2회 정답									
1	④	2	②	3	①	4	③	5	⑤
6	①	7	⑤	8	④	9	③	10	④
11	③	12	③	13	②	14	①	15	⑤
16	9	17	13	18	3	19	30	20	24
21	23	22	297	23	②	24	②	25	①
26	⑤	27	②	28	④	29	32	30	19

예상 1컷 80.
(14.15.28.+ 계산 ↑..)

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[3]{3^4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$3^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 3^1 = 3.$

2. $\int_{-1}^{2}(x^3+x)dx$의 값은? [2점]

① 5 ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ 6

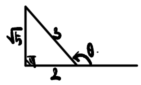
$\int_{-1}^{2}(x^3+x)dx = \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{2}$

$= \left(\frac{16}{4}+\frac{4}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{21}{4}$

3. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 각 θ에 대하여 $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$



$\therefore \tan\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$

4. $f(1)=f'(1)=1$인 다항함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=x^2f(x)$에 대하여 $g'(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$g'(x) = 2xf(x)+x^2f'(x).$

$\therefore g'(1) = 2f(1)+f'(1)$

$= 2+1 = 3.$

5. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & (x<a) \\ x^2 & (x \geq a) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $y=|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [3점]

① 3　② 2　③ 1　④ 0　⑤ -1

i) $f(x)$가 연속.

$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$. $a^2 = 2a+1$. $\therefore a=1$.

ii) $f(x)$가 $x=a$에서 불연속.

$|a^2| = a^2 = |2a-1|$.

$a^2=2a+1$. 연속 X.

$a^2 = -(2a+1)$. $a^2+2a-1=0$. 합 -2.

$\therefore 1+(-2)=-1$.

6. $0 \leq x < 2\pi$에서 방정식

$$\sin x = \tan^2 x$$

의 서로 다른 모든 실근의 합은? [3점]

① 2π　② 3π　③ 4π　④ 5π　⑤ 6π

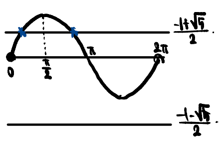
$x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$.

$\sin x = \tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$.

$\sin x(\cos^2 x - \sin x)=0$. $\therefore \sin x = 0$ or $\cos^2 x - \sin x = 0$.

$\sin x = 0$. $x=0, \pi$.

$\cos^2 x - \sin x = 0$. $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. $\sin x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.



합 $2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$.

$\therefore$ 실근 합. $(0+\pi)+\pi=2\pi$.

7. 두 곡선

$$y=x^2(x-1),\ y=x^2$$

으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{8}{3}$　② $\frac{7}{3}$　③ 2　④ $\frac{5}{3}$　⑤ $\frac{4}{3}$

교점부터...

$x^2(x-1)=x^2$. $x^2(x-1-1)=0$. $\therefore x=0, 2$.

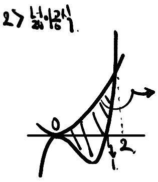
sol 1>. $\therefore \int_0^2 |x^2(x-1)-x^2|\,dx$

$= \int_0^2 |x^2(x-2)|\,dx = \int_0^2 -x^2(x-2)\,dx = \int_0^2 (-x^3+2x^2)\,dx$

$= -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^2$ 0.

$= (-4) + \frac{16}{3} = \frac{4}{3}$.

sol 2> 넓이공식.



$S = \frac{1}{12}\cdot 2^4 = \frac{4}{3}$.

8. 모든 항이 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_1+a_2의 값은? [3점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2}+\dfrac{1}{4}a_n=a_{n+1}$이다.
>
> (나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}a_k=31$

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

$a_n=ar^{n-1}$. $ar\neq 0$.

$a_{n+2}+\frac{1}{4}a_n=a_{n+1}$. $ar^{n+1}+\frac{1}{4}ar^{n-1}=ar^n$.

$\therefore r^2-r+\frac{1}{4}=0$. $r=\frac{1}{2}$.

$a(1+\cdots+r^4)=\dfrac{a\cdot\{1-(\frac{1}{2})^5\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{16}a=31$. $a=16$.

$\therefore a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{5-n}$. $a_1+a_2=16+8=24$.

9. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=f(3)=f(\alpha)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=f(t)$$

이다. 시각 $t=4$에서 점 P의 속도가 0이 될 때, 점 P의 가속도가 0이 되는 시각 t의 값은? (단, α는 상수이다.) [4점]

① $\frac{11}{5}$ ② $\frac{12}{5}$ ③ $\frac{13}{5}$ ④ $\frac{14}{5}$ ⑤ 3

sol 1> $x(t)=t(t-3)(t-\alpha)$.

$v(t)=(t-3)(t-\alpha)+t(t-\alpha)+t(t-3)=3t^2-\frac{78}{5}t+\frac{72}{5}$.

$v(4)=1\cdot(4-\alpha)+4\cdot(4-\alpha)+4\cdot 1$

$=24-5\alpha=0$. $\alpha=\frac{24}{5}$. V

$a(t)=6t-\frac{78}{5}=0$. $t=\frac{13}{5}$.

sol 2> (세 근의 합) $=0+3+\alpha=\frac{39}{5}=3\times$(변곡점)

$\therefore$ (변곡점) $=\frac{13}{5}$.

