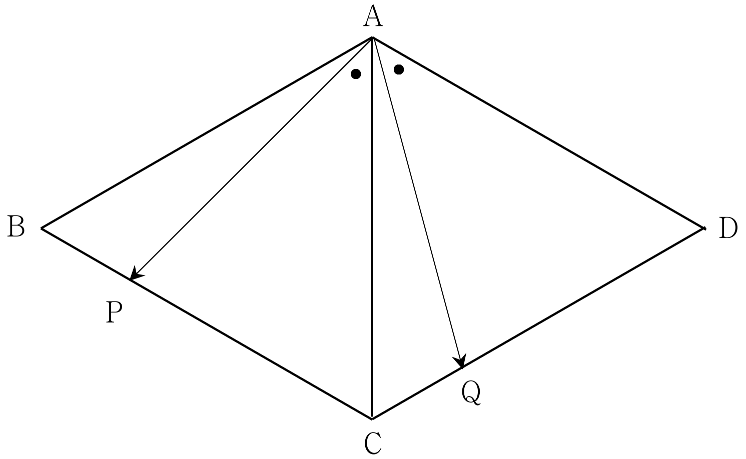
2016학년도 수능대비 장영진Plus 모의고사 문제지 제1회

11.

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|\cos\dfrac{\pi}{3}$ 로서 두 벡터가 이루는 각이 일정한 대신에 벡터의 크기가 변하고 있다. 다음과 같이 보조선을 그어보자. 삼각형 ABD의 세 변의 길이 비가 $1:1:\sqrt{3}$ 이라는 조건으로부터 120°를 포함하는 둔각 이등변삼각형임을 알 수 있다.



그러면 $\angle PAC=\angle QAD$ 이고 $\angle BAP=\angle CAQ$ 이다.

정삼각형의 내각이 $\dfrac{\pi}{3}$ 인 것과 두 벡터 $\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}$ 가 이루는 예각의 크기도 $\dfrac{\pi}{3}$ 인 것으로부터 엄밀하게 수식으로 보일 수도 있지만 직관적으로 이정도만 체크하고 가도 충분하다!

이때, 두 삼각형 ABC와 ACD는 *AA* 닮음인데, 각 삼각형에서 가장 긴 변 AB와 AC의 길이가 같으므로 결국 두 삼각형 ABC와 ACD는 합동이 된다.

따라서, $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AQ}|$ 가 성립하므로 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|\cos\dfrac{\pi}{3}$ 의 최소는 $|\overrightarrow{AP}|$ 가 최소일 때, 즉 점 P가 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발에 위치할 때 발생한다.

고로, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AP}|^2\geq\dfrac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2=6$ 이다.

14.

먼저 이전 문제와 달리 함수 $f(x)$가 여전히 $\sin x$라 할 수 없음을 인식해야 한다.
(가) 조건에 의하면 $f''(t)+f(t)f'(t)=0$라는 간단한 미분방정식을 얻는다.
여기서 양변을 t에 관해 적분하면 이는 완벽하게 직관에 기인한 것이지만..

$$f'(t)+\frac{1}{2}\{f(t)\}^2=C \quad (\text{단, } C\text{는 상수})$$

그리고 적분 상수를 구하기 위해 (나) 조건을 이용하여 $t=1$을 대입해보면

$$f'(1)+\frac{1}{2}\{f(1)\}^2=-2+\frac{1}{2}\cdot 4=0 \rightarrow C=0$$

이므로

$$f'(t)+\frac{1}{2}\{f(t)\}^2=0 \rightarrow \{f(t)\}^2=-2f'(t)$$

임을 알 수 있다. 그러므로 구하고자 하는 회전체의 부피는

$$\therefore\ V=\pi\int_1^4\{f(x)\}^2dx=-2\pi\int_1^4 f'(x)dx=-2\pi\{f(4)-f(1)\}=3\pi$$

※ "실수 t에 대하여 이계도함수가 존재한다"는 말의 의미는
"뾰족뾰족하지도 않고 무한히 진동하지 않는 미분가능한 함수로
극값을 갖는 지점에서는 항상 도함수의 부호가 0이 되는 smooth한 곡선이니
이상한 반례 가져와서 생각하지 마세요."
정도로 볼 수 있다.

〔 2007년 09월 평가원 수리(가형) 27번 〕

27. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖고

$$f(0)=0,\quad f(1)=\sqrt{3}$$

을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^1\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

의 최소값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $1+\sqrt{2}$
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $1+\sqrt{3}$

19.

편의상 $\log x = n + f(x)$ $(0 \le f(x) < 1)$라 하자. 물론 n은 정수이다.

이때 준 식은

$$\log x^2 = 2\log x = 2\{n + \cancel{f(x)}\} = 10^{f(x)} + 2\cancel{f(x)} \rightarrow f(x) = \log 2n$$

으로 정리할 수 있다. 한편, $f(x)$는 상용로그의 가수로서

$$0 \le f(x) = \log 2n < 1 \rightarrow 1 \le 2n < 10$$

따라서 $n = 1, 2, 3, 4$이다. 표를 통해 살펴보면

n	$f(x) = \log x - n$	$f(x) = \log 2n$	x
1	$\log x - 1$	$\log 2$	20
2	$\log x - 2$	$\log 4$	400
3	$\log x - 3$	$\log 6$	6000
4	$\log x - 4$	$\log 8$	80000

고로, $\dfrac{b}{a} = \dfrac{6000}{400} = 15$가 답이 된다.

〔 2015년 06월 평가원 수학 영역(B형) 20번 〕

20. 양수 t에 대하여 $\log t$의 가수를 $f(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 양수 t의 개수를 a_n이라 할 때, $a_4 + a_5$의 값은? [4점]

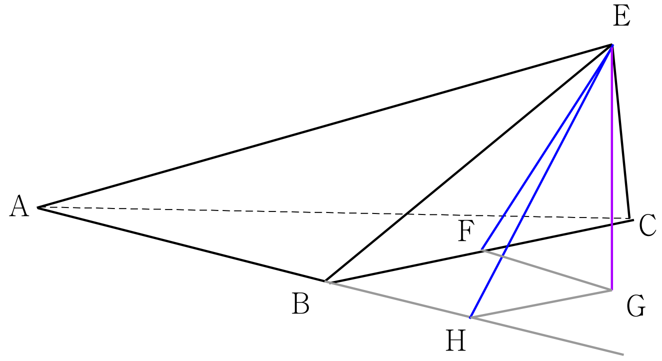
(가) $1 \le t < 100$

(나) $f(t^n) + 2f(t) = 1$

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

20.

sol.1)



두 평면 ABCD 와 BCE 가 이루는 이면각에 대한 코사인 값을 구하기 위해서
두 평면이 교선을 찾아보면 변 BC 가 됨을 곧바로 알 수 있다.
이때 평면 BCE 위의 점 E에서 교선 BC 에 내린 수선의 발을 점 F라 하면
삼각형 BCE 는 이등변삼각형이기도 하기 때문에 점 F는 변 BC 의 중점이 된다.
또, 점 E에서 평면 ABCD 에 내린 수선의 발을 G 라 하면
두 평면의 이면각은 $\theta = \angle \mathrm{EFG}$ 임을 알 수 있다.
한편, 점 E에서 변 AB 의 연장선에 내린 수선의 발을 H 라 하면
주어진 조건에서 정삼각형 BCE 와 삼각형 ABE 의 넓이가 같다고 하였기에
여기서 불필요한 점 D 부분은 생략하고 그린 것이다.
$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 이므로 각 삼각형의 밑변의 길이라고 볼 수 있는 것이 같으니
$\overline{\mathrm{EF}} = \overline{\mathrm{EH}}$ 로서 각 삼각형의 높이로 수 있는 것도 길이가 같아야 한다.
그러면 $\overline{\mathrm{FG}} = \overline{\mathrm{EG}}$ 로서 사각형 BHGF 는 정사각형이 되어야 한다.
고로, 정사각형 ABCD 와 정삼각형 BCE 의 한 변의 길이를 $2k$ 라 두면

$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{FG}}}{\overline{\mathrm{EF}}} = \frac{k}{\sqrt{3}k} \rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{3}$$

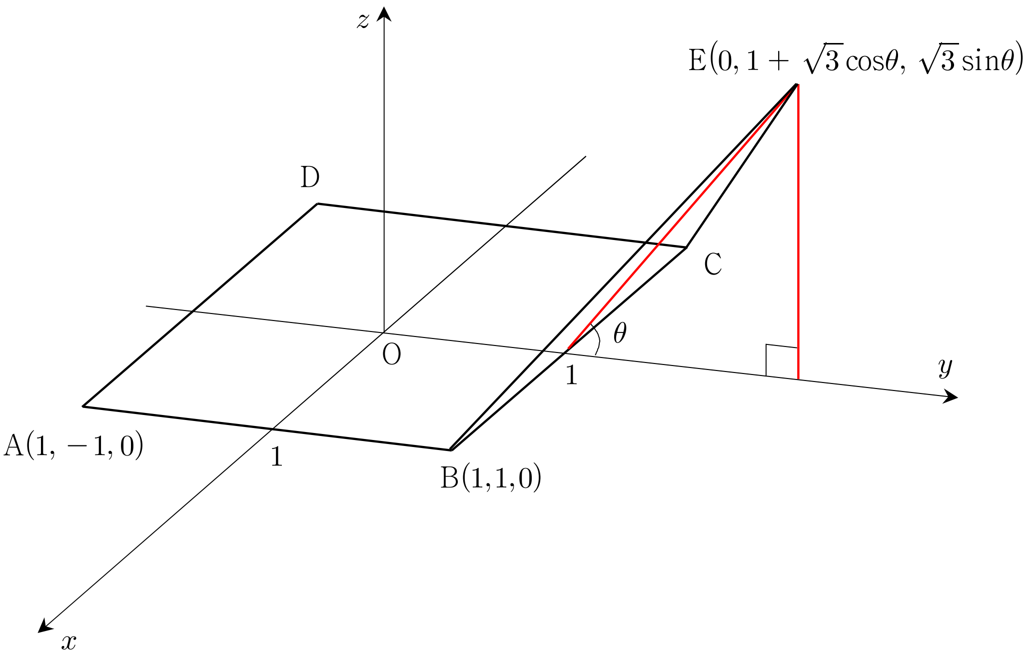
이 답이다.

$\overline{\mathrm{AE}} > \overline{\mathrm{BE}}$ 조건은, 만약 점 E 의 평면 ABCD 위로의 정사영이 정사각형 ABCD 의 내부에 위치하게 되면, 사각뿔 E−ABCD 는 정사면체가 되어서 $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{BE}}$ 인 상황을 피하기 위해서 제시한 것이라 볼 수 있다.

sol.2)

정사각형 ABCD 와 정삼각형 BCE 가 비교적 단순하게 위치한 상황이므로 좌표 설정이 용이하다. 또, 시험이라는 특수한 상황이기 때문에 오류가 없는 문제의 답은 유일할 것이라는 점을 고려하면, 정삼각형 BCE 가 정사각형 ABCD 에 대하여 취할

수 있는 두 가지 위치 중, 그림과 같이 점 E의 평면 ABCD 위로의 정사영이 정사각형 ABCD의 외부에 위치하는 상황만을 과감하게 고려하는 것도 나쁘지 않다.



위와 같이 좌표축을 잡아주되, 계산이 용이하도록 수치까지 임의로 설정하여도 일반성을 잃지 않는다.

그러면 정삼각형 BCE와 삼각형 ABE의 넓이가 같다고 하였으므로, 점 E에서 직선 $x=1, z=0$ 혹은 $\frac{x-1}{0}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{0}$에 이르는 거리가 $\sqrt{3}$이면 된다. 예외적으로 공간상 직선의 방정식을 나타낼 때 직선의 방향벡터 성분 중 0인 것이 있으면 분자도 0인 것으로 간주한다.

왜냐하면 각 삼각형의 밑변 길이를 각각 $\overline{\mathrm{BC}}$와 $\overline{\mathrm{AB}}$로 본다면 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}$이므로 각 삼각형의 높이의 길이만 같으면 된다.

그런데 정삼각형 BCE의 높이를 점 E에서 변 BC에 내린 수선의 길이로 본다면 $\sqrt{3}$이 정삼각형 BCE의 높이 길이에 해당하므로, 삼각형 ABE의 높이에 해당하는 것은 점 E에서 변 AB의 연장선, 즉 $x=1, z=0$에 내린 수선의 길이에 해당하기 때문이다. 그래서 계산을 해보면

$$\sqrt{3} = \sqrt{1^2+0^2+3\sin^2\theta} \ \rightarrow \ \sin^2\theta = \frac{2}{3}$$

이므로 $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = \frac{1}{3}$임을 알 수 있다.

당연한 것을 당연하다고 서술하다 보니 논리가 길고 복잡해 보일 수 있지만, 어디까지나 머릿속으로 해결이 가능한 부분이다. 실제로는 방향만 잘 잡는다면 몇 줄의 수식으로 어렵지 않게 답을 얻을 수 있을 것이다.

21.

교점 A를 찾기 위해 식을 연립해보면

$$g(f(x)) = h(f(x)) \rightarrow f(x) = 1 \rightarrow x = e$$

이므로 $\mathrm{A}(e, 0)$임을 알 수 있다.

마침 점 A가 x축 위에 존재하므로 두 곡선 $y = g(f(x))$와 $y = h(f(x))$에서 각각 그은 접선의 y절편만 마저 구하면 원하는 삼각형의 넓이 a_n을 구할 수 있을 것이라 기대할 수 있다. 그리고, 문제해결 전략이 명확해진 시점에서 우리는 빠르고 정확한 풀이를 모색해야 바람직할 것이다.

〔 2014년 03월 교육청 수학 영역(B형) 30번 〕

30. 실수 t에 대하여 좌표평면에서 원점을 지나고 기울기가 $\tan(\sin t)$인 직선과 원 $x^2+y^2=e^{2t}$이 만나는 점 중에서 x좌표가 양수인 점을 P라 하고, 점 P가 나타내는 곡선을 C라 하자. $t=\pi$일 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $a\times e^{b\pi}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

$y = g(f(x)) = G(x)$ 위의 한 점 $(t, G(t))$에서 그은 접선의 y절편은

$$y - G(t) = G'(t)(x-t) \rightarrow G(t) - tG'(t)$$

이므로

$$G(e) - eG'(e) = g(f(e)) - e\{g'(f(e))\cdot f'(e)\} = 0 - e\left(n \cdot \frac{1}{e}\right) = -n$$

비슷하게 $y = h(f(x)) = H(x)$ 위의 한 점 $(t, H(t))$에서 그은 접선의 y절편은

$$H(e) - H'(e) = h(f(e)) - e\{h'(f(e))\cdot f'(e)\} = 0 - e\left(n^2 \cdot \frac{1}{e}\right) = -n^2$$

이다. 따라서 해당하는 삼각형의 넓이는 두 접선의 y절편이 일치하여 삼각형 조건을 만족하지 않게끔 하도록 하는 $n \geq 2$에 대하여

$$a_n = \frac{1}{2}(n^2 - n)e \rightarrow \frac{1}{a_n} = \frac{2}{e}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

을 만족하므로 주어진 급수를 계산하면

$$\frac{2}{e}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{10}\right) = \frac{9}{5e}$$

가 답이 된다.

26.

$\left|e^x-1\right|=t \ \rightarrow \ e^x-1=\pm t$이므로

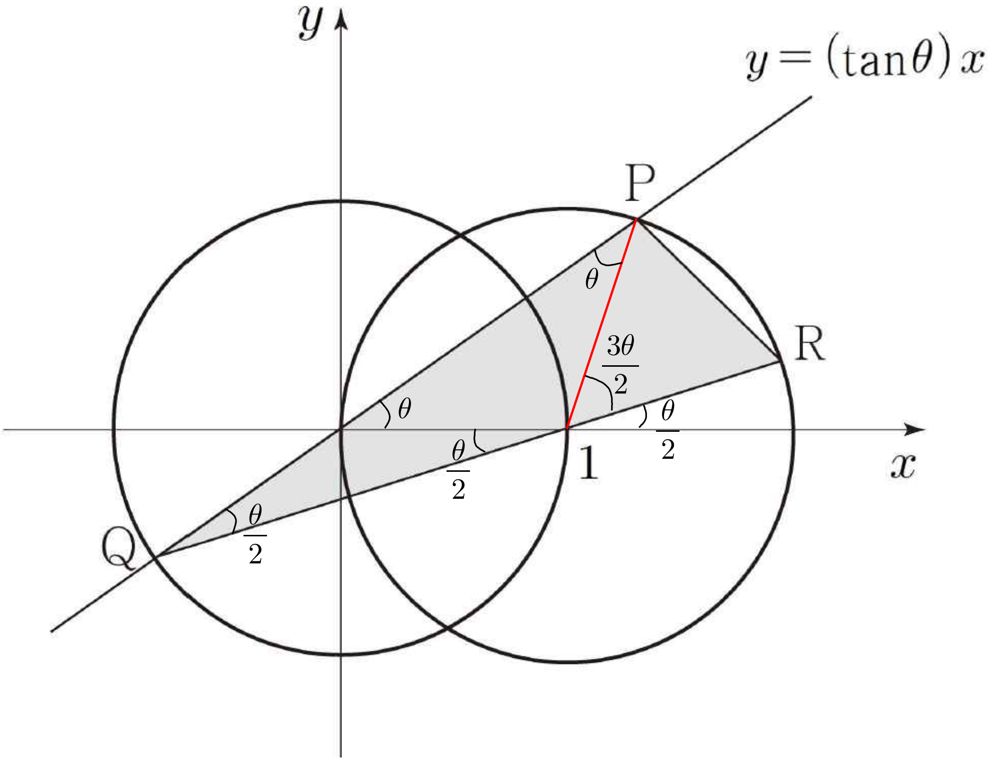
$\mathrm{P}(\ln(1-t), t), \mathrm{Q}(\ln(1+t), t)$이고 $\mathrm{R}(\ln(1-t), 0)$임을 알 수 있다. 이때

$$m(t)=\frac{t-0}{\ln(1+t)-\ln(1-t)}=\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}-\frac{\ln(1-t)}{t}}$$

이므로 $p=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$이므로 $120p=60$이 된다.

28.

sol.1)



위와 같이 점 $(1,0)$과 P를 잇는 보조선을 긋자.

그리고 이등변 삼각형에서의 각도 관계와 삼각형 외각을 이용하여 파악해보면

$\overline{\mathrm{PQ}}=1+2\cos\theta, \overline{\mathrm{RQ}}=1+2\cos\frac{\theta}{2}$이고, $\angle\mathrm{PQR}=\frac{\theta}{2}$임을 알 수 있다.

그러면

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{RQ}}\sin(\angle\mathrm{PQR}) \\ &= \frac{1}{2}(1+2\cos\theta)\left(1+2\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

를 통해서 삼각형 넓이를 구할 수 있고, 극한값을 계산해보면

$$p = \frac{1}{2}(1+2\cdot 1)(1+2\cdot 1)\frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

가 되어 $60p = 135$가 답이 된다.

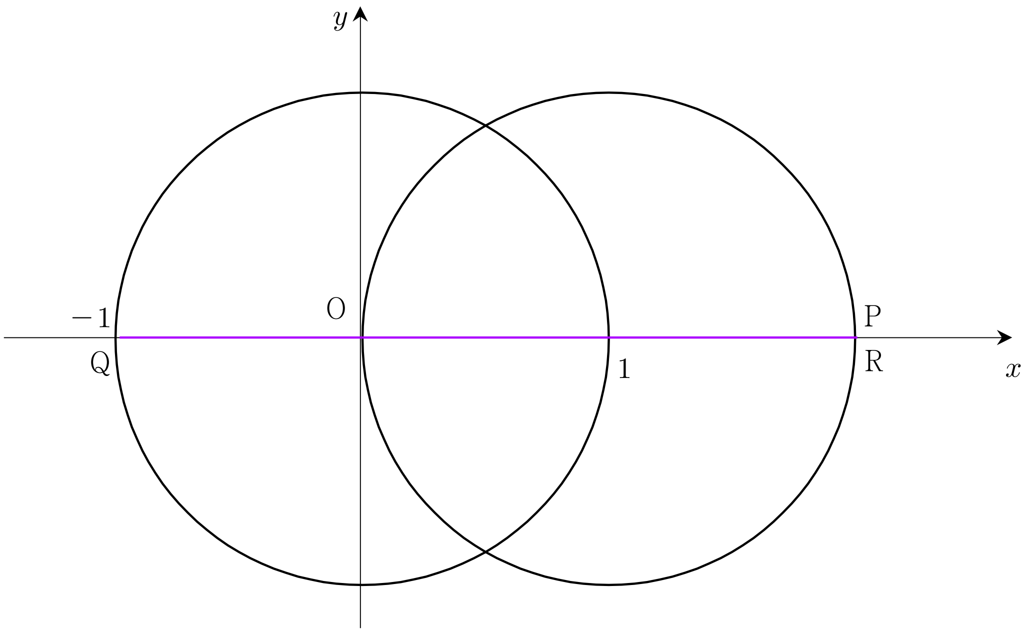
sol.2)

$\theta \to +0$인 상황을 추측해보자.

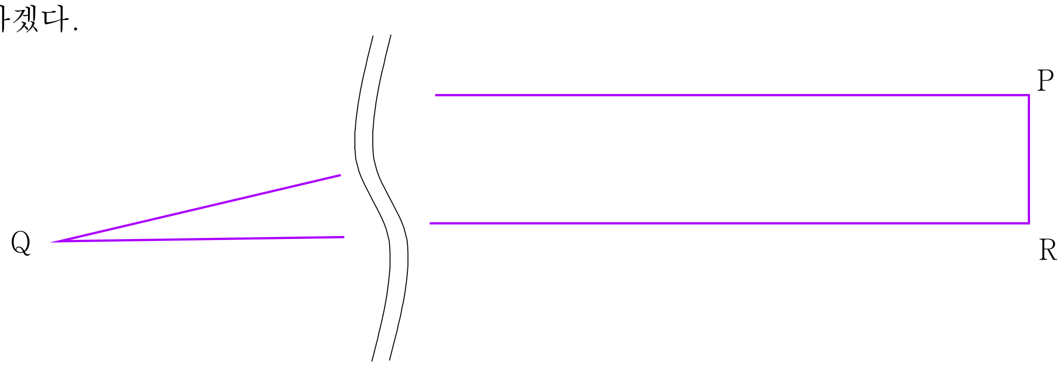
그러면 직선 $y = (\tan\theta)x$가 점점 시계방향으로 회전하여 x축에 다가가면서

점 Q는 점 $(-1, 0)$에, 점 P와 R은 점 $(2, 0)$에 다가가게 된다.

