평가원/교육청 및 고난도 우수문항 해설 by 土美(Tommy)
2011학년도 대수능 수리 가형 17번

17. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(0 \leq t \leq 5)$에서의 속도 $v(t)$가 다음과 같다.

$$v(t)=\begin{cases} 4t & (0 \leq t < 1) \\ -2t+6 & (1 \leq t < 3) \\ t-3 & (3 \leq t \leq 5) \end{cases}$$

$0 < x < 3$인 실수 x에 대하여 점 P가

시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리,
시각 $t=x$에서 $t=x+2$까지 움직인 거리,
시각 $t=x+2$에서 $t=5$까지 움직인 거리

중에서 최소인 값을 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(1)=2$
ㄴ. $f(2)-f(1)=\int_1^2 v(t)\,dt$
ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

[2011학년도 대수능 수리 가형]

I. 문제 상황 파악

세 변위 $s_1(t), s_2(t), s_3(t)$ 중 최솟값을 취하는 함수이다.

즉,

$$f(x)=\min\{s_1(t),\, s_2(t),\, s_3(t)\}\text{이다.}$$

그런데 $s_1(t), s_2(t), s_3(t)$는 전부 일정 시간 간격동안의 변위이므로

$$s_1(x)=\int_0^x v(t)dt$$
$$s_2(x)=\int_x^{x+2} v(t)dt$$
$$s_3(x)=\int_{x+2}^5 v(t)dt$$

이다.

II. 선지 판단

ㄱ. 패스

ㄴ. 계산해볼 수도 있지만, $f(x)$가 $\int_0^x v(t)dt$와는 다른 값이므로

$f(x_2)-f(x_1) \neq \int_{x_1}^{x_2} v(t)dt$

임을 통해 '잘못된 해석'으로 넘겨 판단할 수도 있다.

ㄷ. $f(1)=2$이다. $s_1(1)=2,\ s_3(2)=2$이므로 이 둘의 비교를 하면 된다.
미적분의 원리에 따라
$s_1{}'(x)=v(x),\ s_3{}'(x)=-v(x+2)$ 이므로
$s_1(x)$는 증가함수, $s_3(x)$는 감소함수이다.
즉 $f(x)=\begin{cases} s_1(x)\ (x<1) \\ s_3(x)\ (x>1) \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=s_1{}'(1)=v(1)$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=s_3{}'(1)=-v(3)$$

좌미분계수와 우미분계수의 값이 다르므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분 불가능하다.