평가원/교육청 및 고난도 우수문항 해설 by 土美(Tommy)
2013학년도 대수능 수리 가/나형 30번

30. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역

$$\{(x,\ y)\,|\,2^x - n \le y \le \log_2(x+n)\}$$

에 속하는 점 중 다음 조건을 만족시키는 점의 개수를 a_n이라 하자.

(가) x좌표와 y좌표는 서로 같다. (나) x좌표와 y좌표는 모두 정수이다.

예를 들어, $a_1=2$, $a_2=4$이다. $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

[2013학년도 대수능 수리 가/나형 공통]

I. 문제 상황 파악

1) 함수 $f_1(x) = 2^x - n$과 $f_2(x) = \log_2(x+n)$은 서로 역함수 관계이다.

2) 조건 (가) : $y = x$위에 있는 점들만을 세라는 의미이다.

3) 조건 (나) : 격자점을 세라는 의미이다.

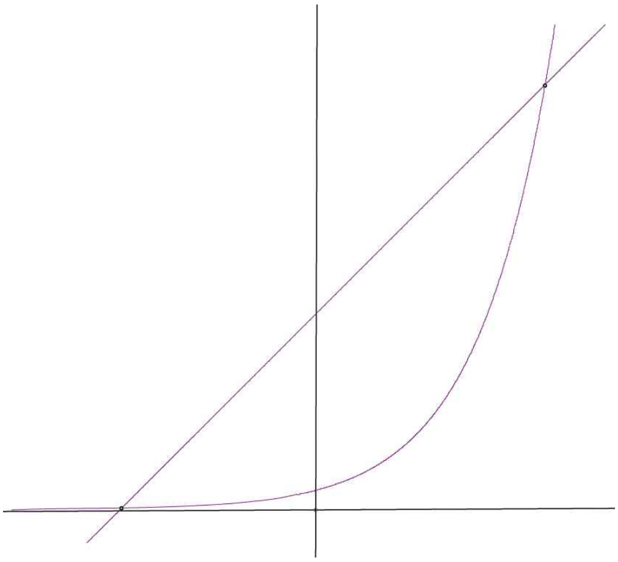
II. 상황의 구체적인 해석

집합 $A_{n=}\{x\,|\,2^x - n \le x \le \log_2(x+n)$, x는 정수$\}$ 의 원소의 개수를 구하라는 의미가 된다.

두 함수가 역함수 관계이고, 단조증가함수이므로 교점들이 직선 $y = x$ 위에 존재함을 알 수 있다.

III. 본격적 풀이에 착수

이제 $y = 2^x$, $y = x + n$ 두 함수의 그래프를 그려보자.



두 교점, 즉 함수 $g_n(x)=2^x-x-n$의 두 근의 x좌표를 α_n, β_n이라 하자. (단, $\alpha_n<\beta_n$)

이 때 집합 A_n의 임의의 원소 x는

$$\alpha_n \le x \le \beta_n$$

을 만족한다.

이 두 근이 어느 두 정수 사이에 존재하고 있을지를 보아야 한다.
(주의: a_1, a_2의 값을 이미 주었기 때문에 지금부터는 $n \ge 3$인 경우만 본다.)

(A) α_n의 범위

$$g_n(-n)=2^{-n}>0$$
$$g_n(-n+1)=2^{-n+1}-1<0$$

이므로 중간값 정리에 의해

$$-n<\alpha_n<-n+1$$

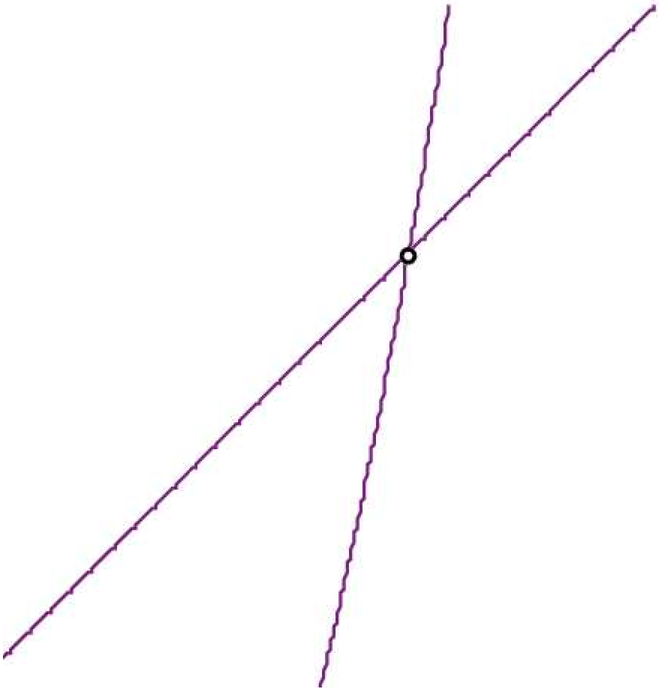
임을 알 수 있다.
양쪽의 부등호에 등호표시가 없다는 것에 주목하자. 즉 α_n은 정수가 아니다.

(B) β_n의 범위 : 이 해설을 작성한 당사자도 이 문제를 시간 압박이 있는 상황에서 처음 맞닥뜨렸을 당시 바로 이 부분에서 꽤 막혔다. 연역 풀이를 이끌어가기 위해 넘어야 했던 장벽 중 하나이다.

어떤 정수 k_n에 대해 β_n이 부등식

$$k_n \le \beta_n < k_n + 1$$

를 만족한다고 하자. 아까의 그 그림을 확대하여 β_n 부근에서만을 보도록 하자.



$$x > \beta_n \text{일 때는 } x + n < 2^x$$

$$x \le \beta_n \text{일 때는 } x + n \ge 2^x$$

이라는 것이 시각적으로 명백하다.

따라서

$$g_n(k_n) \le 0 < g_n(k_n + 1)$$

즉,

$$2^{k_n} - k_n - n \le 0 < 2^{k_n + 1} - (k_n + 1) - n$$

이 식을 n에 대해 정리하면

$$2^{k_n} - k_n \le n < 2^{k_n+1} - (k_n+1)$$

임을 알 수 있다.

따라서 k_n은 n에 따라 달라지는 값이며, 이 값은 n이 커짐에 따라 달라짐을 알 수 있다.

$2^2 - 2 = 2$
$2^3 - 3 = 5$
$2^4 - 4 = 12$
$2^5 - 5 = 27$
$2^6 - 6 = 58$
.
.
.
다음과 같이 진행하므로
$3 \le n < 5 \;\; \rightarrow \;\; k_n = 2$
$5 \le n < 12 \;\; \rightarrow \;\; k_n = 3$
$12 \le n < 27 \;\; \rightarrow \;\; k_n = 4$
$27 \le n \le 30 \;\; \rightarrow \;\; k_n = 5$

(C) 이제 a_n을 표현하고 구해보자.

$$-n < \alpha_n < -n+1, \quad k_n \le \beta_n < k_n + 1$$

이므로

$$-n+1 \le x \le k_n$$

이고, 즉

$$a_n = n + k_n$$

임을 알 수 있다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{30} a_n = a_1 + a_2 + \sum_{n=3}^{30} a_n$$
$$= 6 + \sum_{n=3}^{30}(n+k_n) = 6 + \sum_{n=3}^{30} n + \sum_{n=3}^{30} k_n$$
$$= 6 + 462 + 2 \times 2 + 3 \times 7 + 4 \times 15 + 5 \times 4$$
$$= 573$$