이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

★ 스포일러: 2024 학년도 수능 수학 푼 사람만 읽으세요 !

2024 수능에서 보여준 출제 경향

〈 공통(수학1+수학2) 〉

- 공통 8 - 인수분해(고1)+함수의 연속성+우함수/기함수의 정적분
- 공통 10 - 삼차함수의 비율관계(빠른계산)+절댓값이 붙은 다항함수의 그래프의 개형
- 공통 12 - 최대최소 문제: 관찰 또는 식 세우기. 두 방법 모두 가능.
- 공통 14 - 교육청 2학년 문제를 보는 듯. 삼차함수와 직선의 교점의 개수가 2인 상황+이차함수의 대칭축과 꼭짓점의 위치(고1)
- 공통 15 - 수열+수형도. 전형적인 문제.
- 공통 19 - 삼각함수의 그래프가 아닌 단위원+부등식과 필요충분조건을 이루는 방정식 찾기.
- 공통 20 - 원의 성질, 두 개의 직각삼각형이 주어진 기하적 상황
- 공통 22 - 다항함수의 그래프의 개형을 그릴 때, x절편, y절편을 가장 먼저 결정해야 함. 삼차함수의 특징($-\infty \to 0 \to \infty$)+사이값 정리+귀류법. 계산은 거의 없음.

〈 확률과 통계 〉

- 확률과 통계 26 - 함수의 정의에 대한 근본을 묻는 문제. 쉽지만, 너무나도 좋은 문제.
- 확률과 통계 29 - 수의 대소 관계($a < b$, $a = b$, $a > b$)+중복조합. 교사경 기출에서 자주 다룬 유형의 문제.

〈 미적분 〉

- 미적분 28 - '2022-미적분30', '2023-확률과통계22/미적분22/기하22'의 계보를 잇는 문제. 곡선 위의 점을 먼저 찍고, 곡선을 그리면 어려울 것이 없음.
- 미적분 30 - 변곡접선을 소재로 하는 문제. (※올해 수능에서 삼차함수의 비율관계, 변곡접선, …등의 실전이론이 출제되었습니다. 앞으로의 수능에서 이런 실전이론들이 출제되지 말라는 법은 없습니다.)

〈 기하 〉

- 기하 28 - 공간도형 문제는 결국 평면도형에서 해결해야 함. 타원의 정의+원의 성질+두 개 이상의 직각삼각형이 주어진 기하적 상황
- 기하 30 - 교사경 문제인 '2013(10)고3-B형21'의 변형 문제.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

학년도	시험	실시년도/월
5차 교육과정		
1991	실험평가(1차)	1990년 12월
1992	실험평가(2차)	1991년 5월
1992	실험평가(3차)	1991년 8월
1992	실험평가(4차)	1991년 11월
1993	실험평가(5차)	1992년 5월
1993	실험평가(6차)	1992년 8월
1993	실험평가(7차)	1992년 11월
1994	대학수학능력(1차)	1993년 8월
1994	대학수학능력(2차)	1993년 11월
1995	대학수학능력	1994년 11월
1996	대학수학능력	1995년 11월
1997	대학수학능력	1996년 11월
1998	대학수학능력	1997년 11월
6차 교육과정		
1999	대학수학능력	1998년 11월
2000	대학수학능력	1999년 11월
2001	대학수학능력	2000년 11월
2002	대학수학능력	2001년 11월
2003	모의평가(9월)	2002년 9월
2003	대학수학능력	2002년 11월
2004	모의평가(6월)	2003년 6월
2004	모의평가(9월)	2003년 9월
2004	대학수학능력	2003년 11월
7차 교육과정		
2005	예비시행	2003년 12월
2005	모의평가(6월)	2004년 6월
2005	모의평가(9월)	2004년 9월
2005	대학수학능력	2004년 11월
2006	모의평가(6월)	2005년 6월
2006	모의평가(9월)	2005년 9월
2006	대학수학능력	2005년 11월
2007	모의평가(6월)	2006년 6월
2007	모의평가(9월)	2006년 9월
2007	대학수학능력	2006년 11월
2008	모의평가(6월)	2007년 6월
2008	모의평가(9월)	2007년 9월
2008	대학수학능력	2007년 11월
2009	모의평가(6월)	2008년 6월
2009	모의평가(9월)	2008년 9월
2009	대학수학능력	2008년 11월
2010	모의평가(6월)	2009년 6월
2010	모의평가(9월)	2009년 9월
2010	대학수학능력	2009년 11월
2011	모의평가(6월)	2010년 6월
2011	모의평가(9월)	2010년 9월
2011	대학수학능력	2010년 11월

학년도	시험	실시년도/월
2007개정 교육과정		
2012	모의평가(6월)	2011년 6월
2012	모의평가(9월)	2011년 9월
2012	대학수학능력	2011년 11월
2014	예비시행	2012년 5월
2013	모의평가(6월)	2012년 6월
2013	모의평가(9월)	2012년 9월
2013	대학수학능력	2012년 11월
2014	모의평가(6월)	2013년 6월
2014	모의평가(9월)	2013년 9월
2014	대학수학능력	2013년 11월
2015	모의평가(6월)	2014년 6월
2015	모의평가(9월)	2014년 9월
2015	대학수학능력	2014년 11월
2016	모의평가(6월)	2015년 6월
2016	모의평가(9월)	2015년 9월
2016	대학수학능력	2015년 11월
2009개정 교육과정		
2017	모의평가(6월)	2016년 6월
2017	모의평가(9월)	2016년 9월
2017	대학수학능력	2016년 11월
2018	모의평가(6월)	2017년 6월
2018	모의평가(9월)	2017년 9월
2018	대학수학능력	2017년 11월
2019	모의평가(6월)	2018년 6월
2019	모의평가(9월)	2018년 9월
2019	대학수학능력	2018년 11월
2020	모의평가(6월)	2019년 6월
2020	모의평가(9월)	2019년 9월
2020	대학수학능력	2019년 11월
2015개정 교육과정		
2021	예시문항	2020년 5월
2021	모의평가(6월)	2020년 6월
2021	모의평가(9월)	2020년 9월
2021	대학수학능력	2020년 11월
2022	모의평가(6월)	2021년 6월
2022	모의평가(9월)	2021년 9월
2022	대학수학능력	2021년 11월
2023	모의평가(6월)	2022년 6월
2023	모의평가(9월)	2022년 9월
2023	대학수학능력	2022년 11월
2024	모의평가(6월)	2023년 6월
2024	모의평가(9월)	2023년 9월
2024	대학수학능력	2023년 11월

○ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
소단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

○ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
다른 풀이 및 참고 사항을 최대한 수록하여 문제 해결의 다양한 시각을 제시하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 - 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

<u>특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.</u>

수능/평가원 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다. 그리고 모든 풀이를 보여준다는 의미에서 교육과정 외의 풀이도 수록하였으나, 이를 반드시 읽어야(공부해야) 하는 것은 아닙니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)
[풀이] (교육과정 외)
[참고] (교육과정 외)

목 차

수학 Ⅰ

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

A 지수함수와 로그함수

- 2015개정 교육과정

○ 주기 함수 관련 문제 포함
○ 부등식의 영역 관련 문제 제외 또는 변형 수록

A133

○○○ (2009(9)–가형15/나형15)

두 함수 $f(x)=2^{x-2}+1$, $g(x)=\log_2(x-1)+2$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

> ㄱ. $f^{-1}(5)\cdot\{g(5)+1\}=20$이다.
> ㄴ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
> ㄷ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A134

●●● (2006(9)–가형15/나형15)

$a>1$일 때, 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

> ㄱ. 함수 $y=a^{x-1}$의 그래프와 함수 $y=1+\log_a x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
> ㄴ. 함수 $y=-a^x$의 그래프와 함수 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 만난다.
> ㄷ. 함수 $y=ka^x$의 그래프와 함수 $y=\log_a x$의 그래프가 만나도록 하는 양의 실수 k가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A. 지수함수와 로그함수의 그래프: 역함수(두 곡선의 위치 관계)+평행이동

▶ 실전 이론 p.177

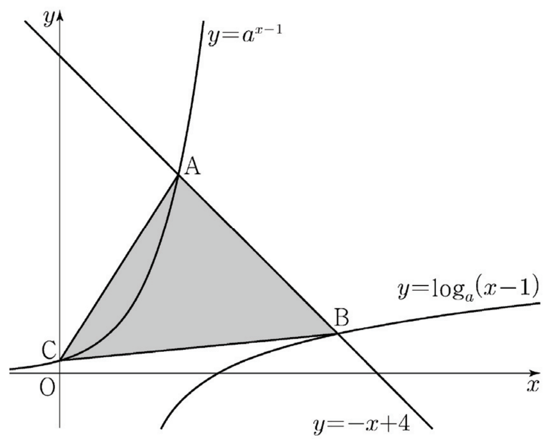
A135

○○○ (2022(9)–확률과통계21/미적분21/기하21)

$a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\quad y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]



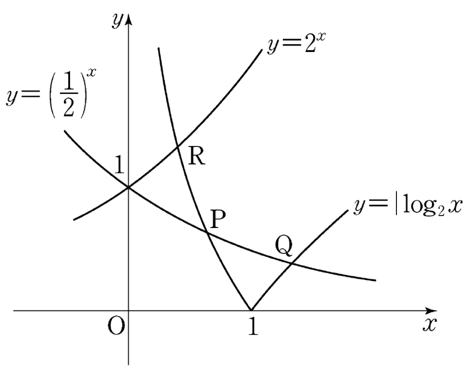
A. 지수함수와 로그함수의 그래프: 역함수(두 곡선의 위치 관계)+직선의 기울기

▶ 실전 이론 p.177

A136

(2011-가형16/나형16)

좌표평면에서 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 만나는 두 점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1<x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=|\log_2 x|$와 $y=2^x$이 만나는 점을 $\mathrm{R}(x_3,\ y_3)$이라 하자. 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. $\frac{1}{2}<x_1<1$
ㄴ. $x_2y_2-x_3y_3=0$
ㄷ. $x_2(x_1-1)>y_1(y_2-1)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A. 지수함수와 로그함수의 그래프: 역함수(두 곡선의 위치 관계)+수직관계

▶ 실전 이론 p.178

A137

(2020(9)-가형15변형)

함수 $y=3^x$의 그래프 위의 x좌표가 양수인 점 A와 함수 $y=-\log_3 x$의 그래프 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨 다.

(가) $\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{OB}}$
(나) $\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$

직선 OA의 기울기는? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 2 ② 3 ③ $2\log_2 3$
④ $5\log_5 3$ ⑤ 5

A. 지수함수와 로그함수의 그래프: 등차수열, 등비수열

▶ 실전 이론 p.179

A138

○○○
(2005(9)−나형12)

집합 $G=\{(x,\ y)\mid y=5^x,\ x$는 실수$\}$에 대하여 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

ㄱ. $(a,\ b)\in G$이면 $\left(\frac{a}{2},\ \sqrt{b}\right)\in G$이다.

ㄴ. $(-a,\ b)\in G$이면 $\left(a,\ \frac{1}{b}\right)\in G$이다.

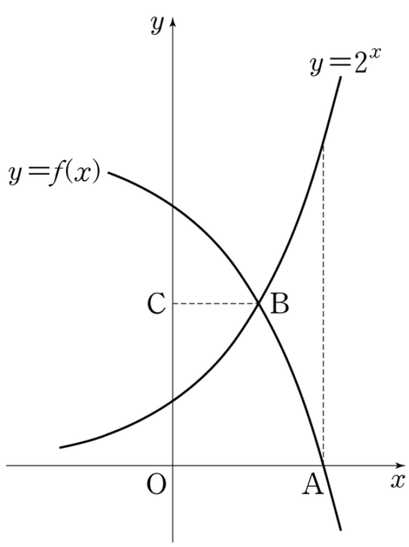
ㄷ. $(2a,\ b)\in G$이면 $(a,\ b^2)\in G$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A139

○○
(2014(예비)−B형8)

곡선 $y=-2^x$을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 곡선을 $y=f(x)$라 하자. (단, $m>2$이다.)



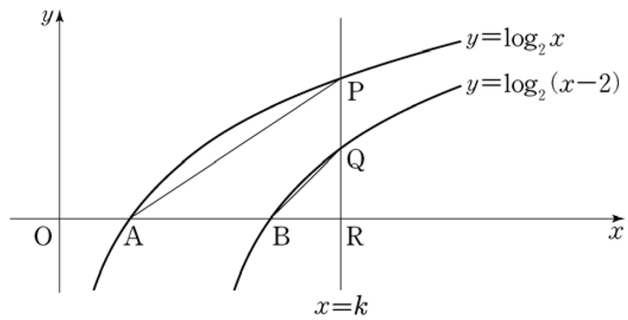
곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점을 A, 곡선 $y=2^x$이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 B, 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 C라 하자. $\overline{OA}=2\overline{BC}$일 때, m의 값은? [3점]

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$
④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

A140

○○
(2016(9)−A형12)

그림과 같이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 직선 $x=k$ $(k>3)$이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, x축과 만나는 점을 R라 하자. 점 Q가 선분 PR의 중점일 때, 사각형 ABQP의 넓이는? [3점]

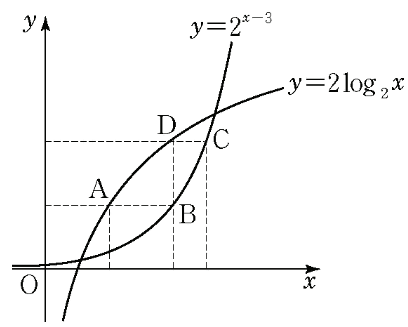


① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

A141

○○
(2009(6)−나형10)

그림과 같이 곡선 $y=2\log_2 x$ 위의 한 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x-3}$과 만나는 점을 B라 하자. 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2\log_2 x$와 만나는 점을 D라 하자. 점 D를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x-3}$과 만나는 점을 C라 하자.
$\overline{AB}=2$, $\overline{BD}=2$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



① 2 ② $1+\sqrt{2}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $2+\sqrt{2}$

A. 지수함수와 로그함수의 그래프: 볼록성

▶ 실전 이론 p.181

A142

○○○
(2002-예체능8)

$a>0$, $b>0$일 때 〈보기〉 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \le \sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$

ㄴ. $\dfrac{3^a+3^b}{2} \le 3^{\frac{a+b}{2}}$

ㄷ. $\dfrac{\log a+\log b}{2} \le \log\dfrac{a+b}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

A. 지수함수와 로그함수의 그래프:볼록성(직선의 기울기)

▶ 실전 이론 p.182

A143

○○○
(2008(6)-나형27)

함수 $f(x)=\log_5 x$이고 $a>0$, $b>0$일 때, 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\left\{f\left(\dfrac{a}{5}\right)\right\}^2=\left\{f\left(\dfrac{5}{a}\right)\right\}^2$

ㄴ. $f(a+1)-f(a)>f(a+2)-f(a+1)$

ㄷ. $f(a)<f(b)$이면 $f^{-1}(a)<f^{-1}(b)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A144

●●●
(2021(6)-가형18/나형21)

두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자. $x_1<x_2$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $x_2>\dfrac{1}{2}$

ㄴ. $y_2-y_1<x_2-x_1$

ㄷ. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A145

●●● (2009(6)-가형17/나형17)

함수 $y=\log_2|5x|$의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+2)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라고 하자. $m>2$인 자연수 m에 대하여 함수 $y=\log_2|5x|$의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+m)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 $\mathrm{C}(p, q)$, $\mathrm{D}(r, s)$라고 하자. 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작고 $p<r$이다.) [4점]

ㄱ. $p<-\frac{1}{3}$, $r>\frac{1}{2}$
ㄴ. 직선 AB의 기울기와 직선 CD의 기울기는 같다.
ㄷ. 점 B의 y좌표와 점 C의 y좌표가 같을 때, 삼각형 CAB의 넓이와 삼각형 CBD의 넓이는 같다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A. 지수함수와 방정식

A146

○ (2011(6)-나형4)

방정식 $\frac{16^x}{2}=2^{x+3}$을 만족시키는 x의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

A147

○○ (2011(9)-나형20)

방정식 $(2^x-8)(3^{2x}-9)=0$의 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. [3점]

A148

○○ (2009(9)-나형25)

연립방정식

$$\begin{cases} 3\cdot 2^x-2\cdot 3^y=6 \\ 2^{x-2}-3^{y-1}=-1 \end{cases}$$

의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. [3점]

B. 코사인법칙: 원주각

▶ 실전 이론 p.205

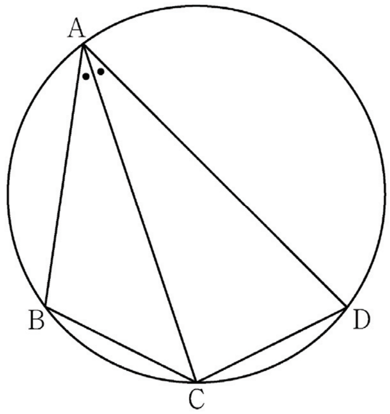
B066

○○
(2023-확률과통계11/미적분11/기하11)

그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3\sqrt{5}$, $\overline{AD}=7$, $\angle BAC=\angle CAD$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는? [4점]



① $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$

④ $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

B067

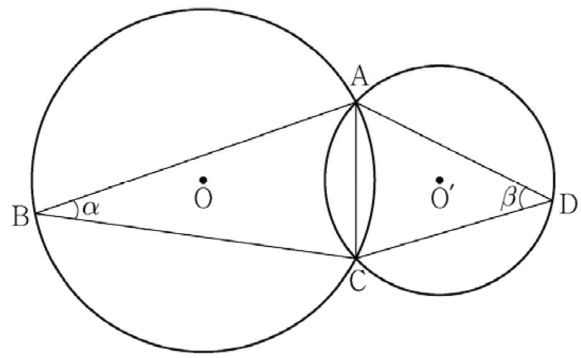
○○○
(2022(예시문항)-공통21)

그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD의 외심을 각각 O, O′이라 하고

$\angle ABC=\alpha$, $\angle ADC=\beta$라 할 때,

$\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\dfrac{3}{2}$, $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{3}$, $\overline{OO'}=1$

이 성립한다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



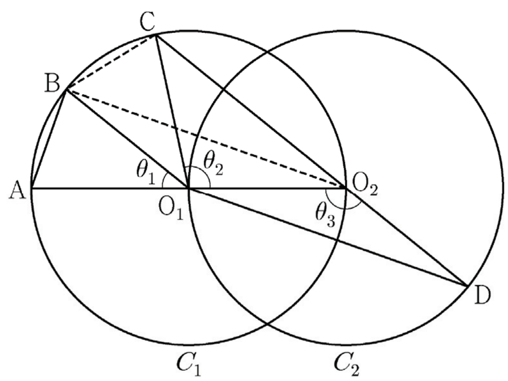
B. 코사인법칙: 원의 성질(직각)

▶ 실전 이론 p.205

B068

(2022-확률과통계15/미적분15/기하15)

두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다. 이때, $\angle BO_1A=\theta_1$, $\angle O_2O_1C=\theta_2$, $\angle O_1O_2D=\theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{AB}:\overline{O_1D}=1:2\sqrt{2}$이고 $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로 $\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로
> $\angle CO_1B=\theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로
> 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB}=k$라 할 때
> $\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2}=\boxed{(가)}$이고,
> $\angle BO_2A=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2}=\boxed{(나)}$이다.
> 삼각형 O_2BC에서
> $\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=\boxed{(다)}$이다.
> $\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\dfrac{\boxed{(가)}}{2}+\boxed{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{169}{27}$ ② $\dfrac{56}{9}$ ③ $\dfrac{167}{27}$ ④ $\dfrac{166}{27}$ ⑤ $\dfrac{55}{9}$

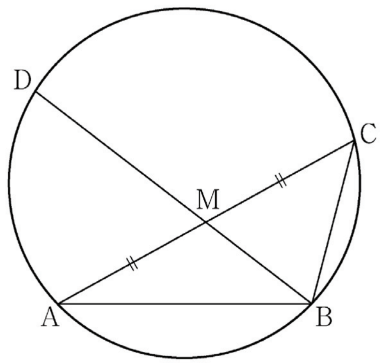
B. 코사인법칙: 할선 정리

▶ 실전 이론 p.206

B069

●●● (2023(6)-확률과통계10/미적분10/기하10)

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

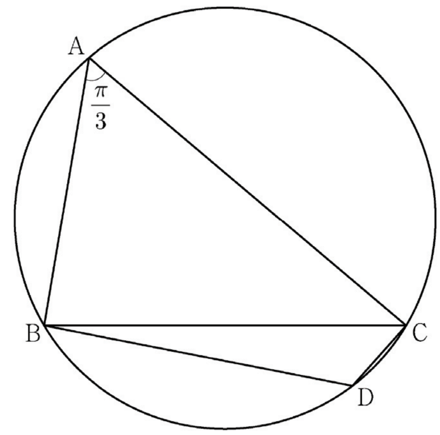
B. 코사인법칙: 원에 내접하는 사각형

▶ 실전 이론 p.207

B070

○○ (2022(9)-확률과통계12/미적분12/기하12)

반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$의 값은? [4점]



① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$

④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$

C. 수열의 귀납적 정의: 수형도

▶ 실전 이론 p.230

C158
○○○ (2024(9)-확률과통계12/미적분12/기하12)

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 172 ② 175 ③ 178 ④ 181 ⑤ 184

C159
●●● (2024-확률과통계15/미적분15/기하15)

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153 ④ 160 ⑤ 167

C160
●●● (2024(6)-확률과통계15/미적분15/기하15)

자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1=k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+2n-k & (a_n\le 0) \\ a_n-2n-k & (a_n>0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

C161
●●● (2021(9)-나형21)

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} 2a_n+a_{n+1} & (a_n\le a_{n+1}) \\ a_n+a_{n+1} & (a_n>a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

C162

●●● (2022(예시문항)-공통15)

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

> (가) $a_5=5$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-6 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n+3 & (a_n<0) \end{cases}$$
> 이다.

① 64 ② 68 ③ 72
④ 76 ⑤ 80

C. 수열의 귀납적 정의: 그래프

▶ 실전 이론 p.230

C163

★★★ (2022(9)-확률과통계15/미적분15/기하15)

수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \leq 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} -2a_n-2 & \left(-1 \leq a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n+2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \leq 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5+a_6=0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k>0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$
④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

C. 수열의 귀납적 정의: 군수열(마디가 등차)

▶ 실전 이론 p.231

C164

○○
(2010(6)-가형8/나형8)

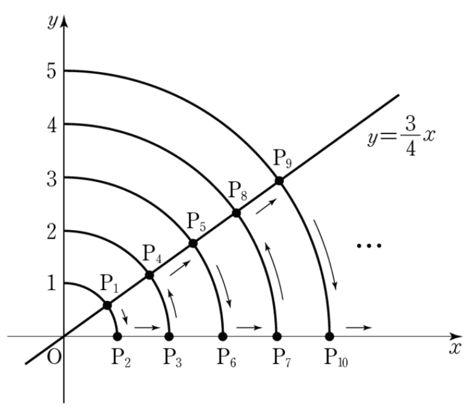
수열 $\{a_n\}$에서 $a_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 일 때, $\sum_{n=1}^{2010} na_n$의 값은? [4점]

① -2011 ② -2010 ③ 0
④ 2010 ⑤ 2011

C165

○○○
(2010(9)-나형7)

다음 그림은 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1부터 1씩 증가하는 원들이 두 직선 $y=\frac{3}{4}x$, $y=0$과 각각 만나는 점들의 일부를 P_1부터 시작하여 화살표 방향을 따라 P_1, P_2, P_3, $\cdots$ 으로 나타낸 것이다.



점 P_{25}의 x좌표는? [3점]

① $\frac{52}{5}$ ② 11 ③ $\frac{56}{5}$
④ 12 ⑤ $\frac{64}{5}$

C. 수열의 귀납적 정의: 군수열(마디가 등비)(1)

▶ 실전 이론 p.232

C166

○○○
(2021(6)-나형14)

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{3n-1}=2a_n+1 \\ a_{3n}=-a_n+2 \\ a_{3n+1}=a_n+1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{11}+a_{12}+a_{13}$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

C167

●●●
(2020-나형21)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_n-1$
(나) $a_{2n+1}=2a_n+1$

$a_{20}=1$일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$의 값은? [4점]

① 704 ② 712 ③ 720
④ 728 ⑤ 736

C168

●●● (2021-가형21/나형21)

수열 $\{a_n\}$은 $0 < a_1 < 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_2 \times a_n + 1$
(나) $a_{2n+1} = a_2 \times a_n - 2$

$a_8 - a_{15} = 63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은? [4점]

① 91 ② 92 ③ 93
④ 94 ⑤ 95

C. 수열의 귀납적 정의: 군수열(마디가 등비)(2)

C169

○○○ (2005(예비)-나형24)

2 이상의 자연수 n에 대하여 분모는 2^n꼴이고, 분자는 분모보다 작은 홀수인 모든 분수로 이루어진 다음 수열에서 첫째항부터 제126항까지의 합을 구하시오. [4점]

$$\frac{1}{2^2},\ \frac{3}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{3}{2^3},\ \frac{5}{2^3},\ \frac{7}{2^3},\ \frac{1}{2^4},\ \frac{3}{2^4},\ \cdots$$

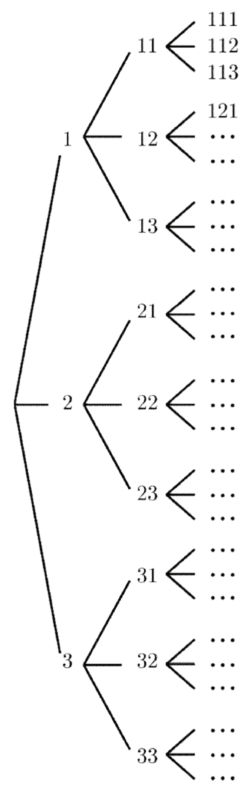
C170

○○○ (1994(2차)-공통11)

오른쪽 그림에 나타나는 수를 크기순으로 나열하여 다음과 같은 수열을 만들었다.

1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33, 111, 112, 113, 121, $\cdots$

이 수열의 제200항은? [4점]



① 13323 ② 13332 ③ 21111
④ 21113 ⑤ 21122

A. 로그함수의 그래프: 좌표평면(직선의 기울기)

▶ 기출 문제 p.31

두 개 이상의 직선의 기울기의 대소 관계에 관련된 문제들을 풀어보자.

예제 1

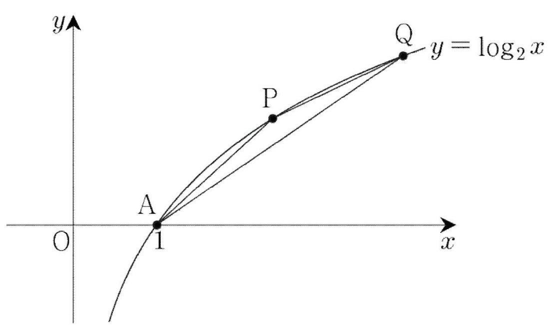
로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 이용하여 $1<p<q$일 때, 세 수

$\dfrac{\log_2 p}{p-1}$, $\dfrac{\log_2 q}{q-1}$, $\dfrac{\log_2 q-\log_2 p}{q-p}$

의 대소 관계를 밝히시오.

풀이

곡선 $y=\log_2 x$ 위의 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{P}(p,\ \log_2 p)$, $\mathrm{Q}(q,\ \log_2 q)$를 생각하자.



$\dfrac{\log_2 p}{p-1}$=(두 점 A, P를 잇는 직선의 기울기)

$\dfrac{\log_2 q}{q-1}$=(두 점 A, Q를 잇는 직선의 기울기)

$\dfrac{\log_2 q-\log_2 p}{q-p}$=(두 점 P, Q를 잇는 직선의 기울기)

위의 그림에서 아래의 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{\log_2 q-\log_2 p}{q-p}<\frac{\log_2 q}{q-1}<\frac{\log_2 p}{p-1}$$

답 풀이 참조

곡선 $y=\log_2 x$가 양의 실수 전체의 집합에서 위로 볼록이므로 위의 부등식이 성립하는 것이다.

지수함수와 로그함수의 참, 거짓 판단 문제는 부등식의 성질과 자주 내적 연계된다.

• 부등식의 성질

실수 a, b, c에 대하여

❶ $a>b$, $b>c$이면 $a>c$

❷ $a>b$이면 $a+c>b+c$, $a-c>b-c$

❸ $a>b$, $c>0$이면 $ac>bc$, $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

❹ $a>b$, $c<0$이면 $ac<bc$, $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

다음의 필요충분조건이 성립함을 알 수 있다.

