평가원/교육청 및 고난도 우수문항 해설 by 土美(Tommy)
2013학년도 9월 모의평가 수리 가형 21번

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g'(x) \le \frac{1}{3}$이다.
>
> (나) $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)} = \frac{8}{9}$

$f(1)$의 값은? [4점]

〔2013학년도 9월 모의평가 수리 가형〕

문제에서 주어진 텍스트만을 기반으로 풀이를 이끌어 나가보도록 하자.

I. 조건문의 해석

$f(x)$는 역함수가 존재하므로 단조증가함수 또는 단조감소함수이다.

최고차항 계수가 1이므로 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

따라서 $f(x)$는 단조증가함수이다.

II. (가) 조건 해석

$\forall x \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \ge \frac{1}{3}$이고, $g(x)$의 치역은 $(-\infty, \infty)$이므로

$\forall x\ f'(x) \ge 3$ or $f'(x) < 0$이다.

$f(x)$는 단조증가함수이므로 $f'(x) < 0$일 수 없다. 따라서

$\forall x\ f'(x) \ge 3$이다.

III. (나) 식에 대한 해석

$\lim_{x \to 3}(x-3)g(x) = 0$이므로 $\lim_{x \to 3}\{f(x)-g(x)\} = 0$

$\therefore f(3) = g(3) = 3$

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-g(x)}{x-3} = \frac{8}{3}$$

$$f'(3) - g'(3) = \frac{8}{3}$$

$$f'(3) - \frac{1}{f'(3)} = \frac{8}{3}$$

평가원/교육청 및 고난도 우수문항 해설 by 土美(Tommy)
2013학년도 9월 모의평가 수리 가형 21번

$f'(3)=3 \text{ or } -\frac{1}{3}$

$f'(3)=3 \ (\because f'(x)>0)$

이차함수 $f'(x)$가 $x=3$에서 최솟값 3을 가지므로

$f'(x)=3(x-3)^2+3$

$\therefore f(1)=f(3)+\int_3^1 f'(x)dx$