즉, 하나의 선분처럼 보이게 될 것이다.



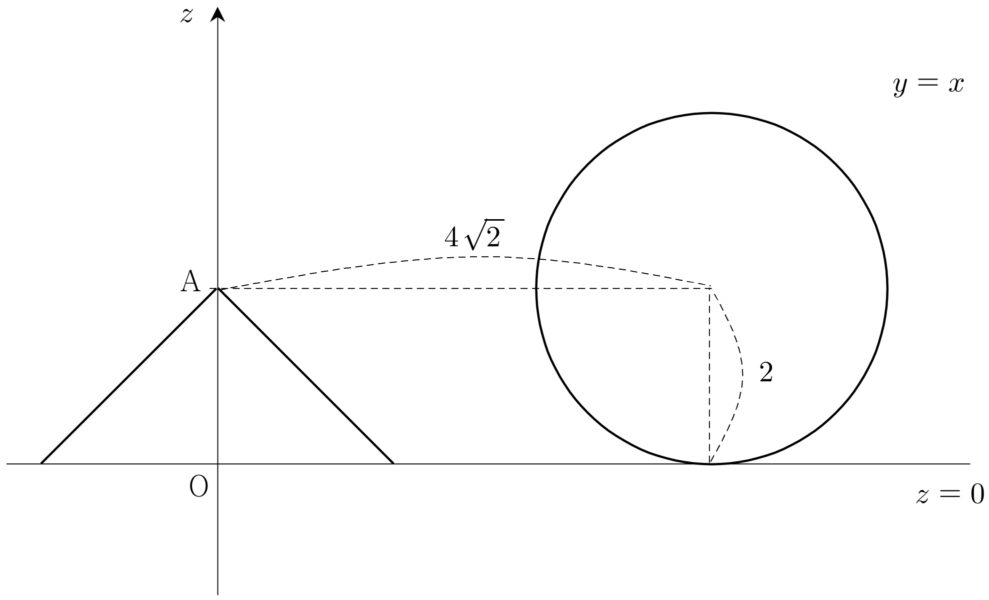
하지만 $\theta \to +0$인 것 못지않게 삼각형 PQR을 확대해서 본다면 다음과 같이 두 변이 x축에 평행해져가는 모습일 것이다. 이때 $\angle PQR = \frac{\theta}{2}$임은 *sol*.1)의 결과를 이용하겠다.



그러면 $\overline{PQ} \to 3$이고, $\overline{QR} \to 3$이므로 $S(\theta) \to \frac{9}{2}\sin\frac{\theta}{2}$이다. 고로 $p = \frac{9}{4} \to 60p = 135$임을 알 수 있다.

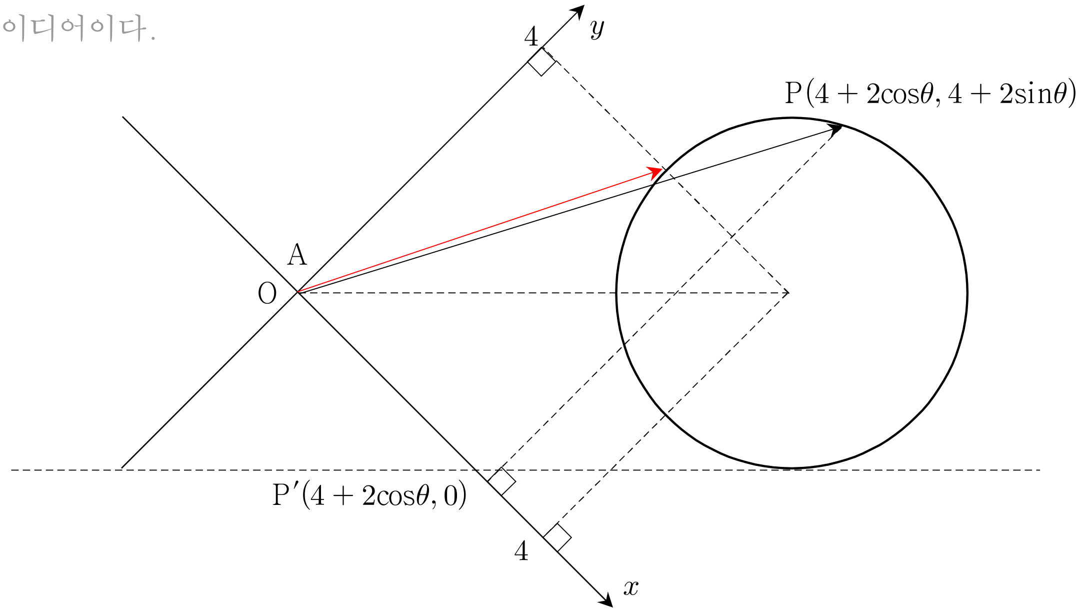
29.

선분 AP의 움직이는 평면 α 위로의 정사영의 길이가 최소가 되려면, 직관적으로 생각해봐도 선분 AP의 길이 자체가 짧을수록 좋고, 평면 α와 선분 AP가 이루는 예각의 크기도 클수록 좋을 것이다. 조금 더 정확하게 관찰하기 위해서 단면화를 이용해보자. z축과 구의 중심을 포함하는 평면인 $y=x$를 이용해서!



sol.1)

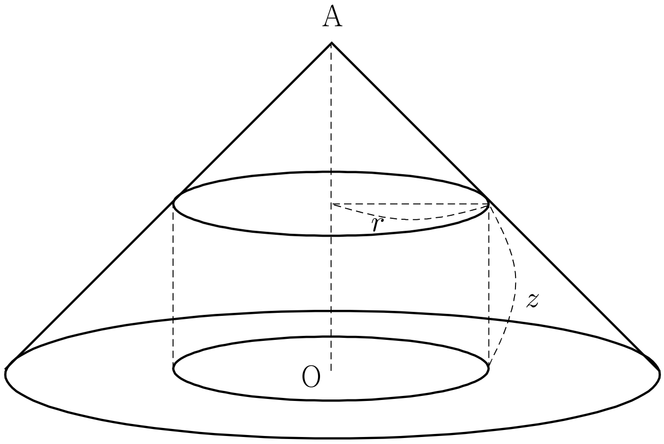
다소 직관적이고 비약적이지만 다음과 같이 생각할 수 있다. 고개를 오른쪽으로 기울여 다음 그림과 같이 원뿔의 모선을 포함하는 두 평면을 단면화 한 상태에서의 새로운 x, y축으로 삼자. 이는 어디까지나 두 평면이 직교하기 때문에 시도 가능한 아이디어이다.



즉, α 평면이 단면화 되었을 때 위 그림의 x축에 해당한다고 보면

$4+2\cos\theta \geq 2 = m$으로 $20m^2 = 80$이 답이 된다.
하지만 이 풀이는, 어디까지나 그럴싸한 답안 후보 하나에 불과할 뿐이지 더 작은 수치에 대한 존재성은 논할 수 없다. 비록 이 풀이로 답은 구할 수 있을지언정 논술용 답안으로는 부적합하다.

sol.2)
주어진 원뿔의 방정식을 세워보자. 사실 대학 미적분학에는 이러한 원뿔의 방정식이나 타원체, 쌍곡면과 같이 간단한 곡면에 대한 방정식도 다루기에 마치 중고등학생이 근의 공식 떠올리듯 당연하게 말할 수도 있지만, 고교 과정에선 이런 식으로 문제에서 물어본다면 즉석에서 유도해야 마땅할 것이다.



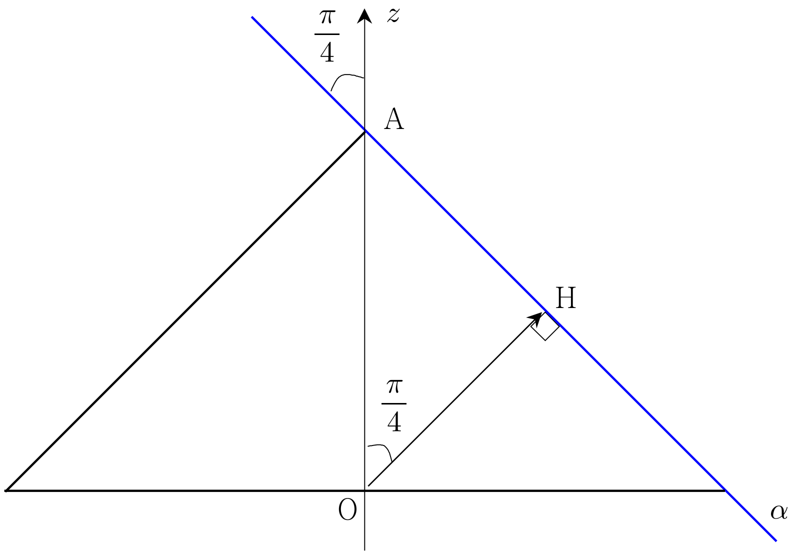
그러면

$$z = 2 - r = 2 - \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{혹은 } x^2+y^2 = (2-z)^2$$

로부터 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$로 두면 원뿔 위의 임의의 점을 $(r\cos\theta, r\sin\theta, 2-r)$이라 할 수 있다.
한편, 평면 α를 구하기 위해서, 한 점으로서는 점 $\mathrm{A}(0,0,2)$를 이용하면 되지만, 법선벡터로서는, 원점에서 원뿔의 모선에 내린 수선의 좌표가 필요하다.
공간에서 평면의 방정식을 확정 지을 수 있는 여러 조건들이 있지만, 일반적으로 한 점 (x_1, y_1, z_1)과 법선벡터 $\vec{h} = (a,b,c)$를 아는 경우에 평면의 방정식을

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

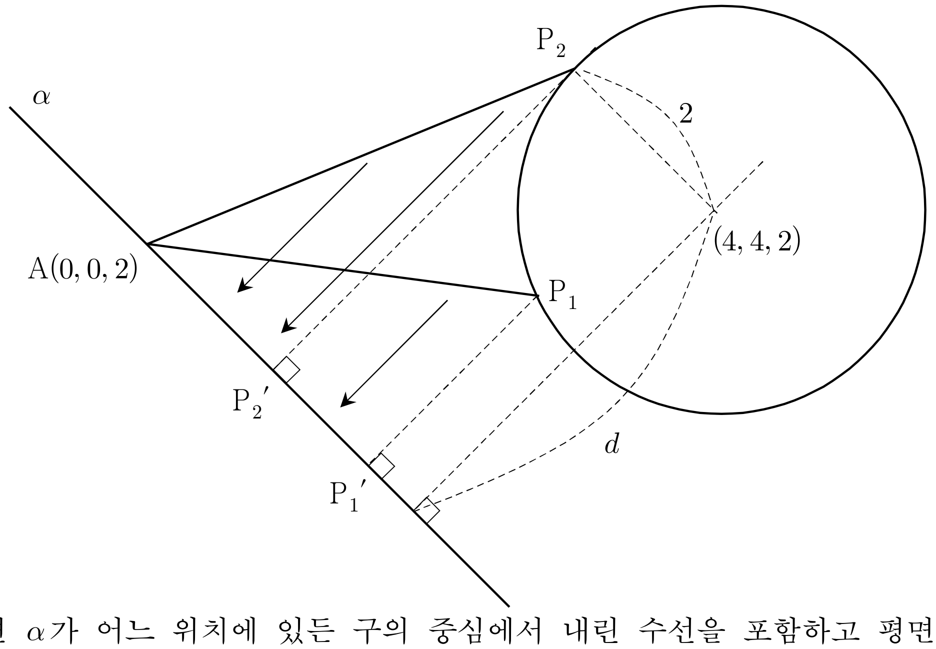
라 할 수 있기 때문이다.
이때 원뿔의 모선들과 z축이 이루는 각이 항상 $\frac{\pi}{4}$를 유지하고 있으므로
원점에서 원뿔의 모선에 내린 수선 역시 z축과 항상 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$의 각을 유지할 것이고, 수선의 발의 자취는 $x^2+y^2=1, z=1$이 된다.
혹은 원점과 $(r\cos\theta, r\sin\theta, 2-r)$ 사이의 거리가 최소가 될 때의 r값을 구해도 마찬가지 결과를 얻는다.



그러면 다시 $\mathrm{H}(\cos\theta, \sin\theta, 1)$이라 둘 수 있고,
평면 α의 법선벡터 또한 $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$이라 잡을 수 있다.
따라서, 평면 α의 방정식은

$$x\cos\theta + y\sin\theta + z = 2$$

가 된다.
이제 평면 α를 고정시키고 선분 AP의 평면 α 위로의 정사영 길이가 가장 짧아지는 순간을 찾자. 여기서 평면 α가 구와 만나지 않는 경우 중에 답이 발생할 것이라 인정하고 넘어가자. 어차피 평면과 구가 교점을 갖는 경우에 정사영 길이의 최솟값은 평면이 구의 중심을 지날 때의 길이 $4\sqrt{2}-2$로 충분히 크기 때문이다.



평면 α가 어느 위치에 있든 구의 중심에서 내린 수선을 포함하고 평면 α에 수직인 단면을 위와 같이 생각할 수 있다. 임의로 구 위의 한 점 $\mathrm{P_1}$을 잡고 평면 α위로 정사영 내린 점을 $\mathrm{P_1}'$이라 하였을 때 정사영 $\overline{\mathrm{AP_1}'}$의 길이보다, 점 $\mathrm{P_2}$를 그림과

같이 평면 α위로 정사영 내린 점 $\mathrm{P_2}'$에 대하여 $\overline{\mathrm{P_2P_2}'}=d$가 되도록 잡는 경우에 정사영 $\overline{\mathrm{AP_2}'}$가 성립함을 알 수 있다. 물론, d는 구의 중심에서 평면 α에 이르는 거리이다.

그러면 구의 중심을 포함하여 적어도 네 점 $\mathrm{A}, \mathrm{P_2}, \mathrm{P_2}', (4,4,2)$는 한 평면상에 존재하고, 피타고라스 정리를 이용하면

$$\left(\overline{\mathrm{AP_2}'}+2\right)^2+d^2=(4-0)^2+(4-0)^2+(2-2)^2=32$$

에서 $\overline{\mathrm{AP_2}'}$가 최소가 되기 위해선 d가 최대가 되어야 함을 알 수 있다.

다시, 구의 중심 $(4,4,2)$에서 평면 α에 이르는 거리의 최댓값을 구하기 위해 하나씩 따져보자. 공간에서 점과 평면에 이르는 거리 공식을 이용하면

$$d=\frac{|4\cos\theta+4\sin\theta+2-2|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta+1^2}}=2\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)$$

가 되어 d는 결국 θ에 대한 함수로 나타나고, 삼각함수 합성이든, 미분이든, 직관 등을 사용해보면 d가 최대가 될 때는 $\sin\theta=\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 임을 알 수 있다.

$$d^2=32-\left(\overline{\mathrm{AP_2}'}+2\right)^2\le 4^2 \;\rightarrow\; \overline{\mathrm{AP_2}'}+2\ge\sqrt{32-4^2}$$

즉, $\overline{\mathrm{AP_2}'}\ge 2=m$으로 $20m^2=80$이 답이 된다.

덧붙여, *sol*.1)에서 직관적으로 단면화 했던 것이 정답이 되는 상황과 직결됨을 다시 확인할 수 있다.

※ *sol*.2)에서 과감하게 새로이 좌표축을 잡고 푸는 것을

"이런 경우에는 이렇게 하세요"

하고 친절하게 설명해주는 교과서나 문제집은 없기 때문에, 문제풀이 경험을 통해서 스스로 터득해야만 하는 부분이다.

〔 **2015년 10월 교육청 수학 영역(B형) 30번** 〕

30. 좌표공간에서 구 $S: x^2+y^2+(z-3)^2=4$와 평면 $x-y+z-6=0$이 만나서 생기는 원을 C라 하자. 구 S 위의 점 $\mathrm{A}(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$과 원 C 위를 움직이는 점 B에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 최댓값과 최솟값의 곱을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

해설 ☞ http://cafe.naver.com/pnmath/682627

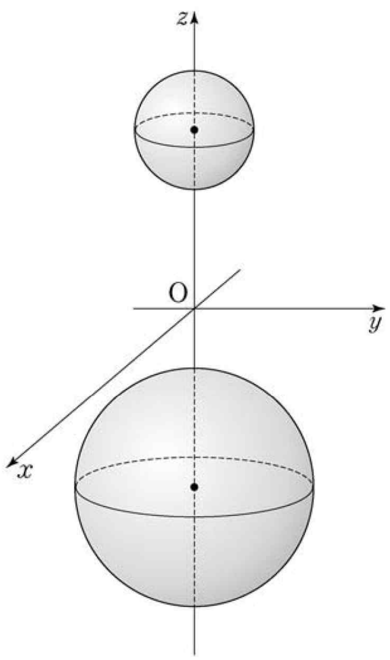
※ $sol.2)$에서는 논리적으로 풀려다 보니, 불가피하게 무리하여 원뿔의 방정식을 세우고서 평면 α의 법선벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(\cos\theta, \sin\theta, 1)$임을 유도하였는데, 혹자 중에는 처음부터 직관적으로 $\vec{h}=(a, b, 1)$이라 두고 계산했을 수도 있다.

〔 **2015년 09월 평가원 수학 영역(B형) 29번** 〕

29. 좌표공간에 두 개의 구

$$S_1 : x^2+y^2+(z-3)^2=1, \quad S_2 : x^2+y^2+(z+3)^2=4$$

가 있다. 점 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$을 포함하고 S_1과 S_2에 동시에 접하는 평면을 α라 하자. 점 $\mathrm{Q}(k, -\sqrt{3}, 2)$가 평면 α 위의 점일 때 $120k$의 값을 구하시오. [4점]



해설 ☞ http://cafe.naver.com/pnmath/661387

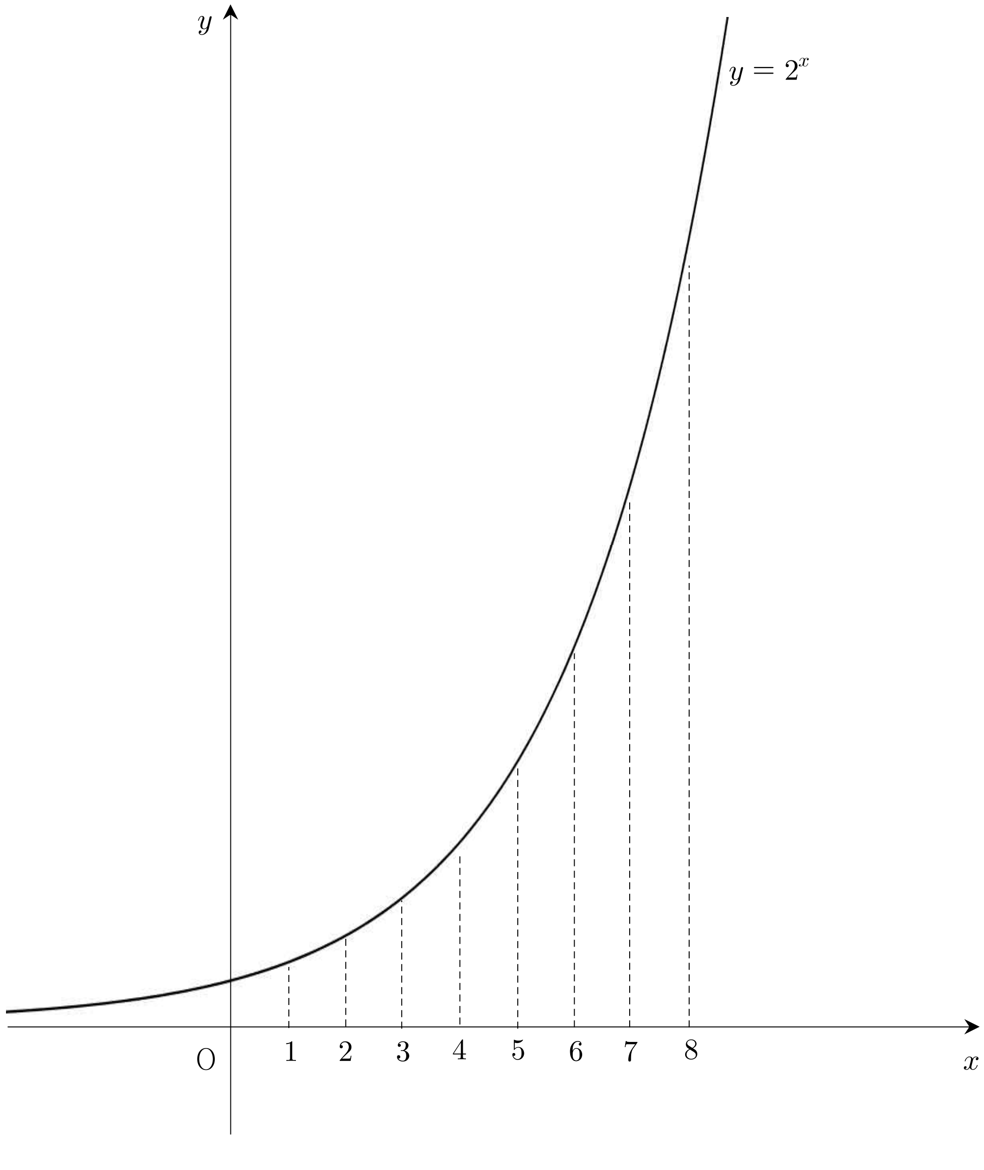
30.

