제 2 교시

수학 영역

성명		수험 번호						—				

1. 두 다항식

$$f(x)=2x+3,\ g(x)=x^2+5x+7$$

에 대하여 $f(1)g(1)$의 값은? [2점]

① 13 ② 26 ③ 39 ④ 52 ⑤ 65

2. 집합 $X=\{1,2,3,4,5\}$에 대해 $A\subset X$를 만족하는 서로 다른 모든 집합 A의 개수는? [2점]

① 15 ② 16 ③ 31 ④ 32 ⑤ 64

3. 허수 $1+ai$를 한 근으로 가지는 이차방정식 $x^2-ax+b=0$에 대해, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 실수) [2점]

① 7 ② 11 ③ 13 ④ 17 ⑤ 19

4. 유리함수 $f(x)=\dfrac{x+3}{x-3}$의 점근선이 $x=p,\ y=q$일 때, $(pq)^3$의 값은? [3점]

① -27 ② -9 ③ 1 ④ 9 ⑤ 27

5. 좌표평면 위의 서로 다른 두 점 A, B이 있다. 점 P(5, 2)와 점 Q(15, -2)는 선분 AB를 각각 2 : 1로 내분, 외분하는 점일 때, 직선 AB의 y절편은? [3점]

① $\frac{13}{5}$ ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 13

6. 실수 전체의 집합 R에 대해, 두 집합

$A=\{(x,y)\,|\,x+y=k, x\in R, y\in R\}$

$B=\{(x,y)\,|\,xy+2x-1=0, x\in R, y\in R\}$

이 있다. 이때 $n(A\cap B)=1$을 만족하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [3점]

① -4 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

7. $n(U)=30$인 전체집합 U의 공집합이 아닌 세 부분집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다.

(가) $n(A)=20$
(나) $n(B)+n(C)=12$

이때 $n(A\cup C)+\{n(B)\}^2$의 값의 최댓값과 최솟값의 합은? [3점]

① 121 ② 142 ③ 163 ④ 184 ⑤ 205

8. 이차함수 $f(x)=-x^2+2x-4$에 대해 함수 $g(x)$는 $g(x)=f(x)(1\le x<3)$, $g(x+2)=g(x)-4$가 성립한다. 일차함수 $h(x)=ax+b$에 대해 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=h(x)$의 교점의 수가 무수히 많을 때, ab의 값의 최댓값은? (단, a, b는 상수) [3점]

① -2 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

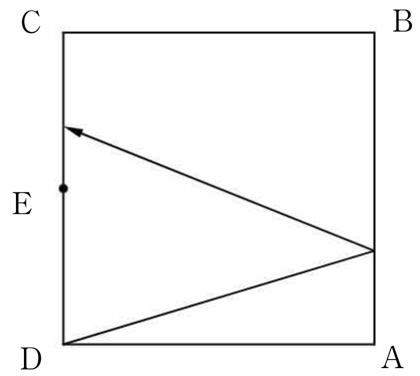
9. 유리함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-k}$ $(a^2+b^2\neq 0)$에 대해 명제

'곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\dfrac{p}{x}$를 평행이동한 것이다'

가 참이 되게 하는 실수 p를 a, b, k에 대한 식으로 올바르게 나타낸 것은? [3점]

① $a+b+k$ ② abk ③ $ak+b$ ④ $ab+k$ ⑤ $ab-k$

10. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 선분 AD의 중점을 E라 하자. 선분 AE는 빛을 완전히 흡수하는 물질로 이루어져 있고, 정사각형의 나머지 부분은 거울이어서 빛을 완전히 반사한다.



이때 정의역이 $\left\{x \mid 0<x<1, x\neq \dfrac{1}{2}\right\}$인 함수 $f(x)$에 대해 다음이 성립한다.