양수 a, b, c, d에 대하여

$ab>cd \Leftrightarrow \dfrac{a}{c}>\dfrac{d}{b}$ (∵❸) …㉠

양수 a, b, d와 음수 c에 대하여

$ab>cd \Leftrightarrow \dfrac{a}{c}<\dfrac{d}{b}$ (∵❹) …㉡

증명

㉠($\Rightarrow$):

양변을 $bc(>0)$로 나누면

$\dfrac{ab}{bc}>\dfrac{cd}{bc}$, 즉 $\dfrac{a}{c}>\dfrac{d}{b}$

㉠($\Leftarrow$):

양변에 $bc(>0)$를 곱하면

$\dfrac{a}{c}bc>\dfrac{d}{b}bc$, 즉 $ab>cd$

㉡($\Rightarrow$):

양변을 $bc(<0)$로 나누면

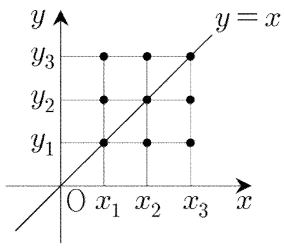
$\dfrac{ab}{bc}<\dfrac{cd}{bc}$, 즉 $\dfrac{a}{c}<\dfrac{d}{b}$

㉡($\Leftarrow$):

양변에 $bc(<0)$를 곱하면

$\dfrac{a}{c}bc>\dfrac{d}{b}bc$, 즉 $ab>cd$

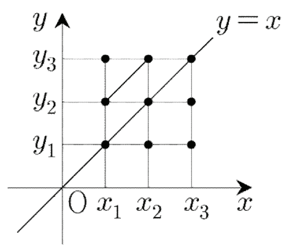
좌표평면 위에 아래 그림과 같이 9개의 점이 있다고 하자.



(단, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$)

다음과 같은 등식들이 성립한다.

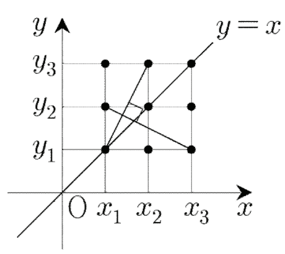
• 평행:



$$\frac{y_3-y_2}{x_2-x_1}=1$$

(두 점 $(x_1,\ y_2)$, $(x_2,\ y_3)$을 잇는 직선과 직선 $y=x$는 서로 평행하다.)
이때, 위의 등식과 등식 $y_3-y_2=x_2-x_1$(두 선분의 길이가 같다.)는 필요충분조건이다.

• 수직:



$$\frac{y_1-y_2}{x_3-x_1}\times\frac{y_3-y_1}{x_2-x_1}=-1$$

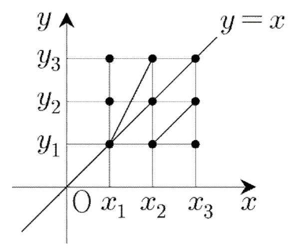
(두 점 $(x_1,\ y_2)$, $(x_3,\ y_1)$을 잇는 직선과 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_3)$을 잇는 직선은 서로 수직이다.)

다음의 부등식이 성립한다. (두 직선의 기울기가 모두 음수일 때, 대소 관계를 주의하자!)

• 두 직선의 기울기의 대소 관계: 기울기가 양수인 경우

$$\frac{y_3-y_1}{x_2-x_1}>\frac{y_2-y_1}{x_3-x_2}$$

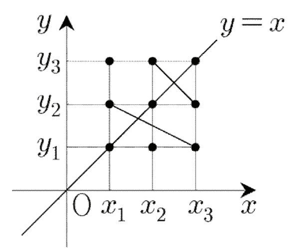
$\Leftrightarrow (y_3-y_1)(x_3-x_2)>(y_2-y_1)(x_2-x_1)$



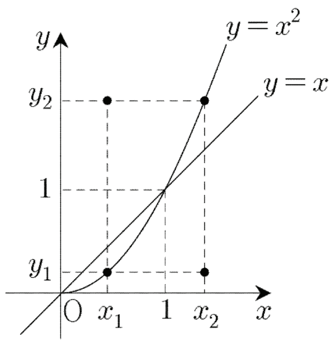
• 두 직선의 기울기의 대소 관계: 기울기가 음수인 경우

$$\frac{y_2-y_3}{x_3-x_2}<\frac{y_1-y_2}{x_3-x_1}$$

$\Leftrightarrow (y_2-y_3)(x_3-x_1)<(y_1-y_2)(x_3-x_2)$



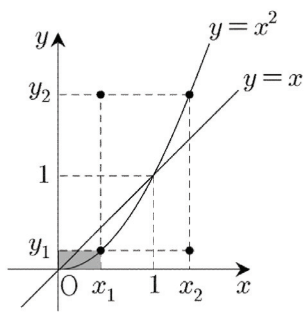
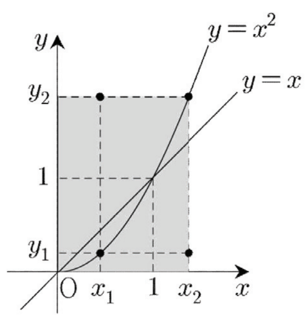
아래의 예를 생각해보자.



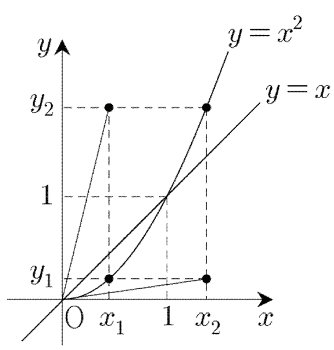
위의 그림에서 아래의 부등식이 성립한다.

$x_1y_1 < x_2y_2 \Leftrightarrow \dfrac{y_1}{x_2} < \dfrac{y_2}{x_1}$

(즉, 두 직사각형의 넓이의 대소 비교 ⇔ 두 직선의 기울기의 대소 비교)

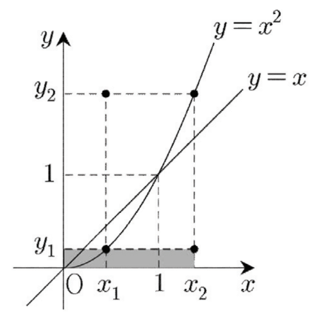
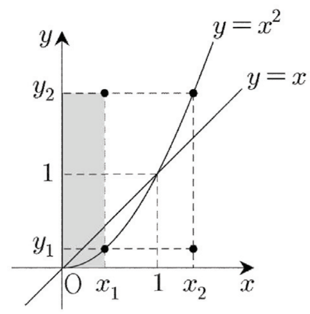
위의 두 직사각형의 넓이를 비교해보면 $x_1y_1 < x_2y_2$이다.



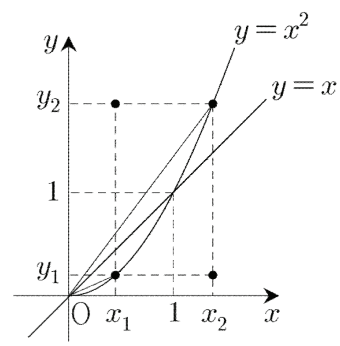
위의 두 직선의 기울기를 비교해보면 $\dfrac{y_1}{x_2} < \dfrac{y_2}{x_1}$이다.

$x_2y_1 < x_1y_2 \Leftrightarrow \dfrac{y_1}{x_1} < \dfrac{y_2}{x_2}$

(즉, 두 직사각형의 넓이의 대소 비교 ⇔ 두 직선의 기울기의 대소 비교)

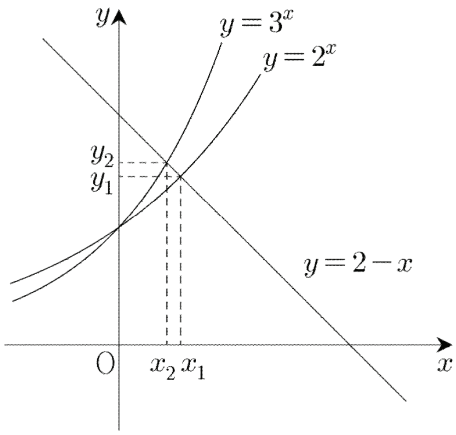



위의 두 직사각형의 넓이를 비교해보면 $x_2y_1 < x_1y_2$이다.



위의 두 직선의 기울기를 비교해보면 $\dfrac{y_1}{x_1} < \dfrac{y_2}{x_2}$이다.

직선 $y=2-x$가 두 곡선 $y=2^x$, $y=3^x$과 만나는 두 교점의 좌표가 아래 그림과 같다고 하자.



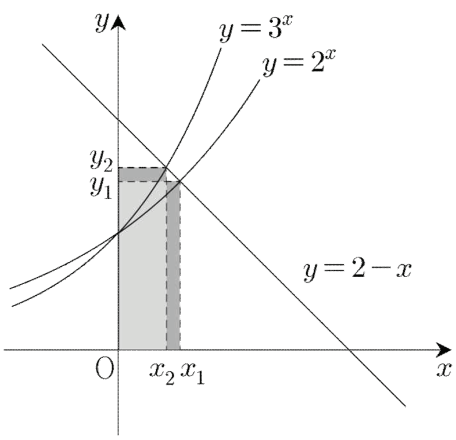
다음이 등식과 부등식이 성립한다.

교점: $0<x_2<x_1<2$, $1<y_1<y_2<2$

기울기: $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$ ($\Leftrightarrow x_1-x_2=y_2-y_1$)

기울기 대소 비교: $\dfrac{y_1}{x_1}<\dfrac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow x_2y_1<x_1y_2$

$x_1y_1>x_2y_2$(넓이) $\Leftrightarrow \dfrac{y_1}{x_2}>\dfrac{y_2}{x_1}$(기울기)



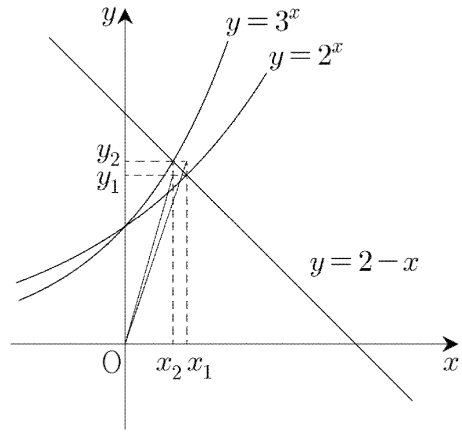
위의 그림에서 두 직사각형의 공통부분의 넓이를 제외한 나머지 두 직사각형의 넓이는 각각

$y_1(x_1-x_2)$, $x_2(y_2-y_1)$

이다. 이때, $x_1-x_2=y_2-y_1$

이므로 $y_1(x_1-x_2)>x_2(y_2-y_1)$

그러므로 $x_1y_1>x_2y_2$



위의 그림에서 두 직선의 기울기를 비교하면

$\dfrac{y_1}{x_2}>\dfrac{y_2}{x_1}$

임을 알 수 있다.

이 문제의 경우 두 직사각형의 넓이의 대소관계가 두 직선의 기울기의 대소관계보다 명확하게 보인다.

• 두 직선의 평행 조건과 일치 조건

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이

(1) 평행하기 위한 필요충분조건은 $m=m'$, $n\neq n'$

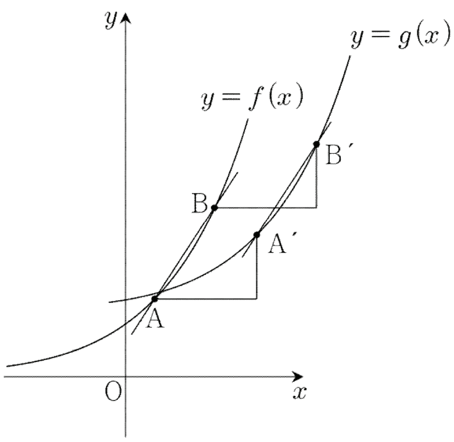
(2) 일치하기 위한 필요충분조건은 $m=m'$, $n=n'$

예제 2

지수함수 $f(x)=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시키면 함수 $g(x)$의 그래프와 일치하고, 이 평행이동에 의하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 A, B는 각각 두 점 A$'$, B$'$으로 이동된다. 두 직선 AB, A$'$B$'$은 서로 평행함을 증명하시오.

증명

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는



두 점 A, B의 좌표를 각각

A$(p,\ 2^p)$, B$(q,\ 2^q)$

라고 하면 두 점 A$'$, B$'$의 좌표는 각각

A$'(p+m,\ 2^p+n)$, B$'(q+m,\ 2^q+n)$

(직선 AB의 기울기)$=\dfrac{2^q-2^p}{q-p}$

(직선 A$'$B$'$의 기울기)$=\dfrac{(2^q+n)-(2^p+n)}{(q+m)-(p+m)}$

$=\dfrac{2^q-2^p}{q-p}$

이므로 두 직선 AB, A$'$B$'$는 서로 평행하다.

답 풀이 참조

A. 로그함수의 그래프: 평행이동+대칭이동

▶ 기출 문제 p.32

예제 1

함수 $f(x)=\log_a(ax-2a)(a>0,\ a\neq 1)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $y=\log_a x$의 그래프를 평행이동시켜서 함수 $f(x)$의 그래프와 일치시킬 수 있다.
ㄴ. $0<a<1$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $y=a^x$의 그래프는 서로 만난다.
ㄷ. $a>1$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $y=\log_a x$의 그래프는 서로 만나지 않는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

▸ ㄱ. (참)

로그의 성질에 의하여

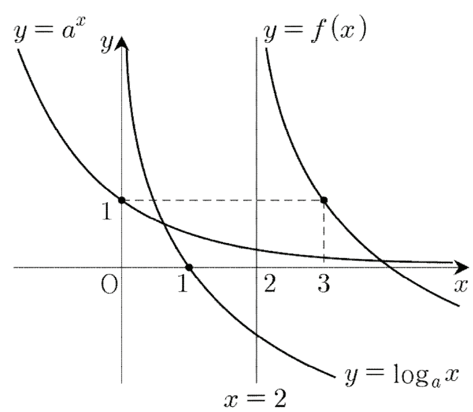
$\log_a(ax-2a)=\log_a a(x-2)=1+\log_a(x-2)$

이므로

$f(x)=1+\log_a(x-2)$

함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 함수 $f(x)$의 그래프와 일치한다.

▸ ㄴ. (참)



$0<a<1$일 때,

구간 $(2,\ \infty)$에서 함수 $y=a^x$는 양의 값을 가지면서 감소하고,

구간 $(2, \infty)$에서 함수 $y=f(x)$는 ∞에서 $-\infty$로 감소한다.

사이값 정리에 의하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=a^x$은 적어도 한 점에서 만난다.

▸ ㄷ. (거짓)

두 함수 $y=f(x)$, $y=\log_a x$의 방정식을 연립하면

$\log_a x = \log_a(ax-2a)$ (단, $x>2$)

$x=ax-2a$, $(a-1)x=2a$

풀면

$$x=\frac{2a}{a-1}$$

$a>1$일 때, $x=\dfrac{2a}{a-1}>2$이므로

두 곡선 $y=f(x)$, $y=\log_a x$는 오직 한 점에서 만난다.

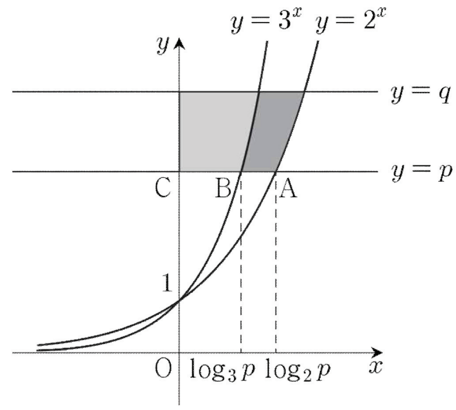
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ④

A. 지수함수와 로그함수의 그래프: 비율 관계

▶ 기출 문제 p.33

• 지수함수의 확대축소 (비율관계)



위의 그림처럼 직선 $y=p$가 두 곡선 $y=2^x$, $y=3^x$ 및 y축과 만나는 점을 각각 A, B, C라고 하자.

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\log_3 p = (\log_3 2)(\log_2 p)$

이므로

$\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : \log_3 2$ ($\overline{AC} : \overline{BC} = \log_2 3 : 1$)

따라서 다음이 성립함을 알 수 있다.

(곡선 $y=2^x$과 두 직선 $y=p$, $y=q$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이)

=(곡선 $y=3^x$과 두 직선 $y=p$, $y=q$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이)$\times \log_2 3$

(두 곡선 $y=2^x$, $y=3^x$과 두 직선 $y=p$, $y=q$로 둘러싸인 도형의 넓이)

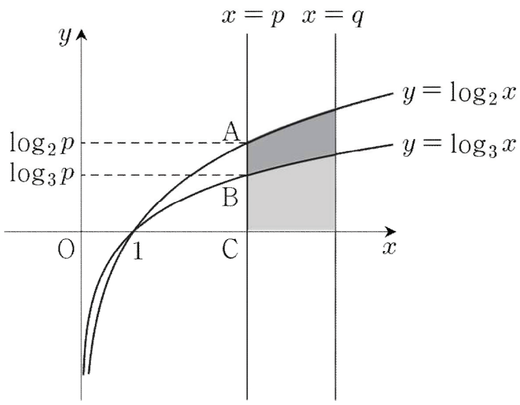
=(곡선 $y=3^x$과 두 직선 $y=p$, $y=q$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이)$\times \log_2 \dfrac{3}{2}$

이때, $\log_2 \dfrac{3}{2} = \dfrac{1-\log_3 2}{\log_3 2}$

즉, 곡선 $y=2^x$은 곡선 $y=3^x$을 x축에 대하여 $\log_2 3$ (>1) 만큼 확대한 것이다.

그리고 곡선 $y=3^x$은 곡선 $y=2^x$을 x축에 대하여 $\log_3 2$ (<1) 만큼 축소한 것이다.

- **로그함수의 확대축소 (비율관계)**



위의 그림처럼 직선 $x=p$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$ 및 x축과 만나는 점을 각각 A, B, C라고 하자.

로그의 밑의 변환의 공식에 의하여

$\log_3 p=(\log_3 2)(\log_2 p)$

이므로

$\overline{AC}:\overline{BC}=1:\log_3 2$ ($\overline{AC}:\overline{BC}=\log_2 3:1$)

따라서 다음이 성립함을 알 수 있다.

(곡선 $y=\log_2 x$과 두 직선 $x=p$, $x=q$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이)

=(곡선 $y=\log_3 x$과 두 직선 $x=p$, $x=q$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이)$\times\log_2 3$

(두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$과 두 직선 $x=p$, $x=q$로 둘러싸인 도형의 넓이)

=(곡선 $y=\log_3 x$과 두 직선 $x=p$, $x=q$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이)$\times\log_2 \dfrac{3}{2}$

이때, $\log_2 \dfrac{3}{2}=\dfrac{1-\log_3 2}{\log_3 2}$

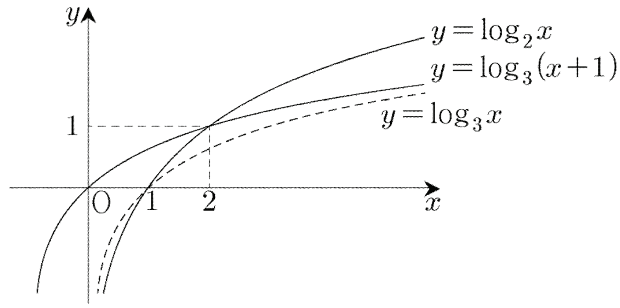
즉, 곡선 $y=\log_2 x$은 곡선 $y=\log_3 x$을 y축에 대하여 $\log_2 3(>1)$ 만큼 확대한 것이다.

그리고 곡선 $y=\log_3 x$은 곡선 $y=\log_2 x$을 y축에 대하여 $\log_3 2(<1)$ 만큼 축소한 것이다.

A. 두 로그함수의 위치 관계

▶ 기출 문제 p.34

예를 들어 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_3(x+1)$의 위치 관계를 따져보자.



위의 그림에서 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$\log_3(n+1)\leq\log_2 n$

이 성립함을 알 수 있다. (단, 등호는 $n=2$일 때 성립한다.)

만약 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점 $(n,\ \log_2 n)$와

곡선 $y=\log_3 x$ 위의 점 $(n+1,\ \log_3(n+1))$의

y좌표의 크기를 비교한다면 눈으로 명확하게 확인하기 힘들다.

수능에서는 이처럼 평행이동의 관점을 적용해야 풀리는 문제를 출제하는 경향이 있다.

A. 로그함수의 그래프: 교점

▶ 기출 문제 p.35

지수함수와 로그함수의 참, 거짓 판단 문제를 풀 때에는 아래의 관점을 잊지 말아야 한다.

• 지수함수, 로그함수의 참 거짓 판단 유형별 구분

(1) ㄱ→ㄴ→ㄷ
ㄱ의 결과를 이용하여 ㄴ의 참, 거짓을 판단하고, ㄴ의 결과를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판단한다.

(2) ㄱ+ㄴ→ㄷ
ㄱ, ㄴ의 결과를 모두 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판단한다.

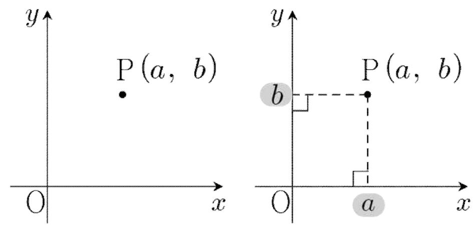
(3) ㄱ→ㄷ, ㄴ
ㄱ의 결과를 이용하여 ㄷ의 참, 거짓을 판단한다. 이때, ㄴ은 연관성이 거의 없다.

(1)과 (2)가 주로 출제되며, (3)은 최근에는 거의 출제되지 않는다.

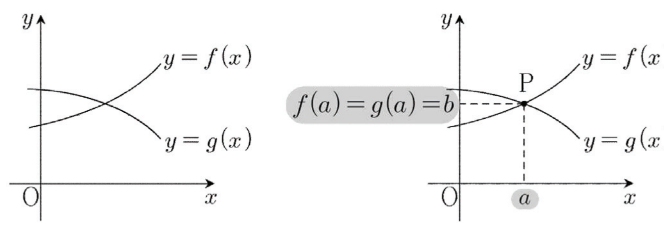
• 좌표평면 위의 점(교점)을 결정하는 법

좌표평면에서 반드시 그어야 하는 보조선을 알아보자.

❶ 좌표평면 위의 점 P가 주어지면 점 P에서 x축과 y축에 각각 수선의 발을 내려야 한다. 왜냐하면 교과서에서는 점 P의 좌표를 두 축에 내린 두 수선의 발로 정의하기 때문이다.



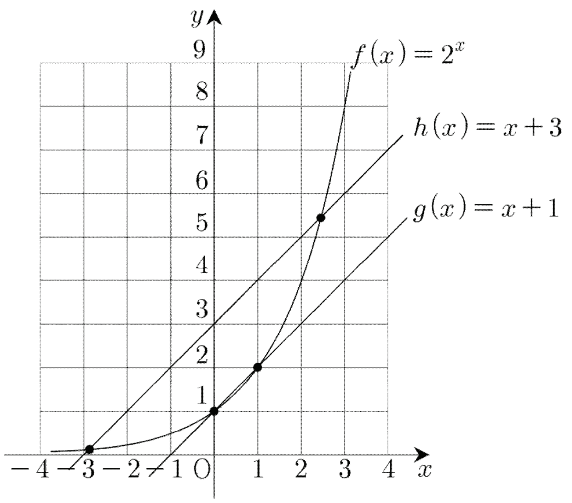
❷ 좌표평면 위의 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나면 교점이 생긴다. 이 교점에서 x축과 y축에 각각 수선의 발을 내리고 x좌표와 y좌표를 문자(a, b, t, $\cdots$)로 둔다.



이상은 매우 당연하지만, 시험장에서 의외로 떠오르지 않는 경우가 많다. 따라서 문제를 풀 때 이를 의식적으로 연습할 필요가 있다.

몇 가지의 예들을 들어보자.

(1) 교점의 x좌표와 y좌표의 값을 구할 수 있는 경우와 없는 경우가 함께 주어질 때



두 개의 방정식

$2^x=x+1$ ⋯㉠

$2^x=x+3$ ⋯㉡

을 생각해보자.

㉠: 위의 그림처럼 곡선과 직선의 두 교점의 x좌표는 각각 0, 1이다.

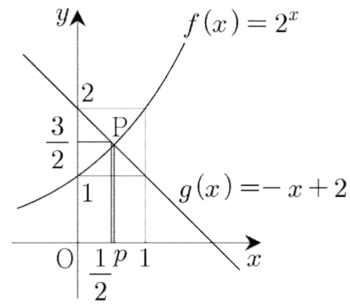
㉡: 위의 그림처럼 곡선과 직선의 두 교점의 x좌표의 값을 바로 구할 수는 없다.

다만 두 교점의 x좌표를 각각 p, q $(p<q)$라고 하면

$-3<p<-2$, $2<q<3$

임을 알 수 있다. (이때, 사이값 정리를 떠올릴 수 있어야 한다.)

(2) 교점의 x좌표와 y좌표의 값을 구할 수 없는 경우



두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=-x+2$의 교점 P의 x좌표를 p라고 하자.

• 교점

위의 그림처럼

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}<\frac{3}{2}=g\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)=2>1=g(1)$

이므로 $\frac{1}{2}<p<1$이다. ($\because$ 사이값 정리)

• 직선의 기울기

그리고 직선 OP의 기울기가 1보다 크고 3보다 작음을 다음과 같이 보일 수 있다.

(직선 OP의 기울기)$=\frac{2-p-0}{p-0}=\frac{2}{p}-1$

(이때, 점 P는 직선 $y=-x+2$에 있으므로 $\mathrm{P}(p,\ -p+2)$이다.)

위에서 구한 p의 범위에 의하여

$1<\frac{2}{p}-1<3$

• 넓이

$\frac{3}{4}<p(2-p)<1$

이때, $p(2-p)$는 선분 OP를 대각선으로 하고 각 변이 x축, y축에 평행한 직사각형의 넓이이다.

※ $f(p)=g(p)$, 즉 $2^p=-p+2$임을 이용해서 해결하는 문제도 있다.

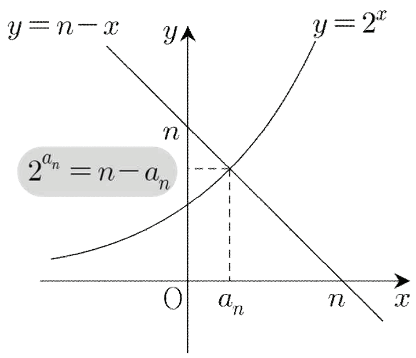
예제 1

2 이상의 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y=2^x$, $y=n-x$의 교점의 x좌표를 a_n이라고 하자. 이때, 부등식

$n-2^n < a_n < n$

이 성립함을 보이시오.

풀이



위의 그림에서 $a_n < n(\cdots(*))$이고,

교점의 y좌표: $2^{a_n}=n-a_n$ (즉, $n-2^{a_n}=a_n$)

그런데 (*)에 의하여

$n-2^n < n-2^{a_n}=a_n$

이므로

$\therefore\ n-2^n < a_n < n$

답 풀이 참조

예제 2

두 실수 a, b $(0<b<a<1)$에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 p, 곡선 $y=\log_b x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 q라고 하자. 네 수 a^p, a^q, b^p, b^q의 대소 관계로 옳은 것은? [4점]

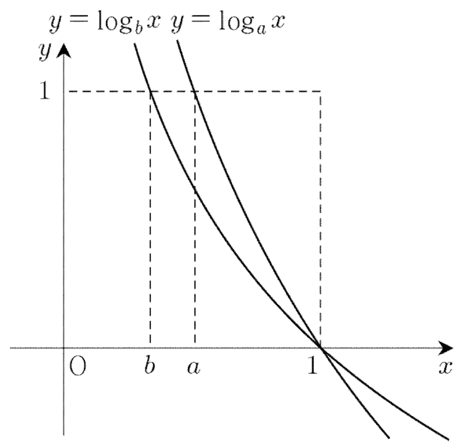
① $a^p < a^q < b^p < b^q$ ② $b^p < b^q < a^p < a^q$

③ $a^q < a^p < b^q < b^p$ ④ $b^q < b^p < a^q < a^p$

⑤ $a^q < b^q < a^p < b^p$

풀이

두 함수 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$의 그래프는



곡선 $y=\log_a x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표가 p이므로

$\log_a p=p$

로그의 정의에 의하여

$a^p=p$

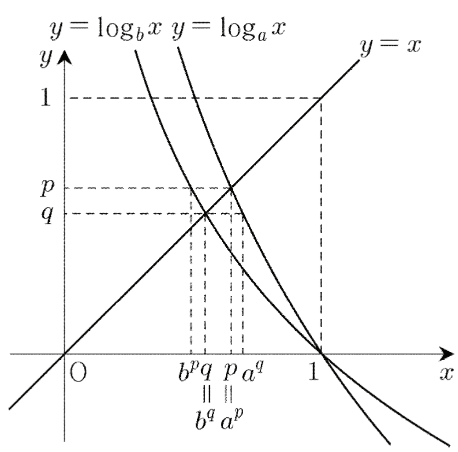
곡선 $y=\log_b x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표가 q이므로

$\log_b q=q$

로그의 정의에 의하여

$b^q=q$

아래의 그림처럼 $q<p$이다.