10. $a_1=90$이고 공차가 정수 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{S_n\}$은 $n=6$에서 최댓값을 갖는다. 가능한 모든 d의 값의 합은? [4점]

① -48 ② -54 ③ -60 ④ -66 ⑤ -72

sol 1> S_n. 정의역이 자연수 집합인 이차함수

$\therefore n=6$ 앞뒤만 비교...

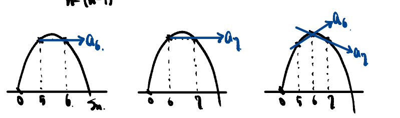
$S_6\geq S_5$. $a_6=90+5d\geq 0$. $d\geq -18$.

$S_6\geq S_7$. $a_7=90+6d\leq 0$. $d\leq -15$.

$-18\leq d\leq -15$.

$\therefore d=-18, -17, -16, -15$. 합 -66.

sol 2> $\dfrac{S_n-S_{n-1}}{n-(n-1)}=a_n$ ...



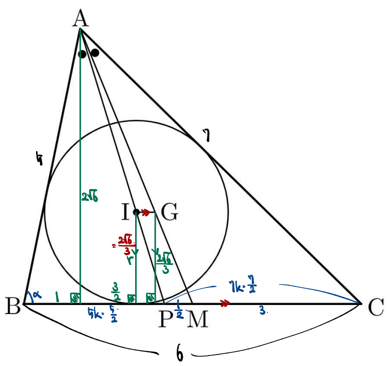
최대 $S_5=S_6$. $a_6=0$. $d=-18$.

최대 $S_6=S_7$. $a_7=0$. $d=-15$.

최대 S_6. $a_6>0$. $a_7<0$. $-18<d<-15$.

$\therefore -18\leq d\leq -15$.

11. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=7$인 삼각형 ABC에 대하여 ∠BAC의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 P, 선분 BC의 중점을 M이라 하고, 삼각형 ABC의 무게중심과 내접원의 중심을 각각 G, I라 하자. 사각형 IPMG의 넓이는? [4점]



① $\frac{1}{6}\sqrt{6}$ ② $\frac{2}{9}\sqrt{6}$ ③ $\frac{5}{18}\sqrt{6}$ ✓

④ $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ ⑤ $\frac{7}{18}\sqrt{6}$

$\cos\alpha = \frac{25+36-49}{2\cdot5\cdot6} = \frac{1}{5}$. $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. ✓

$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5} = 6\sqrt{6}$.

$= \frac{1}{2}\cdot r\cdot(5+6+7) = 9r$. $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ ✓ $\therefore \overleftrightarrow{GI} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

$\therefore \overline{GI} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. $S = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{5\sqrt{6}}{18}$.

12. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)g(4)$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이다.
>
> (나) $\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}-\frac{g(x)}{f(x)}\right\}$의 값이 존재한다.

① 42 ② 45 ③ 48 ✓ ④ 51 ⑤ 54

sol 1> $g(x)=ax+b$ $(a\neq0)$.

$(f\circ g)(x)$ 이차함수. 이차항 계수 a^2.

$(g\circ f)(x)$. 이차함수 이차항 계수 a $\therefore a=1$.

$\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}-\frac{g(x)}{f(x)}\right\}$ 수렴.

if $f(1)\neq0$. (발산)−(수렴)=(발산) X.

$\therefore f(1)=0$. $f(x)=(x-1)(x-\alpha)$. V.

$= \lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}-\frac{x+b}{(x-1)(x-\alpha)}\right\}$

$= \lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{x+b}{x-\alpha}\right)\right\}$

$= \lim_{x\to1}\frac{-\alpha-b}{(x-1)(x-\alpha)}$. $\therefore -\alpha-b=0$. $b=-\alpha$. $g(x)=x-\alpha$.

$(f\circ g)(x)=\{(x-\alpha)-1\}\{(x-\alpha)-\alpha\}=x^2-(3\alpha+1)x+(2\alpha^2+\alpha)$.

$(g\circ f)(x)=(x-1)(x-\alpha)-\alpha=x^2-(\alpha+1)x$. for all $x\in\mathbb{R}$ $\therefore \alpha=0$. $\begin{cases} f(x)=x(x-1). \\ g(x)=x. \end{cases}$

$\therefore f(4)g(4)=4\cdot3\cdot4=48$.

sol 2> 찍기....

Put $g(x)=x$. (가) 당연히 성립. ($\because$ 항등함수...)

$\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}-\frac{x}{f(x)}\right\}$ 수렴 $f(1)=0$.

$= \lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}-\frac{x}{(x-1)(x-\alpha)}\right\}$.

$= \lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}\cdot\left(1-\frac{x}{x-\alpha}\right)\right\}$ = (발산)×(수렴) = (수렴)

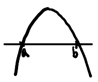
강하게... $\therefore \alpha=0$.