2015년(2016학년도) 06월 평가원 수학영역(B형) 30번에 이미 출제된 아이디어이기 때문에 보자마자 반응해서 풀어야 한다.

(가) 조건은 $x=0,1,2,\cdots,8$의 격자점에서 지수함수 $y=2^x$ 위에 있어야 함을

(나) 조건은 해당 구간마다 직선 혹은 곡선으로 연결되어야 함을 말한다.

일단 (나), (다) 조건은 무시한 채 간단한 지수함수로 나타내면 다음과 같다.



그런데 $f(x)$가 연속이 되려면 (나) 조건에 의해 열린 구간 $(n, n+1)$에서 구간 끝값인 점 $(n, 2^n)$과 $(n+1, 2^{n+1})$을

직선 $y=2^n(x-n)+2^n$ 경로 혹은 곡선 $y=2^x$ 경로

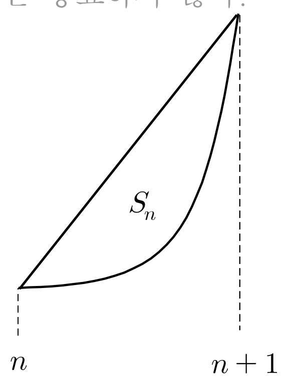
로서 연결하여야 한다.

따라서, (다) 조건까지 고려하였을 때 M은 모든 열린 구간 $(n, n+1)$에서 직선 경로를 택하였을 때의 값임을 추론할 수 있다.

하지만 앞으로 행해야 할 계산의 편의성을 위해

열린 구간 $(n, n+1)$에서 $y=2^n(x-n)+2^n$과 $y=2^x$로 둘러싸인 부분의 넓이 S_n을 먼저 구해보자. 어차피 연속함수이므로 구간 끝값의 포함여부는 중요하지 않다.

$$\begin{aligned} S_n &= \int_n^{n+1}\left\{2^n(x-n)+2^n-2^x\right\}dx \\ &= \left[\frac{2^n}{2}x^2+(1-n)2^n x-\frac{2^x}{\ln 2}\right]_n^{n+1} \\ &= 2^{n-1}(2n+1)+(1-n)2^n-\frac{2^n}{\ln 2} \\ &= 2^n\left\{\frac{2n+1}{2}+(1-n)-\frac{1}{\ln 2}\right\}=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln 2}\right)2^n \end{aligned}$$



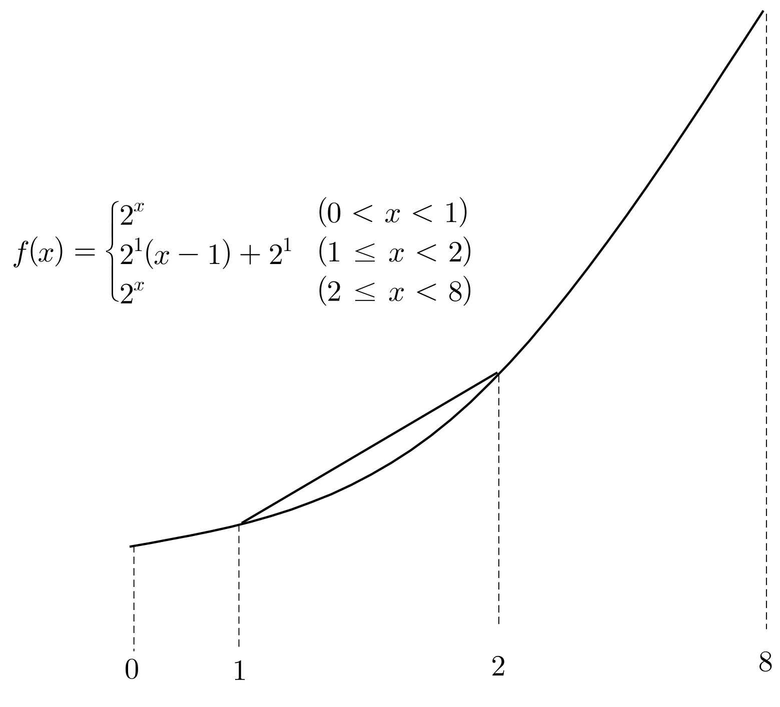
이때 최댓값 M은 각 열린 구간마다 직선 경로를 택하였을 때 발생하며,

$x=1,2,3,4,5,6,7$에서 첨점을 갖기 때문에 (다) 조건을 충분히 만족한다.

$$M=S_0+S_1+S_2+\cdots+S_7$$

이 된다. 성급하게 벌써부터 계산을 완료해둘 필요는 없다.

그리고 최솟값 m은 각 열린 구간마다 가급적 직선 경로가 아닌 곡선 경로를 택하여 $y=2^x$와 둘러싸인 부분의 넓이가 0이 되는 것이 좋기 때문에 다음과 같이 최소한으로 직선 경로를 택해야 한다.



그러면 $m=S_1$이 되므로 상쇄되는 부분을 감안해서 답을 구해보면

$$\therefore\ \frac{2M}{m}=\frac{2\left(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^8\right)}{2^2}=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^7=255$$

14.

피적분함수인 $f(t)-|g(t)|$를 관찰해보자.

$$f(t)-|g(t)|=\log_4 t-\left|\log_2 t-1\right|$$

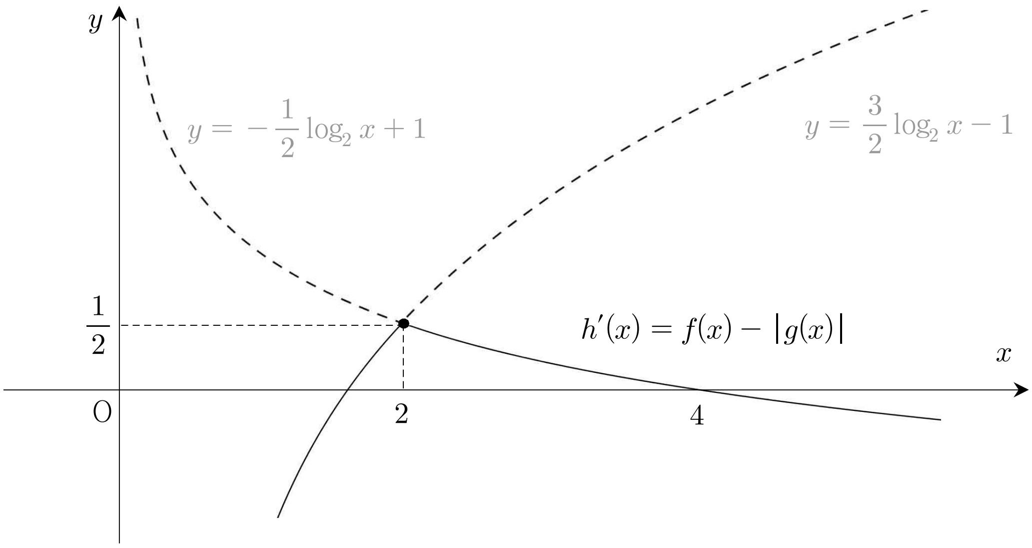
에서 $\log_2 t-1\geq 0$인 경우, 즉 $t\geq 2$인 경우

$$f(t)-|g(t)|=-\frac{1}{2}\log_2 t+1$$

$\log_2 t-1<0$인 경우, 즉 $0<t<2$인 경우

$$f(t)-|g(t)|=\frac{3}{2}\log_2 t-1$$

이고, 함수 $f(t)-|g(t)|$는 $t=2$에서 함숫값과 극한값이 모두 $\frac{1}{2}$로서 연속이다.

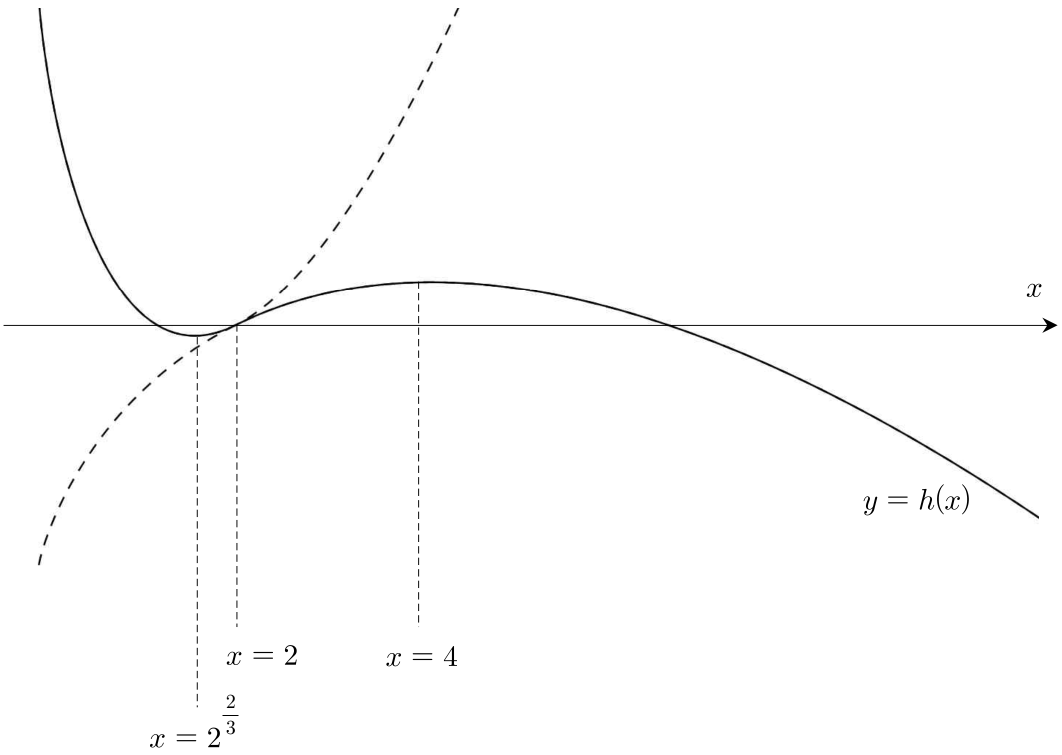


한편, 함수 $h(x)$가 극값을 갖기 위해서는 도함수의 부호변화가 필요한데, 위 그래프에서 알 수 있다시피 $h(x)$는 두 군데에서 극값을 갖는다.

따라서 $h'(x)=f(x)-|g(x)|$는 $x=2^{\frac{2}{3}}$과 $x=4$에서 근을 가지므로 이들의 곱은

$$\therefore\ 2^{\frac{2}{3}}\times 4=2^{\frac{2}{3}+2}=2^{\frac{8}{3}}$$

※ $h(x)$의 개형은 다음과 같다.



※ 사실 수정 전 문항은 $h(x)=0$의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 a값의 개수를 구하라는 것으로 훨씬 어려운 문항이었다.
그리고 이 시험 이후에 출제된 올해 09월 평가원 시험문제와 유사했다.

〔 **2015년 09월 평가원 수학 영역(B형) 21번** 〕

21. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |\sin x|-\sin x & \left(-\frac{7}{2}\pi \le x < 0\right) \\ \sin x-|\sin x| & \left(0 \le x \le \frac{7}{2}\pi\right) \end{cases}$$

라 하자. 닫힌 구간 $\left[-\frac{7}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)\,dt \ge 0$이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, $-\frac{7}{2}\pi \le a \le \frac{7}{2}\pi$)

[4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{5}{2}\pi$ ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ $\frac{9}{2}\pi$

17.

$$\begin{cases} A^2 + AB = A(A+B) = E \rightarrow AB = BA \\ A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2) = B \end{cases}$$

ㄱ. $(A+B)^{-1} = A$이므로 참.

ㄴ. $A(A+B) = (A+B)A = E$에서 $A^2 + AB = A^2 + BA$, 즉 $AB = BA$이므로 참.

ㄷ. $(A+B)(A^2 - AB + B^2) = B$의 왼쪽에서 A를 곱하면

$$A^2 - AB + B^2 = BA = AB \rightarrow A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2 = O$$

한편, $A - B + 2E$의 꼴을 지금껏 이끌어낸 정보를 이용하여 파악하기 위해 $(A-B+2E)^2$으로 변형 해보면

$$\begin{aligned} (A-B+2E)^2 &= A^2 + B^2 + 4E - 2AB + 4A - 4B = 4A - 4B + 4E \\ &= 4(A - B + 2E) - 4E \end{aligned}$$

가 된다. 편의상 $A - B + 2E = C$로 치환하면

$$C^2 = 4C - 4E \rightarrow C^2 - 4C = -4E$$

를 만족할 때 C의 역행렬이 존재하는지 묻는 것과 동치가 된다.

물론 $C^{-1} = -\frac{1}{4}(C - 4E) = -\frac{1}{4}(A - B - 2E)$로 ㄷ도 참이다.

고로, 답은 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

※ ㄷ에서 제곱하여 대신 역행렬 존재 여부를 따지는 아이디어가 생소할 수도 있지만 이미 기출문제에 등장하였었다.

〔 **2014년 06월 평가원 수학 영역(B형) 16번** 〕

16. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2 = -A, \quad A^2 + B^2 = A + E$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A^3 = A$

ㄴ. $AB^2 = B^2A$

ㄷ. B의 역행렬이 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20.

$sol.1)$

주어진 조건들은 $F'(x)=f(x)$라는 것과 $F(x)=\dfrac{1}{g(-x)+1}$과 미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 $g(0)=0, g(2)=3$이라는 것 뿐이다.

뒤집어 말하자면 이러한 조건만 만족하는 그 밖의 모든 함수들에 대하여 주어진 정적분의 값은 일정하게 나온다는 말이 되고, 다루기 쉬운 간단한 함수를 잡아서 구해도 중간에 계산 실수만 하지 않는다면 정답을 이끌어 내는데 무리가 없다고 볼 수 있다.

따라서 $g(x)$를 적절하게 정의하고, 그에 따라 파생되는 $F(x)$와 $f(x)$를 찾아서 주어진 정적분을 구해보자. 먼저 $g(x)=\dfrac{3}{2}x$라 하면

$$F(x)=\frac{1}{g(-x)+1}=\frac{1}{-\frac{3}{2}x+1}=\frac{2}{2-3x}$$

$$\to\ F'(x)=f(x)=\frac{6}{(2-3x)^2}$$

가 되어

$$f(-x)g(x)=\frac{6}{(2+3x)^2}\cdot\frac{3}{2}x=\frac{9x}{(2+3x)^2}$$

를 만족하므로

$$\therefore\ \int_0^2 f(-x)g(x)dx=\int_0^2\frac{9x}{(2+3x)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{6(2+3x)-12}{(2+3x)^2}dx$$

$$=\int_0^2\left\{\frac{3}{2+3x}-\frac{6}{(2+3x)^2}\right\}dx$$

$$=\left[\ln(2+3x)+\frac{2}{2+3x}\right]_0^2$$

$$=\ln\frac{8}{2}+\frac{1}{4}-1=\ln 4-\frac{3}{4}$$

※ 지금까지의 역대 기출문제들을 살펴보면, 함수의 정체를 알아봤자 출제자가 의도한 풀이 방식 아니면 안 되는 문제도 있었다.

〔 2010년 11월 대수능 수리(가형) 28번 〕

28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다.
모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이고,

$$f(a)=0,\ \int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx=k\quad(a>0,\ 0<k<1)$$

일 때, $\displaystyle\int_{a}^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$의 값을 k로 나타낸 것은? [3점]

① $\frac{k^2}{4}$ ② $\frac{k^2}{2}$ ③ k^2
④ k ⑤ $2k$

sol.2)
$F'(x)=f(x)$임을 염두에 두고 부분적분을 해보자.
피적분함수는 $f(-x)g(x)=F'(-x)g(x)$로 볼 수 있으므로

$$\therefore \int_0^2 f(-x)g(x)dx=\int_0^2 F'(-x)g(x)dx$$

$$=-F(-x)g(x)+\int_0^2 F(-x)g'(x)dx$$

$$=-\left[\frac{g(x)}{g(x)+1}\right]_0^2+\int_0^2\frac{g'(x)}{g(x)+1}dx$$

$$=-\left(\frac{3}{4}-0\right)+[\ln\{g(x)+1\}]_0^2$$

$$=-\frac{3}{4}+\ln 4$$

〔 2011년 06월 평가원 수리(가형) 19번 〕

19. 정의역이 $\{x\,|\,x>-1\}$인 함수 $f(x)$에 대하여

$f'(x)=\dfrac{1}{(1+x^3)^2}$이고, 함수 $g(x)=x^2$일 때,

$$\int_0^1 f(x)g'(x)dx=\frac{1}{6}$$

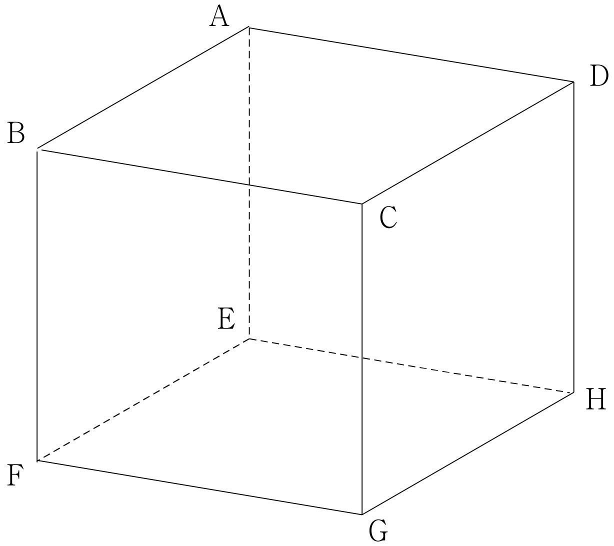
이다. $f(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{5}{18}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{7}{18}$

21.

※ $\boxed{\text{Claim. 좌표공간 상에서 정사면체의 네 꼭짓점은 모두 격자점일 수 있다.}}$

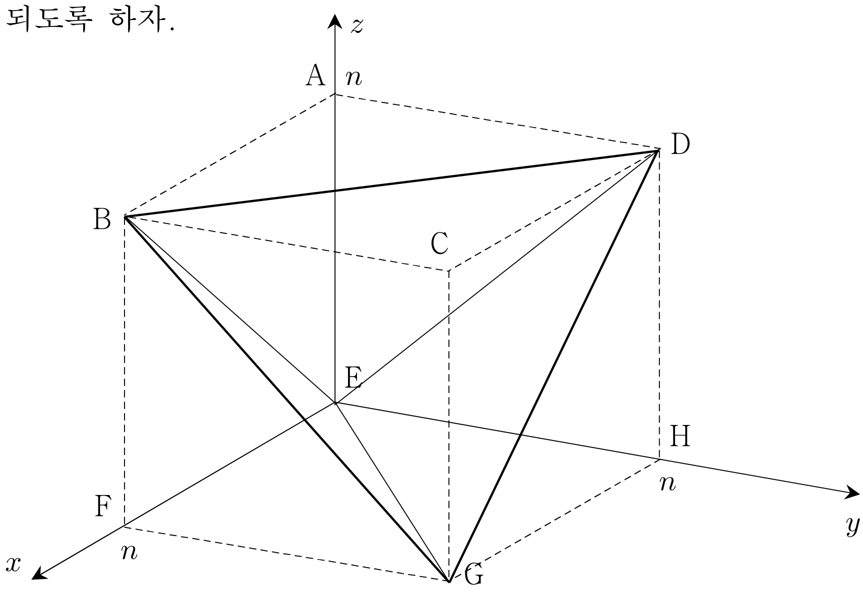
좌표공간에서 임의의 정사면체의 네 꼭짓점이 모두 격자점이라는 뜻이 아니라 그러한 정사면체가 적어도 하나 존재함을 보이기만 하면 주장은 참이 된다.



우선 정육면체와 정사면체의 관계로부터 아이디어를 얻을 수 있다.

정육면체는 여섯 개의 면으로 구성되어 있지만, 한편으로는 세 쌍의 마주보는 면으로 구성되어 있다고 볼 수도 있다. 이때 하나의 면에서 택할 수 있는 대각선은 두 종류씩이고, 각 면마다 하나씩 택한다고 하였을 때 마주보는 위치의 면간에 평행한 것 두 가지와 꼬인 위치 두 가지로 구분할 수 있다. 가령 위 그림에서 택하자면 $\{\overline{\mathrm{BD}}, \overline{\mathrm{FH}}\}$와 $\{\overline{\mathrm{AC}}, \overline{\mathrm{EG}}\}$는 각각 평행한 대각선이고, $\{\overline{\mathrm{BE}}, \overline{\mathrm{DG}}\}$와 $\{\overline{\mathrm{AC}}, \overline{\mathrm{FH}}\}$는 각각 꼬인 위치 관계의 대각선이다.

편의상 정육면체 $\mathrm{ABCD}-\mathrm{EFGH}$의 각 모서리와 평행하도록 x, y, z축을 잡고 꼭짓점 E가 원점이 되도록 하자.