곡선 $y=\log_a x$와 직선 $y=q$의 방정식을 연립하면

$\log_a x=q$

로그의 정의에 의하여

$x=a^q$

곡선 $y=\log_b x$와 직선 $y=p$의 방정식을 연립하면

$\log_b x=p$

로그의 정의에 의하여

$x=b^p$

위의 그림에서

$\therefore\ b^p<b^q<a^p<a^q$

답 ②

A. 지수함수와 로그함수의 그래프: 역함수+거미줄 도형

▶ 기출 문제 p.39

• 합성함수 (거미줄 도형)

예제 1

지수함수 $y=2^x$의 그래프를 이용하여 세 실수 a, 2^a, 2^{2^a}의 대소 관계를 밝히시오.

접근법

합성함수가 주어졌으므로 아래의 전형적인 풀이를 따른다.

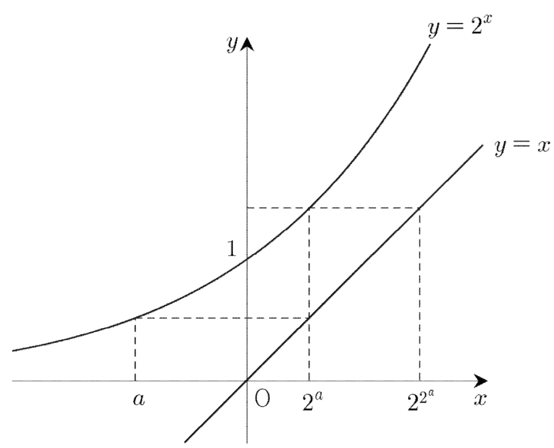
❶ 좌표평면에 직선 $y=x$를 그린다.

❷ 직선 $y=x$를 이용하여 y축 위의 $f(a)$를 x축 위에 나타낸다.

❸ 직선 $y=x$를 이용하여 y축 위의 $f(f(a))$를 x축 위에 나타낸다.

❹ x축 위의 세 수 a, $f(a)$, $f(f(a))$의 대소를 비교한다.

풀이1



$f(x)=2^x$로 두면 세 수 a, 2^a, 2^{2^a}은 각각 a, $f(a)$, $f(f(a))$이다.

위의 그림에서 $a<2^a<2^{2^a}$임을 알 수 있다.

답 풀이 참조

풀이2

다음과 같은 대수적 풀이도 가능하다.

실수 전체의 집합에서 $2^x>x$이므로 $2^a>a$이다.

실수 전체의 집합에서 함수 $y=2^x$은 증가하므로

$a < 2^a$이면 $2^a < 2^{2^a}$

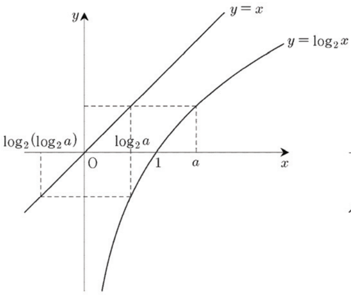
이다.

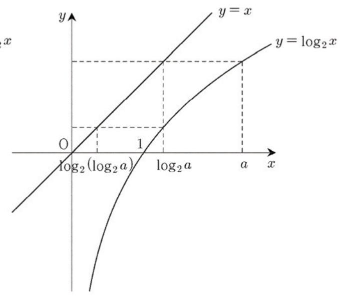
$\therefore\ a < 2^a < 2^{2^a}$

예제 2

로그함수 $y = \log_2 x$의 그래프를 이용하여 세 실수 a, $\log_2 a$, $\log_2(\log_2 a)$의 대소 관계를 밝히시오. (단, $a > 1$이다.)

풀이





위의 그림에서 $\log_2(\log_2 a) < \log_2 a < a$이다.

답 풀이 참조

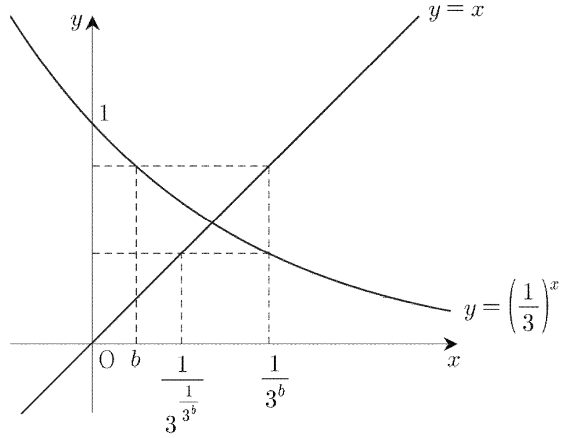
예제 3

지수함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 이용하여 세 실수 b, $\frac{1}{3^b}$, $\frac{1}{3^{\frac{1}{3^b}}}$의 대소 관계를 밝히시오.

풀이

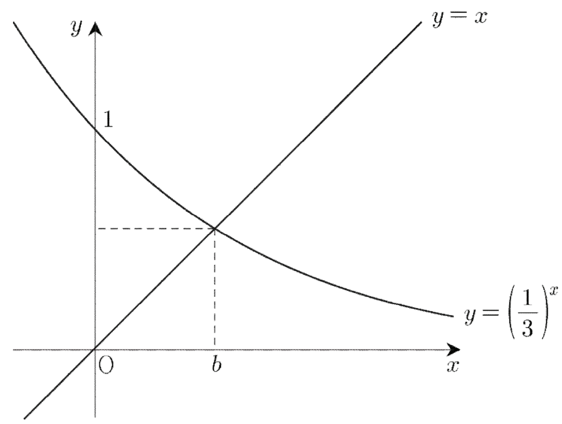
곡선 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$과 직선 $y = x$의 교점의 x좌표를 c라고 하자.

(1) $b < c$인 경우



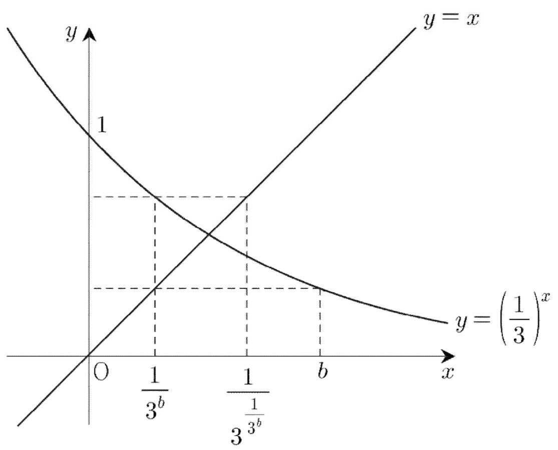
위의 그림에서 $b < \frac{1}{3^{\frac{1}{3^b}}} < \frac{1}{3^b}$이다.

(2) $b = c$인 경우



위의 그림에서 $b = \frac{1}{3^b} = \frac{1}{3^{\frac{1}{3^b}}}$이다.

(3) $b > c$인 경우



위의 그림에서 $\frac{1}{3^b}<\frac{1}{3^{\frac{1}{3^b}}}<b$이다.

답 풀이 참조

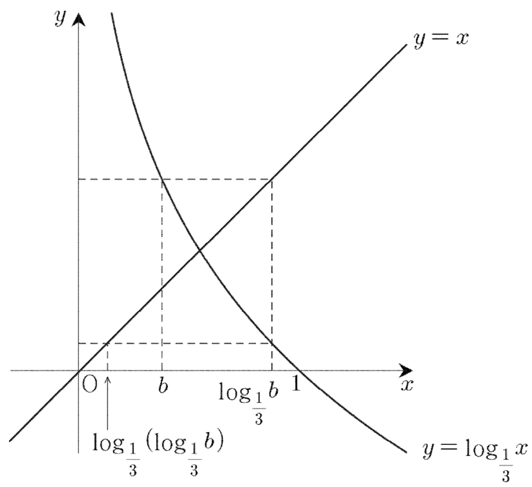
예제 4

로그함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 그래프를 이용하여 세 실수 b, $\log_{\frac{1}{3}}b$, $\log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{3}}b)$의 대소 관계를 밝히시오. (단, $0<b<1$)

풀이

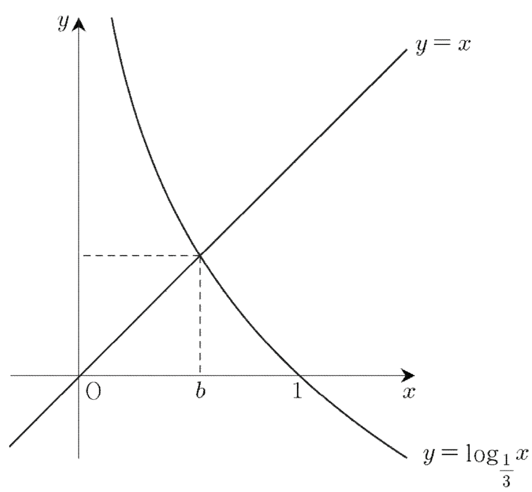
곡선 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 c라고 하자.

(1) $b<c$인 경우



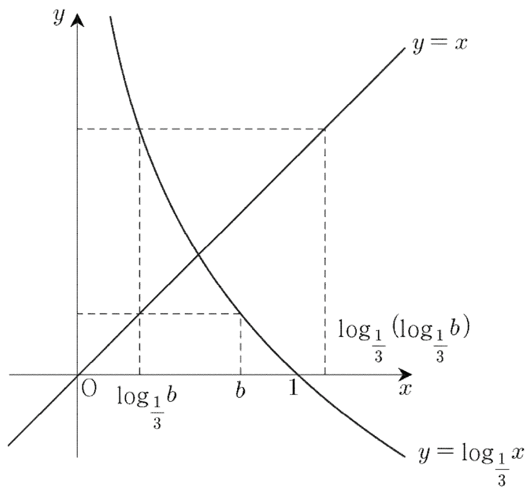
위의 그림에서 $\log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{3}}b)<b<\log_{\frac{1}{3}}b$이다.

(2) $b=c$인 경우



위의 그림에서 $b=\log_{\frac{1}{3}}b=\log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{3}}b)$이다.

(3) $b>c$인 경우



위의 그림에서 $\log_{\frac{1}{3}}b<b<\log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{3}}b)$이다.

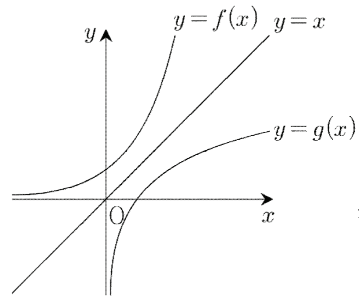
답 풀이 참조

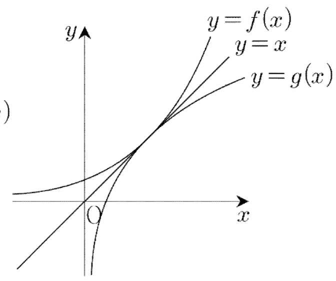
A. 지수함수와 로그함수의 그래프: 역함수 (두 곡선의 위치 관계)

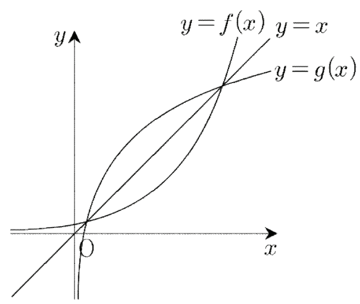
▶ 기출 문제 p.40

• 지수함수와 로그함수(역함수)의 위치관계

❶ $a>1$일 때, 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$의 교점의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.(즉, 만날 수도 있고, 만나지 않을 수도 있다!) (아래 그림)



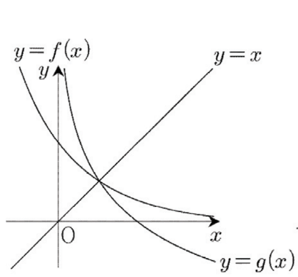


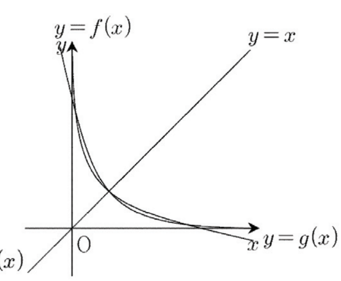


(단, $f(x)=a^x$, $g(x)=\log_a x$)

각각의 경우에 대한 a의 값의 범위는 도함수를 이용하여 구해야 한다. 하지만 이는 미적분 범위에 속한다. 일단은 위의 세 경우가 가능하다는 것을 알아두면 된다.

❷ $0<a<1$일 때, 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$의 교점의 개수는 1 또는 3이다.(즉, 반드시 만난다!) (아래 그림)





(단, $f(x)=a^x$, $g(x)=\log_a x$)

각각의 경우에 대한 a의 값의 범위는 도함수를 이용하여 구해야 한다. 하지만 이는 미적분 범위에 속한다. 일단은 위의 두 경우가 가능하다는 것을 알아두면 된다.

• 각의 통일, 삼각함수의 통일

❶ 각의 통일

두 개의 각 x, $\frac{\pi}{2}-x$가 주어졌으므로 x로 각을 통일한다.

❷ 삼각함수의 통일(치환)

두 삼각함수 $\sin x$와 $\cos x$의 각이 x로 통일되어 있으니, 전체식을 $\sin x$ 또는 $\cos x$로 통일시켜야 한다. $\cos x=t$ 또는 $\sin x=t$로 두어야 하는데, 루트가 발생하지 않는 쪽이면 된다.

치환하고 나서 t의 범위를 정해주어야 한다. 요컨대 '각 통일 → 삼각함수 통일(사인 또는 코사인) → t의 범위 결정' 의 순서대로 문제를 풀어나가면 된다. 이는 위의 유형과 같은 문제들에 대한 전형적인 풀이 순서이므로 반드시 익혀두길 바란다.

B. 삼각함수와 방정식: 실근의 개수

▶ 기출 문제 p.71

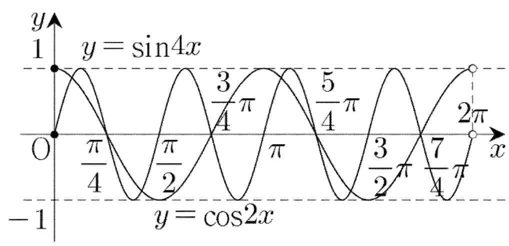
다음은 교과서 연습문제이다. 이 문제를 풀고, 이론을 읽어보자.

예제 1

$0 \leq x < 2\pi$일 때, 방정식 $\sin 4x=\cos 2x$의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.

풀이

구간 $[0,\ 2\pi)$에서 두 함수 $y=\sin 4x$, $y=\cos 2x$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



구간 $[0,\ 2\pi)$에서 두 곡선 $y=\sin 4x$, $y=\cos 2x$의 교점의 개수가 8이므로 문제에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 8이다.

답 8

• '실근의 개수를 구하라.' 가 가진 의미

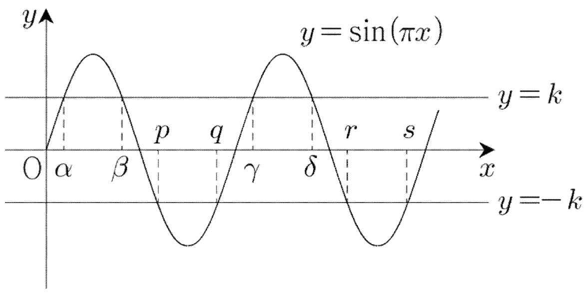
현행 교육과정에서는 삼각함수에 대한 배각, 반각 공식을 배우지 않으므로 위의 문제의 경우 주어진 각을 통일할 수 없다. 그리고 방정식을 주고 '실근을 구하시오.' 라고 하지 않고 '서로 다른 실근의 개수를 구하시오.' 라고 하였으므로 방정식에서 주어진 두 곡선의 교점의 개수를 구하면 된다. 즉, 이 문제는 대수적인 방법이 아닌, 기하적 관점에서 해결해야 한다.

B. 삼각함수와 방정식: 실근의 합(대칭성)

▶ 기출 문제 p.71

예제 1

곡선 $y=\sin(\pi x)$와 두 직선 $y=k$, $y=-k$의 교점의 x좌표가 아래 그림과 같다고 하자. (단, $k>0$)



이때, 다음의 값을 구하시오.

(1) 선대칭

$\alpha+\beta$, $\gamma+\delta$, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, $\alpha+\delta$, $\beta+\gamma$

(2) 점대칭

$\beta+p$, $\alpha+q$, $\alpha+\beta+p+q$, $\alpha+s$, $\beta+r$

(3) 주기성

$\gamma-\alpha$, $\delta-\beta$

풀이

(1) 선대칭

$\alpha+\beta=1$ $(\Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2})$

($\because$ 주어진 곡선은 직선 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이다.)

$\gamma+\delta=5$ $(\Leftrightarrow \frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{5}{2})$

($\because$ 직선 $x=\frac{5}{2}$에 대하여 대칭)

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=6$ $(\Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}=\frac{3}{2})$

($\because$ 직선 $x=\frac{3}{2}$에 대하여 대칭)

$\alpha+\delta=3$ $(\Leftrightarrow \frac{\alpha+\delta}{2}=\frac{3}{2})$

($\because$ 직선 $x=\frac{3}{2}$에 대하여 대칭)

$\beta+\gamma=3$ $(\Leftrightarrow \frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{3}{2})$

($\because$ 직선 $x=\frac{3}{2}$에 대하여 대칭)

(2) 점대칭

$\beta+p=2$ $(\because \frac{\beta+p}{2}=1)$

($\because$ 점 $(1,\ 0)$에 대하여 대칭)

$\alpha+q=2$ $(\Leftrightarrow \frac{\alpha+q}{2}=1)$

($\because$ 점 $(1,\ 0)$에 대하여 대칭)

$\alpha+\beta+p+q=4$ $(\Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta+p+q}{4}=1)$

($\because$ 점 $(1,\ 0)$에 대하여 대칭)

$\alpha+s=4$ $(\Leftrightarrow \frac{\alpha+s}{2}=2)$

($\because$ 점 $(2,\ 0)$에 대하여 대칭)

$\beta+r=4$ $(\Leftrightarrow \frac{\beta+r}{2}=2)$

($\because$ 점 $(2,\ 0)$에 대하여 대칭)

(3) 주기성

주어진 곡선의 주기는 2이므로

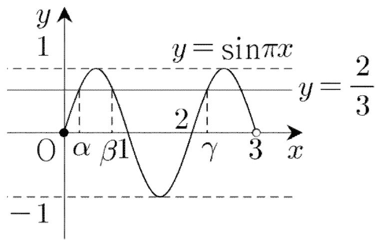
$\gamma-\alpha=2$

$\delta-\beta=2$

답 풀이 참조

예제 2

아래 그림처럼 함수 $f(x)=\sin\pi x(0\le x<3)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{3}$가 만나는 네 개의 교점 중에서 세 점의 x좌표를 각각 α, β, γ라고 하자. $f(\alpha+\beta+\gamma)$의 값을 구하여라.



풀이

함수 $y=\sin\pi x$의 그래프는 직선 $y=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}$에서 $\alpha+\beta=1$

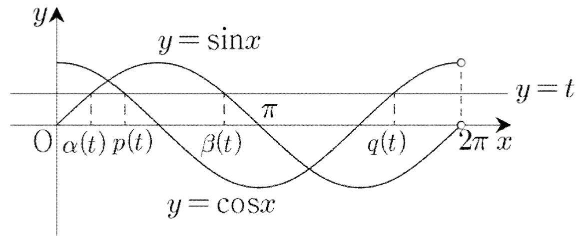
$\therefore\ f(\alpha+\beta+\gamma)=f(1+\gamma)=\sin(\pi+\pi\gamma)$

$=-\sin\pi\gamma=-\frac{2}{3}$

답 $-\frac{2}{3}$

예제 3

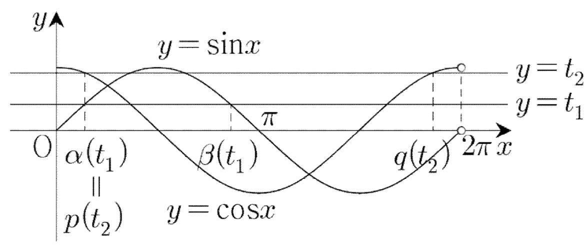
구간 $[0,\ 2\pi)$에서 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=t(-1<t<1)$의 두 교점의 x좌표를 각각 $\alpha(t)$, $\beta(t)$, 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=t$의 두 교점의 x좌표를 각각 $p(t)$, $q(t)$라고 하자. (단, $\alpha(t)<\beta(t)$, $p(t)<q(t)$)



$\alpha(t_1)=p(t_2)$인 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$일 때, 다음의 값을 구하시오.

(1) $q(t_2)-\beta(t_1)$ (2) t_1, t_2

풀이



$\alpha(t_1)=p(t_2)=a$로 두면

$\cos a-\sin a=\frac{1}{2}$ $\cdots$㉠

양변을 제곱하여 정리하면

$1-2\cos a\sin a=\frac{1}{4}$, $\cos a\sin a=\frac{3}{8}$

$(\cos a+\sin a)^2=(\cos a-\sin a)^2+4\cos a\sin a$

$=\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{8}=\frac{7}{4}$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 두 실수 $\cos a$, $\sin a$는 이차방정식

$x^2-\frac{\sqrt{7}}{2}x+\frac{3}{8}=0$

의 서로 다른 두 실근이다.

$\cos a=\frac{\sqrt{7}+1}{4}(=t_2)$, $\sin a=\frac{\sqrt{7}-1}{4}(=t_1)$

$\therefore\ q(t_2)-\beta(t_1)=2\pi-p(t_2)-\{\pi-\alpha(t_1)\}$

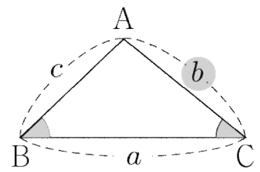
$=\pi+\alpha(t_1)-p(t_2)=\pi$

답 (1) π (2) $t_1=\frac{\sqrt{7}-1}{4}$, $t_2=\frac{\sqrt{7}+1}{4}$

B. 사인법칙

▶ 기출 문제 p.74

아래 그림처럼 두 각과 한 변의 길이를 알면 나머지 두 변의 길이를 알 수 있다.



$$\frac{b}{\sin(\angle\mathrm{B})}=\frac{c}{\sin(\angle\mathrm{C})}=\frac{a}{\sin(180^\circ-\angle\mathrm{B}-\angle\mathrm{C})}$$

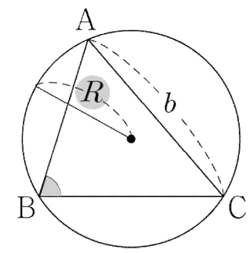
에서

$$c=\frac{\sin(\angle\mathrm{C})}{\sin(\angle\mathrm{B})}\times b,$$
$$a=\frac{\sin(180^\circ-\angle\mathrm{B}-\angle\mathrm{C})}{\sin(\angle\mathrm{B})}\times b$$

B. 사인법칙: 원

▶ 기출 문제 p.74

아래 그림처럼 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 알고 삼각형의 한 각의 크기를 알면 이 각의 대응변의 길이를 구할 수 있다.



$\dfrac{b}{\sin(\angle\mathrm{B})}=2R$에서 $b=2R\times\sin(\angle\mathrm{B})$

(그리고 위의 등식에서 R, b의 값을 알면 $\sin(\angle\mathrm{B})$의 값을 구할 수 있다.)

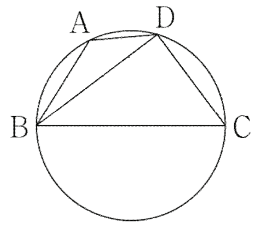
위의 그림에서 $\overline{\mathrm{AB}}=c$, $\overline{\mathrm{BC}}=a$이면
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

이때, 다음의 비례관계가 성립한다.
$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

만약 $p\sin A=q\sin B=r\sin C$이면
다음의 비례관계가 성립한다.
$$\sin A:\sin B:\sin C=\frac{1}{p}:\frac{1}{q}:\frac{1}{r}=a:b:c$$

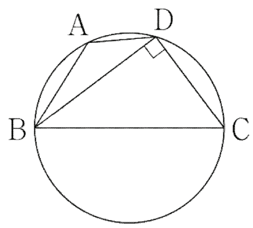
예제 1

아래 그림과 같이 사각형 ABCD의 네 꼭짓점을 모두 지나는 원이 있다.



선분 BC가 이 원의 지름이고 $\overline{BC}=10$, $\overline{CD}=6$일 때, $\sin A$의 값을 구하시오.

풀이



직각삼각형 BCD에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{BD}=8$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin A}=2R,\ \text{즉}\ \frac{8}{\sin A}=10$$

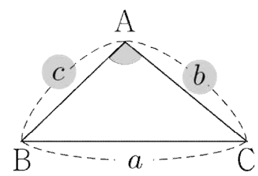
$$\therefore\ \sin A=\frac{4}{5}$$

답 $\frac{4}{5}$

B. 코사인법칙

▶ 기출 문제 p.75

아래 그림처럼 두 변의 길이를 알고 사잇각의 크기를 알면 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있다.



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\angle A)$$

그리고 삼각형의 세 변의 길이를 알면 세 내각의 코사인값을 구할 수 있다.

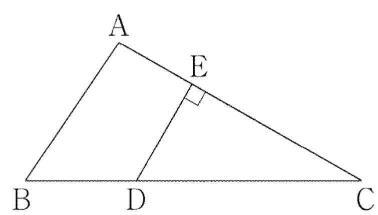
$$\cos(\angle A)=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\cos(\angle B)=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

$$\cos(\angle C)=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

예제 1

$\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=5$인 삼각형 ABC의 변 BC 위에 점 D를 $\overline{BD}=2$가 되도록 잡자.



점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라고 할 때, 선분 CE의 길이를 구하시오.

풀이

코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle C)=\frac{6^2+5^2-3^2}{2\times6\times5}=\frac{13}{15}$$

직각삼각형 DCE에서

$$\therefore\ \overline{CE}=4\times\cos(\angle C)=\frac{52}{15}$$

답 $\frac{52}{15}$

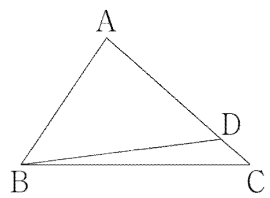
B. 코사인법칙: 삼각형 2개

▶ 기출 문제 p.76

두 개의 삼각형이 주어졌을 때 코사인법칙을 적용하는 문제를 풀어보자.

예제 1

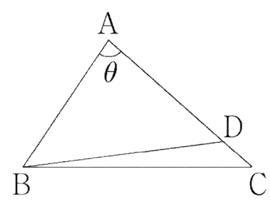
$\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=5$인 삼각형 ABC의 변 AC 위에 점 D를 $\overline{AD}=4$가 되도록 잡자.



이때, 선분 BD의 길이를 구하시오.

풀이1

$\angle DAB=\theta$로 두자.



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\times4\times5}=\frac{1}{8}$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

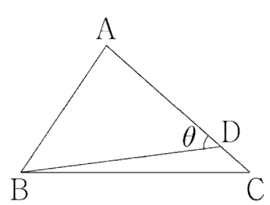
$$\overline{BD}^2=4^2+4^2-2\times4\times4\times\cos\theta=28$$

$\therefore\ \overline{BD}=2\sqrt{7}$

답 $2\sqrt{7}$

풀이2

$\angle ADB=\theta$, $\overline{BD}=x$로 두자.



두 삼각형 ABD, DBC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{4^2+x^2-4^2}{2\times4\times x},$$

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{1^2+x^2-6^2}{2\times1\times x}(=-\cos\theta)$$

$$\frac{4^2+x^2-4^2}{2\times4\times x}=-\frac{1^2+x^2-6^2}{2\times1\times x},\quad x^2=28$$

$\therefore\ \overline{BD}=2\sqrt{7}$

답 $2\sqrt{7}$

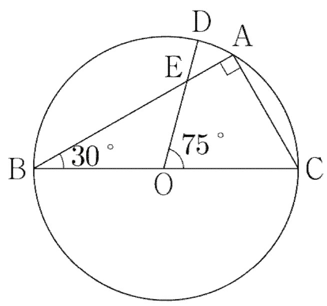
B. 코사인법칙: 원의 정의

▶ 기출 문제 p.78

원은 중심과 반지름으로 정의된다. 아래 문제를 풀면서 원의 정의를 적용해 보자.

예제 1

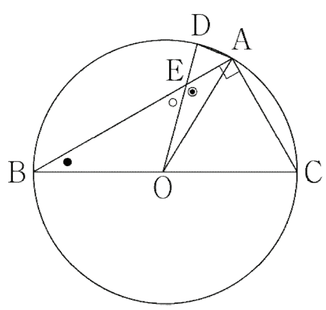
$\angle CAB = 90°$, $\overline{BC} = 2$인 삼각형 ABC에 외접하는 원 위에 아래 그림처럼 $\angle DOC = 75°$인 점 D를 잡자.