13. 자연수 n에 대하여 두 자연수 a, b $(a<b)$가 다음 조건을 만족시킬 때, b로 가능한 모든 값들의 곱은? [4점]

> (가) $-(n-a)(n-b)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(n)=1$을 만족시키는 $2 \le n \le 10$인 자연수 n의 개수는 5이다.
>
> (나) $|a-n|(b-n)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10} g(n)=11$이다.

① 60　② 72　③ 84　④ 96　⑤ 108

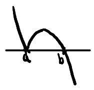
$p(n)=-(n-a)(n-b)$. $p(a)=p(b)=0$.



(가) n이 홀수 ; $n=3,5,7,9$. $f(n)=1$.

n이 짝수 ; $f(n)=\begin{cases} 0 & (n<a \text{ or } n>b) \\ 1 & (n=a \text{ or } n=b) \\ 2 & (a<n<b) \end{cases}$ ∴ a, b 하나는 홀수 하나는 짝수

(나) $g(n)=|a-n|(b-n)$. $g(a)=g(b)=0$.



a가 홀수 b가 짝수.

; $g(a)=1$. $g(b)=1$.

n이 b보다 작은 짝수. $g(n)=2$.
큰 짝수. $g(n)=0$. $\sum_{n=2}^{10} g(n)=11$

$=\overset{n\ \text{홀수}}{(1+1+1+1)}+\overset{n\ \text{짝수}}{(2+2+2+1+0)}$ ∴ $b=8$. $a=1,3,5,7$

a가 짝수 b가 홀수

; $g(a)=1$ $g(b)=1$.

n이 b보다 작고 a가 아닌 짝수 $g(n)=2$
큰 짝수 $g(n)=0$ $\sum_{n=2}^{10} g(n)=11$

$=\overset{n\ \text{홀수}}{(1+1+1+1)}+\overset{n\ \text{짝수}}{(2\times3+1+0)}$

→ b보다 큰 짝수 1개.

∴ $b=9$. $a=2,4,6,8$

∴ $8\cdot9=72$.

14. 최고차항의 계수가 1이고 직선 $x=1$을 축으로 하는 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(|x|)$라 하고, x에 대한 방정식

$$g(x)-x=t$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\sum_{n=0}^{4} h\left(f(0)-\frac{n^2}{4}\right)=9$

ㄴ. 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 함수 $f(x)$가 존재한다.

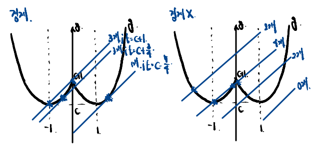
ㄷ. 함수 $\{g(x)\}^2h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 함수 $f(x)$가 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f(x)=(x-1)^2+c$. c는 실수.

$g(x)=f(|x|)=(|x|-1)^2+c=\begin{cases}(x+1)^2+c & (x<0) \\ (x-1)^2+c & (x\ge0)\end{cases}$ $g(0)=f(0)=c+1$.

$g(x)-x=t$. $g(x)=x+t$.



∴ $h(t)=\begin{cases} 0 & (t<c-\frac{5}{4}) \\ 1 & (t=c-\frac{5}{4}) \\ 2 & (c-\frac{5}{4}<t<c+\frac{3}{4}) \\ 3 & (t=c+\frac{3}{4}) \\ 4 & (c+\frac{3}{4}<t<c+1) \\ 3 & (t=c+1) \\ 2 & (t>c+1) \end{cases}$

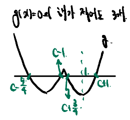
ㄱ $\sum_{n=0}^{4} h\left(f(0)-\frac{n^2}{4}\right)=h(c+1)+h(c+\frac{3}{4})+h(c)+h(c-\frac{5}{4})+h(c-3)$
$=3+3+2+1+0=9$

sol 1>

ㄴ 연속 p. & g. $x=\square$에서 불연속

p g 연속. ⇒ $p(\square)=0$. ∴ $g(c-\frac{5}{4})=g(c+\frac{3}{4})=g(c+1)=0$.
간격이 2.

$g(x)=0$의 해가 적어도 3개. $-1\le c<0$.



$\frac{(c-\frac{3}{4})+(c+1)}{2}=1$. $c=\frac{1}{8}\notin[-1,0)$. c가 존재하지 않음.

"연속 안되네? → g 하나 더 곱한다고 미분가능이 되진 않겠네?" 정도로 판단하고 넘겨도 good.

ㄷ $x=a$에서 $p(x)$ 미분가능. $g(x)$ 미분 X. $\lim_{x\to a+} g(x)\ne\lim_{x\to a-} g(x)$.

$p(x)g(x)$ 미분가능. ⇒ $p(a)=0$. & $p'(a)=0$.

i) $c\ne-1$. ; $\{g(x)\}^2$. $x=0$에서 미분X.

∴ $h(0)=0$. $c-\frac{5}{4}>0$. $c>\frac{5}{4}$.

h. $x=c-\frac{5}{4}$, $c+\frac{3}{4}$, $c+1$에서 $h(x+)=h(x-)$.

