Ⅰ. 다항함수의 절댓값의 미분가능성

$f(a)=0$을 만족하는 다항함수 $f(x)$=에 대해 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분 가능한지를 판단하고자 할 때 다음과 같은 과정을 통해 결론에 도달할 수 있다.

$f(a)=0$이므로 다항함수의 구조적 규칙에 의해 $f(x)$는 $(x-a)$를 인수로 갖는다.
지금부터 $f(x)=(x-a)Q_1(x)$이라 하자.

$$\lim_{h\to+0}\frac{|f(a+h)|-|f(a)|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{|f(a+h)|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{|(a+h-a)Q_1(a+h)|}{h}=|Q_1(a)|$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{|f(a+h)|-|f(a)|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{|f(a+h)|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{|(a+h-a)Q_1(a+h)|}{h}=-|Q_1(a)|$$

따라서 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분 가능하면 $Q_1(a)=0$이므로 $Q_1(x)$는 $(x-a)$를 인수로 갖고,
$Q_1(x)=(x-a)Q_2(x)$로 표현 가능하다.
즉 $f(x)=(x-a)^2Q_2(x)$이다. 따라서 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분 가능하기 위해선
$f(x)$가 $(x-a)^2$을 근으로 가져야 한다.

Ⅱ. max, min 함수의 대수적 표현

두 수 중 작지 않은/크지 않는 값을 취하는 함수를 각각 max, min 함수라 하며

$\max\{a,b\}=\begin{cases} a\ (a>b) \\ b\ (a<b)\end{cases}$, $\min\{a,b\}=\begin{cases} a\ (a<b) \\ b\ (a>b)\end{cases}$

와 같이 나타낸다.

이를 한 줄의 식으로 표현할 수 있다.

$\max\{a,b\}=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{1}{2}|a-b|$, $\min\{a,b\}=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{1}{2}|a-b|$

이것을 가지고 다음 문제를 접근할 경우, 더 논리적인 풀이가 가능하다.

21. 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$과 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x) \geq mx) \\ mx & (f(x) < mx) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m의 값은? [4점]

<13학년도 대수능 6월 모의평가 수리 가형>

본 교재 9회 8번

$g(x)$는 $f(x), mx$ 중 큰 값을 취하는 함수이므로
$g(x)=\max\{f(x), mx\}$
로 표현할 수 있다.
$\therefore\ g(x)=\dfrac{f(x)+mx+|f(x)-mx|}{2}$

$g(x)$가 미분가능하고, $\dfrac{f(x)+mx}{2}$는 다항함수임에 따라 미분 가능하므로
$\dfrac{|f(x)-mx|}{2}$는 모든 실수에 대해 미분가능하다

$f(x)-mx$는 삼차함수이므로, 적어도 하나의 근을 갖는다. 하나의 근을 α라 하자.
위에서 증명한 바에 의해 $f(x)-mx$는 $(x-\alpha)^2$를 인수로 갖는다.
$f(x)-mx$를 $(x-\alpha)^2$로 나눈 몫을 $(x-\beta)$라 하자.

$\alpha \neq \beta$일 경우 $f(x)-mx$는 $x=\beta$에서의 함숫값이 0이지만 $(x-\beta)^2$을 인수로 가지지 않기 때문에 $x=\beta$에서 미분 불가능하다. 이는 조건에 모순되므로 $\alpha=\beta$임을 알 수 있다.

$\therefore\ f(x)-mx=(x-\alpha)^3$
$f(x)-mx=x^3-3x-(9+m)x-1$이므로 항등식의 미정계수 결정법에 따라 $m=-12$임을 알 수 있다.