2016학년도 6월 모의평가 수학 B형 30번

30. 정의역이 $\{x \mid 0 \leq x \leq 8\}$이고 다음 조건을 만족시키는 모든 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^8 f(x)dx$의 최댓값은 $p+\frac{q}{\ln 2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 자연수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

(가) $f(0)=1$이고 $f(8) \leq 100$이다.
(나) $0 \leq k \leq 7$인 각각의 정수 k에 대하여
$f(k+t)=f(k)\ (0<t \leq 1)$
또는
$f(k+t)=2^t \times f(k)\ (0<t \leq 1)$
이다.
(다) 열린 구간 $(0, 8)$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

[2016학년도 6월 모의평가 수학 B형]

I) 조건의 해석

(가)
- $f(8) \leq 100$의 의미를 아직 이끌어내기 힘든 상황이다. 일단 유보하자.

(나)
0에서 8까지의 정의역을 길이 1의 구간 8개로 나누었을 때
-각각의 구간이 ‘상수함수 또는 밑이 2인 지수함수’의 형태를 취한다는 것을 알 수 가 있어야 한다.
또한, 여기서 $f(k+1)=f(k)$ or $2f(k)$임을 파악할 수 있어야 한다.
여기서 $0 \leq k \leq 8$인 모든 정수 k에 대해 $f(k)$는 2의 거듭제곱수임과, 그러므로 $f(8) \leq 2^6$임을 알 수 있어야 한다.

(다) 미분불가능한 점에서는 $f(x)$의 개형이 ‘지수함수에서 상수함수로’ 또는 ‘상수함수에서 지수함수로’ 바뀐다.

즉, 함수의 개형이 두 번 바뀜을 의미한다. ……①

이제 요구하는 값 $\int_0^8 f(x)dx$을 구해보자.

2016학년도 6월 모의평가 수학 B형 30번

최댓값을 요구하므로 일반성을 잃지 않고 $f(8)=2^6$이라 한다.

정수 구간 1 진행할 때마다 2배가 되거나 그대로이므로 함수 $f(x)$는 8개의 구간 중 6개의 구간이 지수함수의 개형을 띈다. ……②

①, ② 조건 모두를 만족하는 함수의 개형은

(구간 1의 상수함수)-> (구간 6의 지수함수) -> (구간 1의 상수함수)

또는

(구간 n의 지수함수) -> (구간 2의 상수함수) -> (구간 $(6-n)$의 지수함수)
(단, $1 \le n \le 5$)

이다.

이 두 가지 경우에 대해 바로 계산을 하는 것이 일반적이지만
계산을 편리하게 하기 위해 사전작업을 들어가 보자.

정수 n $(n=0, 1, 2, \cdots, 7)$에 대해 $a_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$라 하자.

이 경우 $\int_0^8 f(x)dx = \sum_{n=0}^{7} a_n$이다.

$[n, n+1]$에서 $f(x)$가 상수함수일 경우
$a_n = \int_n^{n+1} f(x)dx = f(n)$
$f(x)$가 지수함수일 경우
$a_n = \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+1} 2^{x-n} f(n)dx = [\frac{2^{x-n}f(n)}{\ln 2}]_n^{n+1} = \frac{f(n)}{\ln 2}$

$f(x)$는 반드시 2^0부터 2^6까지 지수함수로 증가하는 구간을 가지기 때문에
지수함수 구간 6개를 적분하여 구한 넓이는
$\sum_{k=0}^{5} \frac{2^k}{\ln 2} = \frac{63}{\ln 2}$
로 일정하다.

(그래프 개형에 무관하게 지수함수 부분의 넓이만큼은 변하지 않는다는 의미이다. 상수함수 부분을 잠깐 지워놓고 지수함수 부분끼리 붙여본다 생각하면 직관적으로 이해될 수 있다.)

즉, 상수함수 구간의 적분값이 전체 적분값을 변화시킴을 알 수 있다.

두 상수함수 구간을 각각 $[m_{1,} m_1+1]$, $[m_{2,} m_2+1]$라 하자. $(m_1 < m_2)$
두 상수함수 구간의 적분값의 합은
$a_{m_1}+a_{m_2}=f(m_1)+f(m_2)$
이다.

I) 상->지->상

이 때 $m_1=0$, $m_2=7$이고 $f(m_1)=2^0$, $f(m_2)=2^6$이다.
$\therefore a_0+a_7=65$

II) 지->상->지

처음 지수함수가 길이 n의 구간을 가진다고 할 때 $(1 \le n \le 5)$

$m_1=n$, $m_2=n+1$이고 $f(m_1)=f(m_2)=2^n$

이 때 $a_n+a_{n+1}=2^{n+1} \le 2^{5+1}=2^6=64$

따라서 상->지->상 일 때,
즉
$$f(x)=\begin{cases} 1 & (0 \le x \le 1) \\ 2^{x-1} & (1 \le x \le 7) \\ 64 & (7 \le x \le 8) \end{cases}$$
일 때

$\int_0^8 f(x)dx = 65+\frac{63}{\ln 2}$ 로 최댓값을 가진다.