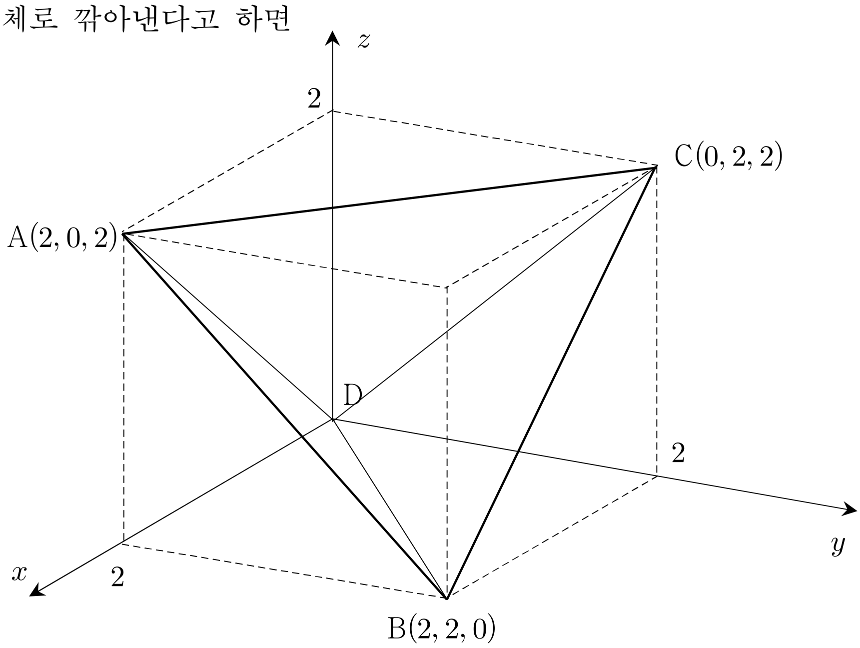
그리고 위와 같이 꼬인 위치 관계의 대각선들로 취해서 정사면체를 만들자. 그러면 정육면체 한 모서리의 길이를 n(단, n은 양의 정수)라 할 때, 사면체 $\mathrm{E-BGD}$는 네 꼭짓점 $\mathrm{E, B, G, E}$의 좌표가

$$(0,0,0),\ (0,n,n),\ (n,n,0),\ (n,0,n)$$

로서 모두 격자점이고, 한 변의 길이가 모두 $\sqrt{2}n$인 정사면체임을 알 수 있다.

sol)

주어진 정사면체 ABCD에 좌표축을 설정해주자. 즉, 모서리 길이가 2인 정육면체로부터 정사면체로 깎아낸다고 하면



이때 삼각형 BCD의 무게중심은 $\mathrm{G}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$이다.

그리고 평면 ADG의 법선벡터를 $\vec{h}$라 할 때

외적을 통해 구해보면

$$\overrightarrow{\mathrm{DA}} \times \overrightarrow{\mathrm{DG}} // (1,0,1) \times (1,2,1) = (-2,0,2) // \vec{h}$$

로부터 $\vec{h} = (-1,0,1)$임을 이끌어낼 수 있고,

아니면 평면 ADG의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라 두고서 세 점 $\mathrm{A, D, G}$를 지난다고 해서 구해봐도

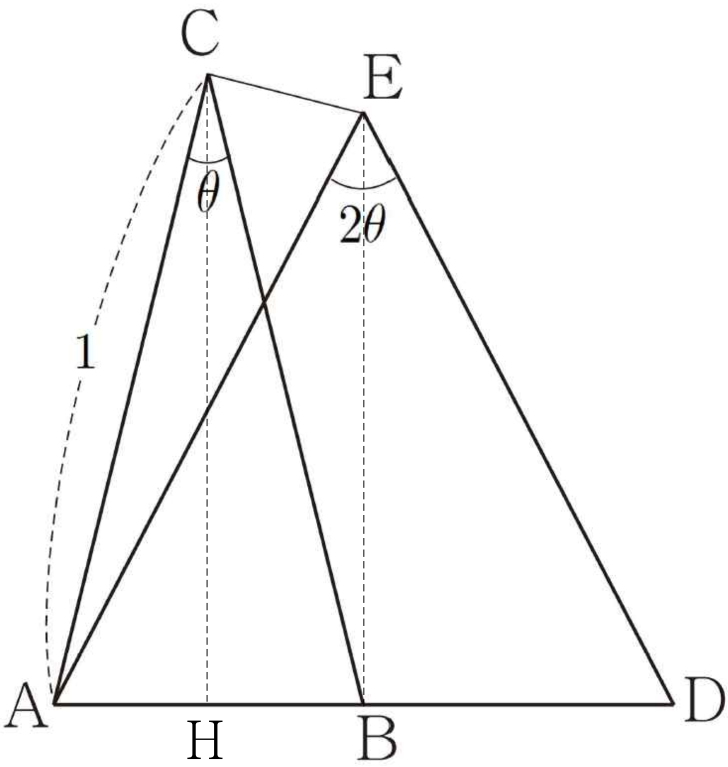
$$x - z = 0 \ \rightarrow \ \vec{h} = (1, 0, -1)$$

임을 알 수 있다.

마지막으로 평면 α는 곧 xy평면이므로 법선벡터가 $(0,0,1)$이라 바로 볼 수 있으므로 평면 ADG와 평면 α가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{|-1|}{\sqrt{1+0+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ \rightarrow \ \tan\theta = 1$$

28.



꼭짓점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

그러면 $\overline{\mathrm{CH}} = \cos\frac{\theta}{2}$이고, $\overline{\mathrm{AB}} = 2\sin\frac{\theta}{2}$이며

$$\tan\theta = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BE}}} \rightarrow \overline{\mathrm{BE}} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\tan\theta}$$

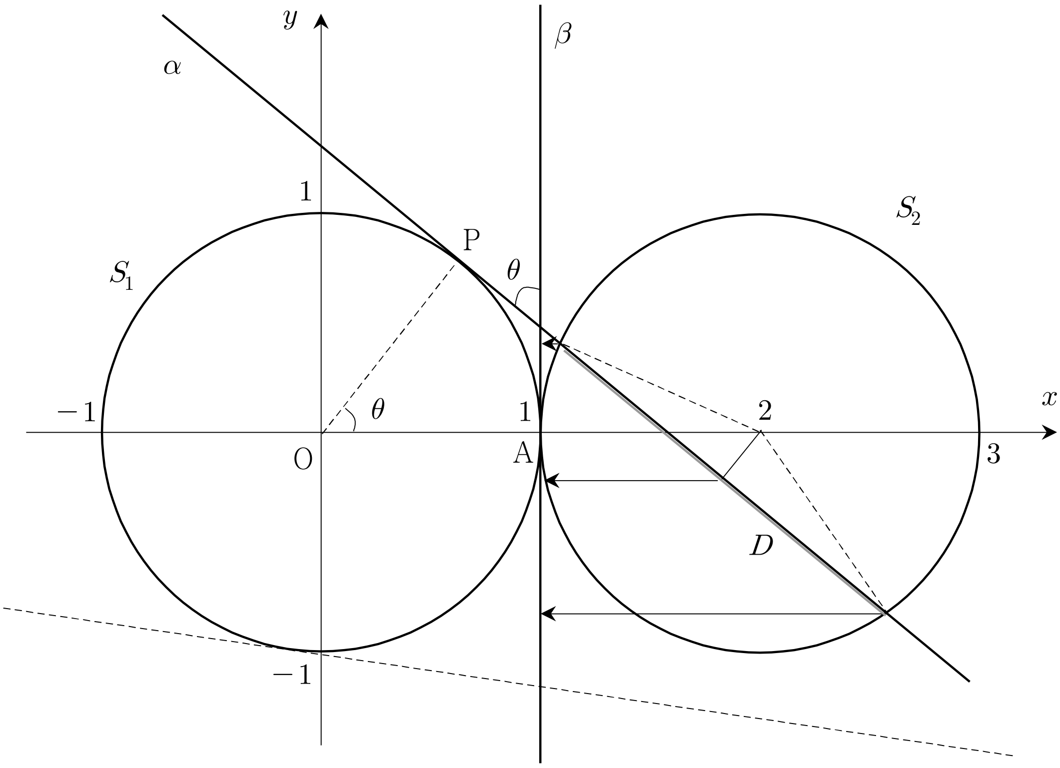
따라서 $\theta \rightarrow +0$일 때 $\overline{\mathrm{CH}} \rightarrow 1, \overline{\mathrm{BE}} \rightarrow 1$로서 $\overline{\mathrm{CE}} \approx \overline{\mathrm{HB}}$로 근사할 수 있다.

이때 $\overline{\mathrm{HB}} = \sin\frac{\theta}{2}$로서 $p = \frac{1}{2} \rightarrow 60p = 30$이 답이 된다.

29.

$sol.1)$

과감하게 단면화를 믿고 이용하자. 이때 문제의 핵심은 보존해야 한다!



구 S_1을 $x^2+y^2+z^2=1$로 두고, 구 S_2는 $(x-2)^2+y^2+z^2=1$로 잡으면

점 $\mathrm{A}(1,0,0)$과 평면 β는 $x=1$이라 할 수 있다.

이때, $z=0$ 평면, 즉 xy평면으로 단면화해서 생각해보자.

그러면 구 S_1과 S_2는 원에, 평면 β는 직선에 대응된다.

이렇게 얻은 단위원 위의 점 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$에 대하여 평면 α 혹은 직선 α가 구 S_2

혹은 원 $(x-2)^2+y^2=1$과 만나기 위해서는 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$를 만족해야 한다.

이때 직선 α의 방정식은

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1$$

이고, 원 $(x-2)^2+y^2=1$의 중심에서 이르는 거리 d는

$$d=\frac{|2\cos\theta+0-1|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=2\cos\theta-1$$

이 되므로 실제 공간에서 생기는 단면원 D의 넓이는

$$\pi\{1^2-(2\cos\theta-1)^2\}=4\cos\theta(1-\cos\theta)\pi$$

가 된다.

그런데 단면원 D와 평면 β가 이루는 예각의 크기는 θ이므로

단면 D의 평면 β 위로의 정사영 넓이는

$$4\cos\theta(1-\cos\theta)\pi \times \cos\theta$$

가 된다. 그리고 이 값의 최댓값을 구하려면 미분이 필요하기 때문에 편의상 $\cos\theta = t$로 치환하면 $0 < t \leq 1$이고,

$$4t^2(1-t)\pi = S(t)$$

라 둘 수 있다. 그러면

$$S'(t) = \left(8t - 12t^2\right)\pi = 4t(2-3t)\pi$$

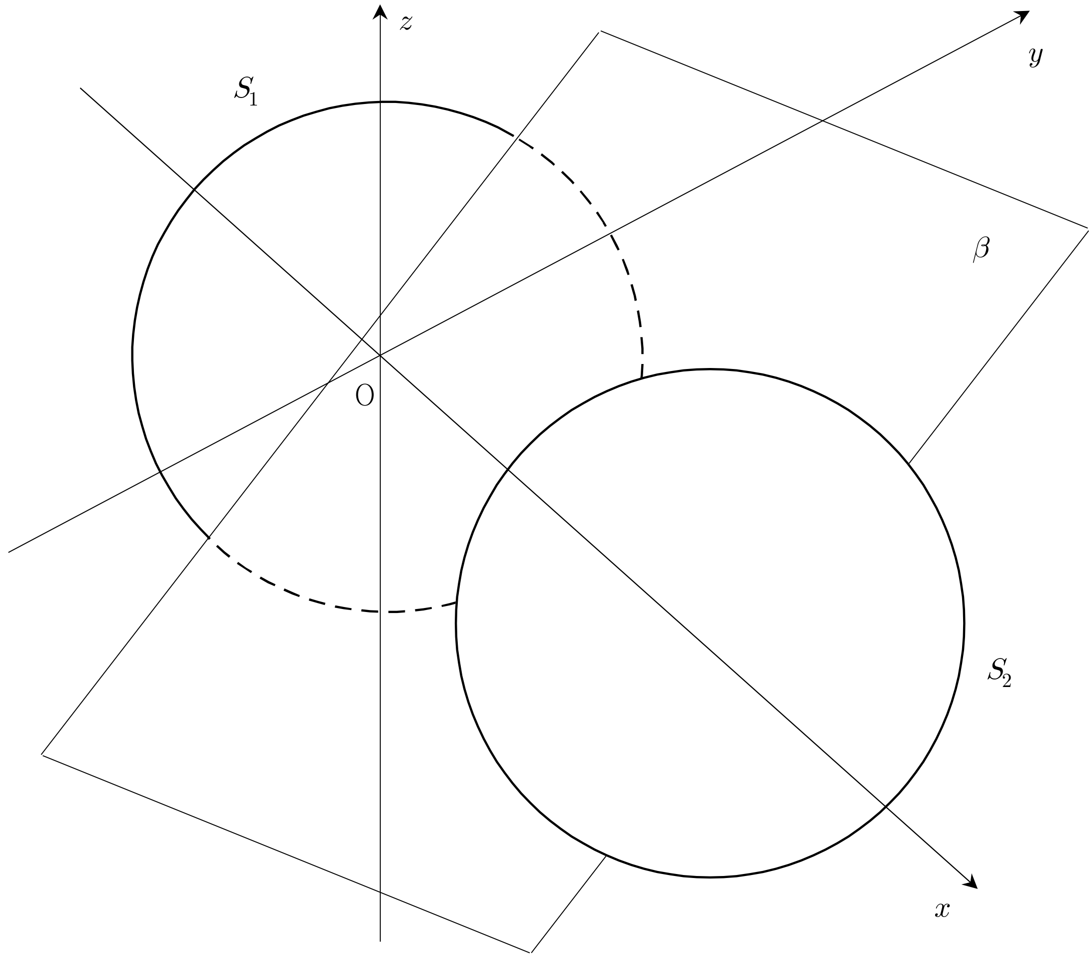
이므로 구하고자 하는 정사영 넓이의 최댓값은

$$S\left(\frac{2}{3}\right) = 4 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi = \frac{16}{27}\pi$$

로서 $p+q=43$이 답이 된다.

***sol.*2)**

단면화는 배제하고 있는 그대로 생각해보자.



편의상 $S_1 : x^2+y^2+z^2=1, S_2 : (x-2)^2+y^2+z^2=1$과 $\beta : x=1$과 $\mathrm{A}(1,0,0)$으로

두어도 일반성을 잃지 않는다.

이때 구 S_1 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$에 대하여 항상 $a^2+b^2+c^2=1$이 성립하며, 평면 α의 방정식은

$$ax+by+cz=1$$

이 된다. 한편 두 평면 α, β가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

$$\cos\theta = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = a \qquad (0<a<1)$$

가 성립하고, 평면 α와 구 S_2가 교점을 갖도록 하는 적절한 위치의 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$에 대하여 교원에 해당하는 D의 넓이는

$$\left\{1^2 - \left(\frac{|2a-1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)^2\right\}\pi = \{1-(2a-1)^2\}\pi$$

로서 단면 D의 평면 β 위로의 정사영 넓이는

$$a(4a-4a^2)\pi = 4(a^2-a^3)\pi = S(a)$$

로서 미분해서 구해보면

$$S'(a) = 4(2a-3a^2)\pi$$

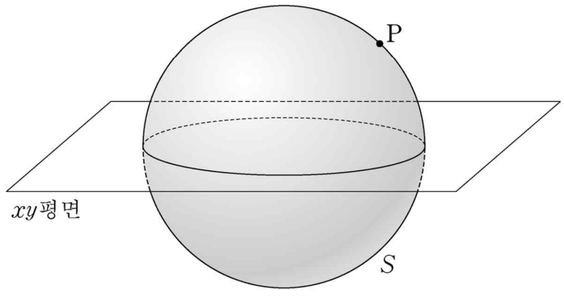
이므로 $S\left(\frac{2}{3}\right) = 4\left(\frac{4}{9}-\frac{8}{27}\right)\pi = \frac{16}{27}\pi$가 되어 $p+q=43$이 답이 된다.

〔 2014년 11월 대수능 수학 영역(B형) 29번 〕

29. 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=50$과 점 $\mathrm{P}(0, 5, 5)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) 원 C는 점 P를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다.

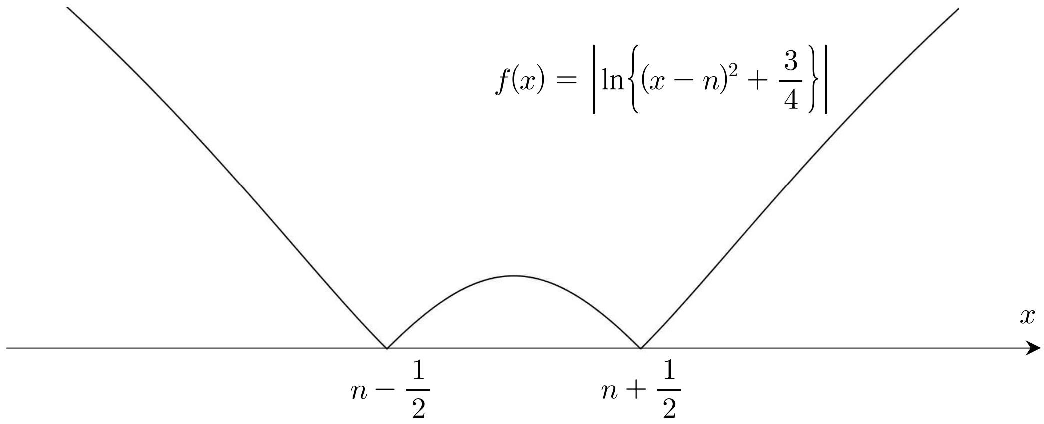
(나) 원 C의 반지름의 길이는 1이다.



30.

$f(x)=\left|\ln\left\{(x-n)^2+\dfrac{3}{4}\right\}\right|$ 만 놓고 보자면 로그의 진수가 항상 양수이므로 모든 실수에서 정의되는 연속함수임을 알 수 있다.

하지만 진수 부분인 $(x-n)^2+\dfrac{3}{4}$ 가 1이 되는 순간, 즉 $x=n\pm\dfrac{1}{2}$ 에서 $f(x)$는 x축과 교점을 갖고, x축 아랫부분의 $y=\ln\left\{(x-n)^2+\dfrac{3}{4}\right\}$의 개형에 해당하는 구간 $\left[n-\dfrac{1}{2},n+\dfrac{1}{2}\right]$ 에서는 그래프가 접혀 올라온 모습이 된다.



그러면, $y=\ln\left\{(x-n)^2+\dfrac{3}{4}\right\}$에 대하여 $y'=\dfrac{2(x-n)}{(x-n)^2+\dfrac{3}{4}}$ 이므로

$x=n-\dfrac{1}{2}$ 에서의 미분계수는 -1이고,

$x=n+\dfrac{1}{2}$ 에서의 미분계수는 1임을 알 수 있다.

따라서 $f(x)=\left|\ln\left\{(x-n)^2+\dfrac{3}{4}\right\}\right|$ 는 첨점 좌우에서의 미분계수가 ±1인 개형이다.

이때, $f(x+1)$은 $f(x)$를 x축 양의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것으로서

$x=n-1\pm\dfrac{1}{2}$ 에서, 즉 $x=n-\dfrac{3}{2}$ 과 $x=n-\dfrac{1}{2}$ 에서 첨점을 갖는다.

그러면 $f(x+1)-f(x)$의 미분불가능 지점 후보로서 $x=n-\dfrac{3}{2},n-\dfrac{1}{2},n+\dfrac{1}{2}$ 을 생각할 수 있고,

$x=n-\dfrac{3}{2}$ 에선 $f(x+1)$가 미분불가능, $f(x)$가 미분가능하므로

$f(x+1)-f(x)$는 미분불가능하고,

$x=n-\dfrac{1}{2}$ 에선 $f(x+1)$와 $f(x)$ 모두 미분불가능하지만 좌우미분계수가 같으므로,

마치 $|x|-|x|=0$의 효과처럼 $f(x+1)-f(x)$는 미분가능하게 된다.

마지막으로 $x=n+\dfrac{1}{2}$에선 $f(x+1)$는 미분가능하지만 $f(x)$가 미분불가능하므로 $f(x+1)-f(x)$는 미분불가능하다.

	$n-\frac{3}{2}$		$n-\frac{1}{2}$		$n+\frac{1}{2}$	
	좌미분계수	우미분계수	좌미분계수	우미분계수	좌미분계수	우미분계수
$f(x+1)$	-1	1	-1	1	k_1	
$f(x)$	k_2		-1	1	-1	1
$f(x+1)-f(x)$	$-1-k_2$	$1-k_2$	0		k_1+1	k_1-1

고로, $a_n=\left(n-\dfrac{3}{2}\right)+\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=2n-1$이고, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n=100$이 답이 된다.

※ $x=a$에서만 미분불가능한 함수에, 또 다른 동일 지점에서만 미분불가능한 함수를 빼서 미분불가능 지점을 제거하는 아이디어는 대표적으로 다음 수능 기출문제에서도 볼 수 있다.

〔 2014년 11월 대수능 수학 영역(B형) 30번 〕

30. 함수 $f(x)=e^{x+1}-1$과 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$$

이라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

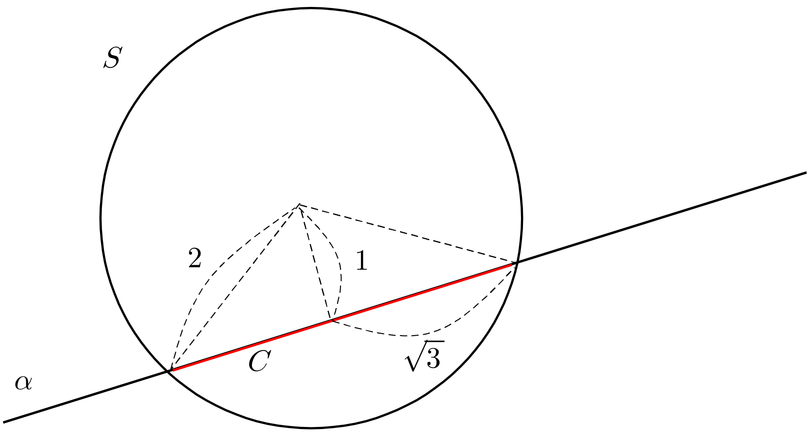
2016학년도 수능대비 장영진Plus 모의고사 문제지 제3회

20.