∴ $g(x)\big|_{x=\cdots}=\left(\{g(x)\}^2\right)'\big|_{x=\cdots}=0$. $-1\le c<0$ & $c=\frac{1}{8}$ } ϕ

ii) $c=-1$. ; $\{g(x)\}^2$. 미분가능. $\{g(-2)\}^2=\{g(0)\}^2=\{g(2)\}^2=0$.

h. $x=-\frac{9}{4}$, $-\frac{1}{4}$, 0에서 $h(x-)\ne h(x+)$ ∴ $\{g(x)\}^2h(x)$ $x=-\frac{9}{4}$, $-\frac{1}{4}$에서 미분 X

sol 2> 직접 곱해서...

$g(x)h(x)=\begin{cases} 0. \\ g(c-\frac{5}{4}). \\ 2g(x). \\ 3g(c+\frac{3}{4}) \\ 4g(x). \\ 3g(c+1). \\ 2g(x). \end{cases}$ $0=g(c-\frac{5}{4})=\lim_{x\to(c-\frac{5}{4})+} 2g(x)$.

∴ $g(c-\frac{5}{4})=0$. & $g(c+\frac{3}{4})=g(c+1)=0$.
X.

$\{g(x)\}^2h(x)=\begin{cases} 0. \\ \{g(c-\frac{5}{4})\}^2. \\ 4\{g(x)\}^2. \\ 9\{g(c+\frac{3}{4})\}^2. \\ 16\{g(x)\}^2. \\ 9\{g(c+1)\}^2. \\ 4\{g(x)\}^2. \end{cases}$ $x=0$. 미분가능 $\begin{cases} c-\frac{5}{4}>0. \\ \text{or} \\ c=-1. \end{cases}$

연속 $g(c-\frac{5}{4})=g(c+\frac{3}{4})=g(c+1)=0$.

...sol 1과 똑같이 안됨.

15. $a_3=2$이고 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여 $-1<a_n<5$이다.
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} k(a_n+1) & (-1<a_n\le 2) \\ 4-a_n & (2<a_n<5) \end{cases}$$
> 이다. (단, k는 0보다 큰 실수)

$\sum_{n=1}^{5}a_n$의 값으로 가능하지 <u>않은</u> 것은? [4점]

① 10 ② $\frac{17}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 4

$k>0.\ a_3=2.\ a_4=\boxed{3k}^{\text{고정}}<5.\ k<\frac{5}{3}.$

$a_n=\begin{cases}\frac{a_{n+1}}{k}-1. & (-1<a_n\le 2) \\ 4-a_{n+1} & (2<a_n<5.\ -1<a_{n+1}<2)\end{cases}$

$a_2=\frac{a_3}{k}-1=\boxed{\frac{2}{k}-1}^{\text{고정}}<5.\ k>\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}\le k<\frac{5}{3}.\ -\frac{22}{25}<a_1\le 2.$

$a_1=\begin{cases}\frac{2}{k^2}-\frac{1}{k}-1. & (-1<\frac{2}{k^2}-\frac{1}{k}-1\le 2) \quad -k^2<2-k-k^2\le 2k^2. \begin{cases}2-k>0. & k<2. \\ 3k^2+k-2\ge 0 & k\ge\frac{2}{3}\end{cases} \\ 5-\frac{2}{k} & (2<5-\frac{2}{k}<5)\quad k>\frac{2}{3}\quad 2<a_1<5.\end{cases}$

$a_5=\begin{cases}k(3k+1). & (-1<a_4\le 2.\ 0<k\le\frac{2}{3}). \\ 4-3k. & (2<a_4<5.\ \frac{2}{3}<k<\frac{5}{3})\end{cases}$

$a_1=2$일 때를 정리조...

i) $a_1=2$; 모든 자연수 n에 대해 $a_n=2.\quad \sum_{n=1}^{5}a_n=10.$

ii) $2<a_1<5$; $k>\frac{2}{3}.\ a_1=5-\frac{2}{k}.\quad a_2=\frac{2}{k}-1.\ a_1+a_2=4.$

$a_4=3k.\ (0<a_4<2).\ a_5=k(3k+1)=3k^2+k.$

$\therefore \sum_{n=1}^{5}a_n=3k^2+4k+6.\ k>0$에서 증가. $6<\sum_{n=1}^{5}a_n<3\cdot\frac{4}{9}+4\cdot\frac{2}{3}+6$
$=10.$

iii) $-\frac{22}{25}<a_1<2$; $\frac{2}{3}<k<\frac{5}{3}.\ a_1=\frac{2}{k^2}-\frac{1}{k}-1.$

$a_2=\frac{2}{k}-1.\ a_4=3k.\ a_5=4-3k.$

$\therefore \sum_{n=1}^{5}a_n=\frac{2}{k^2}+\frac{1}{k}+\boxed{4}$ 감소+감소=감소. $2\cdot\frac{9}{25}+\frac{3}{5}+4<\sum_{i=1}^{5}a_i<2\cdot\frac{9}{4}+\frac{3}{2}+4$

점근선임을 파악하고 ⑤ 체크해도 good. $=\frac{133}{25}=5.xx.\quad =10.$

$\therefore \frac{133}{25}<\sum_{n=1}^{5}a_n\le 10.\quad 4\notin\{\sum_{n=1}^{5}a_n \mid \{a_n\}$이 조건을 만족$\}.$

단답형

16. $a=\frac{1}{3\log_3 2}$일 때, 64^a의 값을 구하시오. [3점] 9.

