평가원/교육청 및 고난도 우수문항 해설 by 土美(Tommy)
2009학년도 9월 모의평가 수리 가형 9번

11. 다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(0)=0$ (나) $0<x<y<1$인 모든 x, y에 대하여 $0<xf(y)<yf(x)$

세 수

$A=f'(0)$
$B=f(1)$
$C=2\int_0^1 f(x)dx$

의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [4점]

[2015학년도 대수능 수학 B형]

(나) 조건에서 흔히들 "위로 볼록인 함수"를 떠올리고 그림을 그려 풀곤 한다.
이제는 많이들 알고 있지만, 반드시 위로 볼록인 함수가 아니더라도 위 조건을 만족하는 함수는 존재한다.

지금부터 할 풀이는 전혀 실전적이지 못하며, 신속성을 중요시해야 할 수능을 대비하는 관점에서는 오히려 지양해야 할 풀이이다. 그래도 의미가 상당히 있는 풀이인 것 같다.

다항함수 $f(x)$가 $f(0)=0$을 만족하므로 $f(x)$는 x를 인수로 가진다.
따라서 어떤 다항함수 $Q(x)$에 대해 $f(x)=xQ(x)$로 표현할 수 있다.

(나) 조건은 $0<\dfrac{f(y)}{y}<\dfrac{f(x)}{x}$으로 해석할 수 있으므로

$0<Q(y)<Q(x)$이다. 즉, $Q(x)$는 $(0,1)$에서 감소하는 함수이다.

$A=f'(0)=Q(0)>Q(1)=1\cdot f(1)=f(1)=B$
$B=f(1)=\int_0^1 2xf(1)dx=\int_0^1 2xQ(1)dx<\int_0^1 2xQ(x)dx=2\int_0^1 f(x))dx=C$
$A=f'(0)=Q(0)=Q(0)\int_0^1 2xdx=\int_0^1 2xQ(0)dx>\int_0^1 2xQ(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx=C$
$\therefore A>C>B$

평가원/교육청 및 고난도 우수문항 해설 by 土美(Tommy)
2009학년도 9월 모의평가 수리 가형 9번

※$f(x)$가 다항함수라는 조건 없이 그저 미분 가능한 함수라는 조건이 주어졌을 경우,
함수 $g(x)$를
$g(x)=\frac{f(x)}{x}$
로 정의할 수 있다. 이 때
$f'(0)=\lim_{x\to+0}g(x)$
가 성립한다.
$g(x)$는 위의 $Q(x)$와 같이 감소함수이므로 $(0,1)$에 있는 임의의 x에 대해

$f'(0)>g(x)$
가 성립하므로 마찬가지 논리를 전개할 수 있다.