좌표공간에서 원의 방정식이 기울어져 있다면 타원은 아니라는 얘기다.
즉, 원을 품는 평면의 방정식의 법선벡터가 x, y, z축 어느 것과도 평행하지 않은 상황이라면 효과적으로 한 번에 원의 방정식을 나타내기란 까다롭다.
참신하게 접근을 하자면,

① 매개변수를 적절하게 이용하거나
② 구와 평면의 교선의 방정식 정도로 해석하거나
③ 구의 방정식 $f(x,y,z)=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0$과
　평면의 방정식 $g(x,y,z)=px+qy+rz+s=0$에 대하여
$$\{f(x,y,z)\}^2+\{g(x,y,z)\}^2=0$$

따위로 나타낼 수 있을 것이나 지금 이 문제를 푸는데 그다지 도움 되는 것처럼 보이지는 않는다. 그러니까 지금 문제에서 주어진 구 S와 평면 α의 교원을 하나의 방정식으로 나타내려는 것은 생산적인 방법이라 볼 수 없다.
대신 이번에도 단면화를 이용하자.
구 S의 중심에서 평면 α에 이르는 거리는
$$\frac{|0+0-2|}{\sqrt{1+0+3}}=1$$
인 반면, 구 S의 반지름은 2이므로 교원 C의 반지름은 $\sqrt{3}$이 된다.

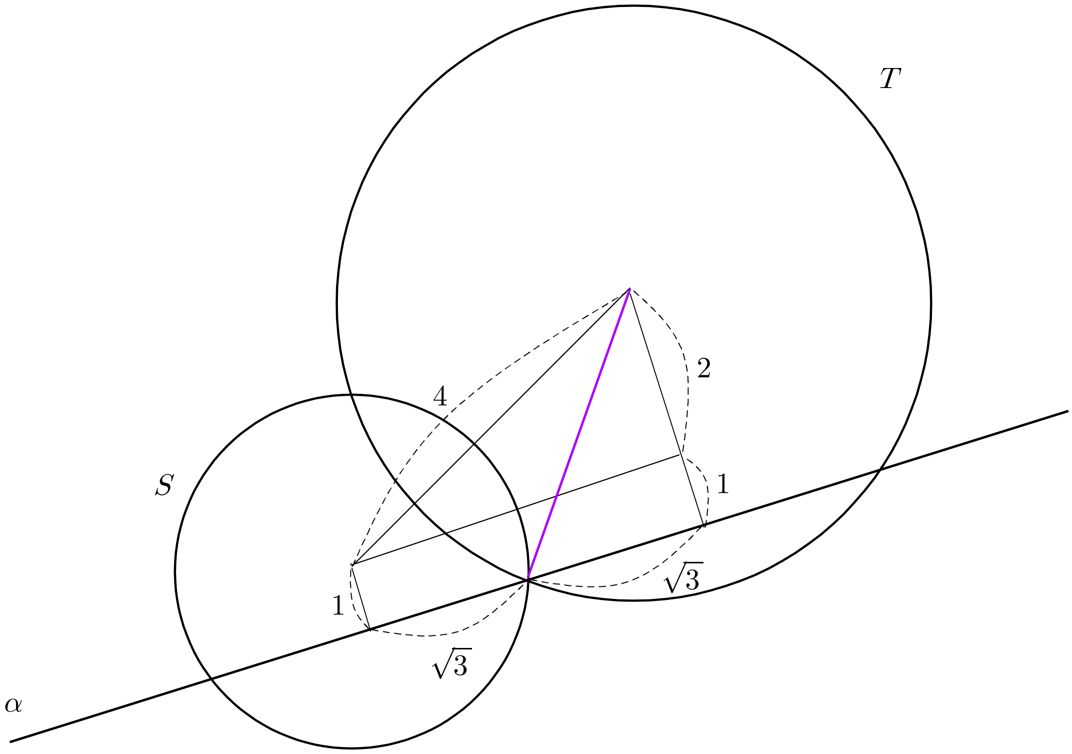


또, 구 T에서 평면 α에 이르는 거리는
$$\frac{|2+0-6-2|}{\sqrt{1+0+3}}=3$$
이므로 이를 참고하여 구 T도 동일한 단면에 그려 넣어 보자.

한편, 두 점이 어떤 평면을 기준으로 같은 영역에 속하는지, 다른 영역에 속하는지 파악하기 위해서는 고1때 배웠던 부등식 영역으로 접근하면 되는데

$$(0-\sqrt{3}\cdot 0-2)(2-\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-2)>0$$

이므로 평면 α에 대하여 두 구 S, T의 중심이 같은 쪽에 위치함을 알 수 있다.



그러면 두 구의 중심간 거리가 4이고, 구의 중심에서 평면 α에 이르는 거리의 차이가 2이므로 평면 α에서 내접하는 두 교원간의 중심간 거리가 $\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$이 되어야 한다.

여기서 특수각을 품는 길이비 $1:2:\sqrt{3}$이 빈번하게 등장하는 것은 아마 출제자의 배려로 볼 수 있다. 어떤 기출문제에선 이러한 길이비를 적극 활용하여야만 하는 것도 있었지만 지금은 단순히 수치로서만 작용하고 있다.

따라서, 구 T와 평면 α의 교원의 반지름은 $2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$이므로

구 T의 반지름 r에 대하여 $r^2=3+9=12$가 답이 된다.

21.

(가) 조건은 다음 수능 기출문제를 푼 경험을 바탕으로

〔 **2012년 11월 대수능 수리(가형) 21번** 〕

21. 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}\ (k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

익숙하게 받아들일 수 있다. 우선 $y=xe^{nx}$의 그래프를 최대한 정확하게 그려보자.

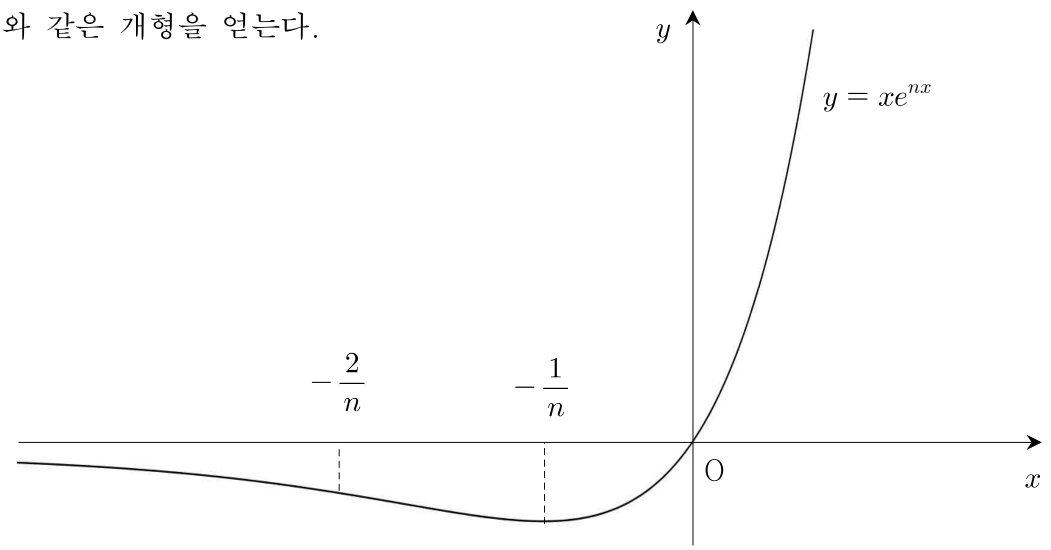
$$y'=(nx+1)e^{nx}$$

$$y''=n(nx+2)e^{nx}$$

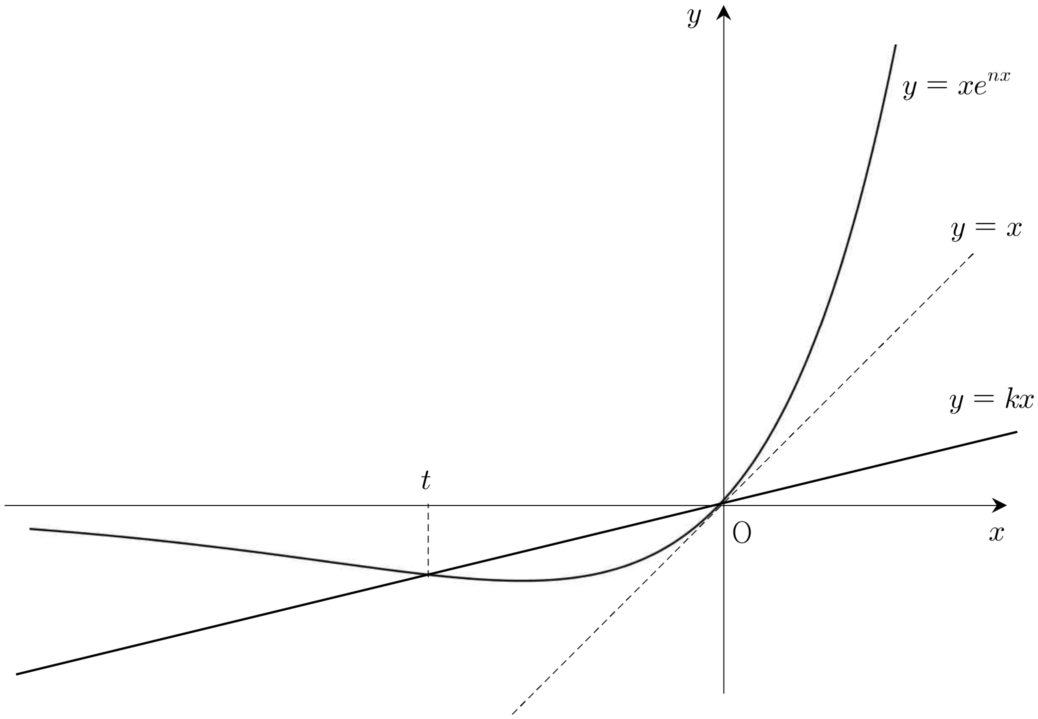
이고, $\lim\limits_{x\to\infty}xe^{nx}=\infty$와 $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{nx}=0$을 이용하면..?!

x	$\cdots$	$-\frac{2}{n}$	$\cdots$	$-\frac{1}{n}$	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$y=xe^{nx}$		변곡		극소	

아래와 같은 개형을 얻는다.



다소 직관적이더라도 주어진 조건을 만족하는 k의 값은, 원점을 지나는 직선이 곡선 $y = xe^{nx}$의 극솟점을 지날 때의 기울기가 될 것이라 추측할 수 있다.
시간에 쫓긴다면 불가피하게 이러한 추측만을 믿고 모험을 해야 할지도 모르지만, 지금은 연습이니 진리에 목말라하는 수험생의 마인드를 갖고서 꼼꼼하게 따져보자.



k는 1보다 작은 실수인데, 출제자의 의도된 상황이겠지만 하필이면 곡선 $y = xe^{nx}$의 원점에서의 접선의 기울기가 1임에 주의하여 그래프를 그려보자.

만약 원점을 지나는 직선 $y = kx$가 곡선 $y = xe^{nx}$와 제3사분면에서도 교점을 갖는다고 하자. 교점을 (t, kt)라 한다면 $0 < k < 1$인 경우 만약 $k \le 0$이면 (나) 조건에 위배된다.

$$kx = xe^{nx} \rightarrow t = \frac{1}{n}\ln k$$

가 된다. 따라서 $f(x)$를 정의하길

$$f(x) = \begin{cases} kx & (x < t) \\ xe^{nx} & (t \le x < 0) \\ kx & (x \ge 0) \end{cases}$$

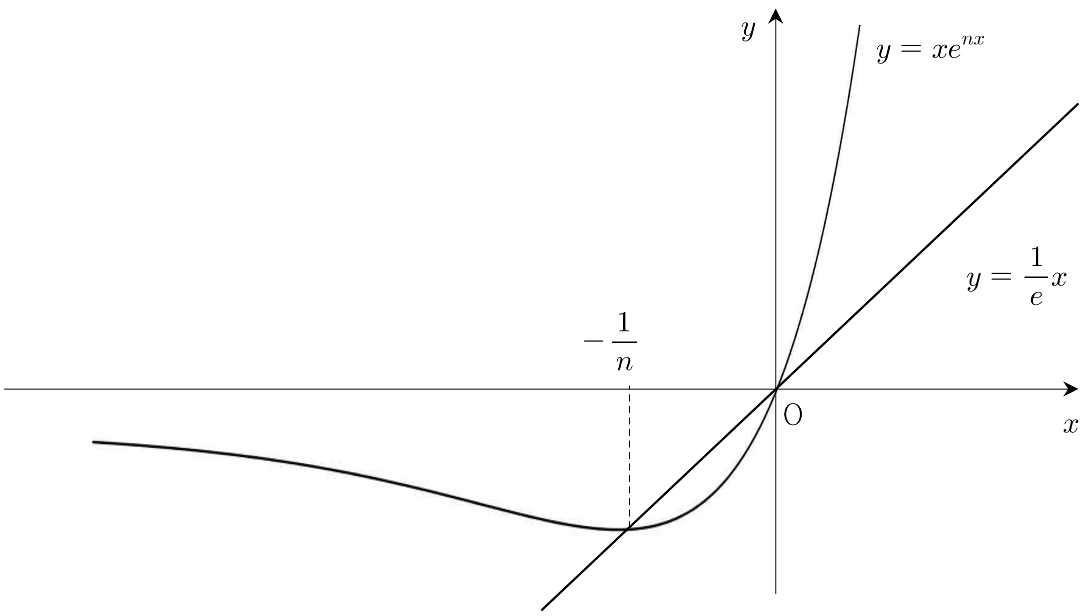
이고, (나) 조건에 의해 $f(x)$는 역함수가 존재하기 위해선 증가함수여야 한다.
그러면 직선으로 그래프가 나타나는 구간은 문제되지 않으나,
곡선 부분으로 그려지는 구간 $[t, 0)$에서는 감소함수일 수도 있다.
그런데 아까 구해둔 $y = xe^{nx}$에 대한 증감표 혹은 $y = xe^{nx}$의 도함수에 의하면
곡선 $y = xe^{nx}$는 $x \le -\frac{1}{n}$에서 감소하므로 $t \ge -\frac{1}{n}$를 만족해야 한다. 즉,

$$t = \frac{1}{n}\ln k \geq -\frac{1}{n} \rightarrow k \geq \frac{1}{e}$$

이 된다. 그리고 이때 k값은 원점을 지나는 직선이 곡선 $y = xe^{nx}$의 극솟점 $\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{ne}\right)$를 지날 때의 기울기인

$$\frac{-\frac{1}{ne} - 0}{-\frac{1}{n} - 0} = \frac{1}{e}$$

와도 일치하기에 앞선 추측이 틀리지 않았음을 보장하기도 한다.



그러면 $y = f(x)$와 $y = kx$로 둘러싸인 부분은 제3사분면에서 발생하며

$$a_n = \int_{-\frac{1}{n}}^{0} \left\{\frac{1}{e}x - xe^{nx}\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2e}\left[x^2\right]_{-\frac{1}{n}}^{0} - \left[\left(\frac{x}{n} - \frac{1}{n^2}\right)e^{nx}\right]_{-\frac{1}{n}}^{0}$$

$$= -\frac{1}{2en^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{en^2} = \frac{2e-5}{2en^2} = \frac{2e-5}{2e} \cdot \frac{1}{n^2}$$

이므로 계산력이 곧 실력이다!

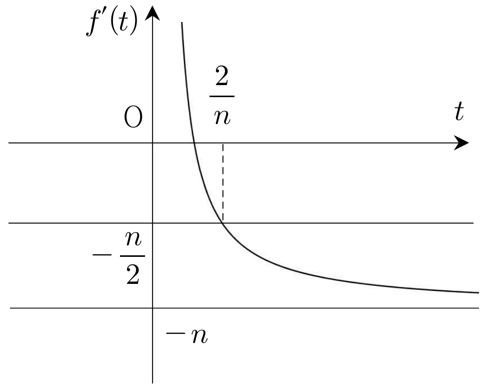
$$\frac{a_6}{a_3} = \frac{3^2}{6^2} = \frac{1}{4}$$

이 답이다.

※ $\lim_{x\to-\infty} xe^{nx} = 0$ 임은 보통 문제에서 함께 언급해주는 경우가 많지만 그렇지 않은 경우도 종종 있으므로 이 기회에 로피탈 정리 없이 증명해보도록 하자.

proof)

$-x = t$ 라 치환하면 $\lim_{x\to-\infty} xe^{nx} = \lim_{t\to\infty}\left(-te^{-nt}\right) = 0$, 즉 $\lim_{t\to\infty}\left(te^{-nt}\right) = 0$ 임을 보이는 문제로 환원된다.



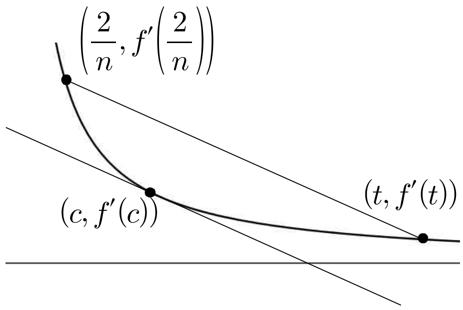
$f(t) = \ln\left(te^{-nt}\right) = \ln t - nt$ 이라 하자.

그러면 $e^{f(t)} = te^{-nt} = \frac{t}{e^{nt}}$ 임이 자명하다.

$$f'(t) = \frac{1}{t} - n$$

이므로 $t \geq \frac{2}{n}$ 이면 $f'(t) \leq -\frac{n}{2}$ 이다.

양의 실수 t 에서 정의된 함수 $f(t)$ 는 미분가능하므로 $t > \frac{2}{n}$ 일 때 평균값의 정리를 적용하면



$$\frac{f(t) - f\left(\frac{2}{n}\right)}{t - \frac{2}{n}} = f'(c)$$

인 실수 c 가 구간 $\left(\frac{2}{n}, t\right)$ 에 존재한다. 따라서

$$f(t) = f'(c)\left(t - \frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) \leq -\frac{n}{2}\left(t - \frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right)$$

이므로 부등식의 성질에 의해

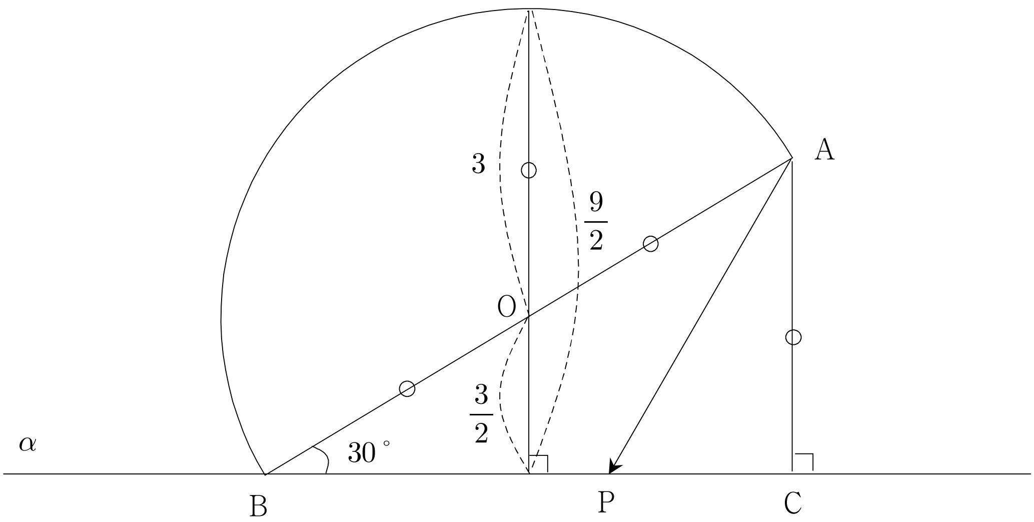
$$\lim_{t\to\infty} f(t) \leq \lim_{t\to\infty}\left\{-\frac{n}{2}\left(t - \frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right)\right\} = -\infty$$

이므로 $\lim_{t\to\infty} f(t) = -\infty$ 임을 알 수 있다. 고로,

$$\lim_{t\to\infty} te^{-nt} = \lim_{t\to\infty} e^{f(t)} = 0$$

29.

먼저 반구의 지름 AB가 평면 α로부터 얼마나 기울어져 있는지는 (가) 조건을 통해 확인할 수 있다. 단면화 하여 살펴보자면 다음과 같다.



편의상 지름 AB의 중점을 점 O라 하면 구 위의 한 점에서 내린 수선이 점 O를 지날 때가 최댓값으로서 $\frac{9}{2} = 3 + \frac{3}{2}$가 되어야 하기에 $\angle ABC = 30^\circ$가 된다.

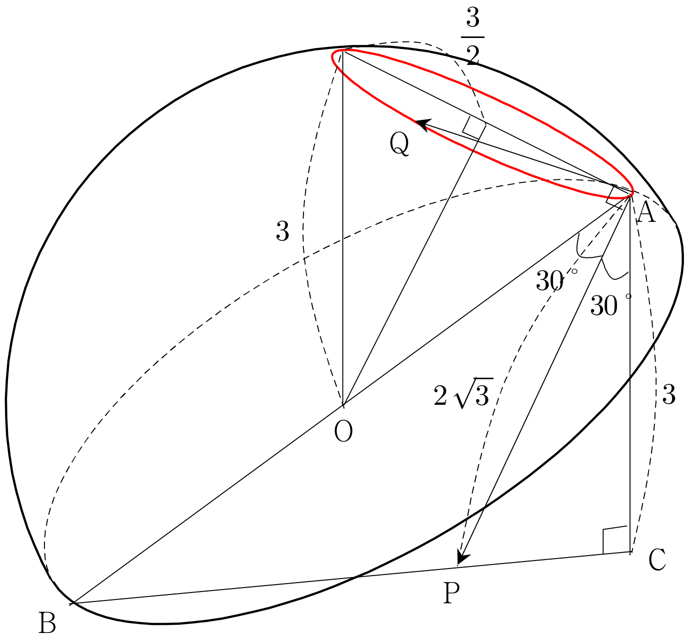
그 다음 (나) 조건을 해석하는 과정이 제법 까다롭다. 왜냐하면 점 Q는 반구 위에 존재하는 점이라 해서, 주어진 내적 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CQ}$를 회전의 중심인 O로 시점을 고쳐도 그다지 도움이 되지 않기 때문이다. 대부분의 기출문제에서는 회전의 중심으로 시점을 고치면 깔끔하게 풀렸었기 때문에 기출문제를 열심히 학습하였더라도 지금과 같은 상황에서 충분히 당황할 수 있다.