$a=\frac{1}{3}\log_2 3.$

$64^a=4^{3a}=4^{\log_2 3}=9$

17. 함수 $f(x)=3x^2-7x-1$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(2)=1$일 때, $F(4)$의 값을 구하시오. [3점] 13

sol 1> $\int f(x)dx=x^3-\frac{7}{2}x^2-x+C.=F(x)$

$F(2)=8-14-2+C=1.\ C=9.$

$\therefore F(4)=64-56-4+9=13.$

sol 2> $F(4)=\{F(4)-F(2)\}+F(2).$

$=\int_2^4 f(x)dx+1=\int_2^4(3x^2-7x-1)dx+1.$

$=x^3-\frac{7}{2}x^2-x\Big|_2^4+1.$

$=13$

18. 함수 $f(x)=-x^3+(a+1)x^2-8x$가 실수 전체의 집합에서 감소하도록 하는 자연수 a의 개수를 구하시오. [3점] 3

$f'(x)=-3x^2+2(a+1)x-8 \leq 0.$

$D/4=(a+1)^2-24 \leq 0. \quad (a+1)^2 \leq 24.$

$\therefore a=1.2.3.$ 3개

19. 수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{10}(k+1)a_k=10,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k-k)^2=395$$

를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+2)$의 값을 구하시오. [3점] 30.

$\underbrace{\sum_{k=1}^{10}(ka_k+a_k)=10.}_{=A.}$ $\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2-2ka_k+k^2\}=395.$

$\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2-2ka_k\}=395-\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}=10.$

$=B.$

$\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+2)=\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2+2a_k\}$

$=2A+B.=30.$

20. 양의 상수 a에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to a}\frac{\int_{2a}^{x}f(t)dt}{(x-a)^2}=\lim_{x\to 2a}\frac{\int_{a}^{x}f(t)dt}{(x-2a)^2}=2+f'\left(\frac{3}{2}a\right)$$

를 만족시킬 때, $f(3a)$의 값을 구하시오. [4점] 24

$\lim_{x\to a}\frac{\int_{2a}^{x}f(t)dt}{(x-a)^2}=\lim_{x\to 2a}\frac{\int_{a}^{x}f(t)dt}{(x-2a)^2}.$ 값이 존재 $= 2+f'(\frac{3}{2}a)$

값이 존재 $\int_{a}^{2a}f(t)dt=0.$

$\int_{2a}^{x}f(t)dt=\int_{a}^{x}f(t)dt.$ $(x-a)^2$을 인수로.

$\int_{a}^{x}f(t)dt=\int_{2a}^{x}f(t)dt.$ $(x-2a)^2$을 인수로.

$f=x^3+\cdots \rightarrow \int f=\frac{1}{4}x^4+\cdots$

$\int_{a}^{x}f(t)dt=\frac{1}{4}(x-a)^2(x-2a)^2.$

$f(x)=(x-a)(x-\frac{3}{2}a)(x-2a)$

$=2+f'(\frac{3}{2}a).$ $\lim_{x\to 2a}\frac{\frac{1}{4}\cancel{(x-a)^2}(x-2a)^2}{\cancel{(x-a)^2}}=\frac{1}{4}a^2.$

$2+f'(\frac{3}{2}a)=2+(x-a)(x-2a)\Big|_{x=\frac{3}{2}a}$

$=2-\frac{1}{4}a^2$

$\therefore \frac{1}{4}a^2=2-\frac{1}{4}a^2.\ a=2.$

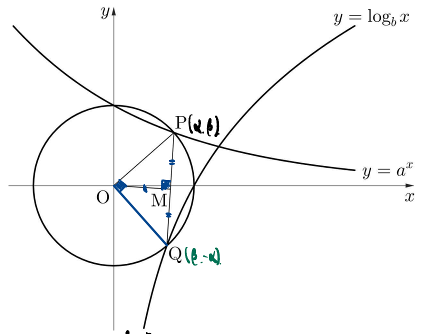
$f(x)=(x-2)(x-3)(x-4).$

$f(3a)=f(6).=24.$

21. $0 < a < 1 < b$인 두 상수 a, b에 대하여 그림과 같이 곡선 $y = a^x$와 원 $x^2 + y^2 = 1$이 만나는 점 중 $(0, 1)$이 아닌 점을 P, 곡선 $y = \log_b x$와 원 $x^2 + y^2 = 1$이 만나는 점 중 $(1, 0)$이 아닌 점을 Q라 하자. 선분 PQ의 중점 M이 다음 조건을 만족시킬 때, $b^{\frac{3}{2}} = \frac{q}{p}$이다. $p + q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 23

(가) $\overline{\mathrm{OM}} = \overline{\mathrm{PM}}$

(나) 점 M의 x좌표와 y좌표의 곱이 $-\frac{1}{32}$이다.



