30. 양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.
(나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점
$(0,\ 0),\ (t,\ f(t)),\ (t+1,\ f(t+1))$
을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\dfrac{t+1}{t}$이다.
(다) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=2$

$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

〔2015학년도 9월 모의평가 수학 B형〕

$\dfrac{f(x)}{x}=g(x)$로 치환하여

(나) 조건을 $g(x)-g(x+1)=\dfrac{2}{x^2}$로 해석할 수 있다는 건 흔히들 알고 있는, 공통된 풀이이니 자세한 이야기는 생략.

지금부터는 정적분으로 구간을 어떻게 쪼갤 것인가를 구체적으로 전개해보도록 한다.

$$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)dx=\int_3^5 g(x)dx+\int_5^{\frac{11}{2}} g(x)dx-\int_3^{\frac{7}{2}} g(x)dx$$

$$=\int_1^3 g(x+2)dx-\int_3^{\frac{7}{2}}\{g(x)-g(x+2)\}dx$$

$$=\int_1^2 g(x+2)dx+\int_1^2 g(x+3)dx-\int_3^{\frac{7}{2}}\{g(x)-g(x+2)\}dx$$

여기서 $g(x)-g(x+1)=\dfrac{2}{x^2}$

$g(x+1)-g(x+2)=\dfrac{2}{x+1^2}$

$\therefore g(x)-g(x+2)=\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x+1^2}$

이므로 이를 이용하여 식을 전개할 수 있다.