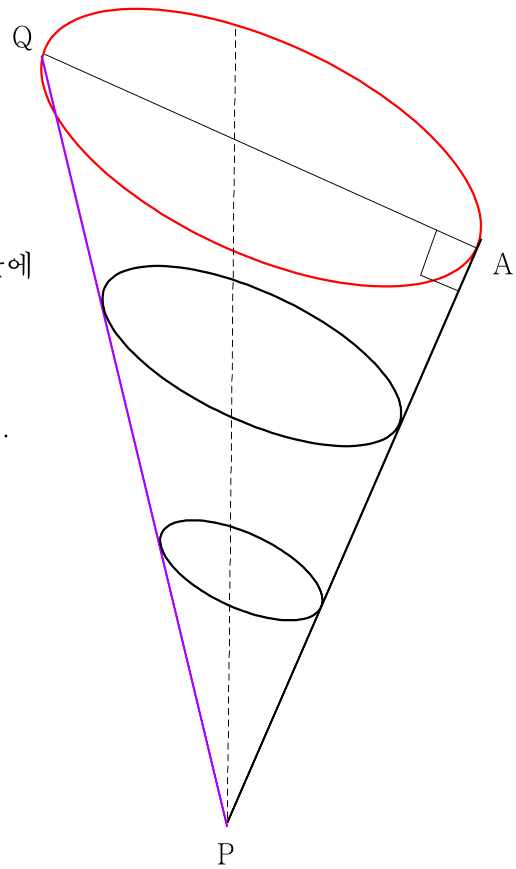
대신에 구 위의 한 점인 A로 $\overrightarrow{CQ}$의 시점을 고치면

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC}$$
$$= \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} - |\overrightarrow{AC}|^2 = -9 \rightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 0$$

이 되어 결국 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$임을 이끌어 낼 수 있다.

한편, 점 Q는 반구의 곡면상에 존재하는 동점이지만, 점 P는 선분 BC 상에 존재하는 고정점이므로, 점 Q는 $\overrightarrow{AP}$에 수직하고 점 A를 지나는 평면과, 반구의 교점 상에 존재한다. 그리고 그러한 교원의 둘레의 길이가 3π라 하였으므로 반지름은 다시 $\frac{3}{2}$이 되어야 한다. 여기까지 다시 그림으로 나타내보자.





이때 $|\overrightarrow{PQ}|^2$의 최댓값은 $|\overrightarrow{PQ}|$가 최대인 순간에 발생함이 자명하며, $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$이므로 $|\overrightarrow{PQ}|$는 직각삼각형 APQ의 빗변의 길이로서 $\overline{AP}$가 일정하므로 $\overline{AQ}$가 최대일 때 발생한다.
그리고 두 점 A, Q는 한 원위의 점들로서 지름 양 끝에 올 때 최대가 된다.

$\therefore |\overrightarrow{PQ}|^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 \leq (2\sqrt{3})^2 + 3^2 = 21$

〔 2009년 10월 교육청 수리(가형) 11번 〕

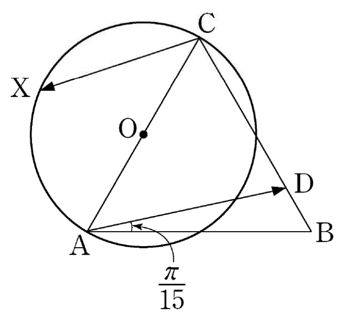
11. 좌표공간에서 직선 $\frac{x}{2}=-y=-\frac{z}{2}$ 와 평면 $x+y+z=2$ 가 만나는 점을 A 라 하자. 점 P가 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OP}|^2$ 을 만족시킬 때, 점 P 와 평면 $x+y+z=2$ 사이의 거리의 최댓값은? [4점]

① $3+\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $3+\frac{\sqrt{6}}{3}$ ③ $4+\frac{\sqrt{3}}{3}$

④ $4+\frac{\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $5+\frac{\sqrt{3}}{3}$

〔 2010년 11월 대수능 수리(가형) 22번 〕

22. 그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC 위의 점 D를 $\angle DAB=\frac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CX}$의 내적 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle ACP=\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



〔 2011년 10월 교육청 수리(가형) 18번 〕

18. 좌표공간에서 중심이 원점이고 직선 $x+1=2-y=z$와 서로 다른 두 점 A, B에서 만나는 구와 이 구 위를 움직이는 점 P가 있다. 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$에 대하여 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|^2$이 성립할 때, 점 P가 나타내는 도형의 길이는? [4점]

① π ② 2π ③ $2\sqrt{2}\pi$ ④ $2\sqrt{3}\pi$ ⑤ 4π

30.

가령, 중학교 때 이차함수 $y=x^2$을 x, y축 양의 방향으로 각각 $1, 2$만큼 평행이동할 때 x자리에 $x+1$을, y자리에 $y+2$를 대입하여

$$y+2=(x+1)^2$$

이라고 하지 않고, 반대로 x자리에 $x-1$을, y자리에 $y-2$를 대입하여

$$y-2=(x-1)^2 \ \rightarrow \ y=(x-1)^2+2$$

라 하였던 것처럼, 일차변환을 적용하기 위해 반대로 수치를 변화시켜야 한다.

즉, 문제에서 주어진 일차변환을 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$로서

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}$$

이므로 곡선을 y축 방향 혹은 세로방향으로 2배 늘어뜨리는 것이기 때문에

$$\frac{y}{2}=f(x) \ \rightarrow \ y=2f(x)=g(x)$$

라 두고 풀이를 진행해야 한다는 것이다. 당연한 이야기지만 $\frac{1}{2}f(x)=g(x)$로 두었다면 첫 단추부터 잘못 꿰었으므로 시간은 시간대로 허비하면서 답도 구할 수 없을 것이다.

이때 (나) 조건을 이용하면

$$(2t-t)^2+\{g(2t)-f(t)\}^2=t^2+\{2f(2t)-f(t)\}^2=t^2+9t$$

로부터 $2f(2t)-f(t)=\pm 3\sqrt{t}$ 임을 알 수 있다.

다시, (가) 조건에 의하면 $f(x)$가 제1사분면에서 증가하는 함수의 개형이므로

$$2f(2t)-f(t) \geq 2f(2t)-f(2t)=f(2t)>0$$

가 성립하기에

$$2f(2t)-f(t)=3\sqrt{t}$$

임을 알 수 있다. 한편, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하고

$$\{F(2t)\}'=2F'(2t)=2f(2t)$$

임을 염두에 두고 양변을 적분 식으로 변형해보면

$$F(2t)-F(t)=\int_t^{2t} f(x)dx=2t^{\frac{3}{2}}+C$$

가 되어야 한다. 그리고 $t=0$ 대입시 $C=0$이 된다.

한편, $S(n)$은 $t=2^{n-1}$을 대입하였을 때의 값이므로

$$S(n)=\int_{2^{n-1}}^{2^n} f(x)dx=2\cdot 2^{\frac{3}{2}(n-1)}=2^{\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}}$$

따라서 $S(3)+S(5)=2^4+2^7=16+128=144$가 답이 된다.

〔 2014년 09월 평가원 수학 영역(B형) 30번 〕

30. 양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.

(나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점

$(0, 0)$, $(t, f(t))$, $(t+1, f(t+1))$

을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\dfrac{t+1}{t}$이다.

(다) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{f(x)}{x}\,dx = 2$

$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}\,dx = \frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2016학년도 수능대비 장영진Plus 모의고사 문제지 제4회

21.

미분가능한 함수 $h(x)=g(f(x))=\sin\frac{\pi}{8}(x^3-12x)$가 열린 구간 $(0,n)$에서 극값을 갖는다면 반드시 그 점에서 미분계수가 0이 되어야 한다. 뿐만 아니라 극값 좌우에서 미분계수의 부호변화도 수반하여야 한다. 우선은

$$h'(x)=g'(f(x))f'(x)=0$$

로부터

$$g'(f(x))=0 \ \rightarrow \ f(x)=m\pi+\frac{\pi}{2} \qquad (\text{단, } m\text{은 정수})$$

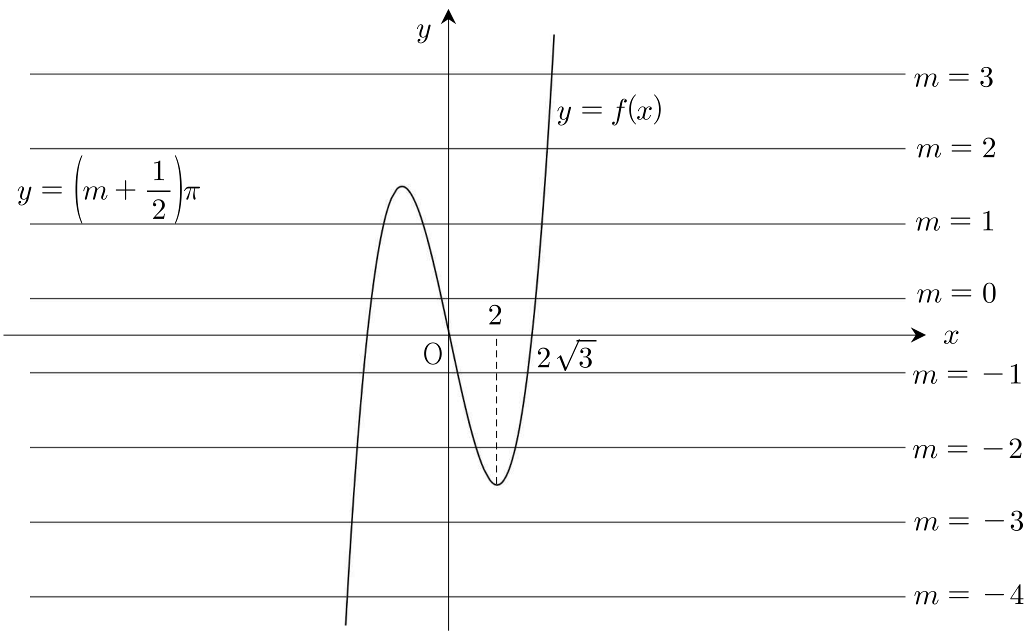
$$f'(x)=0 \ \rightarrow \ x=\pm 2$$

이므로 극값의 후보로 $f(x)=m\pi+\frac{\pi}{2}$와 $x=\pm 2$를 생각할 수 있다.

그런데 일반화한 경우에 대한 a_n을 구할 필요가 없으니 a_3과 a_6에 주목해서 구해보자.

열린 구간 $(0,3)$과 $(0,6)$에서 모두 $x=2$에서 $h'(x)$의 부호변화가 있으니 극값으로서 하나 카운팅 할 수 있고,

$f(x)=m\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $y=f(x)=\frac{\pi}{8}(x^3-12x)$와 $y=m\pi+\frac{\pi}{2}$를 그려보면



그리고 $f(2)=-2\pi, f(3)=-\frac{9}{8}\pi, f(6)=18\pi$이고 $h(x), f(x)$가 모두 $0<x<n$에서

정의됨에 주의하여 $x=2$ 이외에 극값을 갖는 지점을 헤아려 보면

　열린 구간 $(0,3)$에선 3군데

　열린 구간 $(0,6)$에선 $4+17=21$군데

발생하므로 $x=2$까지 고려하면 $a_3=3+1=4$이고 $a_6=21+2=23$이므로

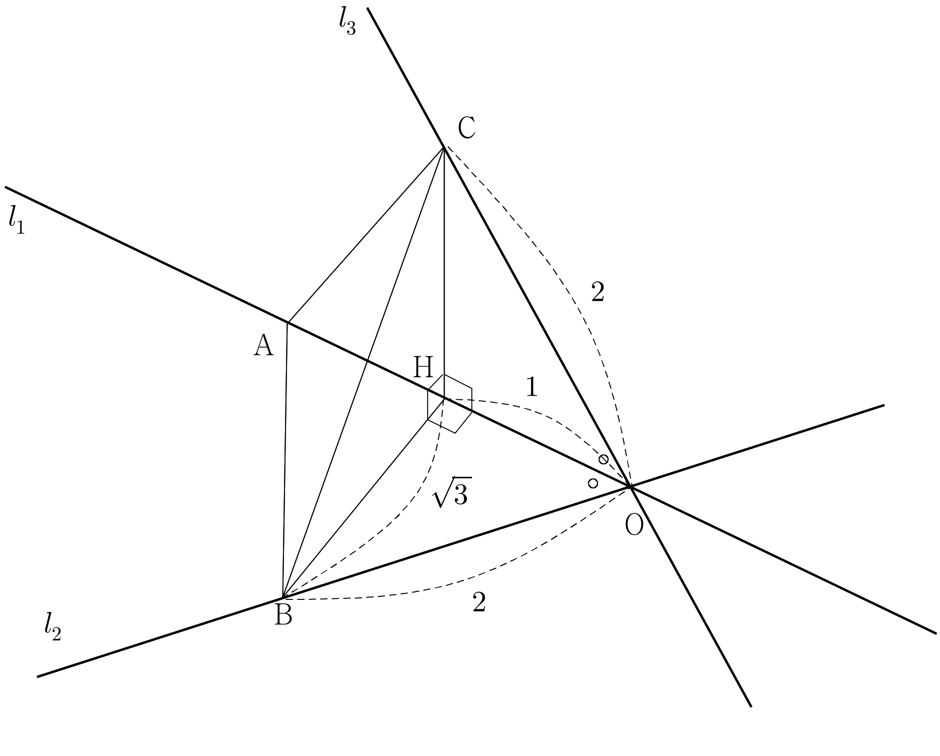
$$\therefore\ a_3+a_6=27$$

29.

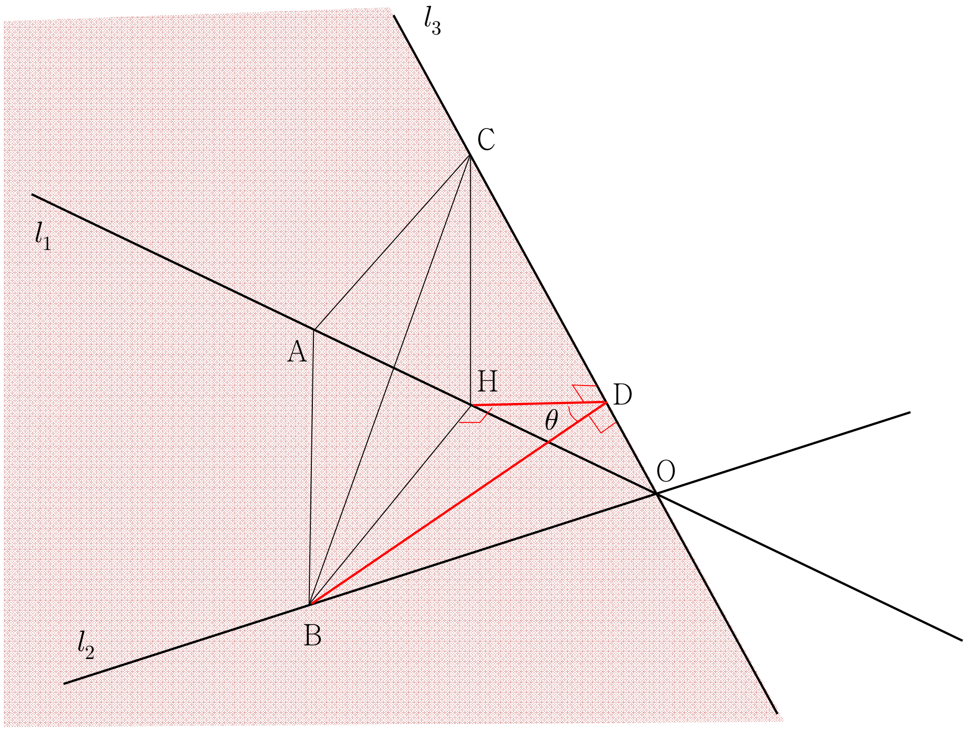
$sol.1)$

구의 반지름을 모서리로 취하는 사면체 $\mathrm{O-ABC}$는 적어도 세 모서리 $\overline{\mathrm{OA}},\overline{\mathrm{OB}},\overline{\mathrm{OC}}$의 길이가 모두 2여야 한다.

또, (가) 조건에 의하면 이등변삼각형 OAB가 결국 정삼각형임을 의미하므로, 사면체 $\mathrm{O-ABC}$의 밑면을 삼각형 OAB로 잡고서 관찰을 해보자. 그런데 $\overline{\mathrm{OH}}=1$이고, $\overline{\mathrm{OC}}=2$이므로 삼각형 OAC도 정삼각형이 된다.



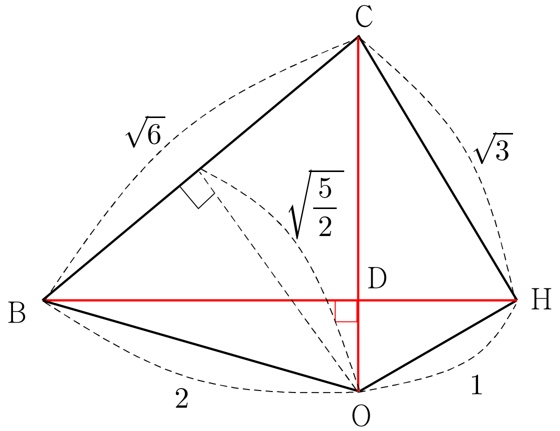
그리고 이때 두 직선 l_1,l_3를 포함하는 평면과 두 직선 l_2,l_3를 포함하는 평면이 이루는 이면각을 구하라는 문제이다. 교선이 바로 직선 l_3이므로 각 평면에서 적당한 점을 잡아 교선 l_3에 내린 수선의 발이 일치하도록 하여야 한다.



점 B에서 두 직선 l_1, l_3가 이루는 평면에 내린 수선의 발이 H이고,
두 점 B, H에서 두 평면의 교선 l_3에 내린 공통인 수선의 발을 D라 하면

$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{BD}}}$$

가 된다. 편의상 삼각형 BOC와 HOC를 한 평면에 놓이도록 펼쳐보자.

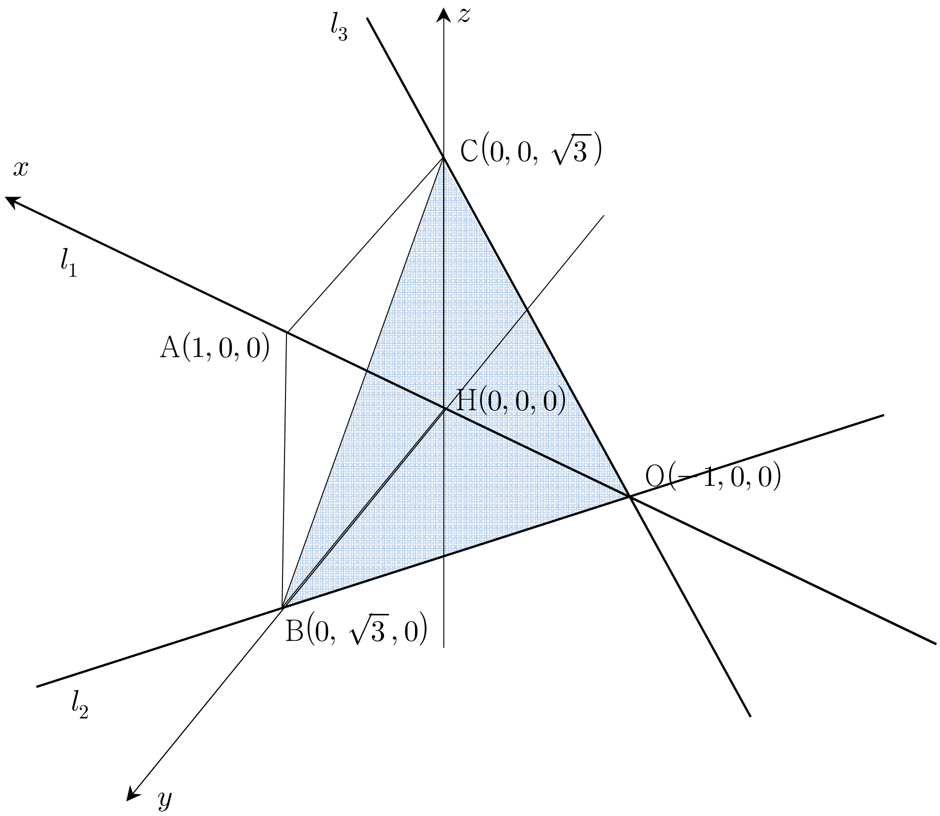


그러면

$$\overline{\mathrm{BD}} = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{\frac{5}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{2},\ \overline{\mathrm{DH}} = \frac{\sqrt{3} \times 1}{2}$$

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \ \rightarrow\ 120\cos^2\theta = 24$$

sol.2)
어느 정도 문제 상황을 파악한 뒤 좌표를 도입해보자.



그러면 O가 아니라 H가 원점이 되지만
두 직선 l_1, l_3를 포함하는 평면은 zx평면이 되어 법선벡터는 $(0,1,0)$이 되고,
두 직선 l_2, l_3를 포함하는 평면은 곧 평면 OBC가 되어

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{\sqrt{3}}+\frac{z}{\sqrt{3}}=1$$

로 법선벡터는 $(-\sqrt{3},1,1)$이라 볼 수 있다.
이때 $\cos\theta$는 두 평면의 법선벡터의 내적을 통해 구할 수 있으므로

$$\cos\theta=\frac{(0,1,0)\cdot(-\sqrt{3},1,1)}{|(0,1,0)||(-\sqrt{3},1,1)|}=\frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow 120\cos^2\theta=24$$

가 답이 된다.