$\begin{cases} \text{OP, OQ 수직} \quad \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{-\square\alpha}{\square\beta} = -1. \quad Q(\square\beta, -\square\alpha).\ \square > 0. \\ x^2+y^2=1 \text{ 위.} \quad \square = 1. \end{cases}$ V

$\beta = a^{\alpha}$

$-\alpha = \log_b \beta.\ b^{-\alpha} = \beta.\quad \therefore ab = 1$

$M\left(\frac{\beta - \alpha}{2}, \frac{\alpha + \beta}{2}\right).\quad \frac{1}{4}(\beta^2 - \alpha^2) = -\frac{1}{32}$

$\alpha^2 - \beta^2 = \frac{1}{8},\ \alpha^2 + \beta^2 = 1.$

$\therefore \alpha = \frac{3}{4},\ \beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$b^{-\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{4}.\quad b^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{7}.$

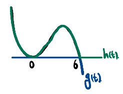
$\therefore p + q = 7 + 16 = 23.$

22. 삼차함수 $f(x) = -x^3 + 6x^2$과 상수 m에 대하여 $f(t)$와 $|mt|$ 중 크지 않은 값을 $g(t)$, 작지 않은 값을 $h(t)$라 하자. 두 함수 $g(t)$와 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

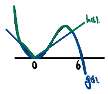
(가) 함수 $g(t)$는 한 점에서만 미분가능하지 않다.
(나) 함수 $h(t)$는 두 점에서만 미분가능하지 않다.

$\int_0^3 \{g(t) + h(t)\}dt$의 최솟값을 p라 할 때, $4p$의 값을 구하시오. [4점] 297

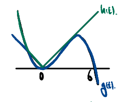
$f(x) = -x^2(x-6).\quad g(t) = \begin{cases} f(t) & (f(t) < |mt|) \\ |mt| & (f(t) \ge |mt|) \end{cases}\quad h(t) = \begin{cases} |mt| & (f(t) < |mt|) \\ f(t) & (f(t) \ge |mt|) \end{cases}$



$m = 0$; (가) ok. (나) X. (한 점에서만.)



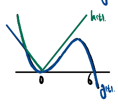
$0 < |m| < \boxed{\text{접}}$; (가) X (세 점에서만). (나) X (세 점에서만.)

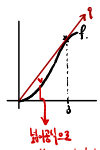


$|m| \ge \boxed{\text{접}}$. ; (가) ok. (나) ok

원점에서 $f(x)$에 그은 접선 기울기 m_0. $(m_0 > 0)$. $= \frac{f(\alpha)}{\alpha} = f'(\alpha) = -\alpha^2 + 6\alpha|_{\alpha=3} = 9$

접점 x좌표 α. $0 + \alpha + \alpha = 0 + 0 + 6$. $\alpha = 3$. V





$g(t) + h(t) = f(t) + |mt|.$

$0 \le t \le 3.\ |mt| \ge m_0 t.$

$\therefore \int_0^3 \{g(t) + h(t)\}dt = \int_0^3 \{(-t^3 + 6t^2) + |mt|\}dt$

$\ge -\frac{81}{4} + 2 \cdot 27 + 9 \cdot \frac{3^2}{2} = \frac{297}{4} = p \quad \therefore 4p = 297$

넓이공식으로
$2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 27\right) - \frac{|-1|}{12} \cdot 3^4 = \frac{297}{4}$로 ok.

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{-n}+n}{n+1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

sol 1> $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{-n}+n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{-n}}{n+1} + \frac{n}{n+1}\right)$

$= 0+1 = 1.$

sol 2> $0 < 2^{-n} < 1$ for all $n \in \mathbb{N}$.

$\frac{n}{n+1} < \frac{2^{-n}+n}{n+1} < 1.$

$\boxed{n\to\infty}$ $1.$ $\therefore 1.$ $1.$

24. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x \tan x \, dx$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x \tan x \, dx.$ = sol 1> $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot \sec^2 x \, dx.$

$= \frac{1}{2}\tan^2 x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$

= sol 2> $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec x \cdot \sec x \tan x \, dx.$

$= \frac{1}{2}\sec^2 x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}.$

25. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}\ln 2$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}\ln 3$

④ $\ln 2$ ⑤ $\ln 3$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{n}$$

$\frac{k}{n} \to x$ 0 to 1.

$\frac{1}{n} \to dx$

$$= \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

26. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x+\sin x) = \sin^3 x$$

를 만족시킬 때, $f'(\pi)$의 값은? [3점]

① 6 ② 3 ③ 0 ④ -3 ⑤ -6

$f'(x+\sin x)\cdot(1+\cos x) = 3\sin^2 x\cos x$

$x \neq (2n-1)\pi$ (n은 정수). $f'(x+\sin x) = \frac{3\sin^2 x\cos x}{1+\cos x}$ 반각공식도 good.

$x = (2n-1)\pi$. $f'((2n-1)\pi) = \lim_{x\to(2n-1)\pi} f'(x)$.

