f(t)|}{f(t)}=1+1=2$$

$y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때, 불연속이 되는 점은 3개이므로 조건을 만족시킨다.

삼차함수

$$h(x)=kx^3-3akx^2-9a^2kx+11a^3k=k(x^3-3ax^2-9a^2x+11a^3)$$

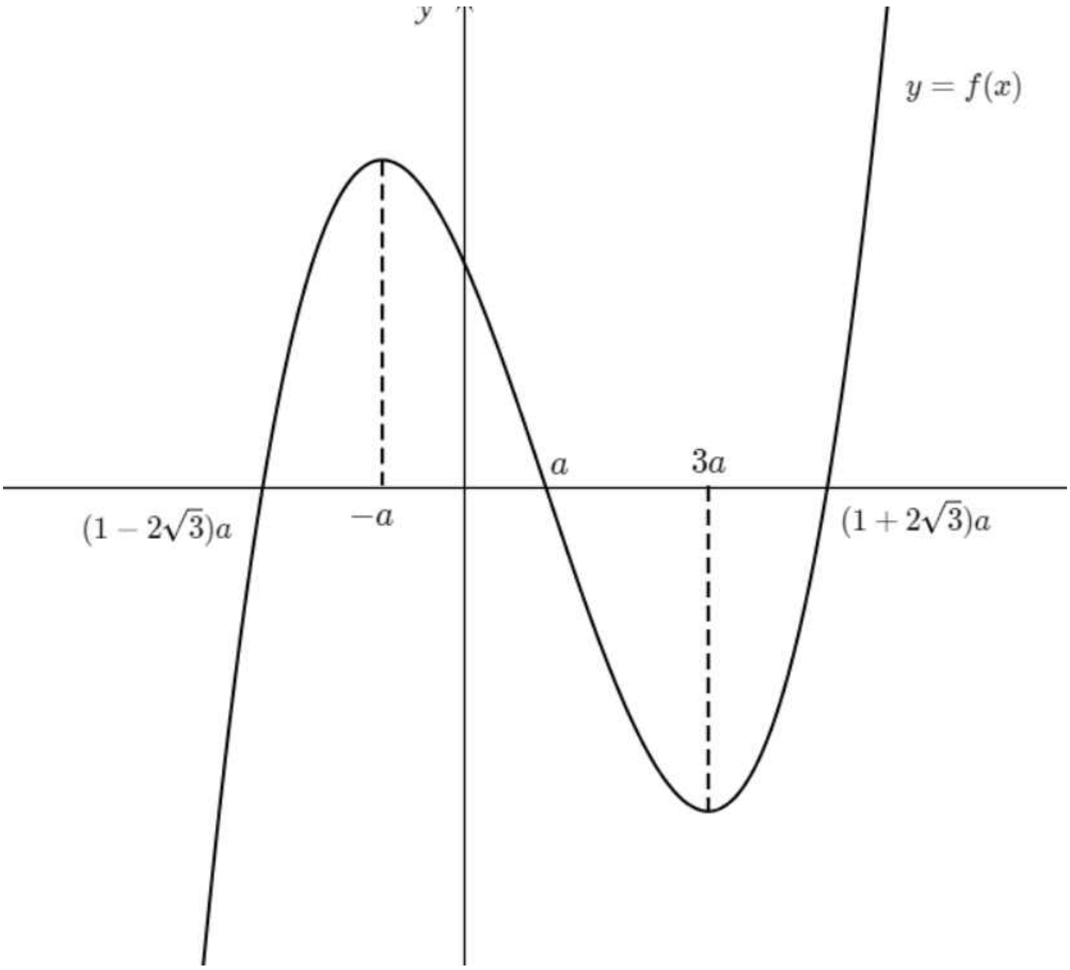
에 대하여, 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로,

$$h(x)=k(x^3-3ax^2-9a^2x+11a^3)=k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma),$$

즉, $(x^3-3ax^2-9a^2x+11a^3)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ 이다.

따라서, $f(x)=x^3-3ax^2-9a^2x+11a^3$ 이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$(m,n) \in C_0$, $(p,q) \in C_0$이므로, 삼각형 ABP의 넓이가 최대가 될 때의 점 A의 좌표는 $(a-2\sqrt{3}a, 0)$이고, 점 B의 좌표는 $(a+2\sqrt{3}a, 0)$이다.

밑변을 선분 AB로 보면, 점 P가 함수 $y=f(x)$의 극대점 또는 극소점이 될 때 삼각형 ABP의 넓이가 최대가 된다. $(\because m < t < p)$

$|f(-a)| = |f(3a)| = 16a^3$이다.

따라서, $\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3}a \times 16a^3 = 32\sqrt{3}a^4 = 512\sqrt{3}$,

즉, $a=2$이다.