두 선분 AB, OD의 교점을 E라고 할 때, 선분 AE의 길이를 구하시오.

풀이

※ 점 A는 원 위에 있으므로 보조선 $\overline{OA}$를 긋는다. (이는 원의 정의를 따른 것이다.)



(단, ●$=30°$, ○$=45°$, ⦿$=135°$)

위의 그림에서 ●+○$=75°$이므로 ○$=45°$, ⦿$=135°$

삼각형 BOE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{1}{\sin 45°} = \frac{\overline{OE}}{\sin 30°},\ \overline{OE} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\overline{AE} = x$로 두자. 삼각형 AEO에서 코사인법칙에 의하여

$$1^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + x^2 - 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times x \times \cos 135°$$

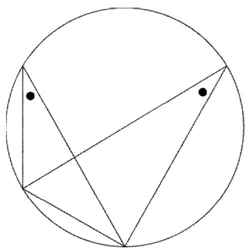
$$2x^2 + 2x - 1 = 0,\ x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

답 $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

B. 코사인법칙: 원주각

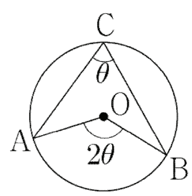
▶ 기출 문제 p.79

(1) 원주각이 같다.



위의 그림처럼 한 호의 원주각의 크기는 모두 같다.

(2) 중심각은 원주각의 두 배이다.



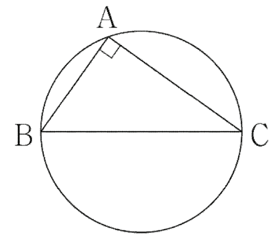
위의 그림처럼 원주각과 중심각 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$\angle\mathrm{BOA}=2\angle\mathrm{BCA}$, 즉 (중심각)$=2\times$(원주각)

위의 두 성질을 이용한 기출문제를 풀어보자.

B. 코사인법칙: 원의 성질(직각)

▶ 기출 문제 p.80

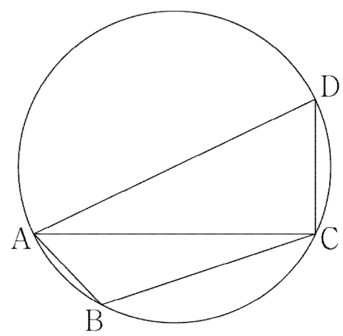


$\angle\mathrm{CAB}=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에 외접하는 원의 지름은 $\overline{\mathrm{BC}}$이다. 역으로, 지름이 $\overline{\mathrm{BC}}$인 원 위의 점 A에서 대하여 $\angle\mathrm{CAB}=90^\circ$ 이다.

이에 대한 문제를 풀어보자.

예제 1

$\overline{\mathrm{AD}}$가 지름인 원 위의 두 점 B, C에 대하여
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=5$이다.

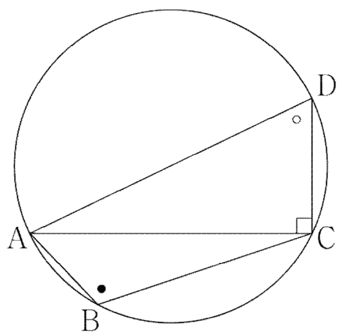


이때, 선분 DC의 길이를 구하시오.

❶ 코사인법칙
세 변의 길이가 주어진 $\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\cos(\angle\mathrm{B})$의 값을 구한다.
❷ 사인법칙
$\triangle\mathrm{ABC}$에서 한 각의 코사인값과 대응변의 길이를 알고 있으므로 R의 값을 구할 수 있다.

❶ ⇨ ❷ 의 순서대로 풀어나가면 된다.

풀이



(단, ●+○=180°)
선분 AD가 원의 지름이므로
$\angle ACD=90°$
사각형 ABCD가 원에 내접하므로
$\angle ABC+\angle CDA=180°$
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ABC)=\frac{(\sqrt{3})^2+4^2-5^2}{2\times\sqrt{3}\times4}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin(\angle ABC)=\frac{\sqrt{13}}{4}$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}=2R,\ 즉\ R=\frac{10}{\sqrt{13}}$$

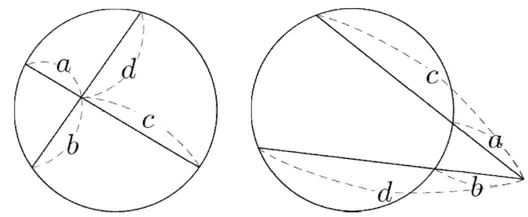
직각삼각형 ACD에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{DC}=\sqrt{\left(\frac{20}{\sqrt{13}}\right)^2-5^2}=\frac{5\sqrt{39}}{13}$$

답 $\frac{5\sqrt{39}}{13}$

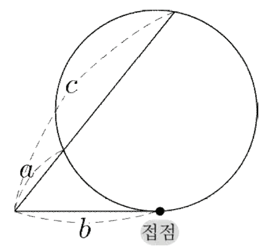
B. 코사인법칙: 할선 정리

▶ 기출 문제 p.81



위의 두 그림에서 아래의 등식이 항상 성립한다.
$ac=bd$

특히 $b=d$인 경우는 다음과 같다.

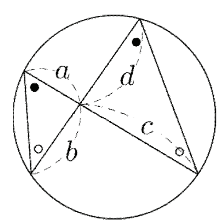


$ac=b^2$

위의 등식은 공식으로 기억해두면 쓸모가 많다.

맨 위의 왼쪽 그림만 증명해보자.

증명

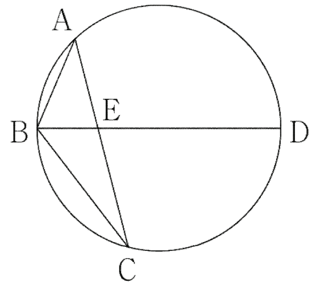


원주각의 성질에 의하여 위와 같이 네 개의 각의 크기가 결정된다.
이때, 왼쪽과 오른쪽의 두 삼각형은 서로 닮음이므로
$a:b=d:c$, 즉 $ac=bd$

할선 정리를 적용한 문제를 풀어보자.

예제 1

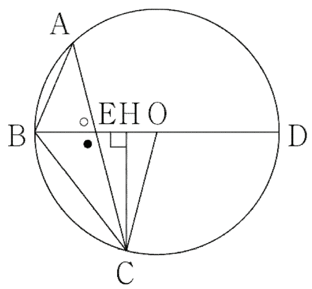
$\overline{BD}$가 지름인 원 위의 두 점 A, C에 대하여 두 선분 AC, BD가 만나는 점을 E라고 하자.



$\overline{BE}=2$, $\overline{ED}=6$, $\overline{AE}=3$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.

풀이

원의 중심을 O, 점 C에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 그리고 $\angle BEC=\theta(=\bullet)$로 두자.
이때, $\angle AEB=\pi-\theta(=\circ)$이다.



할선 정리에 의하여

$3\times\overline{EC}=2\times6$, 즉 $\overline{EC}=4$

세 변의 길이가 각각 4, 4, 2인 이등변삼각형 ECO에서 높이를 구하면

$\overline{CH}=\sqrt{15}$

직각삼각형 BCH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{BC}=2\sqrt{6}$

삼각형 BCE에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{2^2+4^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times2\times4}=-\frac{1}{4}$$

삼각형 ABE에서 코사인법칙에 의하여

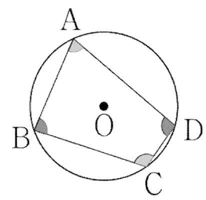
$$\overline{AB}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos(\pi-\theta)=10$$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{10}$

답 $\sqrt{10}$

B. 코사인법칙: 원에 내접하는 사각형

▶ 기출 문제 p.81



사각형 ABCD의 네 꼭짓점이 모두 한 원 위에 있을 때, 다음이 성립한다. (이때, O는 원의 중심이다.)

$\angle ABC+\angle CDA=180^\circ$,
$\angle BCD+\angle DAB=180^\circ$

맨 위의 등식만 증명해보자.

증명

$$\angle ABC+\angle CDA$$
$$=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle COA\ (\because \text{원주각과 중심각의 관계})$$
$$=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle COA)$$
$$=\frac{1}{2}\times360^\circ=180^\circ$$

이를 이용한 기출문제를 풀어보자.

C. 등비수열의 합: 기하급수적

▶ 기출 문제 p.101

• 기하급수적으로 커진다.

첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음의 부등식이 항상 성립한다.

모든 자연수 n에 대하여
$a_1+a_2+\cdots+a_n<a_{n+1}$

예를 들어
$a_1<a_2$ $(1<2)$
$a_1+a_2<a_3$ $(1+2<4)$
$a_1+a_2+a_3<a_4$ $(1+2+4<8)$
$\vdots$
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9<a_{10}$
$(1+2+4+\cdots+512<1024)$

첫째항이 양수이고 공비가 1 보다 큰 등비수열은 기하급수적으로 증가한다. 이를 위의 부등식과 연관하여 기억해둘 필요가 있다.

예제 1

$a_1=1$인 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라고 하자.
$\sum_{n=1}^{5} a_n=61$, $\sum_{n=1}^{5}|a_n|=121$일 때, r의 값을 구하시오.
(단, r은 정수이다.)

풀이

만약 r이 자연수이면
$$\sum_{n=1}^{5} a_n=\sum_{n=1}^{5}|a_n|$$
이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 r은 음의 정수이다.
만약 $r=-4$이면
$$\sum_{n=1}^{5}|a_n|=1+4+16+64+256>121$$
$|r|$이 5 이상이면 마찬가지의 이유로 $\sum_{n=1}^{5}|a_n|$의 값은 121 보다 크다.
따라서 $|r|$은 1 또는 2 또는 3이다.
$r=-1$: $\sum_{n=1}^{5}|a_n|=1+1+1+1+1=5<121$ (×)
$r=-2$: $\sum_{n=1}^{5}|a_n|=1+2+4+8+16=31<121$ (×)
따라서 $r=-3$이다.
$r=-3$: $\sum_{n=1}^{5}a_n=1-3+9-27+81=61$, (○)
$\sum_{n=1}^{5}|a_n|=1+3+9+27+81=121$ (○)
$\therefore$ $r=-3$

답 -3

C. 등차수열과 등비수열: 지수함수와 로그함수

▶ 기출 문제 p.102

이 주제에 대한 이론은 지수함수와 로그함수에서 다룬 바가 있다. 요약하면 다음과 같다.

(1) $\{a_n\}$이 등차수열이면 $\{2^{a_n}\}$은 등비수열이다.
(2) $\{b_n\}$이 등비수열이면 $\{\log_2 b_n\}$은 등차수열이다.

증명

(1)
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d로 두자.

$$\frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}}=2^{a_{n+1}-a_n}=2^d$$

수열 $\{2^{a_n}\}$은 공비가 2^d인 등비수열이다.

(2)
등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r로 두자.

$$\log_2 b_{n+1}-\log_2 b_n=\log_2 \frac{b_{n+1}}{b_n}=\log_2 r$$

수열 $\{\log_2 b_n\}$은 등차가 $\log_2 r$인 등차수열이다.

C. 시그마

▶ 기출 문제 p.103

자연수의 약수에 대한 문제를 풀어보자.

예제 1

자연수 n의 양의 약수의 개수를 $f(n)$, 자연수 n의 모든 양의 약수의 곱을 $g(n)$이라고 하자.
다음의 값을 구하시오.

(1) $f(12)$ (2) $g(12)$

(3) 12의 모든 양의 약수를 a_1, a_2, $\cdots$, a_6이라 할 때,

$$\sum_{k=1}^{6}\left\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\right\}$$

풀이

(1) $12=3^1\times 2^2$이므로

$\times$	2^0	2^1	2^2
3^0	$2^0 3^0$	$2^1 3^0$	$2^2 3^0$
3^1	$2^0 3^1$	$2^1 3^1$	$2^2 3^1$

$\therefore\ f(12)=2\times3=6$

(2) (1)의 표에서

$g(12)=2^0 3^0\times2^0 3^1\times2^1 3^0\times2^1 3^1\times2^2 3^0\times2^2 3^1$
$=2^{2\times(0+1+2)}\times3^{3\times(0+1)}=2^6\times3^3$

(3)

$a_1=2^0 3^0$, $a_2=2^1 3^0$, $a_3=2^2 3^0$,
$a_4=2^0 3^1$, $a_5=2^1 3^1$, $a_6=2^2 3^1$
로 두면

$f(a_1)=1\times1=1$, $f(a_2)=2\times1=2$,
$f(a_3)=3\times1=3$,
$f(a_4)=1\times2=2$, $f(a_5)=2\times2=4$,
$f(a_6)=3\times2=6$이므로

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{6}\left\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\right\}$$

$=(-1)^1\log1+(-1)^2\log2+(-1)^3\log4$
$+(-1)^2\log3+(-1)^4\log6+(-1)^6\log12$
$=0+\log2-\log4+\log3+\log6+\log12$
$=\log\dfrac{2\times3\times6\times12}{4}$

$=2\log 2+3\log 3$

답 풀이 참조

C. 시그마: 소거법(텔레스코핑)(1)

▶ 기출 문제 p.105

텔레스코핑이란 수열의 합에서 머리와 꼬리만 남는 것을 말한다.

예를 들어

$$\sum_{k=1}^{9}(a_{k+1}-a_k)$$

$$=(a_2-\boxed{a_1})+(a_3-a_2)+\cdots+(\boxed{a_{10}}-a_9)$$

$=a_{10}-a_1$ 즉, (꼬리)−(머리)

하나의 예를 더 들어보면.

$$\sum_{k=2}^{5}a_k-\sum_{k=1}^{4}a_k$$

$$=(a_2+a_3+a_4+a_5)-(a_1+a_2+a_3+a_4)$$

$=a_5-a_1$ 즉, (꼬리)−(머리)

C. 시그마: 소거법(부분분수)

▶ 기출 문제 p.112

부분분수의 합에 대한 몇 개의 예를 써보자.

(1) $\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{9}\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right\}$

$=\left(\boxed{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\boxed{\frac{1}{10}}\right)$

$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

(이때, 머리와 꼬리에 각각 하나씩 남는다.)

(2) $\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\boxed{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\boxed{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\frac{1}{8}\boxed{-\frac{1}{10}}\right)+\left(\frac{1}{9}\boxed{-\frac{1}{11}}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=\frac{36}{55}$

(이때, 머리와 꼬리에 각각 두 개씩 남는다. 맨 앞의 첫 번째와 세 번째, 맨 위의 첫 번째와 세 번째가 남는다. (대칭성))

(3) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하자.

$\sum_{n=1}^{9}\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}S_n}=\sum_{n=1}^{9}\frac{S_{n+1}-S_n}{S_{n+1}S_n}=\sum_{n=1}^{9}\left(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}\right)$

$=\left(\boxed{\frac{1}{S_1}}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_9}-\boxed{\frac{1}{S_{10}}}\right)$

$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{10}}$

C. 수열의 귀납적 정의: 규칙을 알 필요가 없는

▶ 기출 문제 p.114

아래 문제에서 주어진 수열은 규칙성을 갖고 있다.
만약 다섯 번째 항~일곱 번째 항의 값을 구하라고 하면 규칙성을 몰라도 되지만, 열 몇 번째 항의 값을 구하라고 하면 규칙성을 파악해야 한다. 이를 고려하여 아래 문제를 풀어보자.

예제 1

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의가 다음과 같을 때, a_5의 값은? [3점]

$a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=(-1)^n\frac{n}{n+2}a_n$

① $\frac{1}{20}$ ② $-\frac{1}{30}$ ③ $\frac{1}{30}$

④ $-\frac{1}{42}$ ⑤ $\frac{1}{42}$

※ 수열 $\{a_n\}$은 규칙성을 갖고 있지만, 다섯 번째 항을 구하기 위하여 이 규칙성을 반드시 파악할 수 있어야 하는 것은 아니다.

풀이

수열 $\{a_n\}$을 나열하자.
문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$a_1=\frac{1}{2}$

$a_2=(-1)^1\frac{1}{3}a_1=(-1)^1\frac{1}{3}\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$

$a_3=(-1)^2\frac{2}{4}a_2=(-1)^2\frac{2}{4}\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{12}$

$a_4=(-1)^3\frac{3}{5}a_3=(-1)^3\frac{3}{5}\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{20}$

$a_5=(-1)^4\frac{4}{6}a_4=(-1)^4\frac{4}{6}\left(\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{30}$

답 ③

C. 수열의 귀납적 정의: $a_{n+1}=pa_n+q$

▶ 기출 문제 p.116

예전 교육과정에서는 점화식

$a_{n+1}=pa_n+q$

의 일반항을 유도했지만, 현재 교육과정에서는 일반항을 유도하지 않는다.

다만 다음과 같이 특정한 항의 값을 구하는 문제는 출제가능하다.

예제 1

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+2$

일 때, a_8의 값을 구하시오.

풀이

$a_2=2a_1+2=2\times1+2,$

$a_3=2a_2+2=2^2\times1+2^2+2,$

$a_4=2a_3+2=2^3\times1+2^3+2^2+2,$

$\vdots$

$a_8=2^7\times1+2^7+2^6+\cdots+2=2^7+\dfrac{2(2^7-1)}{2-1}=382$

답 254

C. 수열의 귀납적 정의: 거미줄 도형

▶ 기출 문제 p.117

예제 1

자연수 n에 대하여 점 A_n이 x축 위에 있을 때, 점 A_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

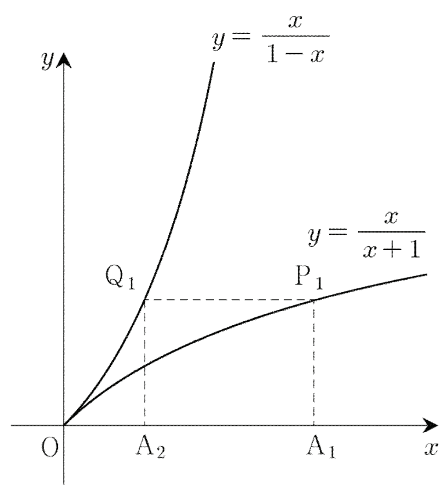
(가) 점 A_1의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.

(나) (1) 점 A_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\dfrac{x}{x+1}(x\geq0)$과 만나는 점을 P_n이라고 하자.

(2) 점 P_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\dfrac{x}{1-x}$ $(0\leq x<1)$과 만나는 점을 Q_n이라고 하자.

(3) 점 Q_n에서 x축에 내린 수선의 발을 A_{n+1}이라고 하자.

점 A_n의 x좌표가 $\dfrac{2}{37}$일 때, 자연수 n의 값은? [4점]



① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

풀이

점 A_n의 x좌표를 x_n으로 두자.

조건 (나)(1)에 의하여 점 P_n의 좌표는

$\mathrm{P}_n\left(x_n,\ \dfrac{x_n}{x_n+1}\right)$

조건 (나)(2)에 의하여 점 Q_n의 좌표는

$\mathrm{Q}_n\left(\dfrac{x_n}{2x_n+1},\ \dfrac{x_n}{x_n+1}\right)$

$\left(\because \dfrac{x}{1-x}=\dfrac{x_n}{x_n+1}\right.$을 풀면

$x=\dfrac{x_n}{2x_n+1}$을 얻는다.)

점 A_{n+1}의 좌표는

$A_{n+1}\left(\dfrac{x_n}{2x_n+1},\ 0\right)$

그런데 점 A_{n+1}의 x좌표는 x_{n+1}이므로

$x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2x_n+1}$ (단, $n \geq 1$)

수열 $\{x_n\}$을 나열하면

$\dfrac{2}{1},\ \dfrac{2}{5},\ \dfrac{2}{9},\ \dfrac{2}{13},\ \cdots,\ \dfrac{2}{4n-3},\ \cdots$

일반항을 추론하면

$x_n=\dfrac{2}{4n-3}$ (단, $n \geq 1$)

$\dfrac{2}{4n-3}=\dfrac{2}{37}$에서

$\therefore\ n=10$

답 ②

참고

다음과 같은 방법으로 수열 $\{x_n\}$의 귀납적 정의를 찾아도 좋다.

$f(x)=\dfrac{x}{x+1}(x \geq 0)$으로 두면

$f^{-1}(x)=\dfrac{x}{1-x}(0 \leq x < 1)$이다.

따라서 문제에서 주어진 두 함수는 서로 역함수 관계에 있다.

$f(x_n)=f^{-1}(x_{n+1})$에서 $x_{n+1}=(f \circ f)(x_n)$

$(f \circ f)(x)=\dfrac{x}{2x+1}$이므로

$x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2x_n+1}$ (단, $n \geq 1$)

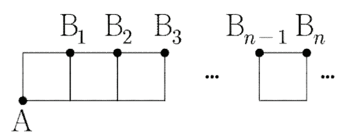
C. 수열의 귀납적 정의: 최단 거리로 가는 길의 개수

▶ 기출 문제 p.119

최단 거리로 가는 길의 개수를 구하는 문제는 확률과 통계의 경우의 수에서도 다룬다. 이 주제에서는 이를 수열의 귀납적 정의와 연관하여 생각해보자.

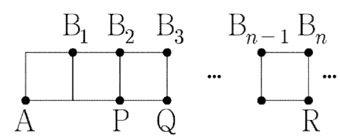
예제 1

한 변의 길이가 1인 정사각형을 붙여서 길을 만들자. 이때, A, B_1, B_2, $\cdots$, B_n, $\cdots$ 은 정사각형의 꼭짓점이다.



A 지점에서 B_n 지점까지 최단 거리로 가는 길의 개수를 a_n이라고 하자. 이때, 수열 $\{a_n\}$의 점화식과 일반항을 모두 유도하시오.

풀이



$a_1=(A \to B_1)=2,$

$a_2=\underbrace{(A \to B_1 \to B_2)}_{B_1\text{을 지난다.}}+\underbrace{A \to P \to B_2}_{B_1\text{을 지나지 않는다.}}=a_1 \times 1+1,$

$a_3=\underbrace{(A \to B_2 \to B_3)}_{B_2\text{를 지난다.}}+\underbrace{A \to Q \to B_3}_{B_2\text{를 지나지 않는다.}}=a_2 \times 1+1,$

$\vdots$

$a_n=\underbrace{(A \to B_{n-1} \to B_n)}_{B_{n-1}\text{을 지난다.}}+\underbrace{A \to R \to B_n}_{B_{n-1}\text{을 지나지 않는다.}}$

$=a_{n-1} \times 1+1,$

이상에서 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=2,\ a_n=a_{n-1}+1$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고, 공차가 1인 등차수열이다. 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=n+1$

답 풀이 참조

C. 수열의 귀납적 정의: 직선 위의 점

▶ 기출 문제 p.120

예제 1

좌표평면 위에 다음의 조건을 만족시키면서 점 A_0, A_1, A_2, $\cdots$을 찍자.

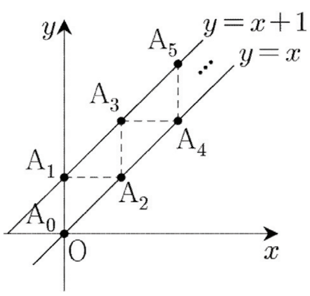
(가) 점 A_0은 원점이다.

(나) n이 홀수일 때, 점 A_{n+1}은 점 A_n을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점이다.
n이 짝수일 때, 점 A_{n+1}은 점 A_n을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점이다.

점 A_{10}의 좌표가 $(p,\ q)$이고, 점 A_k의 좌표가 $(7,\ 8)$일 때, $p+q+k$의 값을 구하시오.

풀이

문제에서 주어진 조건을 만족시키도록 점 A_0, A_1, A_2, $\cdots$을 찍으면 다음과 같다.



위의 그림처럼 점

A_0, A_2, A_4, $\cdots$

은 직선 $y=x$ 위에 있고, 점

A_1, A_3, A_5, $\cdots$

은 직선 $y=x+1$ 위에 있다.

두 점 A_0, A_1의 x좌표는 0,

두 점 A_2, A_3의 x좌표는 1,

두 점 A_4, A_5의 x좌표는 2,

$\vdots$

이므로 두 점 A_{2n}, A_{2n+1}의 x좌표는 n이다.

따라서 A_{10}의 좌표는 $(5,\ 5)$이다. (이때, 점 A_{10}은 직선 $y=x$ 위에 있다.)

x좌표가 7인 두 점은 $\mathrm{A}_{14}(7,\ 7)$, $\mathrm{A}_{15}(7,\ 8)$이다.

따라서 $k=15$

$\therefore\ p+q+k=5+5+15=25$

답 25

C. 수열의 귀납적 정의: 수형도

▶ 기출 문제 p.121

수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_p의 값이 주어졌을 때,

(1) a_{p-1}, a_{p-2}, $\cdots$, a_2, a_1의 값을 결정하거나

(2) a_{p+1}, a_{p+2}, $\cdots$ 의 값을 결정해야 하는 경우가 있다.

(각 항의 값이 하나로 결정되지 않을 수 있다.) 이때, 수형도나 표를 이용하여 각 항의 값을 정리하면 편하다.

예제 1

수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n-5 & (a_n \geq 6) \\ a_n+1 & (a_n < 6) \end{cases}$$

$a_5=4$일 때, a_1의 값을 구하시오.

풀이

$a_4 \geq 6$: $a_5=2a_4-5=4$, $a_4=\dfrac{9}{2}(<6)$ $(\times)$

$a_4 < 6$: $a_5=a_4+1=4$, $a_4=3(<6)$ $(\bigcirc)$ $\quad\cdots$㉠

㉠에 대하여

$a_3 \geq 6$: $a_4=2a_3-5=3$, $a_3=4(<6)$ $(\times)$

$a_3 < 6$: $a_4=a_3+1=3$, $a_3=2(<6)$ $(\bigcirc)$ $\quad\cdots$㉡

㉡에 대하여

$a_2 \geq 6$: $a_3=2a_2-5=2$, $a_2=\dfrac{7}{2}(<6)$ $(\times)$

$a_2 < 6$: $a_3=a_2+1=2$, $a_2=1(<6)$ $(\bigcirc)$ $\quad\cdots$㉢

㉢에 대하여

$a_1 \geq 6$: $a_2=2a_1-5=1$, $a_1=3(<6)$ $(\times)$

$a_1 < 6$: $a_2=a_1+1=1$, $a_1=0(<6)$ $(\bigcirc)$

따라서 $a_1=0$이다.

답 0

C. 수열의 귀납적 정의: 그래프

▶ 기출 문제 p.122

예제 1

수열 $\{a_n\}$에 대하여

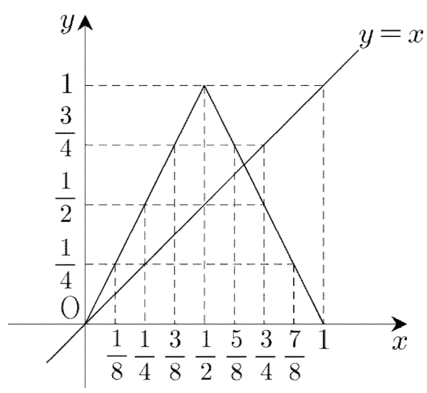
$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & \left(0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{2}\right) \\ -2a_n+2 & \left(\dfrac{1}{2} < a_n \leq 1\right) \end{cases}$$

이 성립한다. $a_3=\dfrac{1}{2}$일 때, a_1으로 가능한 모든 값의 합을 구하시오.

풀이

함수 $f(x)=\begin{cases} 2x & \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}\right) \\ -2x+2 & \left(\dfrac{1}{2} < x \leq 1\right) \end{cases}$의 그래프와

직선 $y=x$를 이용하여 문제를 해결하자.



$f(x)=\dfrac{1}{2}$을 풀면 $x=\dfrac{1}{4}$ 또는 $x=\dfrac{3}{4}$

즉, $a_2=\dfrac{1}{4}$ 또는 $a_2=\dfrac{3}{4}$이다.

마찬가지의 방법으로

$a_2=\dfrac{1}{4}$: $a_1=\dfrac{1}{8}$, $\dfrac{7}{8}$

$a_2=\dfrac{3}{4}$: $a_1=\dfrac{3}{8}$, $\dfrac{5}{8}$

따라서 구하는 값은

$\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{5}{8}+\dfrac{7}{8}=2$

답 2

C. 수열의 귀납적 정의: 군수열(마디가 등차)

▶ 기출 문제 p.123

모든 자연수는 $p(\geq 2)$로 나눈 나머지가
0인 수,
1인 수,
2인 수,
⋮
$p-1$인 수 중에 하나이다.

