

제 2 교시

수학 영역(B형)

홀수형

5지선다형

1. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $A - 2B$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 에 대하여 $\vec{a} + \vec{b} = (3, 4)$, $\vec{a} - \vec{b} = (-1, 3)$ 일 때 $|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

3. 지수방정식 $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ 의 실근은? [2점]

- ① 6 ② 4 ③ 2 ④ 0 ⑤ -2

4. 함수 $f(x) = \sin x + \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) + k$ 의 최솟값이 0일 때, k^2 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 부등식

$$\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)} \leq 0$$

을 만족하는 자연수 x 의 개수는? [3점]

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

6. 같은 종류의 빵 5개를 갑, 을, 병 세 사람에게 나누어주려고 한다. 한 사람이 적어도 하나 이상씩 빵을 받게 되는 경우의 수는? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

7. 어느 숲에 서식하는 초목의

평균 높이를 조사한 결과 개체
1개의 키는 평균이 450cm 이고
표준편차가 50cm 인 정규분포를
따른다고 한다. 이 숲에 서식하는
초목 중 임의로 선택한 1개의
개체의 키가 475cm 이상이고 550cm 이하일 확률을 오른쪽
표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

- ① 0.0440 ② 0.1359 ③ 0.1498
④ 0.2417 ⑤ 0.2857

8. 두 사건 A, B 는 서로 독립이고

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

일 때, $P(A)$ 의 값은? (단, $P(A) > P(B)$ 이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

9. 좌표공간에서 두 점 $P(-1, a, 0), Q(2a, 0, 1)$ 을 지나는 직선과 수직인 평면이 xy 평면과 이루는 각의 크기가 45° 가 되게 하는 a 의 값은? (단, $a \neq 0$ 이다.) [3점]

- ① -1 ② $-\frac{4}{5}$ ③ $-\frac{3}{5}$ ④ $-\frac{2}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{5}$

10. 어느 학교의 전체 학생을 대상으로 동아리 가입 여부를 조사한 결과 A 동아리에 가입한 학생은 전체의 20%이고 B 동아리에 가입한 학생은 전체의 10%이었다. 이 학교의 동아리에 가입한 학생 중 임의로 1명을 선택할 때 이 학생이 A, B 동아리 모두에 속할 확률이 0.2이다. 전체 학생 중 임의로 1명을 선택할 때 이 학생이 A, B 동아리 모두에 속할 확률은? (단, 이 학교에는 A 와 B 동아리 이외의 동아리는 없다.) [3점]

- ① 0.09 ② 0.07 ③ 0.05 ④ 0.03 ⑤ 0.01

11. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=2$ 일 때,

$$a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

수열 $\{b_n\}$ 을 $b_1=a_1$ 이고 $b_n=a_1a_2 \cdots a_n$ 이라 하면,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = 4 - 3 \frac{b_{n-1}}{b_n}$$

양변에 b_n 을 곱하여 정리하면

$$b_{n+2} - 4b_{n+1} + 3b_n = 0 \quad (n \geq 2)$$

그런데 $b_3=14$ 이므로 모든 자연수 n 에 대하여

$$b_{n+2} - b_{n+1} = \boxed{\text{가}} (b_{n+1} - b_n)$$

이다.

수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 구하면 $b_1=2$, $b_2=5$ 에서

$$b_n = \boxed{\text{나}}$$

이므로

$$a_n = \boxed{\text{다}}$$

이다.

위의 (가)에 들어갈 수를 p , (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 라 할 때, $p+f(3)g(4)$ 의 값은? [3점]

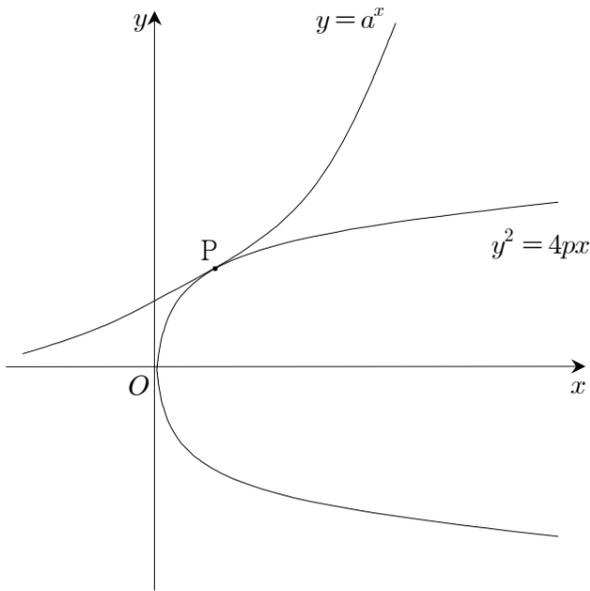
- ① 32 ② 36 ③ 40 ④ 44 ⑤ 48

12. 양의 실수 x 에 대해 $\log x$ 의 지표와 가수를 각각 $f(x)$,

$g(x)$ 라고 하고, $h(x)=3g(x)-g(x^3)$ 라 하자. $f(x)=h(x)=1$ 을 만족시키는 x 의 최솟값을 k 라 할 때, $\log k$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