선분 AB와 θ°의 각도를 이루며 점 A를 출발한 빛이 거울에 n번 반사된 뒤 선분 AE에 흡수될 때, $f(\tan\theta^\circ)=n$이다. (단, $0<\theta<90, \theta\neq 45$)

예를 들어 $f\left(\dfrac{1}{12}\right)=1$이다. 이때 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)+f\left(\dfrac{3}{4}\right)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

11. 전체집합 $U=\{(x, y)\,|\,x, y\text{는 실수}\}$의 두 부분집합

$A=\{(x, y)\,|\,ax+by=c\}$ (단, $c(a^2+b^2)\neq 0$)

$B=\{(x, y)\,|\,x^2+y^2=4\}$

에 대해 $n(A\cap B)=1$이다. 이때 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{16}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 16

12. 두 이차함수 $f(x)=x^2+k$, $g(x)=x^2-2x-3$에 대해 방정식

$$x^2-4x=(g\circ f)(x)$$

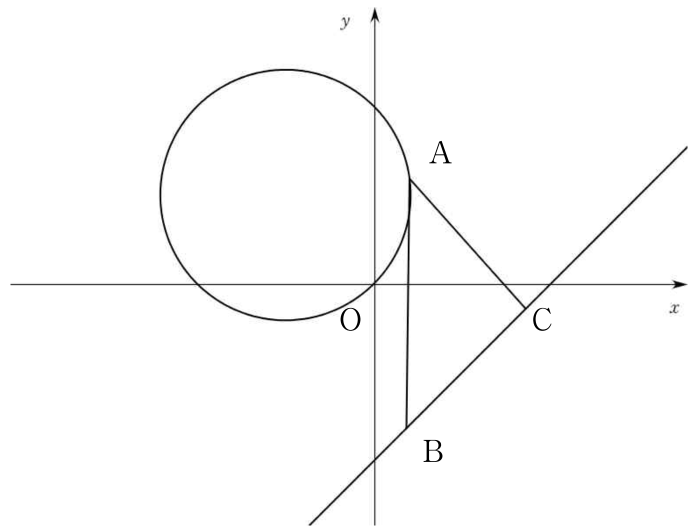
가 $1\leq x\leq 3$에서 실근을 가질 때, 실수 k의 최댓값과 최솟값의 차는? [3점]

① $\dfrac{17}{2}$ ② 10 ③ $\dfrac{23}{2}$ ④ 13 ⑤ $\dfrac{29}{2}$

13. 이차함수 $f(x)=x^2-2x+4$와 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(1,-4)$에 대해 $g(t)$를 두 점 A와 $\mathrm{T}(t, f(t))$를 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$과 만나는 서로 다른 점의 개수라 하자. 이때 $g(t)=1$을 만족하는 서로 다른 모든 실수 t의 값의 합은? [3점]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

14. 원 $(x+2)^2+(y-2)^2=8$ 위의 한 점 A와 직선 $x-y-4=0$ 위의 서로 다른 두 점 B, C에 대해 삼각형 ABC가 직각이등변삼각형이다. 이때 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\frac{M}{m}$의 값은? [4점]



① 4 ② 6 ③ 9 ④ 18 ⑤ 36

15. 대칭축이 $x=p$인 이차함수 $y=f(x)$에 대해 다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것으로 적절한 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $y=f(x)$는 $x=p$에서 최댓값 또는 최솟값을 갖는다.
ㄴ. $p>0$이면 방정식 $f(|x|)=p$는 실근을 가지지 않는다.
ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 최댓값이 존재하고, 실수 k에 대해 $f(k+t)f(k-t)<0$을 만족하는 실수 t가 존재하지 않을 때, $k=p$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 좌표평면 위 세 원 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=12$, $x^2+y^2=16$ 위에 각각 점 A, B, C가 있고, 삼각형 ABC는 정삼각형이다. 이 정삼각형의 넓이는? [4점]