30.
어떤 함수가 극값을 가지려면 도함수가 불연속이어도 좋으니 미분계수의 부호변화가 있어야 한다는 것이다.
또, 함수의 최솟값은 극솟값들과 구간 끝값들 중에서도 가장 작은 값으로 택하는데, 문제에서 정의된 함수 $g(x)$와 $g'(x)$는 모든 실수에서 정의된 미분가능한 함수이므로 (가) 조건은 $g(x)$가 극값을 갖지 않음을 의미한다.
(나) 조건은 아직까진 확 와닿지 않으므로 우선 $f(x)=x^2+bx+c$라 두고서 (가) 조건에 적용해보자.

$$g(x)=f(x)e^x \rightarrow g'(x)=\{f(x)+f'(x)\}e^x$$

이므로

$$g'(x)=\{x^2+(2+b)x+b+c\}e^x$$

에서 $x^2+(2+b)x+b+c=0$가 중근을 가져야만 $g'(x)\geq 0$을 만족한다. 따라서

$$D=(2+b)^2-4(b+c)=b^2+4-4c=0$$

으로부터

$$c=1+\frac{b^2}{4} \rightarrow f(x)=x^2+bx+1+\frac{b^2}{4}$$

임을 알 수 있다.
다음으로 (나) 조건을 보면

$$g(x)=e^x \rightarrow f(x)=x^2+bx+1+\frac{b^2}{4}=1 \rightarrow x=-\frac{b}{2}$$

이므로 두 곡선 $y=g(x)=f(x)e^x$와 $y=e^x$의 교점은 $\left(-\frac{b}{2}, e^{-\frac{b}{2}}\right)$가 되고, 오직 한 점에서 만나기 때문에 접점이 된다. 게다가 접점은 제1사분면 혹은 제 2사분면 위의 점이기 때문에
(나) 조건은 결국 접선의 y절편이 0 이하임을 요구하는 것이 된다. 따라서

$$y-e^{-\frac{b}{2}}=e^{-\frac{b}{2}}\left(x+\frac{b}{2}\right) \rightarrow e^{-\frac{b}{2}}\left(1+\frac{b}{2}\right)\leq 0 \rightarrow b\leq -2$$

가 되고,

$$f(x)=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+1>0$$

임에 착안하여 주어진 정적분을 계산해보면

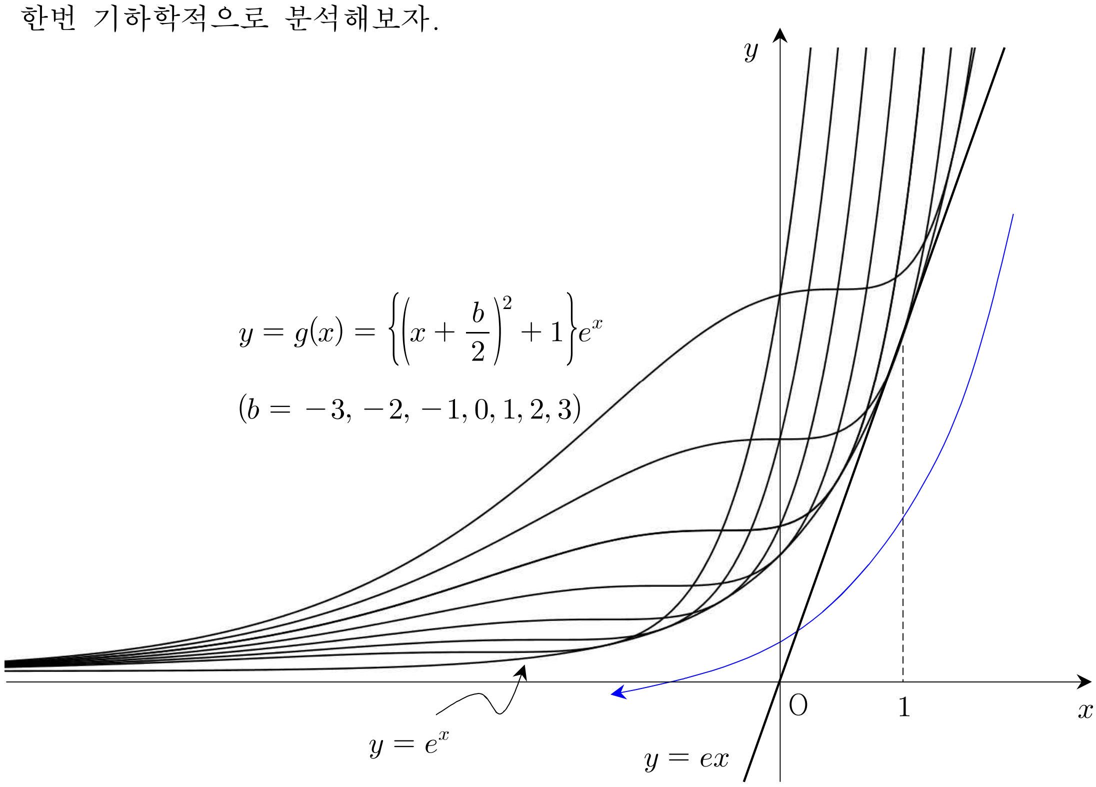
$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}\left\{\left(1+\frac{b}{2}\right)^3-\frac{b^3}{8}\right\}+1=\frac{1}{3}\left(1+3\cdot\frac{b}{2}+3\cdot\frac{b^2}{4}\right)+1$$

$$=\frac{b^2}{4}+\frac{b}{2}+\frac{4}{3} \qquad (b\leq -2)$$

가 되고, $b=-1$를 대칭축으로 갖는 이차함수의 일부이므로 구간 끝에 해당하는

$b=-2$일 때 최솟값 $p=\frac{4}{4}+\frac{-2}{2}+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$이므로 $24p=32$가 답이다.

※ 한번 기하학적으로 분석해보자.



(가), (나) 조건을 종합해보면 $y=g(x)$가 $y=e^x$와 $x=e^{-\frac{b}{2}}$에서 공통인 접점을 갖고, b가 $-3,-2,-1,0,1,2,3$순으로 커지면 접점의 x좌표는 점점 감소하게 된다.
한편, $y=e^x$ 위의 한 점에서 그은 접선이 원점을 지날 때의 접선 식은 $y=ex$이고, 그때 접점의 좌표는 $(1,e^1)$이므로 마침 $b=-2$에 해당한다.
따라서, 기하학적으로 관찰을 해봐도 $b\le -2$여야 한다.

또한 $f(x)=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+1$은 b값이 증가함에 따라 x축 음의 방향으로만 평행이동하기 때문에 만약 구간 $[0,1]$에서 이차함수 $f(x)$의 정적분 값의 최솟값을 취하고자 한다면 대칭축 $x=-\frac{b}{2}\ge 1$가 구간 $[0,1]$의 오른쪽 끝에 위치할 때로 $b=-2$여야 한다.

그때는 $f(x)=x^2-2x+2$이므로 $\int_0^1 f(x)dx \ge \frac{1}{3}-1+2=p$로서

$$\therefore\ 24p=8-24+48=32$$

2016학년도 수능대비 장영진Plus 모의고사 문제지 제5회

17.

$$\begin{cases} AB-A=E \rightarrow A(B-E)=E \\ B^4-B^3+B^2=B+E \rightarrow B^3(B-E)+B(B-E)=B(B-E)(B^2+E)=E \end{cases}$$

ㄱ. $A(B-E)=E$이므로 참.

ㄴ. $A=(B-E)^{-1}$이므로 $AB=(B-E)^{-1}B=B(B-E)^{-1}=BA$가 되어 참.

ㄷ. $(B-E)^{-1}=A$이면서 $(B-E)^{-1}=B(B^2+E)$인데,

역행렬은 유일하게 존재하므로 $A=B(B^2+E)=B^3+B$가 성립하고,

따라서 $A-B=B^3$의 역행렬이 존재하는지 묻는 문제로 귀결된다.

그런데 $B^3(B-E)^3(B^2+E)^3=E$이므로 결국

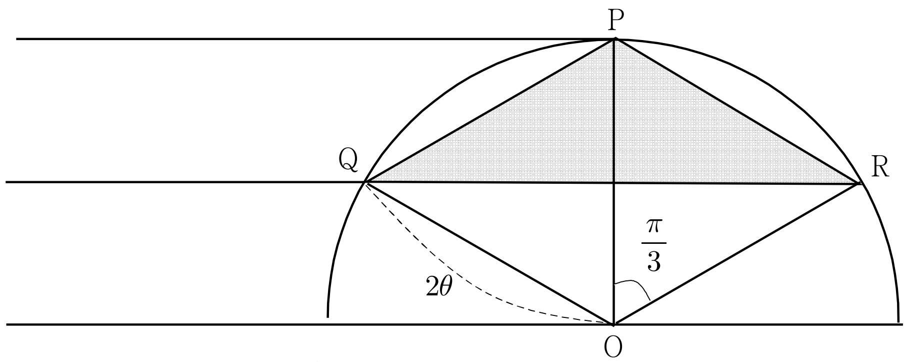
$$(A-B)^{-1}=(B^3)^{-1}=(B-E)^3(B^2+E)^3$$

로 $A-B$의 역행렬이 존재함을 알 수 있다.

19.

*sol.*1)

$\theta \rightarrow +0$인 상황에서 $\sin\theta$를 θ로 근사할 수 있음을 이용하자.

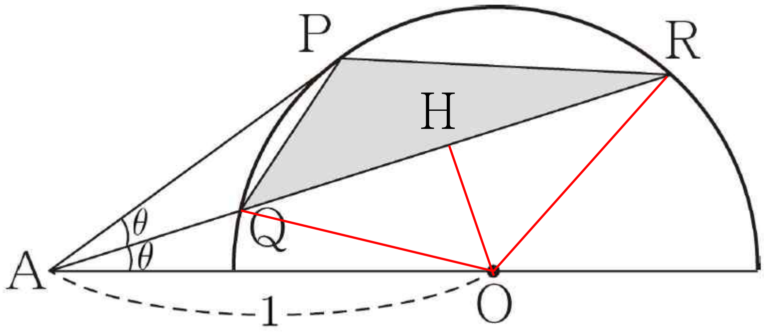


$S(\theta)$는 삼각형 PQR의 넓이 $\frac{\sqrt{3}}{4}(2\theta)^2=\sqrt{3}\theta^2$로 근사가능하므로 답은 $\sqrt{3}$이다.

*sol.*2)

삼각형 PQR의 넓이를, 삼각형 PAR에서 삼각형 PAQ의 넓이를 빼는 방식으로 구해보자. 그러기 위해선 $\overline{\mathrm{AP}}, \overline{\mathrm{AQ}}, \overline{\mathrm{AR}}$의 길이가 모두 필요할 것이다.

$\overline{\mathrm{AP}}=\cos 2\theta$임은 자명하지만 다른 성분을 구하기 위해선 보조선이 필요하다. 다음 그림과 같이 점 O에서 변 QR에 내린 수선의 발을 H라 하자.



주어진 반원의 반지름은 $\sin 2\theta$이므로 $\overline{OQ} = \overline{OR} = \sin 2\theta$이다.

또, $\overline{OH} = \sin\theta$이므로

$$\overline{QH} = \overline{RH} = \sqrt{\sin^2 2\theta - \sin^2\theta} = \sin\theta\sqrt{4\cos^2\theta - 1}$$

그리고 $\overline{AH} = \cos\theta$이므로

$$\overline{AQ} = \overline{AH} - \overline{QH} = \cos\theta - \sin\theta\sqrt{4\cos^2\theta - 1}$$

$$\overline{AR} = \overline{AH} + \overline{RH} = \cos\theta + \sin\theta\sqrt{4\cos^2\theta - 1}$$

가 성립한다. 따라서,

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{AR}\sin\theta - \frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{AQ}\sin\theta$$

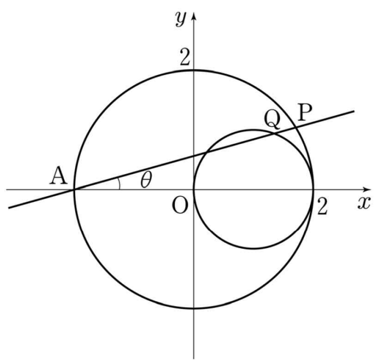
$$= \frac{1}{2}\cos 2\theta\left(\overline{AR} - \overline{AQ}\right)\sin\theta = \cos 2\theta\sqrt{4\cos^2\theta - 1}\,\sin^2\theta$$

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2} = 1\times\sqrt{3}\times 1^2 = \sqrt{3}$$

[2012년 09월 평가원 수리(가형) 20번]

20. 그림과 같이 점 A$(-2, 0)$과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P에 대하여 직선 AP가 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 P에 가까운 점을 Q라 하자.

$\angle\mathrm{OAP} = \theta$라 할 때, $\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{PQ}}{\theta^2}$의 값은? [4점]



① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

20.

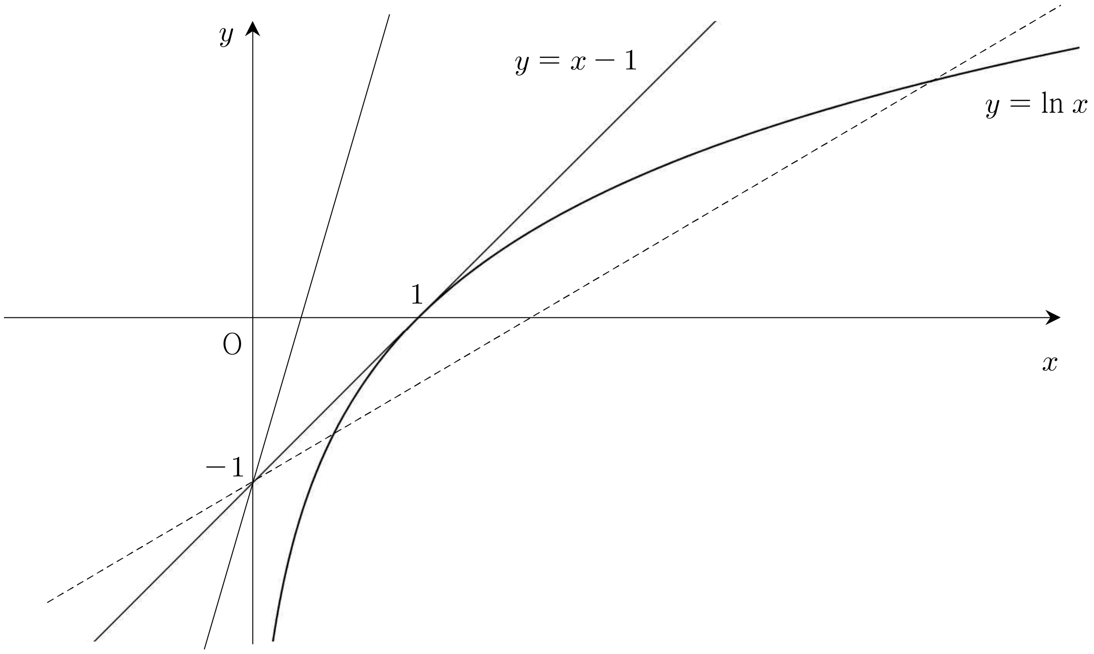
양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 도함수 $f'(x)$의 부호변화가 일어나지 않으면 된다. 즉,

$$f'(x) = \ln x + 1 - 2ax$$

의 부호변화가 일어나지 않도록

$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = 2ax - 1 \end{cases}$$

의 교점 관계로 환원하여 a값을 구하자.



그러면 $y = \ln x$ 위의 임의의 점 $(t, \ln t)$에서 그은 접선이 점 $(0, -1)$을 지날 때로 식을 세우면

$$y - \ln t = \frac{1}{t}(x - t) \;\rightarrow\; -1 - \ln t = \frac{1}{t}(0 - t) \;\rightarrow\; t = 1$$

즉, $y = \ln x$ 위의 점 $(1, 0)$에서 그은 접선이

$$y = \frac{1}{1}(x - 1) + 0 = x - 1$$

이 되므로 $2a = 1 \rightarrow a = \dfrac{1}{2}$이 최솟값이 된다.

하나의 함수가 x축과 근을 갖는 여부를 따지기 위해 두 개의 함수로 분리하여 생각한 부분과,

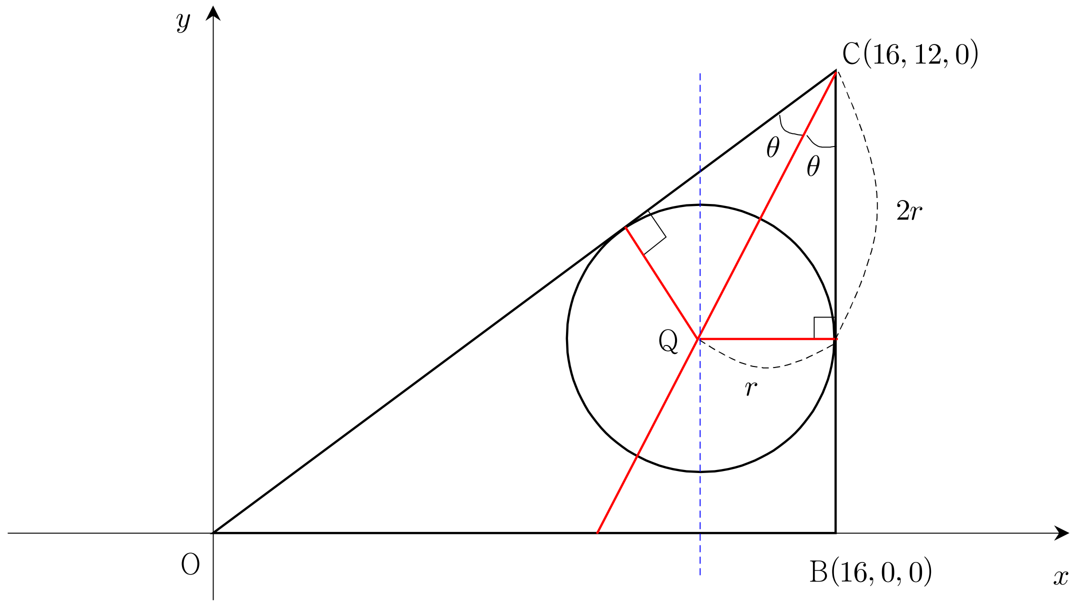
한 정점을 지나는 직선의 방정식 대신에 접선의 방정식을 대신 이용할 수 있는 이유가 자명하게 다가와야 한다.

21.

사면체 OABC를 잘 들여다보면 $3:4:5$와 $1:1:\sqrt{2}$의 길이비도 포함하고 있다. 이를 효과적으로 이용하려면 좌표 풀이로 접근해야 할 것이다.

먼저 삼각형 OBC의 세 변의 길이비가 $3:4:5$라는 사실로부터,

xy평면 위에 있는 원기둥의 밑면은 다음과 같이 나타날 것이다.

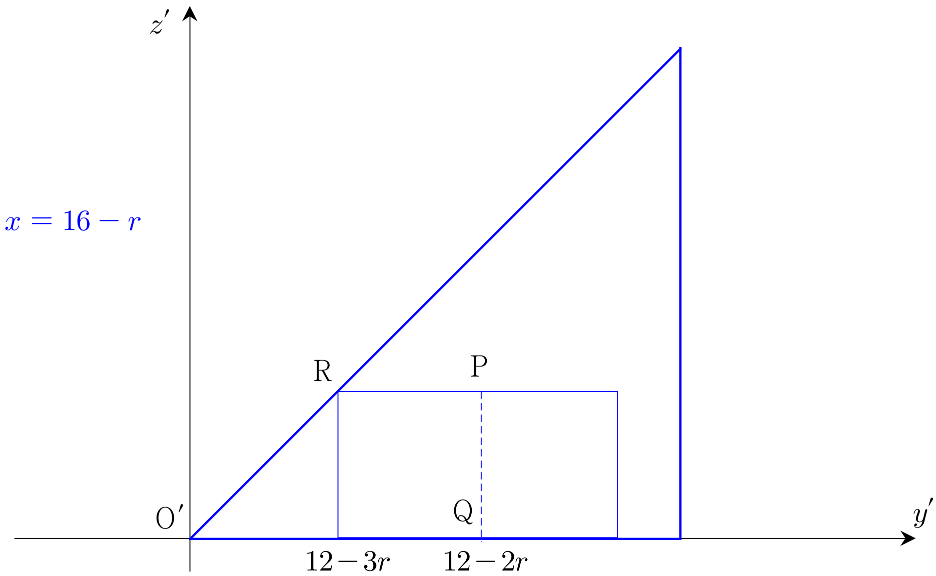


편의상 점 P의 xy평면 위로 내린 수선의 발을 점 Q라 하자.

당연히 이 원은 삼각형 OAB의 두 변에만 접하는 모습이어야 한다.

그러면 $\tan 2\theta = \dfrac{4}{3}$일 때 $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$임을 이용하여 $\mathrm{Q}(16-r, 12-2r, 0)$라 할 수 있다.

이번에는 $1:1:\sqrt{2}$의 길이비를 이용하기 위해 삼각형 OAB와 xy평면을 잘 관찰할 수 있도록 선분 PQ를 포함하고 평면 ABC에 평행한 면으로 단면화를 하면 다음 그림과 같이 나타날 것이다. 이렇게 단면화 하는 평면의 방정식은 $x = 16 - r$이다.



이때 원기둥의 높이를 h라 하고, 점 P를 중심으로 하는 원기둥의 밑면이 삼각형 OAB와 만나는 한 점의 좌표를 R이라 하면

$$\mathrm{Q}(16-r, 12-2r, 0) \rightarrow \mathrm{P}(16-r, 12-2r, h) \rightarrow \mathrm{R}(16-r, 12-3r, h)$$

이라 좌표를 잡아줄 수 있다.

그런데 점 R은 평면 OAB, 즉 $y=z$ 평면 위에 놓여 있으므로

$$12-3r=h$$

라 할 수 있는데, 문제의 조건에서 밑면의 반지름 r과 원기둥의 높이 h가 같다고 하였으니

$$12-3r=h=r \rightarrow r=3$$

임을 알 수 있다.

따라서, $\mathrm{P}(13,6,3)$이 되어 $\overline{\mathrm{OP}}^2=13^2+6^2+3^2=169+36+9=214$가 답이 된다.

28.