[13~14] 다음은 지수함수 $y = a^x$ ($a > 1$)와 포물선 $C: y^2 = 4px$ ($p > 0$)의 그래프를 나타낸 것이다. 두 그래프는 점 P에서 서로 접하고 있다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. $a = e$ 일 때, p 의 값은? [3점]

- ① $\frac{e}{2}$ ② e ③ $\frac{3}{2}e$ ④ $2e$ ⑤ $\frac{5}{2}e$

14. 포물선 C 의 초점을 Q 라고 할 때, $\overline{PQ} = \sqrt{e}$ 가 되도록 하는 Q 의 x 좌표는? [4점]

- ① $\frac{\sqrt{e}}{2}$ ② $\frac{e}{2}$ ③ $\frac{e\sqrt{e}}{2}$
 ④ $\frac{e^2}{2}$ ⑤ $\frac{e^2\sqrt{e}}{2}$

15. 음이 아닌 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 $f(x) > 0$ 이고

$$\int_0^{x^2} f(t^2) dt = \int_0^x f'(t^4) dt$$

을 만족한다. $\ln f(1)$ 의 값은? (단, $f(0) = 1$ 이다.) [4점]

- ① $\frac{8}{7}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ 2 ⑤ $\frac{8}{3}$

16. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$A^2 + B = A + E, \quad AB = A + B$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $AB = BA$

ㄴ. $A^{-1} = (A - E)^2$

ㄷ. $A^2 + B^2 = B$

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. n 이 자연수일 때 함수 $f_n(x)$ 가 다음과 같이 정의된다.

(가) $f_1(x) = \frac{1}{x}$
 (나) $f_{n+1}(x) = \int \frac{1}{f_n(x)} dx$
 (다) $\lim_{x \rightarrow \infty} f_{2n-1}(x) = 0, f_{2n}(0) = 0$

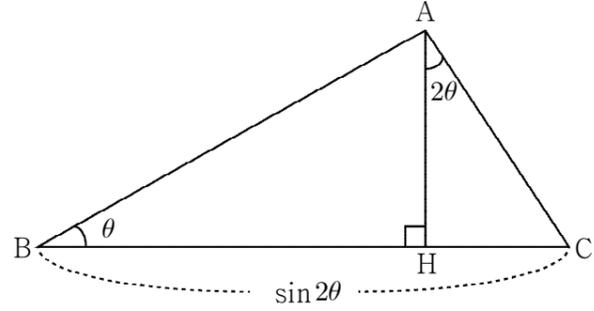
이때,

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & (n \text{은 짝수}) \\ \frac{1}{f_n(x)} & (n \text{은 홀수}) \end{cases}$$

로 정의되는 함수 $g_n(x)$ 에 대하여 $g_n(1)$ 의 최솟값은? [4점]

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

18. 그림과 같이 $\angle ABC = \theta, \angle CAH = 2\theta$ 이고 $\overline{BC} = \sin 2\theta$ 인 삼각형 ABC가 있다.



H는 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발이다. $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\overline{AB}}{\theta}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

19. 실수 전체에서 함수 $f(x)$ 는 미분가능하고 역함수 $g(x)$ 가 존재할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = 0$$

$$(나) f(3) = g(3), g'(3) \geq 1$$

$$(다) \lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x) - g(x)\} = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - g(x)\} = \infty$$

방정식 $g(x) = x$ 의 서로 다른 실근의 개수의 최솟값은? [4점]

- ① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ 0

20. 함수 $f(x)$ 와 수열 a_n 이 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) f(0) = 0$$

(나) 자연수 n 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 는 점 $(n, 3^n - 1)$ 을 지난다.

(다) $n-1 < x \leq n$ 인 자연수 n 에 대하여 $f(x) = f(n-1) + a_n x$ 이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{na_n}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

21. 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 와 평면 $x + \sqrt{3}z = 4$ 이 만나서 생기는 원 C_1 위를 움직이는 점 P에 대하여 P에서 구와 접하는 평면 위로의 C_1 의 정사영을 C_2 , C_2 의 xy 평면 위로의 정사영을 C_3 라 하자. C_3 로 둘러싸인 부분의 넓이의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

- ① $\frac{20\sqrt{3}}{7}\pi$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi$ ③ $\frac{20\sqrt{3}}{9}\pi$
 ④ $2\sqrt{3}\pi$ ⑤ $\frac{20\sqrt{3}}{11}\pi$

단답형

22. 일차변환 $f : (x, y) \rightarrow (2x - y, x + y)$ 에 의해 점 $(2, 2)$ 이 옮겨지는 점을 (a, b) 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 어느 학교의 학생 중 임의로 뽑은 100명을 대상으로 등교 방법에 대한 설문조사를 실시하였다. 이 중 20명은 자가용을, 50명은 버스를 이용한다고 답했으며 이 학교의 전교생에 대한 자가용을 이용하여 등교하는 학생의 비율을 p_1 , 버스를 이용하여 등교하는 학생의 비율을 p_2 라고 하자. p_1 과 p_2 를 각각 95% 신뢰도로 추정하였을 때 신뢰구간의 길이의 차이를 d 라 하면 $d = 2k^2$ 이다. $1000k$ 의 값을 구하시오.