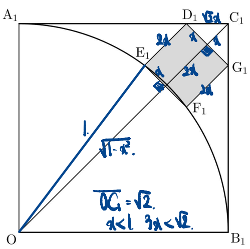
$f'(\pi) = f'(x+\sin x)\Big|_{x=\pi}$

$$= \lim_{x\to\pi}\frac{3\sin^2 x\cos x}{1+\cos x}$$

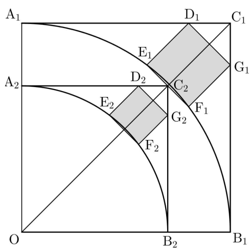
$$= \lim_{x\to\pi}\left\{\frac{3\sin^2 x}{(x-\pi)^2}\cdot\frac{(x-\pi)^2}{1+\cos x}\cdot\cos x\right\}$$

$$= 3\cdot(-1)^2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot(-1) = -6.$$

27. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1OB_1C_1$과 점 O를 중심으로 하는 사분원 OA_1B_1이 있다. 선분 A_1C_1 위의 점 D_1, 선분 B_1C_1 위의 점 G_1, 사분원 OA_1B_1 위의 두 점 E_1, F_1을 사각형 $D_1E_1F_1G_1$의 각 변이 선분 AB_1 또는 선분 OC_1과 평행한 정사각형이 되도록 잡고, 사각형 $D_1E_1F_1G_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 OC_1과 선분 E_1F_1의 교점을 C_2라 하고, 사각형 $A_2OB_2C_2$가 정사각형이 되도록 선분 OA_1위에 점 A_2, 선분 OB_1 위에 점 B_2를 잡는다. 정사각형 $A_2OB_2C_2$에서 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 D_2, E_2, F_2, G_2를 잡고 사각형 $D_2E_2F_2G_2$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



R_1



R_2 ⋯

① $\frac{7}{51}$ ② $\frac{8}{51}$ ③ $\frac{3}{17}$ ④ $\frac{10}{51}$ ⑤ $\frac{11}{51}$

$\sqrt{1-x^2}+3x=\sqrt{2}$

$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}-3x$. $1-x^2=9x^2-6\sqrt{2}x+2$.

$10x^2-6\sqrt{2}x+1=0$. $x=\frac{\sqrt{2}}{10}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $S_1=4x^2=\frac{2}{25}$

10 $-\sqrt{2}$
1 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

공비. $\left(\frac{\overline{OC_2}}{\overline{OC_1}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right)^2$

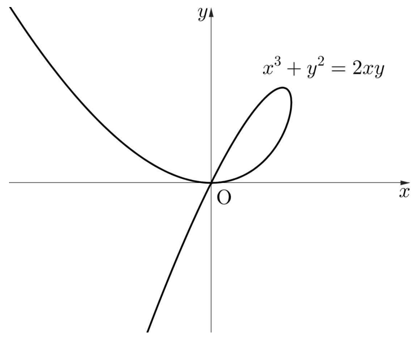
$=\frac{1-x^2}{2}=\frac{49}{100}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{1-\frac{49}{100}}$

$=\frac{8}{51}$

(계산 ↑..)

28. 0보다 큰 두 실수 x, y가 $x^3+y^2=2xy$를 만족시킬 때, $x+y$의 최댓값은? [4점]

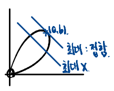


① $\frac{1}{14}(9+7\sqrt{7})$ ② $\frac{1}{14}(10+7\sqrt{7})$

③ $\frac{1}{14}(11+7\sqrt{7})$ ④ $\frac{2}{27}(10+7\sqrt{7})$

⑤ $\frac{2}{27}(11+7\sqrt{7})$

$x+y=k$. 직선의 x절편 (y절편) 최대.



곡선 위의 점. $a^3+b^2=2ab$. ⋯(*)
직선 위의 점. $a+b=k$.
접함. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a,\, y=b}=-1$.

$x^3+y^2=2xy$를 x에 대해 미분.

$3x^2+2y\cdot\frac{dy}{dx}=2y+2x\cdot\frac{dy}{dx}$ $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-2y}{2x-2y}$ $(x\neq y)$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a,\, y=b}=\frac{3a^2-2b}{2a-2b}=-1$.

$3a^2-2b+2a-2b=0$. $4b=3a^2+2a$.

(*)에 대입. $16a^3+16b^2=16a^3+(4b)^2=32ab=4b\cdot 8a$.

$16a^3+(3a^2+2a)^2=(3a^2+2a)\cdot 8a$.

$a\neq 0$. $16a+(3a+2)^2=8\cdot(3a+2)$. $9a^2+4a-12=0$.

$a=\frac{-2\pm\sqrt{4+108}}{9}=\frac{-2+4\sqrt{7}}{9}$

$\therefore a+b=a+\frac{1}{4}(3a^2+2a)=\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{2}a$.

$=3\cdot\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}+1\right)$

$=3\cdot\frac{-1+2\sqrt{7}}{9}\cdot\frac{8+2\sqrt{7}}{9}$

$=\frac{2}{27}(10+7\sqrt{7})$

단답형

29. 두 상수 a, b $\left(a > \frac{1}{2}\right)$와 함수 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2-2x+5}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_a^x \{|f(t)| + f(t)\}\,dt$$

라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)$는 점 $(1, f(1))$에 대하여 대칭이다.
> (나) $x=a$에서 $x=a+s\ (s \ge 0)$까지 곡선 $y=g(x)$의 길이를 $h(s)$라 할 때, 점 $(a, h(a))$는 곡선 $y=h(s)$의 변곡점이다.