(가) 조건만 놓고 본다면 가장 간단한 함수를 상수함수로서 $f(x)=2$라 잡으면 되지만 (나) 조건에 위배된다. 그러니 우선 시키는 대로 식을 세워보자.

두 점 $(t, f(t))$와 $(t+1, f(t+1))$의 $1:2$ 외분점은

$$\left(\frac{(t+1)-2t}{1-2}, \frac{f(t+1)-2f(t)}{1-2}\right)$$

이므로

$$\frac{f(t+1)-2f(t)}{-1}=2 \rightarrow f(t+1)=2f(t)-2$$

라 할 수 있다. 그러면

$$\int_1^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^2\{f(x+1)+2\}dx=12$$

$$\rightarrow \int_2^3 f(x)dx=22$$

$$\int_2^3 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_2^3\{f(x+1)+2\}dx=22$$

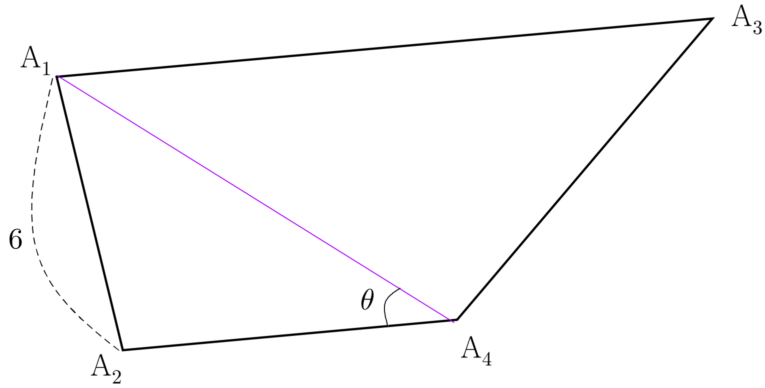
$$\rightarrow \int_3^4 f(x)dx=42$$

이므로

$$\therefore \int_2^4 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx=22+42=64$$

29.

(가) 조건만 얼핏 봐선 네 점 $\mathrm{A_1, A_2, A_3, A_4}$가 모두 한 직선 상에 놓여있는 것 같지만, 네 점 $\mathrm{A_1, A_2, A_3, A_4}$를 꼭짓점으로 하는 사각형이란 조건으로 인하여 하나의 평면에 놓여 있어야 할 뿐만 아니라 한 쌍의 변이 평행한 사다리꼴이어야 함을 알 수 있다.



만약 직선 $\mathrm{A_1A_3}$에 사다리꼴의 변 $\mathrm{A_1A_3}$를 고정시키면

직선 $\mathrm{A_2A_4}$는 $\overline{\mathrm{A_1A_2}} = 6$을 유지하면서 변할 것이다.

직관적으로는 $\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} \perp \overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}}$일 때가 사각형 넓이의 최댓값이 발생 할테지만

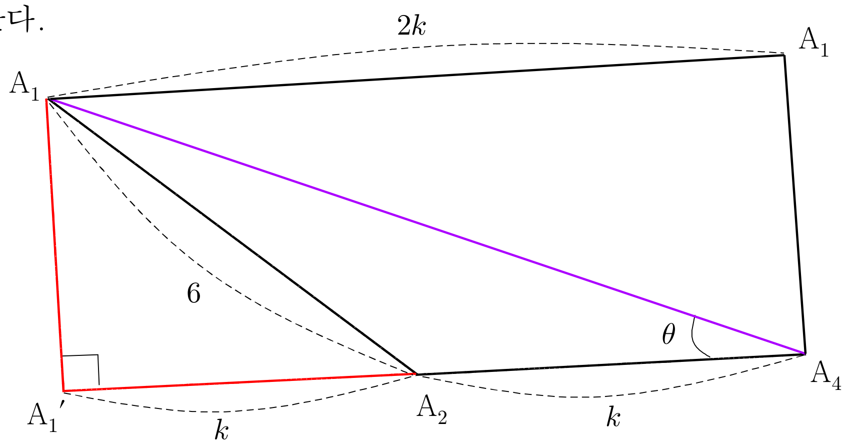
추가로 (나) 조건까지 헤아려보면 상황이 조금 더 까다롭다는 것을 알 수 있다.

여기서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{A_1A_4}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{A_2A_4}}$가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_4}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A_2A_4}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_4}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{A_2A_4}}\right|\cos\theta = 2\left|\overrightarrow{\mathrm{A_2A_4}}\right|^2$$

$$\rightarrow \left|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_4}}\right|\cos\theta = 2\left|\overrightarrow{\mathrm{A_2A_4}}\right|$$

가 성립한다.



만약 $\overline{\mathrm{A_2A_4}} = k$라 하면 (가) 조건에 의해 $\overline{\mathrm{A_1A_3}} = 2k$가 되고,

위 그림과 같이 선분 $\mathrm{A_2A_4}$의 연장선상에 내린 점 $\mathrm{A_1}$의 수선의 발을 $\mathrm{A_1}'$이라 하면

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_4}}\right|\cos\theta = 2\left|\overrightarrow{\mathrm{A_2A_4}}\right| \;\rightarrow\; \overline{\mathrm{A_1'A_4}} = 2k$$

로 결국 $\mathrm{A_1A_1'A_4A_3}$은 직사각형이 된다.

이때 사다리꼴 $A_1A_2A_4A_3$의 높이에 해당하는 $\overline{A_1A_1{}'}$의 길이는

$$\overline{A_1A_1{}'} = \sqrt{36-k^2}$$

으로서 사각형 $A_1A_2A_4A_3$의 넓이를 $S(k)$라 하였을 때

$$S(k) = \frac{1}{2}(k+2k)\sqrt{36-k^2} = \frac{3}{2}\sqrt{k^2(36-k^2)}$$

이 된다. 여기서 $S(k)$를 그대로 미분하면 복잡하므로

근호 내부의 $k^2(36-k^2)$ 부분만 관찰 해봐도 $k^2=18$일 때 $S(k)$가 최대임을 알 수 있다. 고로, 사각형 $A_1A_2A_4A_3$의 넓이의 최댓값은 $\frac{3}{2}\sqrt{18^2}=27$이다.

〔 **2012년 09월 평가원 수리(가형) 29번** 〕

29. 좌표공간에서 네 점 A_0, A_1, A_2, A_3이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{A_0A_2}| = |\overrightarrow{A_1A_3}| = 2$

(나) $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3} \cdot \left(\overrightarrow{A_0A_k} - \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right) = \cos\frac{3-k}{3}\pi \ (k=1,\ 2,\ 3)$

$|\overrightarrow{A_1A_2}|$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점]

30.

$sol.1)$

$f(x)$를 다짜고짜 미분부터하기 전에, 대칭성은 없는지, 점근선은 갖는지, 그게 최선인지 등을 간단하게 체크해보자. 가끔씩 미분을 안 쓰고도 잘 풀어낼 수 있는 기출문제들도 있었다.

정의역이 모든 양의 실수이므로 기함수이거나 우함수일 수는 없음이 자명하다.

그리고 지수 부분의 함수가 다시 로그함수를 합성한 꼴인 $(\ln x)^3+1$로 되어 있으므로 $x=0$에서 불연속이며, $\lim_{x\to+0} f(x)=0$이 된다.

또, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$임도 자명하다.

이제 미분을 통하여 그래프 개형을 파악해보자. 계산이 제법 까다롭다.

$$f'(x)=3(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}\cdot f(x)=\frac{3(\ln x)^2}{x}f(x)\ \geq\ 0 \qquad \because\ f(x)>0$$

으로서 $f(x)$는 증가함수이고,

$$f''(x)=6(\ln x)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot f(x)-3(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x^2}\cdot f(x)+9(\ln x)^4\cdot\frac{1}{x^2}\cdot f(x)$$

$$=\frac{3}{x^2}(\ln x)\{2-\ln x+3(\ln x)^3\}f(x)$$

$$=\frac{3}{x^2}(\ln x)(\ln x+1)\{3(\ln x)^2-3(\ln x)+2\}f(x)$$

로 정리할 수 있다.

한편, $3(\ln x)^2-3(\ln x)+2=3\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}>0$임을 염두에 두고 따져보면

$-1<\ln x<0$, 즉 $\frac{1}{e}<x<1$에서 $f''(x)<0$이므로 $f(x)$는 위로 볼록하고,

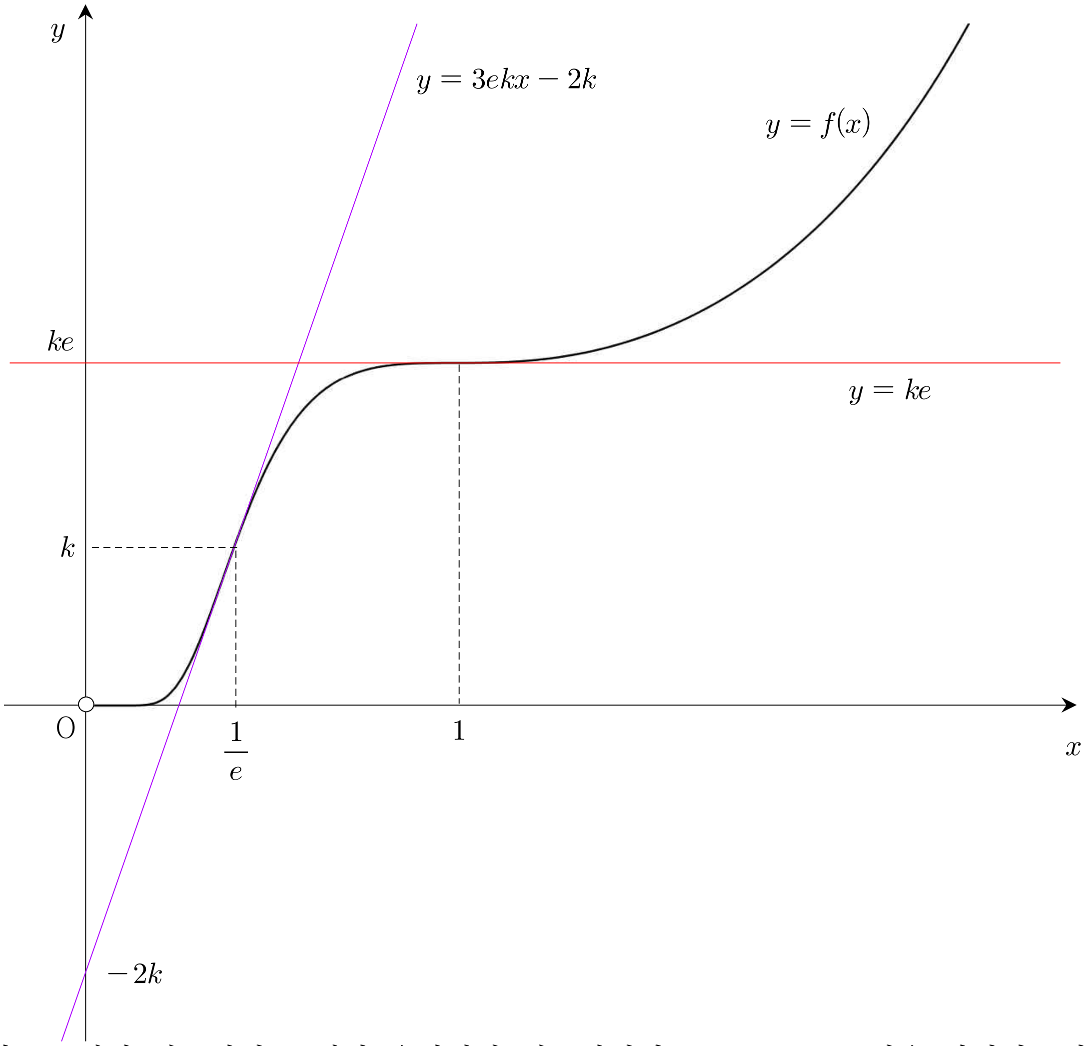
그 외의 구간인 $0<x<\frac{1}{e}$과 $x>1$에서는 $f''(x)>0$이므로 $f(x)$는 아래로 볼록한 개형이다.

그리고 $f(x)$의 요철이 바뀌는 지점인 점 $\left(\frac{1}{e},k\right)$와 $(1,ke)$는 변곡점이 되는데, 각각의 변곡점에서 그은 접선, 즉 변곡접선을 구해보면

$$f'\left(\frac{1}{e}\right)=3ek\ \rightarrow\ y-k=3ek\left(x-\frac{1}{e}\right)\ \rightarrow\ y=3ekx-2k$$

$$f'(1)=0\ \rightarrow\ y-ke=0(x-1)\ \rightarrow\ y=ke$$

여기까지 정보들을 종합하여 그려내면 다음과 같다.



만약 두 개의 변곡접선 중에서 유의미한 변곡접선이 $y = 3ekx - 2k$임을 파악하고서 y축 상에 존재하는 점 $\mathrm{P}(0, a)$가 $-2k < a < 0$이라 할 수 있다. 하지만 그렇기에 $a_k = 2k - 1$이라 한다면 서술형 평가에서는 0점을 받아도 할 말이 없을 것이다.

〔 2013년 11월 대수능 수학 영역(B형) 30번 〕

30. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x) = f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1, g(1))$과 점 $(4, g(4))$는 곡선 $y = g(x)$의 변곡점이다.

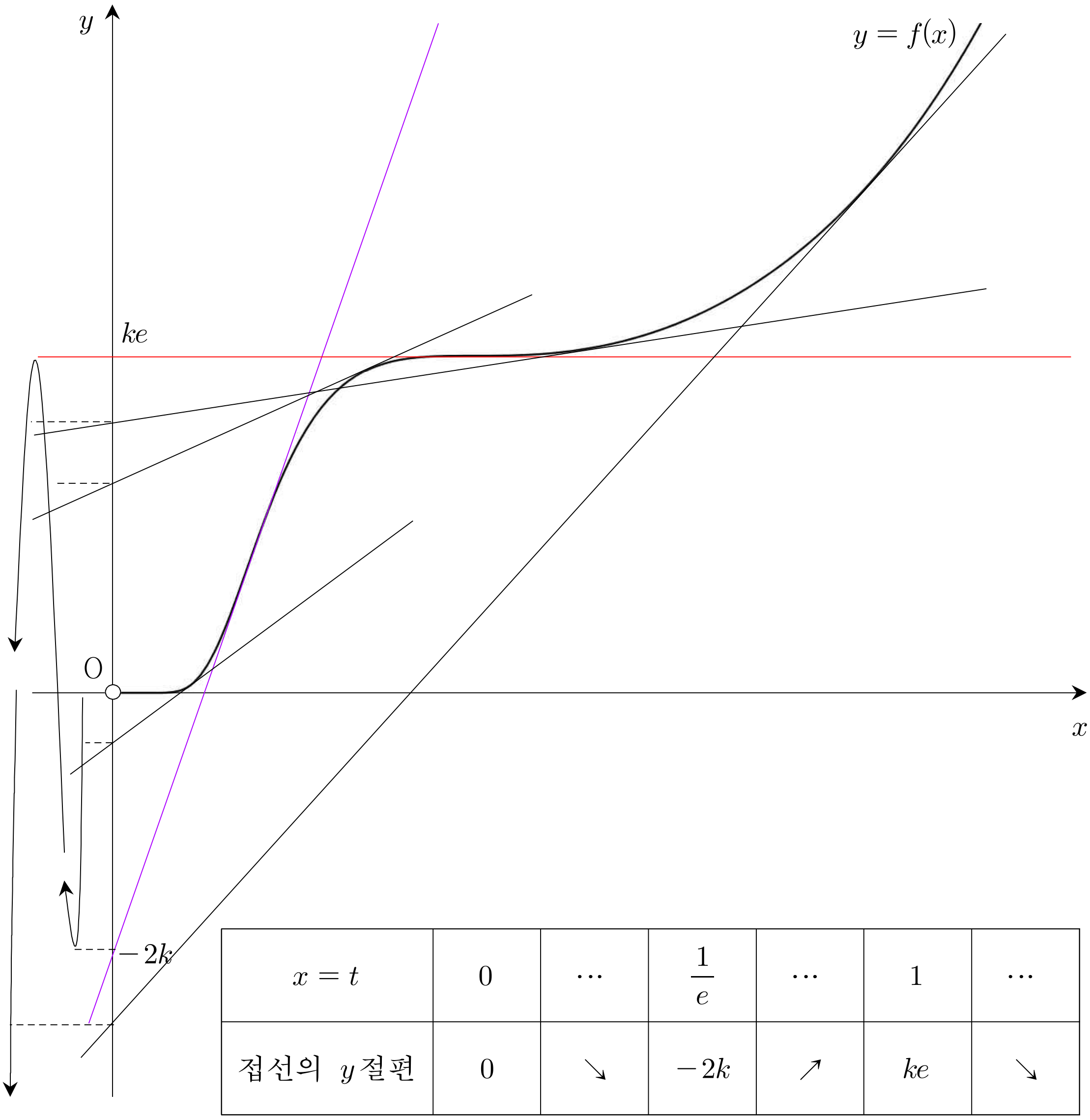
(나) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y = g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1 < k < 0$이다.

$g(-2) \times g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

문제에서 말하는,

"점 $\mathrm{P}(0, a)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수가 3이 되는..."

이라는 의미를 시각적으로 충실하게 확인하기 위해, 원점에서 출발하여 곡선 $y=f(x)$를 따라가는 점에서 그은 접선의 y절편의 수치 변화를 보자.



$x=t$	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$
접선의 y절편	0	↘	$-2k$	↗	ke	↘

사실 문제에서 요구하고 있는 상황은 점 P에서 3개의 접선을 긋는 것인데, 관점을 달리 하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서 그은 접선이 점 P를 지나도록 하는 t값이 꼭 3개 존재하도록 하는 a의 범위를 생각하였다.

이에 따라 점 P는 y축 위를 아래, 위, 아래로 움직이며, 방향을 바꾸는 지점이 변곡접선들의 y절편에 해당한다. 따라서, 접선의 y절편이 세 번 지나는 값의 범위는 $-2k<a<0 \rightarrow a_k=2k-1$이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k=100$이 답이 되는 것이다.

sol.2)

계산을 통해

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{3(\ln x)^2}{x} f(x) \geq 0 \\ \\ f''(x) = \dfrac{3}{x^2}(\ln x)(\ln x + 1)\left\{3(\ln x)^2 - 3(\ln x) + 2\right\} f(x) \end{cases}$$

까지는 구했다하고 마저 풀어보자.

“점 $\mathrm{P}(0, a)$에서 곡선 $y = f(x)$에 그은 접선의 개수가 3이 되는...”

이라는 말은 곧, 곡선 $y = f(x)$ 위의 임의의 점 $(t, f(t))$에서 그은 접선

$l \ : \ y - f(t) = f'(t)(x - t)$

가 다시 점 $\mathrm{P}(0, a)$을 지나므로

$a - f(t) = f'(t)(0 - t) \ \rightarrow \ a = f(t) - tf'(t)$

가 서로 다른 세 양근을 갖도록 하는 a의 범위를 구하라는 것으로 생각할 수 있다. 이러한 방정식 관계를 다시 곡선과 직선의 교점 관계로 환원하고자

$$\begin{cases} y = f(t) - tf'(t) \\ y = a \end{cases}$$

라 둘 수 있고, 편의상 $g(t) = f(t) - tf'(t)$라 하였을 때, $g(t)$의 개형을 구하는 문제가 된다.

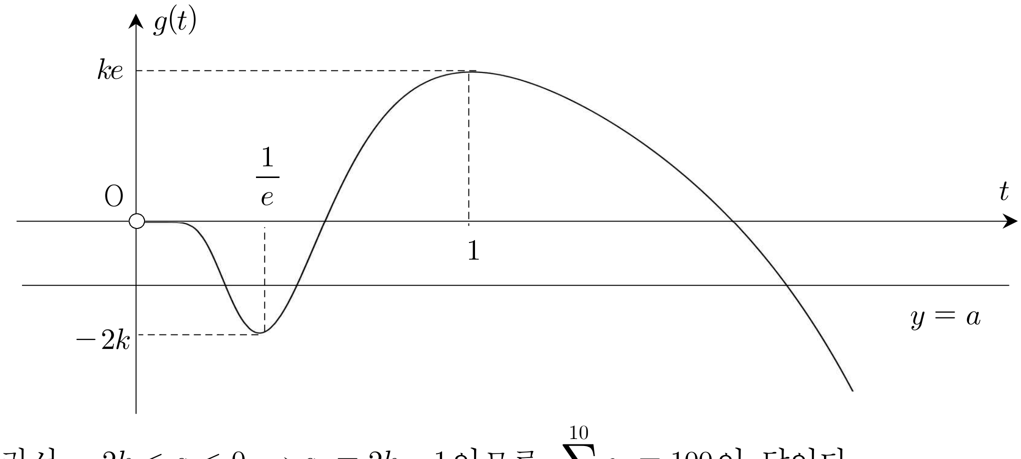
$$g(t) = f(t) - tf'(t) = f(t) - 3(\ln t)^2 f(t) = \left\{1 - 3(\ln t)^2\right\} f(t)$$

로부터 $g(t)$는 $\lim\limits_{t \to \infty} g(t) = -\infty$이고, $\lim\limits_{t \to +0} g(t) = 0$이 되고,

$$g'(t) = f'(t) - f'(t) - tf''(t) = -tf''(t)$$

$$= -\frac{3}{t}(\ln t)(\ln t + 1)\left\{3(\ln t)^2 - 3(\ln t) + 2\right\} f(t)$$

이므로 $g(t)$는 $t = \dfrac{1}{e}$에서 극솟값 $g\left(\dfrac{1}{e}\right) = f\left(\dfrac{1}{e}\right) - \dfrac{1}{e} f'\left(\dfrac{1}{e}\right) = k - 3k = -2k$를 갖고, $t = 1$에서 극댓값 $g(1) = f(1) - f'(1) = ke$를 갖는다.



따라서 $-2k < a < 0 \ \rightarrow a_k = 2k - 1$이므로 $\sum\limits_{k=1}^{10} a_k = 100$이 답이다.