예를 들어 $p=2$이면 2로 나눈 나머지가
0인 수: 2, 4, 6, 8, ⋯
1인 수: 1, 3, 5, 7, ⋯

$a_n=(-1)^n$일 때, 수열 $\{a_n\}$을 나열하면
$(-1,\ 1),\ (-1,\ 1),\ (-1,\ 1),\ (-1,\ 1),\ \cdots$
$(a_1,\ a_2),\ (a_3,\ a_4),\ (a_5,\ a_6),\ (a_7,\ a_8),\ \cdots$
수열 $\{a_n\}$의 규칙성을 짝수항, 홀수항으로 나누어 파악할 수 있다. 이때,
$a_{\boxed{1}},\ a_{\boxed{3}},\ a_{\boxed{5}},\ a_{\boxed{7}},\ \cdots$에서 1, 3, 5, 7, ⋯은 2로 나눈 나머지가 1인 수이고,
$a_{\boxed{2}},\ a_{\boxed{4}},\ a_{\boxed{6}},\ a_{\boxed{8}},\ \cdots$에서 2, 4, 6, 8, ⋯은 2로 나눈 나머지가 0인 수이다.

예를 들어 $p=3$이면 3으로 나눈 나머지가
0인 수: 3, 6, 9, ⋯
1인 수: 1, 4, 7, ⋯
2인 수: 2, 5, 8, ⋯

$p=3$인 경우에 대한 문제를 풀어보자.

예제 1

$x^3=1$의 한 허근을 ω라고 하자.
$a_n=(\omega^n$의 실수부$)$
일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오.

풀이

$x^3=1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0$
$\Leftrightarrow x^2+x+1=0\ (x\neq 1)$
$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}(=\omega)$
$\omega^2=-\omega-1=\dfrac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}$,
$\omega^3=1$,
$\omega^4=\omega^3\omega=\omega$,
⋮
수열 $\{a_n\}$을 나열하면
$-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 1,\ -\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 1,\ \cdots$
$\therefore\ \sum_{k=1}^{10} a_k=\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+1\right)\times 3-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

답 $-\dfrac{1}{2}$

위의 문제에서
$a_1=a_4=a_7=\ \cdots\ =a_{3k-2}$: 1, 4, 7, ⋯은 3으로 나눈 나머지가 1인 수 들이다.
$a_2=a_5=a_8=\ \cdots\ =a_{3k-1}$: 2, 5, 8, ⋯은 3으로 나눈 나머지가 2인 수 들이다.
$a_3=a_6=a_9=\ \cdots\ =a_{3k}$: 3, 6, 9, ⋯은 3으로 나눈 나머지가 0인 수 들이다.

C. 수열의 귀납적 정의: 군수열(마디가 등비)(1)

▶ 기출 문제 p.123

예를 들어 모든 자연수는

$k\times2^p$ (k는 음이 아닌 홀수, p는 음이 아닌 정수)

의 꼴로 표현이 가능하다.

$p=0$: 1, 3, 5, 7, 9, $\cdots$

$p=1$: 2, 6, 10, 14, 18, $\cdots$

$p=2$: 4, 12, 20, 28, 36, $\cdots$

$\vdots$

예를 들어 수열 $\{a_n\}$의 규칙성이

a_1, a_2, a_4, a_8, a_{16}, $\cdots$, $a_{2^{n-1}}$, $\cdots$

을 기준으로 나타나는 경우도 있다.

위의 경우에는

$(\boxed{a_{2^0}})$, $(\boxed{a_{2^1}}$, $a_{2^1+1})$, $(\boxed{a_{2^2}}$, a_{2^2+1}, $\cdots$, $a_{2^3-1})$, $(\boxed{a_{2^3}}$, a_{2^3+1}, $\cdots$, $a_{2^4-1})$, $\cdots$

와 같은 군수열을 만들고, $\boxed{}$ 안의 수열

a_{2^0}, a_{2^1}, a_{2^2}, a_{2^3}, $\cdots$, $a_{2^{n-1}}$, $\cdots$

즉, a_1, a_2, a_4, a_8, $\cdots$, $a_{2^{n-1}}$, $\cdots$

의 규칙성을 먼저 파악한다. 그리고 나머지 항들의 값을 구하면 된다.

※ 군수열은 몇 개의 임의의 항을 차례로 묶어 군으로 나눈 수열을 말한다. 예를 들어

(a_1), $(a_2,\ a_3)$, $(a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7)$, $(a_8,\ a_9,\ \cdots,\ a_{15})$, $\cdots$

는 군수열이다.

예제 1

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n}=1+a_n,\quad a_{2n+1}=\frac{1}{a_{2n}}$$

을 만족시킨다. $a_k=\dfrac{1}{7}$일 때, 자연수 k의 값을 구하시오.

[4점]

풀이

문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$a_1=1$

$a_2=1+a_1=2$

$a_4=1+a_2=3$

$a_8=1+a_4=4$

$a_{16}=1+a_8=5$

$a_{32}=1+a_{16}=6$

$a_{64}=1+a_{32}=7$

그런데

$a_{65}=\dfrac{1}{a_{64}}=\dfrac{1}{7}$

이므로

$\therefore\ k=65$

답 65

※ a_1, a_2, a_3, a_4, $\cdots$을 모두 나열해서 규칙을 찾는 문제가 아니다.

a_{2^0}, a_{2^1}, a_{2^2}, a_{2^3}, $\cdots$

을 나열하여 규칙성을 찾고 나서 나머지 항들의 값을 구하면 된다.

예제 2

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_n-1$

(나) $a_{2n+1}=a_n+1$

$a_7=3$일 때, $\sum_{n=1}^{31} a_n$의 값을 구하시오.

풀이1

$a_7=a_3+1=3(\because$ (나)$)$, $a_3=2$

$a_3=a_1+1=2(\because$ (나)$)$, $a_1=1$

$a_2=a_1-1=0(\because$ (가)$)$

마찬가지의 방법으로 수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$1(a_1)$,

⇦ 합이 1 (항의 개수는 2^0)

$0(a_2)$, 2,

⇦ 합이 2 (항의 개수는 2^1)

$-1(a_4)$, 1, 1, 3,

⇦ 합이 4 (항의 개수는 2^2)

$-2(a_8)$, 0, 0, 2, 0, 2, 2, 4,

⇦ 합이 8 (항의 개수는 2^3)

$-3(a_{16})$, -1, -1, 1, -1, 1, 1, 3, -1, 1, 1, 3, 1, 3, 3, $5(a_{31})$

⇦ 합이 16 (항의 개수는 2^4)

$\vdots$

$\therefore \sum_{n=1}^{31} a_n=1+2+4+8+16=31$

답 31

풀이2

$a_7=a_3+1=3(\because$ (나)$)$, $a_3=2$

$a_3=a_1+1=2(\because$ (나)$)$, $a_1=1$

$a_2=a_1-1=0(\because$ (가)$)$

(가)+(나): $a_{2n}+a_{2n+1}=2a_n$

$a_2+a_3=2a_1$, $\cdots$ ㉠

$a_4+a_5=2a_2$, $\cdots$ ㉡

$a_6+a_7=2a_3$, $\cdots$ ㉢

㉡+㉢: $a_4+a_5+a_6+a_7=2(a_2+a_3)=2^2a_1$ ($\because$ ㉠)

다음과 같이 추론할 수 있다.

$a_1=a_1$,

$a_1+(a_2+a_3)=a_1+2a_1$,

$a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7)=a_1+2a_1+2^2a_1$,

$\vdots$

$a_1+(a_2+a_3)+(a_4+\cdots+a_7)+(a_8+\cdots+a_{15})$
$+(a_{16}+\cdots+a_{31})$

$=a_1+2a_1+2^2a_1+2^3a_1+2^4a_1$

$=1+2+4+8+16=31$

답 31

C. 수열의 귀납적 정의: 나머지가 같은 수

▶ 기출 문제 p.126

예를 들어 자연수를 2로 나눈 나머지는 0 또는 1이다.

2로 나눈 나머지가 1인 자연수: 1, 3, 5, 7, 9, $\cdots$
2로 나눈 나머지가 0인 자연수: 2, 4, 6, 8, 10, $\cdots$

수열 $\{a_n\}$에 대하여 홀수항의(a_1, a_3, a_5, $\cdots$) 규칙과 짝수항의(a_2, a_4, a_6, $\cdots$) 규칙이 다를 수 있으므로, 이를 구별할 수 있어야 한다.

예를 들어 자연수를 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1 또는 2이다.

3으로 나눈 나머지가 1인 자연수: 1, 4, 7, 10, 13, $\cdots$
3으로 나눈 나머지가 2인 자연수: 2, 5, 8, 11, 14, $\cdots$
3으로 나눈 나머지가 0인 자연수: 3, 6, 9, 12, 15, $\cdots$

수열 $\{a_n\}$에 대하여
$3n-2$번째 항: a_1, a_4, a_7, $\cdots$
$3n-1$번째 항: a_2, a_5, a_8, $\cdots$
$3n$번째 항: a_3, a_6, a_9, $\cdots$
의 규칙이 다를 수 있으므로, 이를 구별할 수 있어야 한다.

이제 아래의 문제를 풀어보자.

예제 1

2의 배수와 5의 배수를 제외한 자연수를 가장 작은 수부터 크기 순서대로 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라고 하자. a_{50}을 구하시오.

풀이
자연수
1, 2, 3, 4, $\cdots$
을 쓰고, 2의 배수와 5의 배수를 제외하자.
(단, ○는 선택된 수, ●는 지워진 수)

① ❷ ③ ❹ ❺ ❻ ⑦ ❽ ⑨ ❿
⑪ ⓬ ⑬ ⓮ ⓯ ⓰ ⑰ ⓲ ⑲ ⓴
$\vdots$

수열 $\{a_n\}$을 나열하면
(1, 3, 7, 9), (11, 13, 17, 19), $\cdots$
$4n-3$번째 항: 1, 11, 21, $\cdots$
$4n-2$번째 항: 3, 13, 23, $\cdots$
$4n-1$번째 항: 7, 17, 27, $\cdots$
$4n$번째 항: 9, 19, 29, $\cdots$
$50=4\times13-2$이므로 a_{50}은 수열
3, 13, 23, 33, $\cdots$
의 13번째 항이다.
등차수열의 일반항의 공식에 의하여
$\therefore\ a_{50}=3+10\times12=123$

답 123

C. 수열의 귀납적 정의: 주기성

▶ 기출 문제 p.130

예를 들어 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+3}=a_n$

이면 다음이 성립한다.

$a_1=a_4=a_7=\cdots=a_{3k-2}$

$a_2=a_5=a_8=\cdots=a_{3k-1}$

$a_3=a_6=a_9=\cdots=a_{3k}$

(단, k는 자연수)

즉, 수열 $\{a_n\}$을 나열하면 세 수 a_1, a_2, a_3이 반복된다. 이때, 이 수열의 주기는 3이다.

예제 1

모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이다. 각각의 경우에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 나열해보자.

(1) $a_1=0$, $a_2=1$

(2) $a_1=1$, $a_2=5$

(3) $a_4=4$ (단, 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수)

풀이

(1) $a_1=0$, $a_2=1$인 경우

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

0, 1, 1, (2, 1, 3, 4), (2, 1, 3, 4), $\cdots$

위와 같이 2, 1, 3, 4(짝, 홀, 홀, 짝)이 반복된다.

(2) $a_1=1$, $a_2=5$인 경우

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

1, 5, (6, 3, 9, 12), (6, 3, 9, 12), $\cdots$

위와 같이 6, 3, 9, 12(짝, 홀, 홀, 짝)이 반복된다.

(3) $a_4=4$인 경우 (단, 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수)

- a_3이 짝수: $a_3=2a_4=8$

만약 a_2가 짝수이면 $a_2=2a_3=16$이고,

a_2가 홀수이면 $a_1+a_2=8$에서

$(a_1,\ a_2)=(1,\ 7)$, $(3,\ 5)$, $(5,\ 3)$, $(7,\ 1)$

수열 $\{a_n\}$을 나열해보면

a_1, 16, 8, (4, 2, 1, 3), 4, $\cdots$

1, 7, 8, (4, 2, 1, 3), 4, $\cdots$

3, 5, 8, (4, 2, 1, 3), 4, $\cdots$

5, 3, 8, (4, 2, 1, 3), 4, $\cdots$

7, 1, 8, (4, 2, 1, 3), 4, $\cdots$

- a_3이 홀수: $a_2+a_3=4$에서

$(a_2,\ a_3)=(1,\ 3)$ 또는 $(3,\ 1)$

수열 $\{a_n\}$을 나열해보면

a_1, 1, 3, (4, 2, 1, 3), 4, $\cdots$

a_1, 3, 1, (4, 2, 1, 3), 4, $\cdots$

답 풀이 참조

C. 수열: 발견적 추론

▶ 기출 문제 p.134

다음과 같은 예를 생각해보자. (수식의 기하적인 해석

$n^2(=n\times n)$을 한 변의 길이가 n인 정사각형의 넓이로 해석하면, 다음과 같은 그림을 얻는다.
(단, ○, ●은 각각 한 변의 길이가 1인 정사각형을 의미한다고 하자.)

○●○●○
●●○●○
○○○●○ ⋯
●●●●○
○○○○○
  ⋮   ⋱

$\boxed{1}=1^2$

$\boxed{1}+\boxed{3}=2^2$

$\boxed{1}+\boxed{3}+\boxed{5}=3^2$

$\boxed{1}+\boxed{3}+\boxed{5}+\boxed{7}=4^2$

$\boxed{1}+\boxed{3}+\boxed{5}+\boxed{7}+\boxed{9}=5^2$

⋮

이상에서 다음의 등식이 성립함을 추론할 수 있다.

모든 자연수 n에 대하여
$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

위의 예처럼 수에 대한 관찰과 기하적 관찰을 함께 생각할 수 있어야 한다.

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

A 지수함수와 로그함수

1	①	2	②	3	①	4	④	5	④
6	②	7	①	8	①	9	⑤	10	③
11	6	12	①	13	7	14	①	15	②
16	②	17	①	18	②	19	②	20	③
21	③	22	32	23	④	24	12	25	15
26	56	27	③	28	58	29	④	30	③
31	15	32	②	33	④	34	25	35	④
36	④	37	①	38	20	39	75	40	②
41	②	42	①	43	30	44	④	45	16
46	③	47	24	48	⑤	49	④	50	①
51	259	52	①	53	13	54	426	55	④
56	25	57	78	58	②	59	31	60	84
61	③	62	②	63	①	64	③	65	①
66	②	67	③	68	②	69	①	70	③
71	④	72	220	73	②	74	③	75	①
76	②	77	18	78	①	79	④	80	④
81	④	82	①	83	20	84	④	85	⑤
86	②	87	110	88	①	89	⑤	90	③
91	④	92	25	93	③	94	②	95	③
96	⑤	97	③	98	33	99	10	100	④
101	④	102	⑤	103	②	104	53	105	②
106	③	107	③	108	⑤	109	②	110	⑤
111	③	112	⑤	113	④	114	②	115	36
116	③	117	③	118	13	119	①	120	16
121	18	122	③	123	①	124	⑤	125	⑤
126	①	127	10	128	④	129	③	130	⑤
131	⑤	132	①	133	③	134	③	135	192
136	③	137	③	138	②	139	②	140	③
141	④	142	④	143	⑤	144	⑤	145	④
146	④	147	10	148	13	149	17	150	25
151	128	152	③	153	②	154	⑤	155	①
156	③	157	18	158	15	159	④	160	1
161	16	162	③	163	20	164	12	165	③
166	⑤	167	27	168	4	169	16	170	④
171	②	172	①	173	16	174	③	175	①
176	14	177	③	178	⑤	179	81	180	②
181	①	182	15	183	③	184	②	185	80
186	⑤	187	②	188	②	189	39	190	196
191	86	192	63	193	79	194	392	195	15
196	573	197	120	198	①	199	12	200	②

201	①

B 삼각함수

1	②	2	①	3	④	4	②	5	④
6	①	7	④	8	④	9	14	10	②
11	2.5	12	④	13	②	14	②	15	④
16	③	17	③	18	③	19	8	20	①
21	②	22	②	23	③	24	④	25	②
26	③	27	②	28	①	29	③	30	11
31	④	32	①	33	7	34	②	35	③
36	④	37	6	38	④	39	③	40	②
41	④	42	③	43	30	44	⑤	45	②
46	③	47	⑤	48	32	49	①	50	④
51	③	52	⑤	53	21	54	②	55	①
56	⑤	57	④	58	③	59	⑤	60	②
61	②	62	①	63	①	64	98	65	⑤
66	①	67	26	68	②	69	③	70	②

C 수열

1	①	2	3	3	10	4	②	5	③
6	⑤	7	⑤	8	⑤	9	③	10	15
11	32	12	③	13	⑤	14	④	15	15
16	③	17	②	18	②	19	①	20	①
21	②	22	⑤	23	150	24	①	25	250
26	①	27	②	28	10	29	88	30	④
31	13	32	①	33	①	34	③	35	③
36	5	37	④	38	②	39	25	40	③
41	②	42	①	43	①	44	7	45	16
46	196	47	①	48	④	49	58	50	39
51	20	52	①	53	36	54	③	55	①
56	⑤	57	46	58	⑤	59	128	60	④
61	①	62	④	63	①	64	③	65	10
66	②	67	15	68	64	69	25	70	108
71	⑤	72	①	73	③	74	②	75	④
76	64	77	162	78	14	79	②	80	10
81	④	82	63	83	9	84	678	85	117
86	③	87	35	88	②	89	③	90	③
91	③	92	④	93	14	94	①	95	12
96	9	97	①	98	⑤	99	①	100	④
101	47	102	⑤	103	④	104	②	105	①
106	160	107	④	108	②	109	⑤	110	①
111	15	112	④	113	⑤	114	110	115	91
116	11	117	③	118	①	119	④	120	④
121	①	122	⑤	123	8	124	19	125	②
126	21	127	⑤	128	⑤	129	②	130	④
131	9	132	④	133	①	134	①	135	①
136	103	137	④	138	②	139	②	140	8
141	④	142	13	143	①	144	256	145	156
146	②	147	④	148	②	149	513	150	⑤
151	21	152	①	153	④	154	255	155	④
156	23	157	①	158	①	159	③	160	②
161	②	162	③	163	①	164	①	165	①
166	③	167	④	168	②	169	63	170	②
171	②	172	②	173	63	174	31	175	④
176	①	177	③	178	④	179	39	180	⑤
181	①	182	③	183	30	184	⑤	185	④
186	①	187	64	188	④	189	⑤	190	①
191	①	192	33	193	③	194	⑤	195	11
196	④	197	332	198	②	199	①	200	⑤

201	8	202	⑤	203	②	204	④	205	②
206	⑤	207	100	208	①	209	④	210	②
211	③	212	②	213	②	214	⑤	215	⑤
216	④								

해설 목차

수학 I

자.

점 P는 두 곡선 $y=-a^x$, $y=\log_{\frac{1}{a}}x$와 직선 $y=-x$ 위에 있으므로

(점 P의 y좌표)

$=-a^t=\log_{\frac{1}{a}}t=-t$ ⋯㉠

곡선 $y=-a^x$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 곡선 $y=\log_{\frac{1}{a}}x$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 직선 $y=-x$의 기울기와 같으므로

(점 P에서의 미분계수)

$=-a^t\ln a=-\dfrac{1}{t\ln a}=-1$ ⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a=e^{\frac{1}{e}}$, $t=e$

[참고4] 교육과정 외 (이과생을 위한 설명)

보기 ㄷ에서 주어진 두 함수의 그래프가 접할 때의 a, k의 값을 구하자.

두 함수 $y=ka^x$, $y=\log_a x$의 그래프의 접점을 P, 점 P의 x좌표를 t라고 하자. 그리고 함수 $y=ka^x$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 기울기를 m이라고 하자. (단, $m>0$)

점 P는 두 곡선 $y=ka^x$, $y=\log_a x$ 위에 있으므로

$ka^t=\log_a t$ ⋯㉠

곡선 $y=ka^x$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 각각 m이므로

$ka^t\ln a=\dfrac{1}{t\ln a}=m$ ⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$t=e^m$, $a=e^{\frac{1}{m\times e^m}}$, $k=\dfrac{m}{a^{e^m}\ln a}$

점 P의 좌표는

$\mathrm{P}\left(e^m,\ \dfrac{m}{\ln a}\right)$

A135 | 답 192

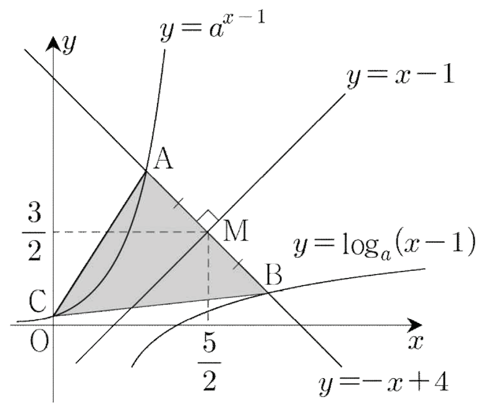
[풀이]

문제에서 주어진 두 곡선을 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시키면 두 곡선

$y=a^x$, $y=\log_a x$

와 각각 일치한다. 그런데 이 두 곡선은 서로 역함수 관계이므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 문제에서 주어진 두 곡선은 직선 $y=x-1$에 대하여 서로 대칭이다. (아래 그림)



위의 그림에서 두 점 A, B는 직선 $y=x-1$에 대하여 서로 대칭이다. 그리고 이 두 점은 두 직선 $y=x-1$, $y=-x+4$의 교점 $\mathrm{M}\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$에 대하여 서로 대칭이기도 하다.

$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{2}$이고, 직선 AB의 기울기가 -1이므로 점 M을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 점 $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$이고, 점 M을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시키면 점 $\mathrm{B}\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$이다.

곡선 $y=a^{x-1}$은 점 A를 지나므로

$\dfrac{5}{2}=a^{\frac{1}{2}}$, $a=\dfrac{25}{4}$

곡선 $y=\left(\dfrac{25}{4}\right)^{x-1}$의 y절편은 $\dfrac{4}{25}$이므로

$\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{4}{25}\right)$

$\therefore\ S=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times$(점 C에서 직선 AB까지의 거리)

$=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{4-\frac{4}{25}}{\sqrt{2}}=\dfrac{96}{25}$

$\therefore\ 50S=192$

답 192

A136 | 답 ③

[풀이] ★

$0<x\le1$일 때, $|\log_2 x|=-\log_2 x=\log_{\frac{1}{2}}x$

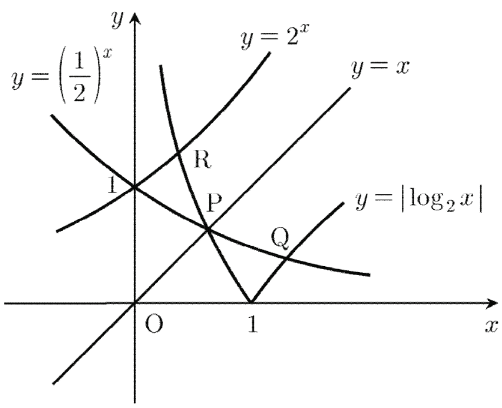
$x>1$일 때, $|\log_2 x|=\log_2 x$

함수 $y=|\log_2 x|$의 방정식은 다음과 같다.

$$y=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x & (0<x\le 1)\\ \log_2 x & (x>1)\end{cases}$$

지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$와 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$는 서로 역함수이다. 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 점 P는 직선 $y=x$ 위에 있다.

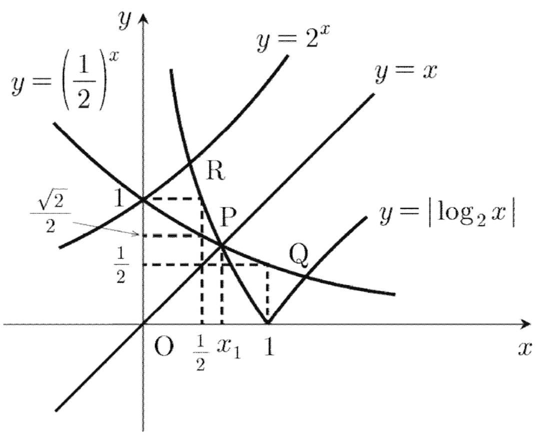
또한 지수함수 $y=2^x$와 로그함수 $y=\log_2 x$는 서로 역함수이다. 두 곡선 $y=\log_2 x\left(y=\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$, $y=2^x\left(y=\log_{\frac{1}{2}}x\right)$는 직선 $y=x(y=x)$에 대하여 서로 대칭이므로 두 점 Q, R은 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.



$x_2=y_3$, $y_2=x_3$ $\cdots(*)$

▸ ㄱ. (참)

곡선 $y=|\log_2 x|$는 두 점 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, $(1,\ 0)$을 지나고, 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$는 두 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$을 지난다.



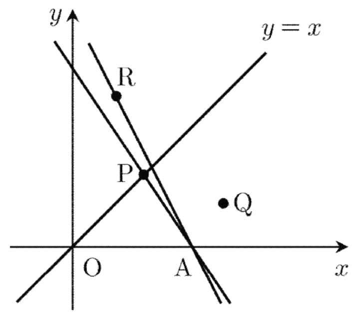
위의 그림에서 $\frac{1}{2}<x_1<1$

▸ ㄴ. (참)

$x_2y_2-x_3y_3=x_2y_2-y_2x_2=0$ $(\because(*))$

▸ ㄷ. (거짓)

점 $A(1,\ 0)$라고 하자.



(직선 AP의 기울기)$=\frac{y_1}{x_1-1}$

(직선 AR의 기울기)$=\frac{y_3}{x_3-1}=\frac{x_2}{y_2-1}$ $(\because(*))$

위의 그림에서

(직선 AR의 기울기)$<$(직선 AP의 기울기)

$$\frac{x_2}{y_2-1}<\frac{y_1}{x_1-1}$$

양변에 양수 $(x_1-1)(y_2-1)$을 곱하면

$x_2(x_1-1)<y_1(y_2-1)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

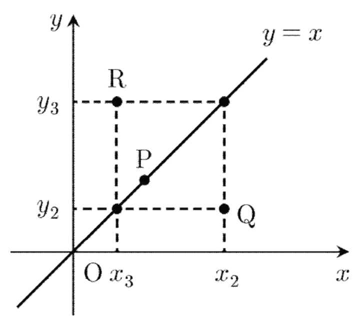
답 ③

[참고1]

보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 보일 수도 있다.

▸ ㄴ. (참)

두 점 Q, R은 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.



위의 그림에서 서로 다른 세 점

$(0,\ 0)$, $(x_3,\ y_2)$, $(x_2,\ y_3)$이 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$$\frac{y_2-0}{x_3-0}=\frac{y_3-0}{x_2-0}\text{ 즉, }\frac{y_2}{x_3}=\frac{y_3}{x_2}$$

분수식을 정리하면

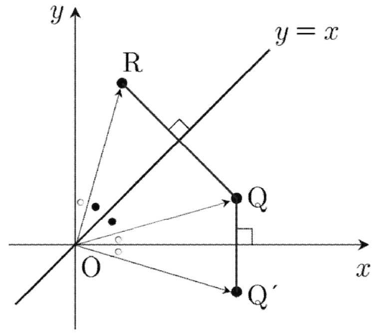
$x_2y_2-x_3y_3=0$

[참고2] 교육과정 외 (이과생을 위한 설명)

벡터의 내적을 이용하여 보기 ㄴ이 참임을 보일 수도 있다.

▸ ㄴ. (참)

점 Q를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q′이라고 하자.



위의 그림에서 두 벡터 $\overrightarrow{OQ'}$, $\overrightarrow{OR}$이 서로 수직이므로

$\overrightarrow{OQ'} \cdot \overrightarrow{OR} = (x_2, \ -y_2) \cdot (x_3, \ y_3)$

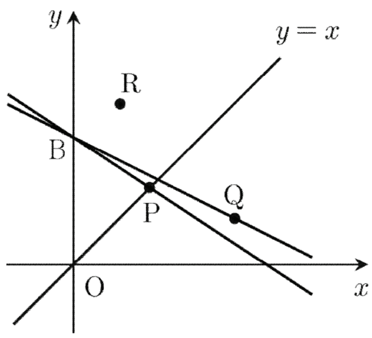
$= x_2 x_3 - y_2 y_3 = x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0$

[참고3]

보기 ㄷ이 거짓임을 다음과 같이 보일 수도 있다.

▸ ㄷ. (거짓)

점 $\mathrm{B}(0, \ 1)$이라고 하자.



$(\text{직선 BP의 기울기}) = \dfrac{y_1 - 1}{x_1} = \dfrac{x_1 - 1}{y_1}$

($\because$ 점 P는 직선 $y = x$ 위의 점이다.)

$(\text{직선 BQ의 기울기}) = \dfrac{y_2 - 1}{x_2}$

위의 그림에서

(직선 BP의 기울기)<(직선 BQ의 기울기)

$\dfrac{x_1 - 1}{y_1} < \dfrac{y_2 - 1}{x_2}$

양변에 양수 $x_2 y_1$을 곱하면

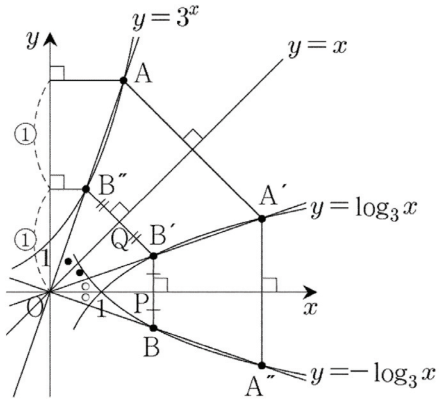
$x_2(x_1 - 1) < y_1(y_2 - 1)$

A137 | 답 ③

[풀이]

세 곡선 $y = 3^x$, $y = \log_3 x$, $y = -\log_3 x$와 직선 $y = x$를 한 평면 위에 나타내면 다음과 같다.