$g(2a) + \frac{3}{2}\ln 17 = k$라 할 때, $e^{\frac{2}{3}k}$의 값을 구하시오. [4점] 32

$f(x) = \frac{a(x-1)}{x^2-2x+5} + \frac{a+b}{x^2-2x+5}$ $\quad \therefore b=-a$

$= (1,0)$ 대칭. $+$ ~~$x=1$ 대칭~~ 0.

$= \frac{a(x-1)}{x^2-2x+5}$

$f(x)=0.\ x=1$

$f(x)+|f(x)| = \begin{cases} 2f(x) & (f(x)\ge 0) \\ 0 & (f(x)<0) \end{cases} = \begin{cases} \frac{2a(x-1)}{x^2-2x+5} & (x\ge 1) \\ 0 & (x<1) \end{cases}$ ✓

$h(s) = \int_a^{a+s} \sqrt{1+\{g'(t)\}^2}\,dt$

$h'(s) = \sqrt{1+\{g'(a+s)\}^2}$. $h''(s) = \frac{2g'(a+s)g''(a+s)}{2\sqrt{1+\{g'(a+s)\}^2}} = \frac{g'(a+s)g''(a+s)}{\sqrt{1+\{g'(a+s)\}^2}}\Big|_{s=a} = 0$.

$x=2a>1$에서 $g'(x)>0$. $\quad \therefore g''(2a)=0$.

$2a>1$. $g''(2a) = 2f'(2a) = 0$.

$f'(x) = \frac{a(x^2-2x+5)-a(x-1)(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2}$ $\quad f'(2a) = a\cdot\frac{(4a^2-4a+5)-(2a-1)(4a-2)}{(\quad)^2} = 0$.

$(4a^2-4a+5)-2(2a-1)^2=0$. $\quad 4a^2-4a-3=0$. $\quad \therefore a = \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$.

$g(2a) = g(3) = \int_{\frac{3}{2}}^{3} \{|f(x)|+f(x)\}\,dx$

$= \int_{\frac{3}{2}}^{3} \frac{3(x-1)}{x^2-2x+5}\,dx$

$= \frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5)\Big|_{\frac{3}{2}}^{3}$

$= \frac{3}{2}\{\ln(9-6+5) - \ln(\frac{9}{4}-3+5)\} = \frac{3}{2}\ln\frac{32}{17}$.

$\therefore k = \frac{3}{2}\ln 32 \quad e^{\frac{2}{3}k} = 32$.

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x) = \frac{1}{f(x)}$와 함수 $h(x) = |g(x) - g(0)|$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $h(x)$는 $x=\alpha\ (\alpha \ne 0)$에서만 미분가능하지 않다.
> (나) 집합 $\{x \mid h(x) = g(0)\}$의 원소의 개수는 1이다.
> (다) 열린구간 $(0, k)$에서 $g(x)$가 증가하도록 하는 양수 k가 존재한다.

$f(2) \times g(0) = 1$일 때, $8f(1)$의 값을 구하시오. [4점] 19

$f \ne 0$. 미분가능

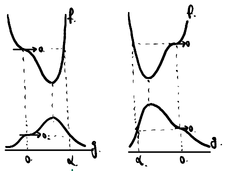
f. 증가감소극대극소최대최소.

$\frac{1}{f}$ 감소증가극소극대최소최대. $(\because (\frac{1}{f})' = (-\frac{1}{f^2})\cdot f' \ldots)$

$g(x) = \frac{1}{f(x)}$ 실수 전체에서 미분가능. $f(x)>0$.

g 점근선 $y=0$. h 점근선 $y=g(0)$

h가 한 점에서만 미분 X. $x=0$에서 미분가능.

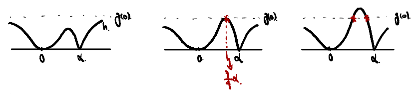


ok.

$x>0$에서 감소만. X.

g 극대 □

□ $<2g(0)$. $h(x)=g(0)$ 실근 X. □ $=2g(0)$. $h(x)=g(0)$. $x=\frac{3}{4}\alpha$ □ $>2g(0)$. $h(x)=g(0)$ 실근 2개. X.



$\therefore f(x) = x^3(x-\alpha)+C = x^3(x-2)+C$

$g(0) = \frac{1}{C}$. $f(2)\times\frac{1}{C}=1$. $\therefore f(2)=C$. $\alpha=2$.

f 극소 $=\frac{1}{2}C$

$f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{8}\cdot(-\frac{1}{2})+C = \frac{1}{2}C$. $\quad C=\frac{27}{8}$. $\quad f(x) = x^3(x-2)+\frac{27}{8}$

$f(1) = 1^3\cdot(-1)+\frac{27}{8} = \frac{19}{8}$ $\quad 8f(1)=19$

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인 하시오.