① $5\sqrt{3}$ ② $6\sqrt{3}$ ③ $7\sqrt{3}$ ④ $8\sqrt{3}$ ⑤ $9\sqrt{3}$

17. 두 함수 $f(x)=-|x-2|+4$, $g(x)=|x-2n|$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\frac{-||f(x)|-g(x)|+|f(x)|+g(x)}{2}$$

라 하자. 명제 '모든 자연수 k에 대해 방정식 $h(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 짝수이다.'가 참이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은? [4점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

18. 이차함수 $f(x)=-x^2-x+5$에 대해 $-5<x<4$에서 정의된 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\text{가 정수가 아닐 때}) \\ -|ax+b|+c & (x\text{가 정수일 때}) \end{cases}$$

이때 $\{g(t)-f(t)\}^2>0$을 만족하는 $-5<t<4$인 서로 다른 모든 실수 t의 개수가 4가 되도록 하는 모든 실수 a, b, c에 대해 순서쌍 (a, b, c)의 개수는? [4점]

① 3 ② 6 ③ 12 ④ 18 ⑤ 24

19. 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(3, 3\sqrt{3})$, $\mathrm{B}(3, -3\sqrt{3})$에 대해 다음 두 조건을 만족시키는 점 $P(x, y)$가 나타내는 도형의 길이는? [4점]

> (가) $x^2+y^2=36$
>
> (나) 선분 AB 위 임의의 점 $(3, a)$에 대하여 $y \neq \frac{a}{3}x$이다.

① 4π ② 6π ③ 9π ④ 12π ⑤ 36π

20. 집합

$C_r=\{z \mid z=a+bi, z\bar{z}=r^2, a$와 b는 실수, r은 두 자리 이하의 자연수$\}$

에 대해, 집합 D_h를 다음과 같이 정의하자.

$$D_r=\{(p, q) \mid x \in C_p\text{이고 } y \in C_q\text{이면 } xy \in C_r,\ p \leq q\}$$

이때 $n(D_r)$가 최대가 되도록 하는 모든 자연수 r의 값의 합은? (단, $i=\sqrt{-1}$이고 $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [4점]

① 222 ② 306 ③ 318 ④ 502 ⑤ 632

21. 정의역이 $\{x|1 \le x < 128\}$인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $1 \le x < 2$이면 $f(x) = a(x-1)(x-2)$
(나) $n(n=1, 2, ..., 6)$과 임의의 t에 대하여 $f(2^n + 2t) = -2f(2^{n-1}+t)$이다. (단, $0 \le t < 2^{n-1}$)

이때 다음 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것으로 적절한 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 방정식 $f(x) = 0$의 모든 실근의 합은 255이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 치역은 $\{y|(y-8a)(y+16a) \le 0\}$이다.
ㄷ. 방정식 $|f(x)| = k$의 모든 실근의 합이 375이면, 방정식 $f(x) = k$의 모든 실근의 합은 123이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 좌표평면 위 두 점 $\mathrm{A}(-1, 3)$, $\mathrm{B}(-2, 4)$에 대해 선분 AB의 중점의 좌표는 (a, b)이다. $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

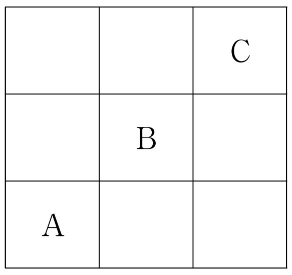
23. 2023차 방정식 $x^{2023} = 1$의 실근이 아닌 모든 근을 z_1, z_2, z_3, ... z_{2022}라 할 때,

$$(1+z_1)(1+z_2)(1+z_3)\ \cdots\ (1+z_{2022})$$

의 값은 n이다. $n-2000$의 값을 구하시오. [3점]

24. 다음과 같이 넓이가 324인 정사각형을 9개의 서로 겹치지 않는 직사각형으로 나누었을 때 생기는 직사각형 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 직사각형 A, B, C는 모두 정사각형이다.
> (나) 사각형 A, B, C의 넓이를 각각 a, b, c라 하면, $a+b+c=108$이다.