이때, 두 곡선 $y = 3^x$, $y = \log_3 x$는 직선 $y = x$에 대하여 서로 대칭이고, 두 곡선 $y = \log_3 x$, $y = -\log_3 x$는 x축에 대하여 서로 대칭이다.



(단, $\bullet + \circ = 45^\circ$)

점 A를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 A′를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A″라고 하자. 이때, 점 A′는 곡선 $y = \log_3 x$ 위에 있고, 점 A″는 곡선 $y = -\log_3 x$ 위에 있다.

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′, 점 B′를 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 점을 B″라고 하자. 이때, 점 B′는 곡선 $y = \log_3 x$ 위에 있고, 점 B″는 곡선 $y = 3^x$ 위에 있다.

선분 B″B′가 직선 $y = x$와 만나는 점을 Q, 선분 B′B가 x축과 만나는 점을 P라고 하자.

두 직각삼각형 BOP, B′OP는 SAS합동이므로

$\angle \mathrm{BOP} = \angle \mathrm{B'OP} (= \circ)$

두 직각삼각형 B′OQ, B″OQ는 SAS합동이므로

$\angle \mathrm{B'OQ} = \angle \mathrm{B''OQ} (= \bullet)$

위의 그림에서

$\bullet + \circ = 45^\circ$ 이므로

$\angle \mathrm{B''OB} = \bullet + \bullet + \circ + \circ = 90^\circ$

즉, 점 B″는 점 O를 지나고 직선 OB에 수직인 직선 위에 있다. 그런데 조건 (나)에 의하여 점 A도 점 O를 지나고 직선 OB에 수직인 직선 위에 있으므로 세 점 O, B″, A는 한 직선 위에 있다. (그러므로 세 점 O, B′, A′도 한 직선 위에 있고, 세 점 O, B, A″도 한 직선 위에 있다.)

점 A의 좌표를 $(t, \ 3^t)$로 두면

점 B″의 좌표는 $\left(\dfrac{t}{2}, \ 3^{\frac{t}{2}}\right)$이다.

조건 (가)에 의하여

(점 A의 y좌표)$= 2 \times$(점 B″의 y좌표)

이므로

$3^t = 2 \times 3^{\frac{t}{2}}$, $3^{\frac{t}{2}} = 2$, $\dfrac{t}{2} = \log_3 2$, $t = 2\log_3 2$

점 A의 좌표는 $(2\log_3 2, \ 4)$이므로

직선 OA의 기울기는

$$\frac{4}{2\log_3 2} = 2\log_2 3$$

답 ③

A138 | 답 ②

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$(a,\ b) \in G$에서 $b = 5^a$

유리수 지수의 정의에 의하여

$\sqrt{b} = 5^{\frac{a}{2}}$이므로 $\left(\frac{a}{2},\ \sqrt{b}\right) \in G$

▸ ㄴ. (참)

$(-a,\ b) \in G$에서 $b = 5^{-a}$

양변을 역수를 취하면

$\frac{1}{b} = 5^a$이므로 $\left(a,\ \frac{1}{b}\right) \in G$

▸ ㄷ. (거짓)

$(2a,\ b) \in G$에서 $b = 5^{2a}$

양변을 제곱하면

$b^2 = 5^{4a}$이므로 $(4a,\ b^2) \in G$

지수함수 $y = 5^x$은 일대일대응이므로

$(a,\ b^2) \notin G$

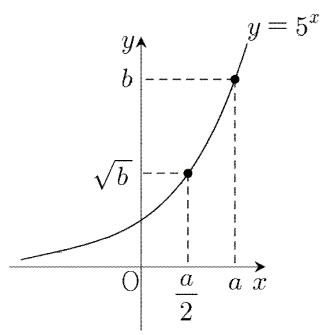
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

[참고1]

등차등비수열의 관점에서 문제를 재해석할 수 있다.

▸ ㄱ. (참)

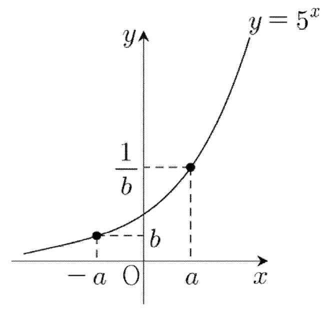


세 점 $(0,\ 1)$, $\left(\frac{a}{2},\ \sqrt{b}\right)$, $(a,\ b)$에 대하여

세 수 0, $\frac{a}{2}$, a는 이 순서대로 등차수열을 이루고,

세 수 1, $\sqrt{b}$, b는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

▸ ㄴ. (참)

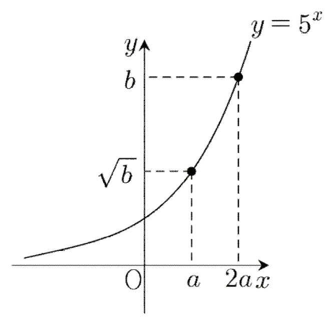


세 점 $(-a,\ b)$, $(0,\ 1)$, $\left(a,\ \frac{1}{b}\right)$에 대하여

세 수 $-a$, 0, a는 이 순서대로 등차수열을 이루고,

세 수 b, 1, $\frac{1}{b}$은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

▸ ㄷ. (거짓)



세 점 $(0,\ 1)$, $(a,\ \sqrt{b})$, $(2a,\ b)$에 대하여

세 수 0, a, $2a$는 이 순서대로 등차수열을 이루고,

세 수 1, $\sqrt{b}$, b는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

이때, 곡선 $y = 5^x$은 점 $(a,\ b^2)$이 아닌 점 $(a,\ \sqrt{b})$를 지나게 된다.

왜냐하면 함수 $y = 5^x$은 일대일대응이기 때문이다.

[참고2]

보기 ㄷ이 거짓임을 다음과 같이 보일 수도 있다.

▸ ㄷ. (거짓)

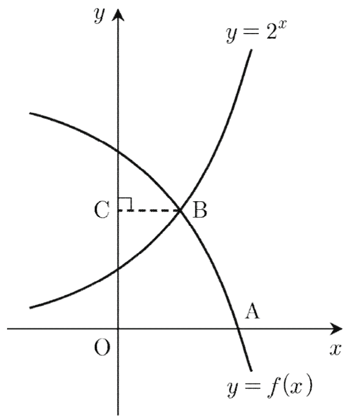
보기 ㄱ이 참이므로 a의 자리에 $2a$를 대입하자.

$(2a,\ b) \in G$이면 $(a,\ \sqrt{b}) \in G$이다.

그런데 $\sqrt{b} \neq b^2$이므로 보기 ㄷ은 거짓이다.

A139 | 답 ②

[풀이1]



함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=-2^x+m$

$f(x)=0$으로 두고 정리하면

$2^x=m$

로그의 정의에 의하여

$x=\log_2 m$

점 A의 좌표는 $A(\log_2 m,\ 0)$이므로

$\overline{OA}=\log_2 m$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=2^x$의 방정식을 연립하면

$-2^x+m=2^x$

정리하면

$2^{x+1}=m$

로그의 정의에 의하여

$x=-1+\log_2 m$

점 B의 좌표는 $B\left(-1+\log_2 m,\ \frac{m}{2}\right)$이고,

점 C의 좌표는 $C\left(0,\ \frac{m}{2}\right)$이므로

$\overline{BC}=-1+\log_2 m$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\log_2 m=2(-1+\log_2 m)$

정리하면

$\log_2 m=2$

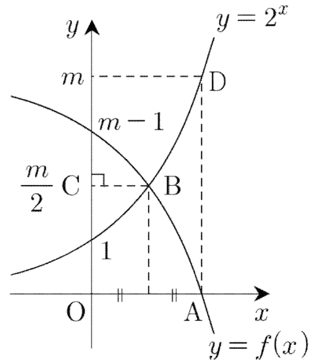
로그의 정의에 의하여

$\therefore\ m=4$

답 ②

[풀이2] 시험장

점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 D라고 하자.



두 곡선 $y=2^x$, $y=f(x)$는 직선 $y=\frac{m}{2}$에 대하여 대칭이므로

두 점 B(C), D의 y좌표는 각각 $\frac{m}{2}$, m이다.

세 점 $(0,\ 1)$, B, D의 x좌표가 등차수열을 이루므로
이 세 점의 y좌표는 등비수열을 이룬다.
등비수열의 정의에 의하여

$m=\left(\frac{m}{2}\right)^2$

$\therefore\ m=4$

답 ②

A140 | 답 ③

[풀이1]

함수 $y=\log_2 x$의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$x=1$이므로 점 A의 좌표는

$A(1,\ 0)$

함수 $y=\log_2(x-2)$의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$x=3$이므로 점 B의 좌표는

$B(3,\ 0)$

함수 $y=\log_2 x$의 방정식에 $x=k$를 대입하면

$y=\log_2 k$이므로 점 P의 좌표는

$P(k,\ \log_2 k)$

함수 $y=\log_2(x-2)$의 방정식에 $x=k$를 대입하면

$y=\log_2(k-2)$이므로 점 Q의 좌표는

$Q(k,\ \log_2(k-2))$

점 R의 좌표는

$R(k,\ 0)$

점 Q가 선분 PR의 중점이므로

내분점의 공식에 의하여

$\log_2(k-2)=\frac{\log_2 k+0}{2}$

정리하면

$2\log_2(k-2) = \log_2 k$

로그의 성질에 의하여

$\log_2(k-2)^2 = \log_2 k$

풀면

$(k-2)^2 = k$

정리하면

$(k-1)(k-4) = 0$

$k > 3$이므로 $k = 4$

세 점 P, Q, R의 좌표는 각각

P$(4,\ 2)$, Q$(4,\ 1)$, R$(4,\ 0)$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

(□ABQP의 넓이)

=(△ARP의 넓이)−(△BRQ의 넓이)

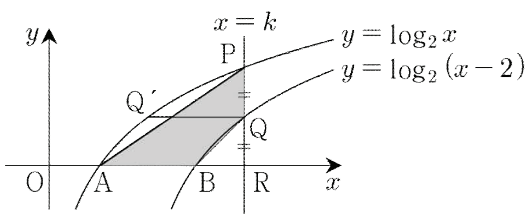
$= \frac{1}{2}\overline{AR}\,\overline{RP} - \frac{1}{2}\overline{BR}\,\overline{RQ}$

$= \frac{1}{2}\times 3\times 2 - \frac{1}{2}\times 1\times 1 = \frac{5}{2}$

답 ③

[풀이2] 시험장

점 Q를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 Q′라고 하자. 이때, $\overline{Q'Q} = 2$이다.



세 점 A, Q′, P의 y좌표가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

이 세 점의 x좌표는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이 등비수열을 쓰면

$1,\ k-2,\ k$

등비중항의 정의에 의하여

$(k-2)^2 = k,\ k^2-5k+4=0,$

$(k-1)(k-4)=0,\ k=4(\because k>3)$

각 점의 좌표를 쓰면

A$(1,\ 0)$, B$(3,\ 0)$, Q$(4,\ 1)$, P$(4,\ 2)$

구하는 넓이를 S라고 하면

S=(△PAR의 넓이)−(△QBR의 넓이)

$= \frac{1}{2}\times 3\times 2 - \frac{1}{2}\times 1\times 1 = \frac{5}{2}$

답 ③

A141 | 답 ④

[풀이1]

점 A의 x좌표를 t라 하면

A$(t,\ 2\log_2 t)$(단, $t>0$)

$\overline{AB} = 2$이므로 점 A를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면 점 B와 일치한다.

B$(t+2,\ 2\log_2 t)$

$\overline{BD} = 2$이므로 점 B를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면 점 D와 일치한다.

D$(t+2,\ 2\log_2 t+2)$ …㉠

점 D는 곡선 $y=2\log_2 x$ 위의 점이므로

D$(t+2,\ 2\log_2(t+2))$ …㉡

㉠, ㉡에서

$2\log_2 t + 2 = 2\log_2(t+2)$

로그의 정의와 성질에 의하여

$\log_2 t^2 + \log_2 4 = \log_2(t+2)^2$

$\log_2 4t^2 = \log_2(t+2)^2$

$4t^2 = (t+2)^2$

정리하면

$3t^2 - 4t - 4 = 0$

좌변을 인수분해하면

$(3t+2)(t-2) = 0$

$t>0$이므로 $t=2$

세 점 A, B, D의 좌표는

A$(2,\ 2)$, B$(4,\ 2)$, D$(4,\ 4)$

점 C의 x좌표를 s로 두자.

두 점 C, D의 y좌표는 같으므로

$2^{s-3} = 4$

방정식을 풀면

$s=5$

점 C의 좌표는

C$(5,\ 4)$

사각형 ABCD의 넓이를 S라고 하면

$\therefore\ S = \frac{\overline{AB}+\overline{DC}}{2}\times\overline{DB} = \frac{2+1}{2}\times 2 = 3$

답 ④

[참고] (선택)

$2 = 2\log_2 2$이므로 점 A$(2,\ 2)$는 곡선 $y=2\log_2 x$ 위의 점이다.

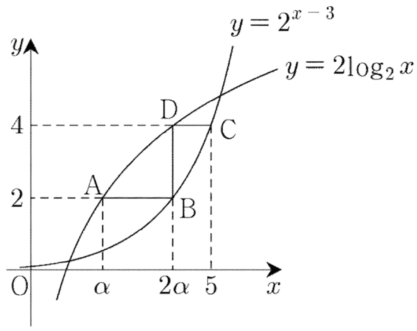
$2 = 2^{4-3}$이므로 B$(4,\ 2)$는 곡선 $y=2^{x-3}$ 위의 점이다.

$4 = 2^{5-3}$이므로 C$(5,\ 4)$는 곡선 $y=2^{x-3}$ 위의 점이다.

$4 = 2\log_2 4$이므로 점 D$(4,\ 4)$는 곡선 $y=2\log_2 x$ 위의

점이다.

[풀이2] 시험장



$\overline{\mathrm{BD}}=2$에서 두 점 A, D의 y좌표의 차는 2이므로

두 점 A, D(B)의 x좌표를 각각 α, 2α로 둘 수 있다.

$(\because 2\log_2 2\alpha-2\log_2\alpha=2)$

$\overline{\mathrm{AB}}=2\alpha-\alpha=\alpha=2$이므로

A$(2,\ 2)$, B$(4,\ 2)$, D$(4,\ 4)$, C$(5,\ 4)$

따라서 구하는 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1+2}{2}\times 2=3$$

답 ④

A142 | 답 ④

[풀이1]

연속함수 $f(x)$의 정의역의 두 원소 a, b에 대하여

P$(a,\ f(a))$, Q$(b,\ f(b))$

라고 하자. (단, $a\le b$)

선분 PQ의 중점을 R이라고 하면

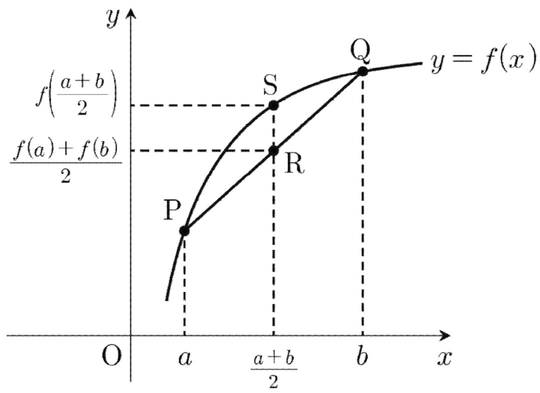
내분점의 공식에 의하여

$$\mathrm{R}\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=\dfrac{a+b}{2}$의 교점을 S라고 하면

$$\mathrm{S}\left(\frac{a+b}{2},\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

• 함수 $f(x)$가 위로 볼록인 경우

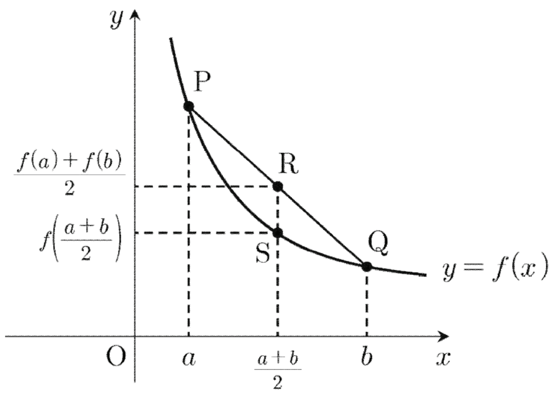


위의 그림에서

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\le f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

• 함수 $f(x)$가 아래로 볼록인 경우



위의 그림에서

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

▸ ㄱ. (참)

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 위로 볼록이므로

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\le\sqrt{\frac{a+b}{2}}$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

▸ ㄴ. (거짓)

함수 $y=3^x$의 그래프는 아래로 볼록이므로

$$\frac{3^a+3^b}{2}\ge 3^{\frac{a+b}{2}}$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

▸ ㄷ. (참)

함수 $y=\log x$의 그래프는 위로 볼록이므로

$$\frac{\log a+\log b}{2}\le\log\frac{a+b}{2}$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

[풀이2]

▸ ㄱ. (참)

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}>0,\ \sqrt{\frac{a+b}{2}}>0$$

이고

$$\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{a+b}{2}-\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4}$$

$$=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{4}=\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2}\right)^2\geq 0$$

이므로

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\leq\sqrt{\frac{a+b}{2}}$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

▸ ㄴ. (거짓)

$$\frac{3^a+3^b}{2}>1,\ 3^{\frac{a+b}{2}}>1$$

이고

$$\left(3^{\frac{a+b}{2}}\right)^2-\left(\frac{3^a+3^b}{2}\right)^2$$

$$=3^{a+b}-\frac{3^{2a}+3^{2b}+2\times3^{a+b}}{4}$$

$$=-\frac{3^{2a}+3^{2b}-2\times3^{a+b}}{4}=-\left(\frac{3^a-3^b}{2}\right)^2\leq 0$$

이므로

$$\frac{3^a+3^b}{2}\geq 3^{\frac{a+b}{2}}$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

▸ ㄷ. (참)

$a>0$, $b>0$일 때, 산술기하절대부등식에 의하여

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

양변에 상용로그를 취하면

$$\log\frac{a+b}{2}\geq\log\sqrt{ab}$$

로그의 성질에 의하여

$$\log\sqrt{ab}=\frac{\log a+\log b}{2}$$

이므로

$$\frac{\log a+\log b}{2}\leq\log\frac{a+b}{2}$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

A143 | 답 ⑤

[풀이1]

▸ ㄱ. (참)

로그의 성질에 의하여

$$\left\{f\left(\frac{a}{5}\right)\right\}^2=\left(\log_5\frac{a}{5}\right)^2=\left(-\log_5\frac{5}{a}\right)^2=\left(\log_5\frac{5}{a}\right)^2$$

$$=\left\{f\left(\frac{5}{a}\right)\right\}^2$$

▸ ㄴ. (참)

로그의 성질에 의하여

$$f(a+1)-f(a)-f(a+2)+f(a+1)$$

$$=2f(a+1)-f(a)-f(a+2)$$

$$=2\log_5(a+1)-\log_5 a-\log_5(a+2)$$

$$=\log_5\frac{(a+1)^2}{a(a+2)}=\log_5\frac{a^2+2a+1}{a^2+2a}$$

$$=\log_5\left(1+\frac{1}{a^2+2a}\right)>\log_5 1=0$$

이므로

$$\therefore\ f(a+1)-f(a)>f(a+2)-f(a+1)$$

▸ ㄷ. (참)

$f(a)=\log_5 a<\log_5 b=f(b)$

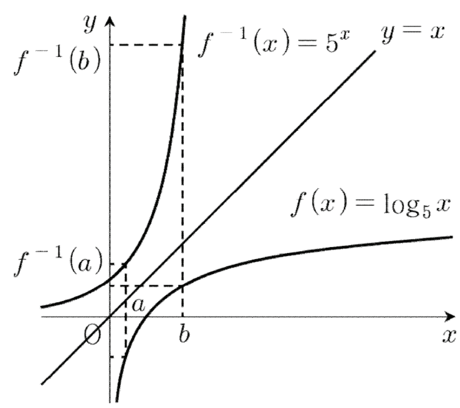
밑이 1보다 크므로 $a<b$이다.

함수 $f(x)$의 역함수는

$f^{-1}(x)=5^x$

$a<b$이면 $5^a<5^b$이므로

$f^{-1}(a)<f^{-1}(b)$



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[풀이2] 시험장

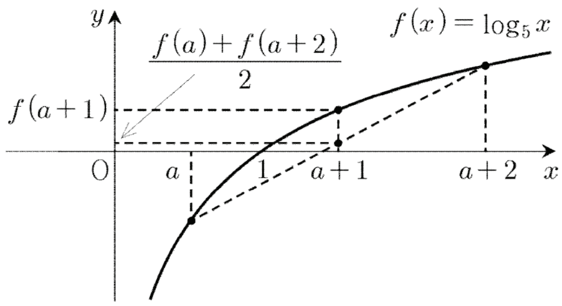
▸ ㄱ. (참)

로그의 성질에 의하여

$$\left\{f\left(\frac{a}{5}\right)\right\}^2=\left(\log_5\frac{a}{5}\right)^2=\left(-\log_5\frac{5}{a}\right)^2=\left(\log_5\frac{5}{a}\right)^2$$

$=\left\{f\left(\frac{5}{a}\right)\right\}^2$

▸ ㄴ. (참)



함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록이므로

$f(a+1) > \frac{f(a)+f(a+2)}{2}$

식을 변형하면

$f(a+1)-f(a) > f(a+2)-f(a+1)$

▸ ㄷ. (참)

지수함수 $y=f^{-1}(x)(=5^x)$는 밑이 1보다 크므로 증가함수이다.

$f(a) < f(b)$이므로

$f^{-1}(f(a)) < f^{-1}(f(b))$

역함수의 성질에 의하여

$a < b$

$\therefore\ f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$

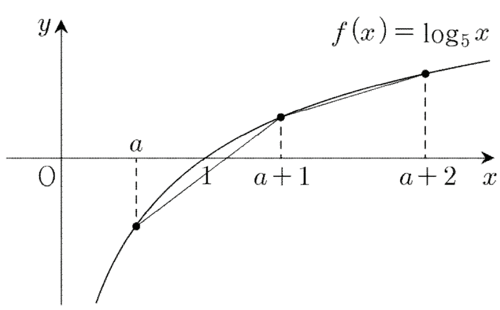
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고]

다음과 같이 보기 ㄴ이 참임을 보여도 좋다.

▸ ㄴ. (참)



두 점 $(a,\ f(a))$, $(a+1,\ f(a+1))$을 잇는 직선의 기울기가 두 점 $(a+1,\ f(a+1))$, $(a+2,\ f(a+2))$를 잇는 직선의 기울기보다 크다. 이를 수식으로 나타내면

$\frac{f(a+1)-f(a)}{a+1-a} > \frac{f(a+2)-f(a+1)}{a+2-(a+1)}$

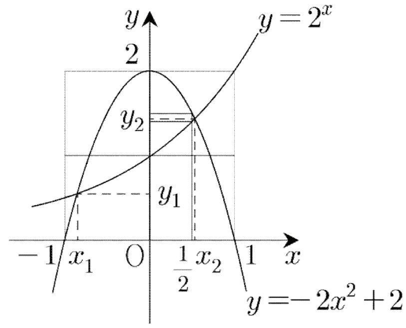
정리하면

$\therefore\ f(a+1)-f(a) > f(a+2)-f(a+1)$

A144 | 답 ⑤

[풀이] ★

▸ ㄱ. (참)



$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}<1.5=-2\left(\frac{1}{2}\right)^2+2$

(이때, $\sqrt{2}\approx 1.4$임을 이용해도 좋고,

$\left(\frac{3}{2}\right)^2-(\sqrt{2})^2=\frac{1}{4}>0$임을 보여도 좋다.)

이므로 위의 그림에서

$\therefore\ x_2 > \frac{1}{2}$

▸ ㄴ. (참)

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2x_2^2+2-(-2x_1^2+2)}{x_2-x_1}$

($\because$ 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$는 곡선 $y=-2x^2+2$ 위에 있다.)

$=\frac{-2(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2-x_1}$

$=-2(x_1+x_2)$ $\cdots$ ㉠

한편 보기 ㄱ의 그림에서

$-1<x_1<0,\ \frac{1}{2}<x_2<1$ $\cdots(*)$

위의 두 부등식을 변변히 더하면

$-\frac{1}{2}<x_1+x_2<1$

양변에 -2를 곱하면

$-2<-2(x_1+x_2)<1$ $\cdots$ ㉡

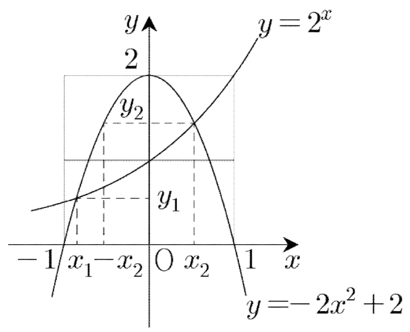
㉠, ㉡에서

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<1$

양변에 양수 x_2-x_1을 곱하면

$\therefore\ y_2-y_1<x_2-x_1$

▸ ㄷ. (참)



문제에서 주어진 이차함수는 y축에 대하여 대칭이므로

위의 그림처럼

$x_1 < -x_2$, 즉 $x_1 + x_2 < 0$ $\cdots$ ㉢

보기 ㄴ의 (*)에 의하여

$\frac{1}{2} < y_1 = 2^{x_1}$, $\sqrt{2} < y_2 = 2^{x_2}$

위의 두 부등식을 변변히 곱하면

$\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2$

그리고 ㉢에 의하여

$y_1 y_2 = 2^{x_1 + x_2} < 1$

$\therefore \ \frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

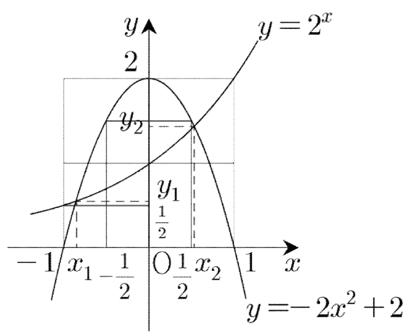
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고1]

보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 증명해도 좋다.

▸ ㄴ. (참)



위의 그림에서

$x_1 < -\frac{1}{2}$, $x_2 > \frac{1}{2}$이므로 $x_2 - x_1 > 1$

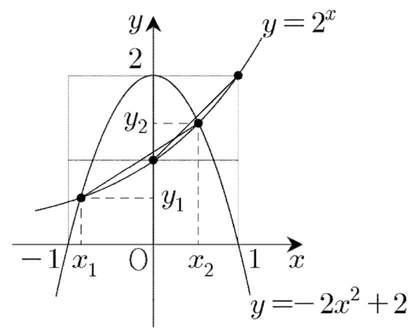
$\frac{1}{2} < y_1$, $y_2 < \frac{3}{2}$이므로 $y_2 - y_1 < 1$

$\therefore \ y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

[참고2] ★

보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 증명해도 좋다.

▸ ㄴ. (참)



곡선 $y=2^x$은 아래로 볼록이므로

위의 그림처럼

(두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 잇는 직선의 기울기)

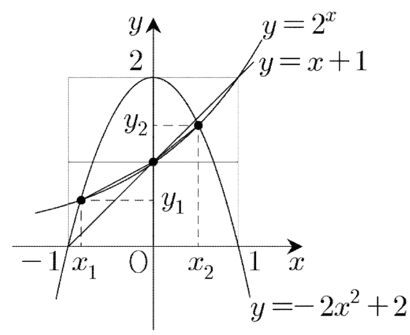
$<$(두 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$를 잇는 직선의 기울기)

즉, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 1 \ \therefore \ y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

[참고3]

보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 증명해도 좋다.

▸ ㄴ. (참)



위의 그림에서

(두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(0,\ 1)$을 잇는 직선의 기울기)< 1

즉, $\frac{y_1 - 1}{x_1} < 1$, $y_1 - 1 > x_1 (\because x_1 < 0)$ $\cdots$ ㉣

(두 점 $(0,\ 1)$, $(x_2,\ y_2)$를 잇는 직선의 기울기)< 1

즉, $\frac{y_2 - 1}{x_2} < 1$, $y_2 - 1 < x_2$ $\cdots$ ㉤

㉣+㉤: $x_1 + y_2 - 1 < x_2 + y_1 - 1$

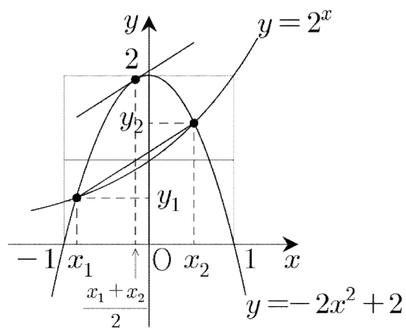
정리하면

$\therefore \ y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

[참고4]

보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 증명해도 좋다.