이때, 집합 $C_r = \{(x, y) \mid y = f(x) = r,\ r\text{은 정수}\}$에서,

$n(C_r)$은 함수 $y = f(x)$와 직선 $y = r$의 교점의 개수이다.

따라서 정수 r에 대해 $n(C_r)$을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$n(C_r) = \begin{cases} 1\ (r < -128) \\ 2\ (r = -128) \\ 3\ (-128 < r < 128) \\ 2\ (r = 128) \\ 1\ (r > 128) \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{135} n(C_r) = \sum_{n=1}^{127} 3 + 2 + \sum_{n=129}^{135} 1 = 3 \times 127 + 2 + 1 \times 7 = 381 + 2 + 7 = 390$$

난이도 : 중

5. 실수 t에 대해 닫힌 구간 $[0, 4\pi]$에서 정의된 연속함수 $f(t)$가 존재한다.

$$f(t) = \lim_{x \to 0}\left[\frac{2\left\{\cos^3(x^2) - 1\right\}\left\{\sin^2(x^2)\right\}}{3x^8} + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(2t) + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(2t)\right]$$

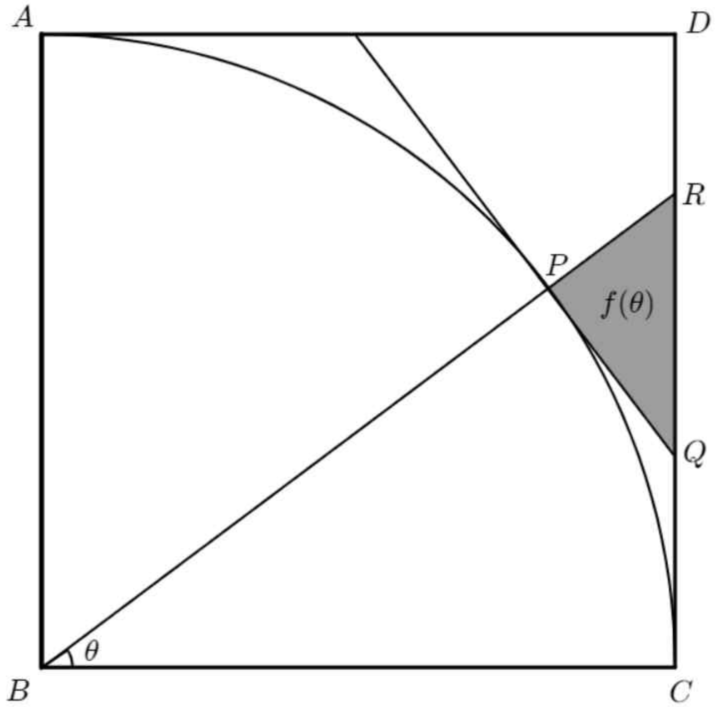
t에 대한 방정식 $f(t) = 0$의 모든 실근의 합을 구하여라. 〔4점〕

난이도 : 중

6. 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 $ABCD$ 안에 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$이고 반지름의 길이가 3인 부채꼴 BCA가 있다. 호 AC위의 점 P에서의 접선이 선분 CD와 만나는 점을 Q, 선분 BP의 연장선이 선분 CD와 만나는 점을 R라 하자.

$\angle PBC = \theta$일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $f(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{16f(\theta)}{\theta^3}$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)



출제의도 : 기하적 상황을 해석하고 삼각함수의 극한을 이용할 수 있는가?

사용된 개념:
1. 삼각함수의 극한의 도형 활용 (고3 미적분)
2. 삼각함수의 극한 (고3 미적분)

선분 BQ를 긋자. 이때, $\angle QBC = \frac{\theta}{2}$이다.

$\overline{PQ} = \overline{CQ} = \overline{BC} \times \tan\frac{\theta}{2} = 3\tan\frac{\theta}{2}$,

한편, 삼각형 RBC와 삼각형 RQP는 닮음이다. ($\because$ RHA닮음)
따라서 $\angle RQP = \theta$,

$\overline{PR} = \overline{PQ} \times \tan\theta = 3\tan\frac{\theta}{2} \cdot \tan\theta$,

$f(\theta) = \frac{9}{2}\tan^2\frac{\theta}{2} \cdot \tan\theta$,

$\lim_{\theta\to 0+} f(\theta) = \lim_{\theta\to 0+} \frac{9}{2} \cdot \frac{\theta^2}{4} \cdot \theta = \lim_{\theta\to 0+} \frac{9\theta^3}{8}$ ($\because$근사정리)

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+} \frac{16f(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta\to 0+} 16 \times \frac{9\theta^3}{8} \times \frac{1}{\theta^3} = 18$$