(단, $P(|Z| < 1.96) = 0.95$ 이고 k 는 상수이다.) [3점]

24. 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n)^n}{n^n} = e^2$ 일 때 a_1 의 값을 구하시오. [3점]

25. 어떤 화학반응에서의 반응속도는 일반적으로 반응물의 농도에 비례하는데, 이때 비례상수를 반응속도상수라고 한다. 활성화에너지가 E_a 이고 절대온도가 T 인 화학반응의 반응속도상수 k 는

$$\log k = \log A - \frac{E_a}{RT} \quad (\text{단, } A \text{ 와 } R \text{ 은 상수})$$

의 관계식을 만족한다. 반응속도상수가 k_1 인 화학반응을 I, 반응속도상수가 k_2 인 화학반응을 II라 할 때, II의 활성화에너지는 I의 활성화에너지의 3배이고 I의 절대온도는 II의 절대온도의 5배이다. $\frac{k_1^{15}}{k_2} = A^n$ 일 때 n 의 값을 구하시오.

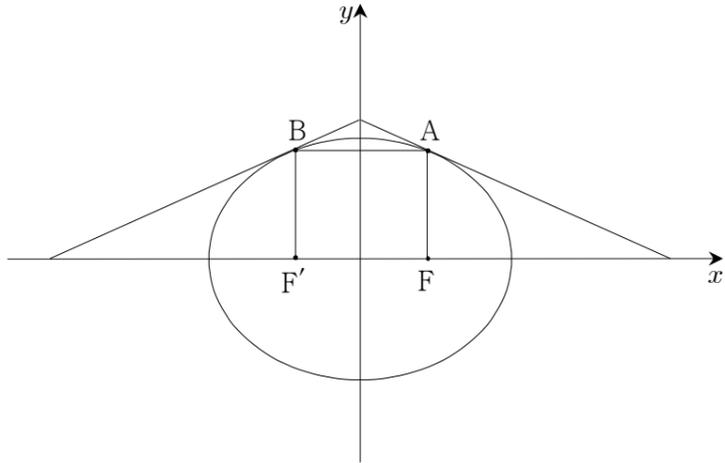
[3점]

26. $0 < x \leq \pi$ 인 실수 x 와 자연수 n 에 대하여

$$\sqrt{\cos nx + 1} + \sqrt{\sin nx + 1} = 1$$

을 만족하는 실수 x 의 개수를 a_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 두 초점이 $F(1, 0)$, $F'(-1, 0)$ 인 타원이 있다. 타원 위의 점 A, B 가 각각 제 1, 2사분면 위에 있을 때 네 점 A, B, F', F 를 이은 도형은 직사각형이다. A 와 B 에서 타원에 그은 각 접선과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8일 때, 사각형 $ABF'F$ 의 둘레의 길이를 구하시오. [4점]



28. 3×3 행렬 A 의 (m, n) 성분은 a, b, c 에 관한 다음 식

$$(a+b)^m(a+b+c)^n$$

의 전개식에서 서로 다른 동류항의 종류의 개수와 같다. A 의 모든 성분의 합을 구하시오. [4점]

29. 사면체 ABCD에 대하여 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때 다음이 성립한다.

- (가) 삼각형 BCD는 정삼각형이다.
 (나) $|\overline{AH}|=1$
 (다) $2\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}=4\overline{AH}$
 (라) $\triangle ABC : \triangle ACD : \triangle ADB = 2:3:2$

평면 ACD와 평면 BCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때 $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. n 이 자연수일 때 x 에 관한 함수 $f(x) = \frac{(x-1)^n}{e^x}$ 에 대하여 $x > 0$ 에서 정의된 세 함수 $I(x)$, $J(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 닫힌구간 $[0, t]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 최솟값, $x=b$ 에서 최댓값을 가진다고 할 때, a, b 가 될 수 있는 값 중 가장 큰 값을 각각 $I(t)$, $J(t)$ 라 한다.
 (나) $g(x) = \int_{I(x)}^{J(x)} f(t) dt$
 (다) 함수 $g(x)$ 가 구간 (m, ∞) 에서 상수함수가 되도록 하는 m 의 최솟값은 4이다.

함수 $y=g(x)$ 의 최솟값이 $p + \frac{q}{e}$ 일 때 정수 p, q 에 대하여

$p-q$ 의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ 이다.) [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.