▸ ㄴ. (참)



평균값의 정리에 의하여

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-4\times\frac{x_1+x_2}{2}=-2(x_1+x_2)<1$$

$\left(\because -1<x_1<-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<x_2<1\right.$에서

$\left.-\frac{1}{2}<x_1+x_2<\frac{1}{2},\ -1<-2(x_1+x_2)<1\right)$

$\therefore\ y_2-y_1<x_2-x_1$

A145 | 답 ④

[풀이1]

▸ ㄱ. (참)

두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, $b(a<0<b)$라고 하면

$\log_2(-5a)=\log_2(a+2)$

$-5a=a+2$ 풀면 $a=-\frac{1}{3}$

$\log_2 5b=\log_2(b+2)$에서

$5b=b+2$ 풀면 $b=\frac{1}{2}$

두 점 C, D의 x좌표가 각각 p, $r(p<0<r)$이므로

$\log_2(-5p)=\log_2(p+m)$

$-5p=p+m$ 풀면 $p=-\frac{m}{6}$

$\log_2 5r=\log_2(r+m)$

$5r=r+m$ 풀면 $r=\frac{m}{4}$

$m>2$이므로

$p=-\frac{m}{6}<-\frac{1}{3},\ r=\frac{m}{4}>\frac{1}{2}$

▸ ㄴ. (거짓)

두 점 A, B의 좌표가 각각

$A\left(-\frac{1}{3},\ \log_2\frac{5}{3}\right)$, $B\left(\frac{1}{2},\ \log_2\frac{5}{2}\right)$

이므로

$$(\text{직선 AB의 기울기})=\frac{\log_2\frac{5}{2}-\log_2\frac{5}{3}}{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{6}{5}\log_2\frac{3}{2}$$

두 점 C, D의 좌표가 각각

$C\left(-\frac{m}{6},\ \log_2\frac{5m}{6}\right)$, $D\left(\frac{m}{4},\ \log_2\frac{5m}{4}\right)$

이므로

$$(\text{직선 CD의 기울기})=\frac{\log_2\frac{5m}{4}-\log_2\frac{5m}{6}}{\frac{m}{4}-\left(-\frac{m}{6}\right)}=\frac{12}{5m}\log_2\frac{3}{2}$$

$m>2$이므로 $\frac{12}{5m}\log_2\frac{3}{2}<\frac{6}{5}\log_2\frac{3}{2}$이다.

▸ ㄷ. (참)

두 점 B, C의 좌표는 각각

$B\left(\frac{1}{2},\ \log_2\frac{5}{2}\right)$, $C\left(-\frac{m}{6},\ \log_2\frac{5m}{6}\right)$

두 점 B, C의 y좌표를 같게 두면

$\log_2\frac{5}{2}=\log_2\frac{5m}{6}$

$\frac{5}{2}=\frac{5m}{6}$ 풀면 $m=3$

점 D의 좌표는 $D\left(\frac{3}{4},\ \log_2\frac{15}{4}\right)$

두 삼각형 CAB, CBD의 넓이를 각각 S, T,

점 A와 직선 CB 사이의 거리를 h_1,

점 D와 직선 CB 사이의 거리를 h_2라고 하면

$$\frac{S}{T}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{\log_2\frac{5}{2}-\log_2\frac{5}{3}}{\log_2\frac{15}{4}-\log_2\frac{5}{2}}=\frac{\log_2\frac{3}{2}}{\log_2\frac{3}{2}}=1$$

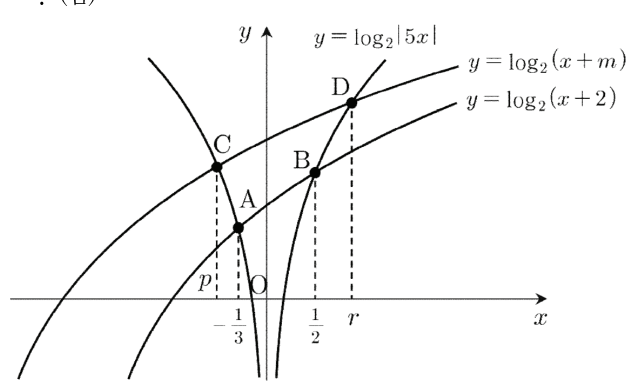
따라서 두 삼각형 CAB, CBD의 넓이는 같다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

[풀이2]

▸ ㄱ. (참)



두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, $b(a<0<b)$라고 하면

$\log_2(-5a)=\log_2(a+2)$

$-5a=a+2$ 풀면 $a=-\dfrac{1}{3}$

$\log_2 5b=\log_2(b+2)$

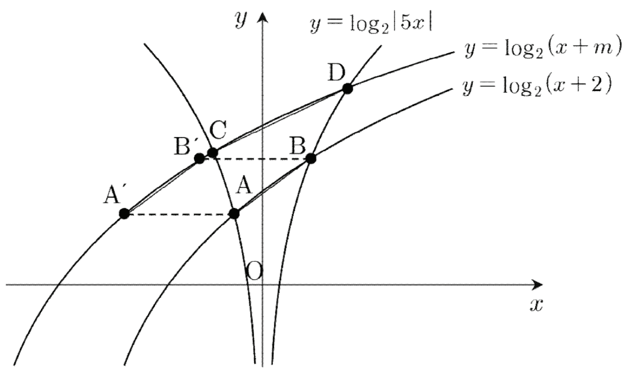
$5b=b+2$ 풀면 $b=\dfrac{1}{2}$

두 점 C, D의 x좌표가 각각 p, $r(p<0<r)$이므로
위의 그림에서

$\therefore\ p<-\dfrac{1}{3}$, $r>\dfrac{1}{2}$

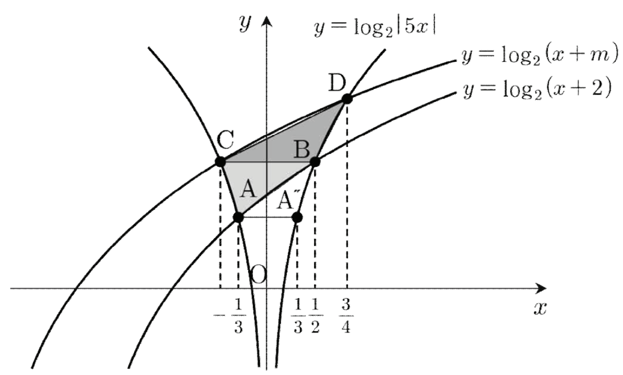
▸ ㄴ. (거짓)

점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이
곡선 $y=\log_2(x+m)$과 만나는 점을 A′,
점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이
곡선 $y=\log_2(x+m)$과 만나는 점을 B′이라고 하자.



함수 $y=\log_2(x+m)$의 그래프는 위로 볼록이므로
(직선 A′B′의 기울기)>(직선 CD의 기울기)
그런데 두 직선 AB, A′B′의 기울기가 같으므로
$\therefore$ (직선 AB의 기울기)>(직선 CD의 기울기)

▸ ㄷ. (참)



두 점 B, C의 좌표는 각각

$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ \log_2\dfrac{5}{2}\right)$, $\mathrm{C}\left(-\dfrac{m}{6},\ \log_2\dfrac{5m}{6}\right)$

두 점 B, C의 y좌표가 같으므로

$\log_2\dfrac{5}{2}=\log_2\dfrac{5m}{6}$

$\dfrac{5}{2}=\dfrac{5m}{6}$ 풀면 $m=3$

점 D의 좌표는 $\mathrm{D}\left(\dfrac{3}{4},\ \log_2\dfrac{15}{4}\right)$

점 A를 y축에 대하여 대칭이동시킨 점을 A″이라고 하자.

세 점 A″, B, D의 x좌표는 각각 $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{4}$이고

이 세 수는 이 순서대로 공비가 $\dfrac{3}{2}$인 등비수열을 이룬다.

세 점 A″, B, D의 y좌표는 각각

$\log_2\dfrac{5}{3}$, $\log_2\dfrac{5}{2}$, $\log_2\dfrac{15}{4}$이고

이 세 수는 이 순서대로 공차가 $\log_2\dfrac{3}{2}$인 등차수열을 이룬다.

두 삼각형 CAB, CBD의 넓이를 각각 S, T,
점 A와 직선 CB 사이의 거리를 h_1,
점 D와 직선 CB 사이의 거리를 h_2라고 하면
등차수열의 정의에 의하여
$h_1=h_2$이므로 $S=T$이다.
따라서 두 삼각형 CAB, CBD의 넓이는 같다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

A146

답 ④

[풀이]

지수법칙에 의하여

$2^{4x-1}=2^{x+3}$

방정식을 풀면

$4x-1=x+3$

$\therefore\ x=\dfrac{4}{3}$

답 ④

A147

답 10

[풀이]

주어진 방정식을 풀면

$2^x=8$ 또는 $3^{2x}=9$

$x=3$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 값은 $3^2+1^2=10$이다.

답 10

B066 | 답 ①

[풀이]

문제에서 주어진 두 원주각의 크기($\bullet=\theta$)가 같으므로

$\overline{BC}=\overline{CD}$ ($=x$로 두자.)

두 삼각형 ABC, ACD에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=5^2+(3\sqrt{5})^2-2\times5\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$, $\cdots$ ㉠

$x^2=(3\sqrt{5})^2+7^2-2\times3\sqrt{5}\times7\times\cos\theta$

위의 두 등식을 변변히 빼서 정리하면

$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\left(\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

이를 ㉠에 대입하면

$x=\sqrt{10}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

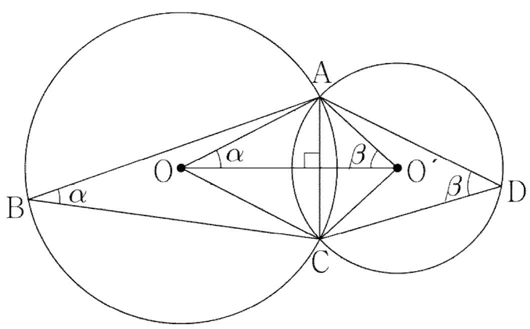
$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{10}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=2R$, $\therefore\ R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

답 ①

B067 | 답 26

[풀이] ★

두 원 O, O′의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라고 하자.



두 삼각형 ABC, ADC 각각에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\alpha}=2r_1$, $\dfrac{\overline{AC}}{\sin\beta}=2r_2$

이를 문제에서 주어진 분수식에 대입하면

$\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\dfrac{\frac{\overline{AC}}{2r_2}}{\frac{\overline{AC}}{2r_1}}=\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{3}{2}$, 즉 $r_2=\dfrac{2}{3}r_1$

중심각과 원주각의 관계에 의하여

$\angle AOC=2\alpha$, $\angle AO'C=2\beta$

이등변삼각형의 성질에 의하여

$\angle AOO'=\alpha$, $\angle AO'O=\beta$

삼각형 AOO′에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\pi-\alpha-\beta)=\dfrac{r_1^2+\left(\frac{2}{3}r_1\right)^2-1^2}{2\times r_1\times\frac{2}{3}r_1}=-\dfrac{1}{3}$

($\because \cos(\pi-\alpha-\beta)=-\cos(\alpha+\beta)$)

풀면

$r_1^2=\dfrac{9}{17}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\dfrac{9}{17}\pi$

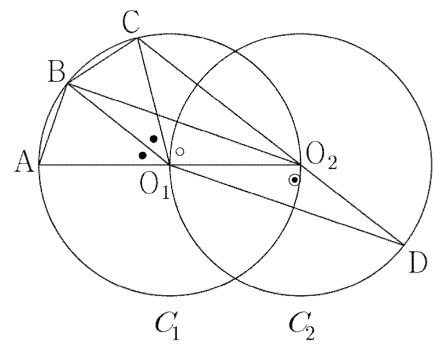
이다.

$\therefore\ p+q=17+9=26$

답 26

B068 | 답 ②

[풀이]



(단, $\bullet=\theta$, $\circ=\theta_2$, $\odot=\theta_3$)

$\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$

즉, $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta_2}{2}+\theta_3=\pi$이므로 $\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$이고

($\because$ $\triangle O_1O_2C$는 $\overline{CO_1}=\overline{O_1O_2}$인 이등변삼각형)

$\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로

($\because \theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$)

$\angle CO_1B=\theta_1$이다.

($\because \theta_1+\angle BO_1C+\theta_2=\pi$)

이때 $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로

삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.

($\because$ ASA 합동)

$\overline{AB}=k$라 할 때

$\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로

($\because \triangle O_1O_2B\equiv\triangle O_2O_1D$)

$\overline{AO_2}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BO_2}^2}=\boxed{3k}$이고,

$\angle \mathrm{BO_2A} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{BO_1A} = \frac{\theta_1}{2}$이므로

$\cos\frac{\theta_1}{2} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$이다.

삼각형 $\mathrm{O_2BC}$에서

$\overline{\mathrm{BC}} = k$, $(\because \angle \mathrm{AO_1B} = \angle \mathrm{BO_1C})$

$\overline{\mathrm{BO_2}} = 2\sqrt{2}k$, $\angle \mathrm{CO_2B} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{CO_1B} = \frac{\theta_1}{2}$이므로

코사인법칙에 의하여 $\overline{\mathrm{O_2C}} = \boxed{\frac{7}{3}k}$이다.

$(\because \overline{\mathrm{O_2C}} = x$로 두면

$k^2 = 8k^2 + x^2 - 2\times 2\sqrt{2}k\times x\cos\frac{\theta_2}{2}$,

$k^2 = 8k^2 + x^2 - \frac{16}{3}kx$, $3x^2 - 16kx + 21k^2 = 0$,

$(3x-7k)(x-3k) = 0$, $x = \frac{7k}{3})$

$\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{O_2D}} + \overline{\mathrm{O_2C}} = \overline{\mathrm{O_1O_2}} + \overline{\mathrm{O_2C}}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{CD}} = k : \left(\boxed{\frac{3k}{2}} + \boxed{\frac{7k}{3}}\right)$이다.

(가): $f(k) = 3k$

(나): $p = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

(다): $g(k) = \frac{7}{3}k$

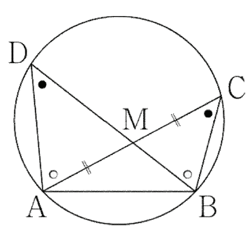
$\therefore\ f(p)\times g(p) = 2\sqrt{2}\times\frac{14\sqrt{2}}{9} = \frac{56}{9}$

답 ②

B069 | 답 ③

[풀이]

$\overline{\mathrm{AC}} = p$, $\overline{\mathrm{BM}} = q$로 두자.



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$2^2 = p^2 + 3^2 - 2\times p\times 3\times\cos(\angle \mathrm{BAC})$,

$4p^2 - 21p + 20 = 0$, $(4p-5)(p-4) = 0$,

$p = 4$ $(\because p > 3)$

삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의하여

$q^2 = 2^2 + 3^2 - 2\times 2\times 3\times\cos(\angle \mathrm{BAC})$

풀면 $q = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

원주각의 성질에 의하여

$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{BDA} = \bullet$,

$\angle \mathrm{CAD} = \angle \mathrm{DBC} = \circ$

이므로 두 삼각형 AMD, BMC는 서로 닮음이다.

$\overline{\mathrm{AM}} : \overline{\mathrm{MD}} = \overline{\mathrm{BM}} : \overline{\mathrm{MC}}$, 즉 $\overline{\mathrm{AM}}\times\overline{\mathrm{MC}} = \overline{\mathrm{DM}}\times\overline{\mathrm{MB}}$

(이 등식은 공식으로 암기해도 좋다.)

$2\times 2 = \overline{\mathrm{DM}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DM}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$

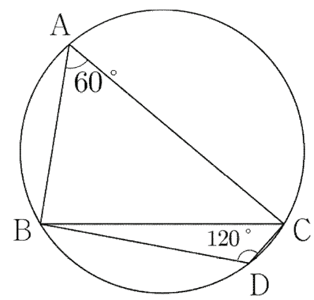
답 ③

B070 | 답 ②

[풀이]

사각형 ABDC가 원에 내접하므로

$\angle \mathrm{BDC} = 180^\circ - \angle \mathrm{CAB} = 120^\circ$



사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin 60^\circ} = 2\mathrm{R}$, $\overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{21}$

$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle \mathrm{BCD})} = 2R$, $\overline{\mathrm{BD}} = 8$

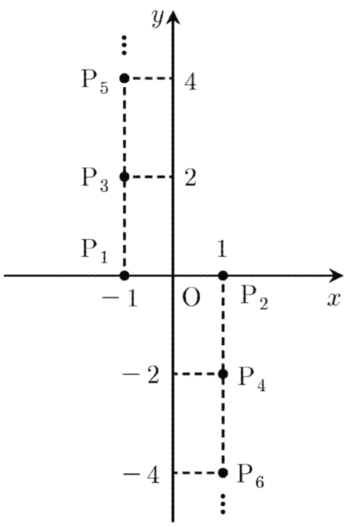
이제 $\overline{\mathrm{CD}} = x$로 두자.

삼각형 BDC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos 120^\circ = \frac{8^2 + x^2 - (2\sqrt{21})^2}{2\times 8\times x}$, $x = 2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}} + \overline{\mathrm{CD}} = 8 + 2 = 10$

답 ②



n이 홀수일 때, 점 P_n의 좌표는

$P_n(-1,\ n-1)$

n이 짝수일 때, 점 P_n의 좌표는

$P_n(1,\ -n+2)$

따라서 점 P_{25}의 좌표는 $P_{25}(-1,\ 24)$

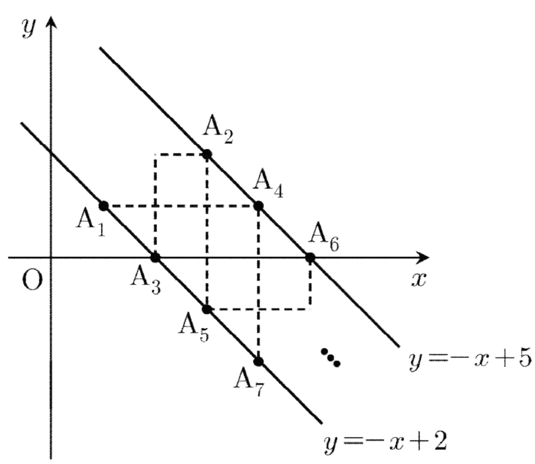
$\therefore\ a+b=23$

답 23

C157 ㅣ답 ①

※ 수열의 귀납적 정의에서는 일반항을 유도하지 않지만 등차수열, 등비수열, (발견적 추론으로) 규칙이 명확한 수열의 경우 수열의 귀납적 정의에서 일반항을 유도하는 것이 가능합니다.

[풀이]



모든 자연수 n에 대하여

점 A_{2n-1}은 직선 $y=-x+2$ 위에 있고,

점 A_{2n}은 직선 $y=-x+5$ 위에 있다.

점 A_{2n-1}의 x좌표를 a_n이라고 하면

수열 $\{a_n\}$은 첫째항과 공차가 각각 1인 등차수열이다.

일반항 a_n은

$a_n=n$

점 A_{2n}의 x좌표를 b_n이라고 하면

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 3이고, 공차가 1인 등차수열이다.

일반항 b_n은

$b_n=n+2$

점 $A_k(7,\ -2)$는 직선 $y=-x+5$ 위에 있으므로

$b_n=n+2=7$에서 $n=5$

이때, $k=2n=10$

점 $A_l(9,\ -7)$은 직선 $y=-x+2$ 위에 있으므로

$a_n=n=9$에서 $n=9$

이때, $l=2n-1=17$

$\therefore\ k+l=27$

답 ①

C158 ㅣ답 ①

[풀이]

a_2+a_4가 짝수이므로

$a_2,\ a_4$는 모두 짝수이거나 모두 홀수이다.

- (1) $a_2,\ a_4$가 모두 짝수인 경우

$a_3=\frac{1}{2}a_2$

a_3이 짝수인 경우: $a_4=\frac{1}{2}a_3=\frac{1}{4}a_2$

이때, $a_2+a_4=a_2+\frac{1}{4}a_2=\frac{5}{4}a_2=40$

$a_2=32\ (a_3=16,\ a_4=8)$

$a_2=a_1+1$ 또는 $a_2=\frac{1}{2}a_1$이므로

$\therefore\ a_1=31$ 또는 $a_1=64$

a_3이 홀수인 경우: $a_4=a_3+1=\frac{1}{2}a_2+1$

이때, $a_2+a_4=a_2+\frac{1}{2}a_2+1=\frac{3}{2}a_2+1=40$

$a_2=26\ (a_3=13,\ a_4=14)$

$a_2=a_1+1$ 또는 $a_2=\frac{1}{2}a_1$이므로

$\therefore\ a_1=25$ 또는 $a_1=52$

- (2) $a_2,\ a_4$가 모두 홀수인 경우

$a_3=a_2+1(=$짝수$)$

$a_4=\frac{a_2+1}{2}$

$a_2 + a_4 = a_2 + \dfrac{a_2+1}{2} = \dfrac{3a_2+1}{2} = 40$

이를 만족시키는 정수 a_2는 존재하지 않는다.

(1), (2)에서 구하는 값은

$31+64+25+52=172$

답 ①

C159 | 답 ③

[풀이]

$a_6 + a_7 = 3 = 1+2$이므로

$a_6 = 2$, $a_7 = 1$ 또는 $a_6 = 1$, $a_7 = 2$

(1) $a_6 = 2$, $a_7 = 1$인 경우

문제에서 주어진 귀납적 정의를 이용하여

수열 a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1을 쓰면

아래 표와 같다.

<table>
<tr><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th><th>a_5</th><th>a_6</th><th>a_7</th><th>a_8</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="4">2</td><td rowspan="4">1</td><td rowspan="7">2</td><td rowspan="7">1</td><td rowspan="7">2</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td>16</td><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">4</td></tr>
<tr><td>3</td></tr>
<tr><td>64</td><td rowspan="2">32</td><td rowspan="2">16</td><td rowspan="3">8</td><td rowspan="3">4</td></tr>
<tr><td>5</td></tr>
<tr><td>12</td><td>6</td><td>3</td></tr>
</table>

(예를 들어 $a_7 = 1$에서

$2^{a_6} = 1(a_6 = 0(\times))$, $\dfrac{1}{2}a_6 = 1(a_6 = 2(\bigcirc))$

$a_2 = 8$에서

$2^{a_1} = 8(a_1 = 3(\bigcirc))$, $\dfrac{1}{2}a_1 = 8(a_1 = 16(\bigcirc))$

와 같이 판단한 것이다.)

(2) $a_6 = 1$, $a_7 = 2$인 경우

위의 표에서 $a_7 = 1$, $a_8 = 2$일 때,

a_2는 2, 8, 32, 6이므로

$a_6 = 1$, $a_7 = 2$일 때,

a_1은 2, 8, 32, 6이다.

(1), (2)에서

구하는 값은

$1+4+16+3+64+5+12$

$+2+8+32+6$

$=153$

답 ③

C160 | 답 ②

[풀이]

문제에서 주어진 귀납적 정의에 따라

수열 a_1, a_2, $\cdots$, a_6

을 쓰면 아래 표와 같다.

<table>
<tr><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th><th>a_5</th><th>a_6</th></tr>
<tr><td rowspan="4">k</td><td rowspan="4">-2</td><td rowspan="4">$2-k$</td><td rowspan="3">$8-2k$ $(k \geq 2)$</td><td rowspan="2">$16-3k$ $(k \geq 4)$</td><td>$26-4k$ $(k \geq 6)$</td></tr>
<tr><td>$6-4k$ $(k \leq 5)$</td></tr>
<tr><td>$-3k$ $(k \leq 3)$</td><td>$10-4k$</td></tr>
<tr><td>-6 $(k=1)$</td><td>1</td><td>-10</td></tr>
</table>

- (1) $k \geq 6$인 경우

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6$

$= \underbrace{(2-k)}_{-}\underbrace{(8-2k)}_{-}\underbrace{(16-3k)}_{-}\underbrace{(26-4k)}_{+,\ 0,\ -} < 0$

$26-4k$가 양(+)이어야 하므로 $k=6$이다.

- (2) $k=5$인 경우

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6$

$= -3 \times (-2) \times 1 \times (-14) < 0$ $(\bigcirc)$

- (3) $k=2$ 또는 $k=3$인 경우

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6$

$= \underbrace{(2-k)}_{0,\ -}\underbrace{(8-2k)}_{+}\underbrace{(-3k)}_{-}\underbrace{(10-4k)}_{+,\ -} < 0$

일단 $k \neq 2$이고, $10-4k$가 음(−)이어야 하므로 $k=3$이다.

- (4) $k=1$인 경우

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6$

$= 1 \times (-6) \times 1 \times (-10) > 0$

(1)~(4)에서 구하는 값은

$6+5+3=14$

답 ②

C161 | 답 ②

[풀이]

$a_1 = a$, $a_2 = b$로 두자.

문제에서 주어진 귀납적 정의를 이용하면 아래의 표를 완성할 수 있다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a	b	2	$2b+2$ $(b \le 2)$	$2b+6$ $(0 \le b \le 2)$	$6b+10$ $(0 \le b \le 2)$
				$2b+4$ $(b<0)$	$6b+8$ $(b<0)$
			$b+2$ $(b>2)$	$b+6$ $(b>2)$	$3b+10$ $(b>2)$

우선 b의 값을 구하자.

$6b+10=19$ $(0 \le b \le 2)$: $b=\dfrac{3}{2}$ (○)

$6b+8=19$ $(b<0)$: $b=\dfrac{11}{6}$ (×)

$3b+10=19$ $(b>2)$: $b=3$ (○)

이제 a의 값을 구하자.

$a \le b$일 때, $a_3=2a+b=2$에서

$b=\dfrac{3}{2}$이면 $a=\dfrac{1}{4}$(○), $b=3$이면 $a=-\dfrac{1}{2}$(○)

$a>b$일 때, $a_3=a+b=2$에서

$b=\dfrac{3}{2}$이면 $a=\dfrac{1}{2}$(×), $b=3$이면 $a=-1$(×)

따라서 구하는 값은

$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$

답 ②

C162 | 답 ③

[풀이]

우선 a_6, a_7, a_8, $\cdots$의 값을 구하자.

$a_5=5 \ge 0$이므로 $a_6=a_5-6=-1$

$a_6=-1<0$이므로 $a_7=-2a_6+3=5$

$\vdots$

수열 a_5, a_6, a_7, a_8, $\cdots$은 다음과 같다.

$5(=a_5)$, -1, 5, -1, 5, -1, $\cdots$

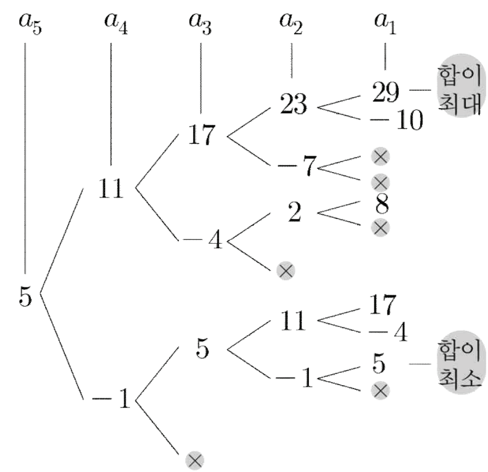
(즉, 5와 -1이 반복해서 나타난다.)

이제 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5의 값을 구하자.

$a_5=a_4-6(a_4 \ge 0)$에서 $a_4=11$

$a_5=-2a_4+3(a_4<0)$에서 $a_4=-1$

마찬가지의 방법으로 나머지 항을 구하면 다음과 같다. (이때, 수형도를 사용하면 된다.)



위의 수형도에서

$M=29+23+17+11+(5-1+5-1+\cdots-1)$

$m=5-1+5-1+(5-1+5-1+\cdots-1)$

$\therefore$ $M-m$

$=29+23+17+11-(5-1+5-1)$

$=72$

답 ③

C163 | 답 ①

[풀이]

우선 a_5, a_6의 값을 결정하자.

문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$$a_6=\begin{cases} -2a_5-2 & \left(-1 \le a_5 < -\dfrac{1}{2}\right) \\ 2a_5 & \left(-\dfrac{1}{2} \le a_5 \le \dfrac{1}{2}\right) \\ -2a_5+2 & \left(\dfrac{1}{2} < a_5 \le 1\right) \end{cases}$$

$a_6=-a_5$이므로

$-a_5=-2a_5-2$, $a_5=-2$ (×)

$-a_5=2a_5$, $a_5=0$ (○)

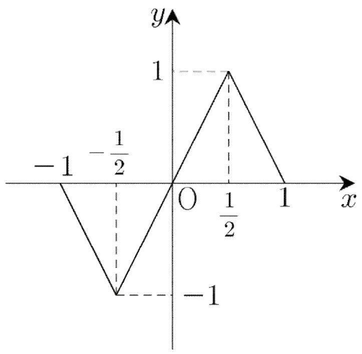
$-a_5=-2a_5+2$, $a_5=2$ (×)

즉, $a_5=a_6=0$

함수

$$y=\begin{cases} -2x-2 & \left(-1 \le x < -\dfrac{1}{2}\right) \\ 2x & \left(-\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2}\right) \\ -2x+2 & \left(\dfrac{1}{2} < x \le 1\right) \end{cases}$$

의 그래프는 다음과 같다.

