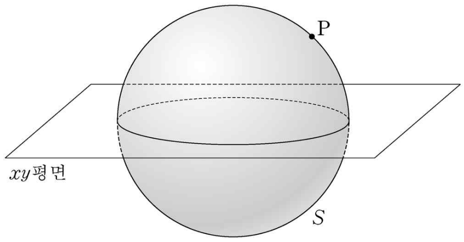
2015학년도 대수능 수학 B형 29번

29. 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=50$과 점 $\mathrm{P}(0, 5, 5)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) 원 C는 점 P를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다. (나) 원 C의 반지름의 길이는 1이다.



[2015학년도 대수능 수학 B형]

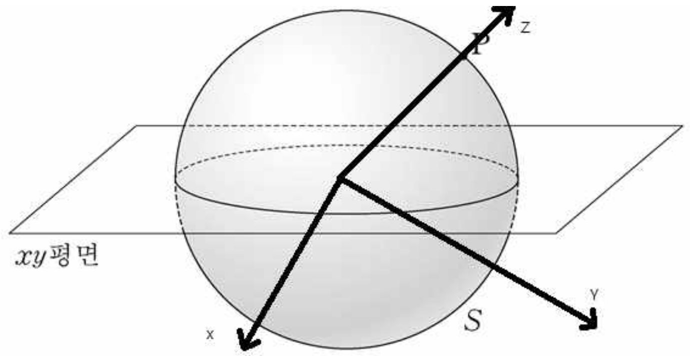
I. 문제 상황 파악

(나) : 도형의 넓이가 π로 일정하므로, 정사영의 넓이는 평면 C와 xy평면이 이루는 각에 의해서만 변한다. 또한, 평면 C의 법선벡터에 관한 조건을 준다.

원 C의 단위법선벡터 $\overrightarrow{h_1}$와 xy평면의 단위법선벡터 $\overrightarrow{h_2}$에 대해 $(\overrightarrow{h_1} \cdot \overrightarrow{h_2})\pi$의 최댓값을 구하라는 의미이다.

II. 색다른 접근

지금부터 좌표계를 재정의하기로 한다.
x축은 그대로 내버려 두되, y축과 z축을 재정의하자.
$\overrightarrow{OP}$ 방향을 z축으로 정의하고,
기존의 x축과 $\overrightarrow{OP}$에 동시에 수직한 직선을 y축으로 다시 정의한다.



다시 정의한 좌표계에 의해 두 가지 값이 변한다. 하나는 점 P의 좌표, 하나는 기존의 xy평면의 방정식.

$P(5,5,0)$은 $P(0,0,5\sqrt{2})$로,
xy평면은 $y-z=0$으로 다시 정의된다.

따라서

$$\overrightarrow{h_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$$

원 C의 중심을 X라고 할 경우 $\overrightarrow{OX}$는 평면 C에 수직하다.
즉, $\overrightarrow{OX}$는 평면 C의 법선벡터이다. $|\overrightarrow{PX}|=1$이므로 $|\overrightarrow{OX}|=\sqrt{50-1}=7$이고
$\triangle OPX$는 $\angle P=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로 $\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OP}=7^2=49$

근데 $\overrightarrow{OP}=(0,0,5\sqrt{2})$이므로 $\overrightarrow{OX}=(a,b,\frac{49}{5\sqrt{2}})$

$a^2+b^2=49-\frac{49^2}{50}=\frac{49}{50}$이므로 $a=\frac{7}{5\sqrt{2}}cos\,\theta$와 같이 삼각매개변수로 치환할 수 있다.

$$b=\frac{7}{5\sqrt{2}}sin\,\theta$$

$\therefore\ \overrightarrow{OX}=\frac{7}{5\sqrt{2}}(\cos\theta,\sin\theta,7)$

$\therefore\overrightarrow{h_1}=\frac{1}{5\sqrt{2}}(\cos\theta,\sin\theta,7)$

$S'=|\overrightarrow{h_1}\cdot\overrightarrow{h_2}|\pi=\frac{\pi}{10}|-\sin\theta+7|\leq\frac{4}{5}\pi$