이때, $\sqrt{abc}$의 값을 구하시오. [3점]

25. 집합 $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$에 대해 X에서 X로의 함수 $f_1, f_2, f_3,$ ... f_8이 있다. 이 함수들은 다음 조건을 만족한다.

> (가) X의 임의의 원소 k에 대해 $f_k(k) \geq k$이다.
> (나) X의 임의의 원소 k에 대해 $f_k(k)+f_{9-k}(k)=9$이다.
> (다) X의 임의의 원소 k에 대해 $f_k(x)$는 일대일대응이다.

정의역이 X인 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$g(x)=\begin{cases} f_x(x)+f_x(x+1)+\dots+f_x(9-x) & (x \leq 4) \\ f_x(9-x)+f_x(10-x)+\dots+f_x(x) & (x>4) \end{cases}$$

이때 $g(4)+g(5)+g(6)$의 최솟값을 구하시오. [3점]

26. 두 함수 $f(x)=x^2-6x$, $g(x)=-x^2+2x+3$에 대해 $-1 \leq x \leq a$에서 함수 $g(f(x))$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M(a)$, $m(a)$라 하자. $M(a)-m(a)=100$인 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합이 $p+\sqrt{q}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 자연수이다.) [4점]

27. $1 \le n \le 50$인 임의의 자연수 n과 $0 < k < 1$인 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$는 $f(x) = -2k^n(x-2n+2)(x-2n)$ $(2n-2 \le x < 2n)$을 만족한다. $f(x)$의 함숫값이 정수가 되도록 하는 $0 \le k < 100$인 실수 x의 개수를 $g(k)$라 할 때, $g(a)=85$를 만족하는 실수 $a(0<a<1)$에 대해 $(\frac{1}{a})^m = 4$를 만족하는 자연수 m을 구하시오. [4점]

28. 이차함수 $f(x)=x^2$과 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$는 $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x<0) \\ |f(|t-|x||)-t| & (x \ge 0) \end{cases}$라 정의하자. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=\frac{t}{2}$의 서로 다른 교점의 개수를 $h(t)$라 할 때, $\{h(t)-3\}\{h(t)-4\}=0$을 만족하는 실수 t의 범위는 $\alpha < t < \beta$ 이다. 이때 $12(\alpha+\beta)$의 값을 구하시오. [4점]

29. $1 \le a \le 6$, $1 \le b \le 6$인 서로 다른 두 자연수 a, b에 대해, 두 곡선 $y = a(x+2)^2$, $y = b(x+1)^2$이 직선 $x = t$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 이때 아래 조건을 만족하는 서로 다른 실수 t가 무수히 많이 존재하도록 하는 서로 다른 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 직선 $x = t$는 제3사분면을 지나지 않는다.
> (나) 점 P와 Q 사이의 거리는 9 이하이다.

30. 함수

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2)^2 + 12 & (x < k) \\ -|4x - 10a| + \dfrac{41}{8}a & (x \ge k) \end{cases}$$

에 대해 $x > -\dfrac{9}{2}$ 에서 정의된 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x > -\dfrac{9}{2}$인 임의의 실수 x에 대하여
> $(2x+9)g(x) = f(x)$이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 최댓값 M을 가진다.
> (다) $g(\alpha) = M$이고 $\alpha > -\dfrac{9}{2}$인 임의의 실수 α에 대해
> $\{|\beta - \alpha| - 179\}^2 = -|M - g(\beta)|$을 만족하는 $\beta > -\dfrac{9}{2}$인 실수 β가 하나 이상 존재한다.

이때 aM의 값을 구하시오. (단, $a > 1$, $2 < k < \dfrac{5}{2}a$이고, $-(k-2)^2 + 12 = -|4k - 10a| + \dfrac{41}{8}a$이다.) [4점]