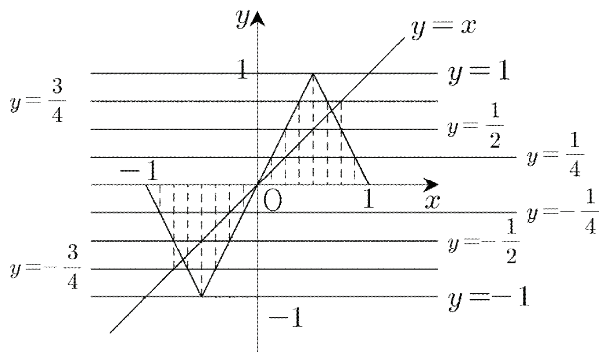


위의 함수의 그래프와 직선 $y=0(=a_5)$의 세 교점의 x좌표가 각각

$-1,\ 0,\ 1$

이므로 a_4가 가질 수 있는 값은 $-1,\ 0,\ 1$이다.

마찬가지의 방법으로 $a_3,\ a_2,\ a_1$이 가질 수 있는 값을 구해보자.



위의 그림에서 다음과 같은 경우가 가능하다.

$$-1(a_4) \Rightarrow -\frac{1}{2}(a_3) \Rightarrow -\frac{3}{4}(a_2) \Rightarrow -\frac{5}{8}(a_1)$$

이때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k < 0$이다.

마찬가지 방법으로 $a_4=-1$이면 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k < 0$이다.

즉, $a_4=0$ 또는 $a_4=1$이다.

<table>
<tr><th>a_4</th><th>a_3</th><th>a_2</th><th>a_1</th></tr>
<tr><td rowspan="9">0</td><td rowspan="2">-1</td><td rowspan="2">$-\frac{1}{2}$</td><td>$-\frac{3}{4}(\times)$</td></tr>
<tr><td>$-\frac{1}{4}(\times)$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">0</td><td>-1</td><td>$-\frac{1}{2}(\times)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">0</td><td>$-1(\times)$</td></tr>
<tr><td>$0(\times)$</td></tr>
<tr><td>$1(\bigcirc)$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$\frac{1}{2}(\bigcirc)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{4}(\bigcirc)$</td></tr>
<tr><td>$\frac{3}{4}(\bigcirc)$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4">$\frac{1}{2}$</td><td rowspan="2">$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{8}(\bigcirc)$</td></tr>
<tr><td>$\frac{7}{8}(\bigcirc)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{3}{4}$</td><td>$\frac{3}{8}(\bigcirc)$</td></tr>
<tr><td>$\frac{5}{8}(\bigcirc)$</td></tr>
</table>

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$인 모든 a_1의 값의 합은

$$\frac{1+3+5+7}{8}+\frac{1+3}{4}+\frac{1}{2}+1=\frac{9}{2}$$

답 ①

C164 | 답 ①

[풀이]

수열 $\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}$은

$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ 36,\ \cdots$

즉, '홀수, 홀수, 짝수, 짝수' 가 반복되어 나타난다.

수열 $\{a_n\}$은

$-1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ \cdots$

수열 $\{na_n\}$은

$-1,\ -2,\ 3,\ 4,\ -5,\ -6,\ 7,\ 8,\ \cdots$

$2010=502\times4+2$이므로

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{2010} na_n$

$=(-1-2+3+4)+(-5-6+7+8)$

$+\ \cdots\ +(-2005-2006+2007+2008)$

$-2009-2010$

$=\underbrace{4+4+\cdots+4}_{502\text{개}}-2009-2010$

$=4\times 502-(2009+2010)=-2011$

답 ①

[참고]

$\dfrac{n(n+1)}{2}=1+2+3+\cdots+n$

으로 두고 생각하자.

자연수 k에 대하여

$n=4k-3$ 또는 $n=4k-2$이면 $\dfrac{n(n+1)}{2}$은 홀수이고,

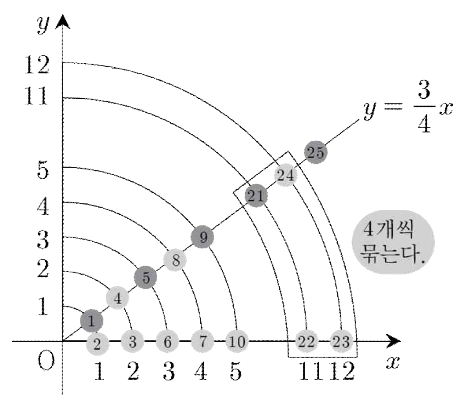
$n=4k-1$ 또는 $n=4k$이면 $\dfrac{n(n+1)}{2}$은 짝수이다.

그러므로 수열 $\{a_n\}$은

$-1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ \cdots$

C165 ㅣ답 ①

[풀이1] 시험장



문제에서 주어진 점들을

$(P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4),\ (P_5,\ P_6,\ P_7,\ P_8),\ \cdots$

와 같이 4개씩 묶는 것이 자연스럽다.

각 묶음의 첫 번째 점만을 순서대로 쓰면

$P_1,\ P_5,\ P_9,\ \cdots$ $\cdots$㉠

이때, 1, 5, 9, $\cdots$는 첫째항이 1이고 공차가 4인 등차수열이고,

$25=1+(7-1)4$

이므로 P_{25}은 ㉠의 7번째 점이다.

㉠의 각 점은 반지름의 길이가 각각

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13(P_{25}),\ \cdots$

인 동심원 위에 있다.

점 P_{25}의 x좌표는

$13\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{52}{5}$

답 ①

[풀이2]

점 P_1은 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=\dfrac{3}{4}x$의 두 교점 중에서 제1사분면의 점이다.

원과 직선의 방정식을 연립하여 점 P_1의 좌표를 구하면

$P_1\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$

점 P_2는 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=0$의 교점 중에서 x좌표가 양수인 점이다.

원과 직선의 방정식을 연립하여 점 P_2의 좌표를 구하면

$P_2(1,\ 0)$

점 P_3은 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=0$의 교점 중에서 x좌표가 양수인 점이다.

원과 직선의 방정식을 연립하여 점 P_3의 좌표를 구하면

$P_3(2,\ 0)$

점 P_4는 원 $x^2+y^2=4$와 직선 $y=\dfrac{3}{4}x$의 두 교점 중에서 제1사분면의 점이다.

원과 직선의 방정식을 연립하여 점 P_4의 좌표를 구하면

$P_4\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$

$\vdots$

모든 자연수 n에 대하여

점 P_{4n-3}은 원 $x^2+y^2=(2n-1)^2$과 직선 $y=\dfrac{3}{4}x$의 두 교점 중에서 제1사분면 위의 점이다.

점 P_{4n-2}은 원 $x^2+y^2=(2n-1)^2$과 직선 $y=0$의 두 교점 중에서 x좌표가 양수인 점이다.

점 P_{4n-1}은 원 $x^2+y^2=(2n)^2$과 직선 $y=0$의 두 교점 중에서 x좌표가 양수인 점이다.

점 P_{4n}은 원 $x^2+y^2=(2n)^2$과 직선 $y=\dfrac{3}{4}x$의 두 교점 중에서 제1사분면 위의 점이다.

$25=4\times 7-3$이므로, 점 P_{25}는 원 $x^2+y^2=13^2$과 직선 $y=\dfrac{3}{4}x$의 두 교점 중에서 제1사분면 위의 점이다.

원과 직선의 방정식을 연립하여 점 P_{25}의 좌표를 구하면

$P_{25}\left(\dfrac{52}{5},\ \dfrac{39}{5}\right)$

따라서 구하는 값은 $\dfrac{52}{5}$이다.

답 ①

[참고]

점 P_n의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라고 하자.

자연수 k에 대하여

$x_{4k-3}=(2k-1)\times x_1$

$x_{4k-2}=(2k-1)\times x_2$

$x_{4k-1}=2k\times x_2$

$x_{4k}=2k\times x_1$

C166 | 답 ③

[풀이1]

문제에서 주어진 세 등식을 변변히 모두 합하면

$a_{3n-1}+a_{3n}+a_{3n+1}=2a_n+4$

이 등식에 $n=4$를 대입하면

$a_{11}+a_{12}+a_{13}=2a_4+4$

그런데 문제에서 주어진 세 번째 등식에서

$a_4=a_{3\times1+1}=a_1+1=2$, 즉 $a_4=2$

이므로

$\therefore\ a_{11}+a_{12}+a_{13}=2a_4+4=2\times2+4=8$

답 ③

[풀이2]

문제에서 주어진 귀납적 정의를 이용하여 수열 $\{a_n\}$을 나열해 보자.

문제에서 주어진 세 등식에 $n=1$을 대입하면

$a_2=2a_1+1=3$, $a_3=-a_1+2=1$,

$a_4=a_1+1=2$

문제에서 주어진 세 등식에 $n=2$를 대입하면

$a_5=2a_2+1=7$, $a_6=-a_2+2=-1$,

$a_7=a_2+1=4$

$\vdots$

마찬가지의 방법으로

$1(a_1)$, 3, 1, 2, 7, -1, 4, 3, 1, 2,

$5(a_{11})$, $0(a_{12})$, $3(a_{13})$, $\cdots$

$\therefore\ a_{11}+a_{12}+a_{13}=5+0+3=8$

답 ③

C167 | 답 ④

[풀이1]

$a_1=a$로 두자.

$n=1$을 (가), (나)에 대입하면

$a_2=a_1-1=a-1$, $a_3=2a_1+1=2a+1$

$n=2$를 (가), (나)에 대입하면

$a_4=a_2-1=a-2$, $a_5=2a_2+1=2a-1$

$\vdots$

마찬가지의 방법으로 a_6, a_7, a_8, $\cdots$ 을 구할 수 있다.

a_1을 쓰면

: a

a_2, a_3을 쓰면

: $a-1$, $2a+1$

a_4, a_5, a_6, a_7을 쓰면

: $a-2$, $2a-1$, $2a$, $4a+3$

a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}를 쓰면

: $a-3$, $2a-3$, $2a-2$, $4a-1$, $2a-1$, $4a+1$, $4a+2$, $8a+7$

$\vdots$

다음을 추론할 수 있다.

$a_1=a$, $a_2+a_3=3a$,

$\underbrace{a_4+a_5+a_6+a_7}_{4\text{개}}=3^2a$,

$\underbrace{a_8+a_9+\ \cdots\ +a_{15}}_{8\text{개}}=3^3a$,

$\underbrace{a_{16}+a_{17}+\ \cdots\ +a_{31}}_{16\text{개}}=3^4a$,

$\underbrace{a_{32}+a_{33}+\ \cdots\ +a_{63}}_{32\text{개}}=3^5a$

이제 a의 값을 구하자.

조건 (가), (나)에 의하여

$a_{20}=a_{10}-1=a_5-2=2a-3=1$

풀면

$a=2$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{63}a_n=2(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)$

$=2\times\dfrac{3^6-1}{3-1}=728$

답 ④

[풀이2] 시험장

$a_1=a$로 두자.

조건 (가), (나)에서 주어진 두 등식을 변변히 더하면

$a_{2n}+a_{2n+1}=3a_n\ (n\geq1)$

위의 등식에 $n=1$, 2, 3을 대입하면

$a_2+a_3=3a$,

$a_4+a_5=3a_2$, $a_6+a_7=3a_3$

이상에서 다음을 알 수 있다.

$a_1=a,\ a_2+a_3=3a,$

$a_4+a_5+a_6+a_7=3(a_2+a_3)=3^2a$

$n=4,\ 5,\ 6,\ 7$을 대입하면

$a_8+a_9=3a_4,\ a_{10}+a_{11}=3a_5,$

$a_{12}+a_{13}=3a_6,\ a_{14}+a_{15}=3a_7$

이상에서 다음을 알 수 있다.

$a_8+a_9+\ \cdots\ +a_{15}=3(a_4+a_5+a_6+a_7)$

$=3^3a$

다음을 추론할 수 있다.

$a_{16}+a_{17}+\ \cdots\ +a_{31}=3^4a,$

$a_{32}+a_{33}+\ \cdots\ +a_{63}=3^5a$

이제 a의 값을 구하자.

조건 (가), (나)에 의하여

$a_{20}=a_{10}-1=a_5-2=(2a_2+1)-2$

$=2(a-1)-1=1$

풀면

$a=2$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{63}a_n=2(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)$

$=2\times\dfrac{3^6-1}{3-1}=728$

답 ④

C168 | 답 ②

[풀이]

조건 (가)에서

$a_8=a_2a_4+1=a_2(a_2a_2+1)+1$

$=(a_2)^3+a_2+1$

조건 (나)에서

$a_{15}=a_2a_7-2=a_2(a_2a_3-2)-2$

$=a_2(a_2(a_2a_1-2)-2)-2$

$=a_1(a_2)^3-2(a_2)^2-2a_2-2$

그러므로

a_8-a_{15}

$=(a_2)^3+a_2+1-a_1(a_2)^3+2(a_2)^2+2a_2+2$

$=(1-a_1)(a_2)^3+2(a_2)^2+3a_2+3$

$=3(a_2)^2+3a_2+3$

$(\because$ 조건 (가)에서 $a_2=a_2a_1+1,$ 즉

$1-a_1=\dfrac{1}{a_2})$

$=63$

정리하면

$(a_2)^2+a_2-20=0,\ (a_2+5)(a_2-4)=0$

$a_2=4\ (\because\ a_2=\dfrac{1}{1-a_1}>1)$

그리고 $a_1=\dfrac{3}{4}$

조건 (가)에서

$a_8=a_2a_4+1=a_2((a_2)^2+1)+1=69$

$\therefore\ \dfrac{a_8}{a_1}=69\times\dfrac{4}{3}=92$

답 ②

[참고]

위의 문제는 '가형21번' 이고, '나형 21번' 은 다음을 묻고 있다.

$a_7=2$일 때, a_{25}의 값은? (나머지 조건은 모두 같다.)

이제 나형 21번을 풀어보자.

조건 (나)에 의하여

$a_7=a_2a_3-2=a_2(a_2a_1-2)-2=2$

정리하면

$(a_1a_2)a_2-2a_2-4=0$

$(a_2-1)a_2-2a_2-4=0$

$(\because$ 조건 (가)에서 $a_2=a_2a_1+1)$

$(a_2)^2-3a_2-4=0,\ (a_2-4)(a_2+1)=0,$

$a_2=4\ (\because\ a_2=\dfrac{1}{1-a_1}>1)$

그리고 $a_1=\dfrac{3}{4}$

조건 (가), (나)에 의하여

$\therefore\ a_{25}=a_2a_{12}-2=4(a_2a_6+1)-2$

$=16(a_2a_3+1)+2$

$=64(a_2a_1-2)+18$

$=64+18=82$

C169 | 답 63

[풀이]

첫째항부터 제2항까지의 합은

$\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{3}{2^2}=\dfrac{4}{2^2}=1$

제3항부터 제6항까지의 합을 구하자.

등차수열의 합의 공식에 의하여

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

★ 스포일러: 2024 학년도 수능 수학 푼 사람만 읽으세요 !

2024 수능에서 보여준 출제 경향

〈 공통(수학1+수학2) 〉

- 공통 8 - 인수분해(고1)+함수의 연속성+우함수/기함수의 정적분
- 공통 10 - 삼차함수의 비율관계(빠른계산)+절댓값이 붙은 다항함수의 그래프의 개형
- 공통 12 - 최대최소 문제: 관찰 또는 식 세우기. 두 방법 모두 가능.
- 공통 14 - 교육청 2학년 문제를 보는 듯. 삼차함수와 직선의 교점의 개수가 2인 상황+이차함수의 대칭축과 꼭짓점의 위치(고1)
- 공통 15 - 수열+수형도. 전형적인 문제.
- 공통 19 - 삼각함수의 그래프가 아닌 단위원+부등식과 필요충분조건을 이루는 방정식 찾기.
- 공통 20 - 원의 성질, 두 개의 직각삼각형이 주어진 기하적 상황
- 공통 22 - 다항함수의 그래프의 개형을 그릴 때, x절편, y절편을 가장 먼저 결정해야 함. 삼차함수의 특징($-\infty \to 0 \to \infty$)+사이값 정리+귀류법. 계산은 거의 없음.

〈 확률과 통계 〉

- 확률과 통계 26 - 함수의 정의에 대한 근본을 묻는 문제. 쉽지만, 너무나도 좋은 문제.
- 확률과 통계 29 - 수의 대소 관계($a < b$, $a = b$, $a > b$)+중복조합. 교사경 기출에서 자주 다룬 유형의 문제.

〈 미적분 〉

- 미적분 28 - '2022-미적분30', '2023-확률과통계22/미적분22/기하22'의 계보를 잇는 문제. 곡선 위의 점을 먼저 찍고, 곡선을 그리면 어려울 것이 없음.
- 미적분 30 - 변곡접선을 소재로 하는 문제. (※올해 수능에서 삼차함수의 비율관계, 변곡접선, …등의 실전이론이 출제되었습니다. 앞으로의 수능에서 이런 실전이론들이 출제되지 말라는 법은 없습니다.)

〈 기하 〉

- 기하 28 - 공간도형 문제는 결국 평면도형에서 해결해야 함. 타원의 정의+원의 성질+두 개 이상의 직각삼각형이 주어진 기하적 상황
- 기하 30 - 교사경 문제인 '2013(10)고3-B형21'의 변형 문제.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

학년도	시험	실시년도/월
5차 교육과정		
1991	실험평가(1차)	1990년 12월
1992	실험평가(2차)	1991년 5월
1992	실험평가(3차)	1991년 8월
1992	실험평가(4차)	1991년 11월
1993	실험평가(5차)	1992년 5월
1993	실험평가(6차)	1992년 8월
1993	실험평가(7차)	1992년 11월
1994	대학수학능력(1차)	1993년 8월
1994	대학수학능력(2차)	1993년 11월
1995	대학수학능력	1994년 11월
1996	대학수학능력	1995년 11월
1997	대학수학능력	1996년 11월
1998	대학수학능력	1997년 11월
6차 교육과정		
1999	대학수학능력	1998년 11월
2000	대학수학능력	1999년 11월
2001	대학수학능력	2000년 11월
2002	대학수학능력	2001년 11월
2003	모의평가(9월)	2002년 9월
2003	대학수학능력	2002년 11월
2004	모의평가(6월)	2003년 6월
2004	모의평가(9월)	2003년 9월
2004	대학수학능력	2003년 11월
7차 교육과정		
2005	예비시행	2003년 12월
2005	모의평가(6월)	2004년 6월
2005	모의평가(9월)	2004년 9월
2005	대학수학능력	2004년 11월
2006	모의평가(6월)	2005년 6월
2006	모의평가(9월)	2005년 9월
2006	대학수학능력	2005년 11월
2007	모의평가(6월)	2006년 6월
2007	모의평가(9월)	2006년 9월
2007	대학수학능력	2006년 11월
2008	모의평가(6월)	2007년 6월
2008	모의평가(9월)	2007년 9월
2008	대학수학능력	2007년 11월
2009	모의평가(6월)	2008년 6월
2009	모의평가(9월)	2008년 9월
2009	대학수학능력	2008년 11월
2010	모의평가(6월)	2009년 6월
2010	모의평가(9월)	2009년 9월
2010	대학수학능력	2009년 11월
2011	모의평가(6월)	2010년 6월
2011	모의평가(9월)	2010년 9월
2011	대학수학능력	2010년 11월

학년도	시험	실시년도/월
2007개정 교육과정		
2012	모의평가(6월)	2011년 6월
2012	모의평가(9월)	2011년 9월
2012	대학수학능력	2011년 11월
2014	예비시행	2012년 5월
2013	모의평가(6월)	2012년 6월
2013	모의평가(9월)	2012년 9월
2013	대학수학능력	2012년 11월
2014	모의평가(6월)	2013년 6월
2014	모의평가(9월)	2013년 9월
2014	대학수학능력	2013년 11월
2015	모의평가(6월)	2014년 6월
2015	모의평가(9월)	2014년 9월
2015	대학수학능력	2014년 11월
2016	모의평가(6월)	2015년 6월
2016	모의평가(9월)	2015년 9월
2016	대학수학능력	2015년 11월
2009개정 교육과정		
2017	모의평가(6월)	2016년 6월
2017	모의평가(9월)	2016년 9월
2017	대학수학능력	2016년 11월
2018	모의평가(6월)	2017년 6월
2018	모의평가(9월)	2017년 9월
2018	대학수학능력	2017년 11월
2019	모의평가(6월)	2018년 6월
2019	모의평가(9월)	2018년 9월
2019	대학수학능력	2018년 11월
2020	모의평가(6월)	2019년 6월
2020	모의평가(9월)	2019년 9월
2020	대학수학능력	2019년 11월
2015개정 교육과정		
2021	예시문항	2020년 5월
2021	모의평가(6월)	2020년 6월
2021	모의평가(9월)	2020년 9월
2021	대학수학능력	2020년 11월
2022	모의평가(6월)	2021년 6월
2022	모의평가(9월)	2021년 9월
2022	대학수학능력	2021년 11월
2023	모의평가(6월)	2022년 6월
2023	모의평가(9월)	2022년 9월
2023	대학수학능력	2022년 11월
2024	모의평가(6월)	2023년 6월
2024	모의평가(9월)	2023년 9월
2024	대학수학능력	2023년 11월

○ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
소단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

○ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
다른 풀이 및 참고 사항을 최대한 수록하여 문제 해결의 다양한 시각을 제시하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

<u>특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.</u>

수능/평가원 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다. 그리고 모든 풀이를 보여준다는 의미에서 교육과정 외의 풀이도 수록하였으나, 이를 반드시 읽어야(공부해야) 하는 것은 아닙니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)
[풀이] (교육과정 외)
[참고] (교육과정 외)

목 차

수학 II

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

D 함수의 극한과 연속

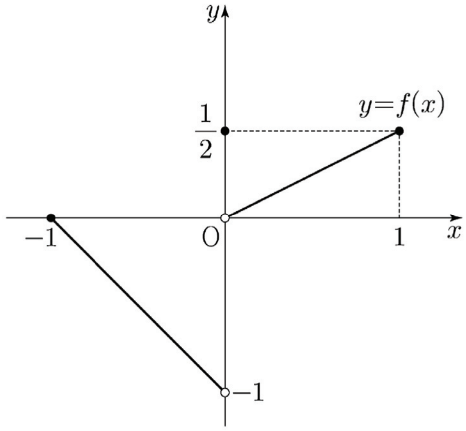
- 2015개정 교육과정

○ 주기 함수 관련 문제 포함
○ 합성함수의 극한과 연속성 관련 문제 제외 (미적분(이과)에 포함됨)

D061

○○○
(2019(9)-나형18)

닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$가

$g(x)=f(x)+|f(x)|$, $h(x)=f(x)+f(-x)$

일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\lim_{x\to 0} g(x)=0$

ㄴ. 함수 $|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

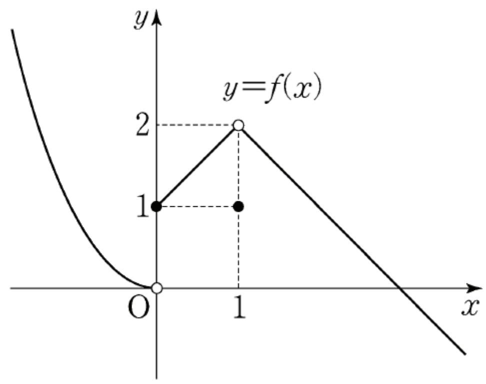
D. 함수의 연속: 곱/나누기(그래프 개형) +0을 곱하기

▶ 실전 이론 p.149

D062

○○
(2012-나형18)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. $\lim_{x\to 0+} f(x)=1$

ㄴ. $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

ㄷ. 함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D063

○○
(2013(9)−나형13)

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} a & (x \le 1) \\ -x+2 & (x>1) \end{cases}$$

일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, a는 상수이다.) [3점]

ㄱ. $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$ ㄴ. $a=0$이면 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. ㄷ. 함수 $y=(x-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D064

○○○
(2011(6)−가형11)

함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\neq 1) \\ 2 & (x=1) \end{cases}$일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)$ ㄴ. 함수 $g(x)=f(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a가 존재한다. ㄷ. 함수 $h(x)=(x-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D065

○○
(2013(6)−나형19)

함수

$$f(x)=\begin{cases} x & (|x|\ge 1) \\ -x & (|x|<1) \end{cases}$$

에 대하여, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $f(x)$가 불연속인 점은 2개다. ㄴ. 함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. ㄷ. 함수 $\{f(x)\}^2$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D066

○○○
(2020(6)−나형15)

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+3 & (x<0) \\ -2x+2 & (x\ge 0) \end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases} 2x & (x<a) \\ 2x-1 & (x\ge a) \end{cases}$$

가 있다. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

D067

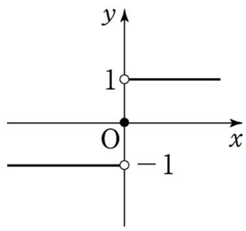
○○○
(2006-가형6)

모든 실수에서 정의된 함수 $y=f(x)$에 대하여 함수 $y=x^k f(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 가장 작은 자연수 k를 $N(f)$로 나타내자. 예를 들어,

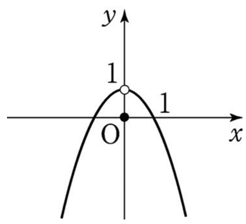
$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$이면 $N(f)=2$이다.

다음 함수 $g_i(i=1,\ 2,\ 3)$에 대하여 $N(g_i)=a_i$라 할 때, a_i의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [3점]

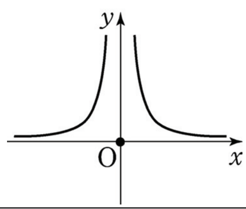
$$g_1(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$



$$g_2(x)=\begin{cases} -x^2+1 & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$



$$g_3(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$



① $a_1=a_2<a_3$　　② $a_1<a_2=a_3$
③ $a_1=a_2=a_3$　　④ $a_2=a_3<a_1$
⑤ $a_3<a_1=a_2$

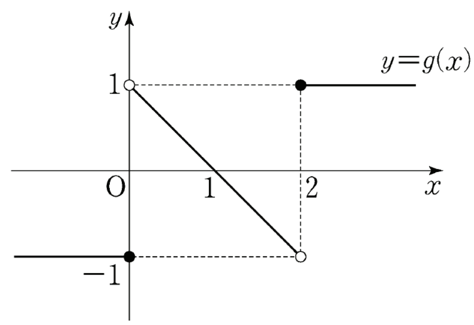
D068

○○○
(2013(6)-가형6)

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases} -1 & (x\leq 0) \\ -x+1 & (0<x<2) \\ 1 & (x\geq 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f(5)$의 값은? [3점]

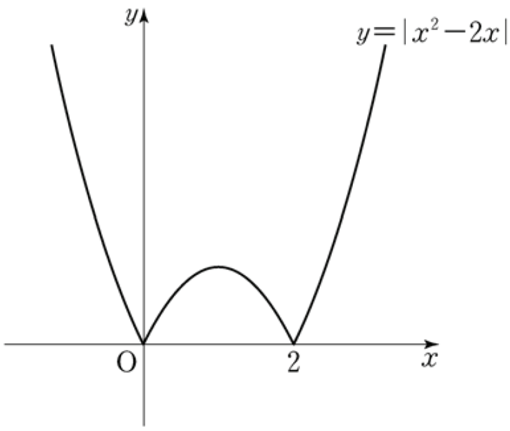


① 15　　② 17　　③ 19
④ 21　　⑤ 23

D069

○○○
(2016(6)−A형29)

실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=|x^2-2x|$와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(t)$에 대하여 함수 $f(t)g(t)$가 모든 실수 t에서 연속일 때, $f(3)+g(3)$의 값을 구하시오. [4점]



D. 함수의 연속: 곱/나누기(그래프 개형) +0을 곱하기+평행이동

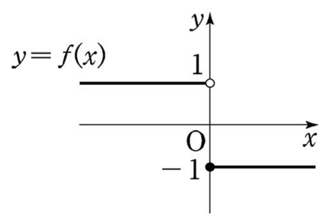
▶ 실전 이론 p.151

D070

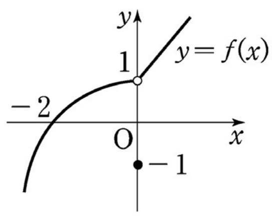
○○○
(2009(9)−가형6)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 〈보기〉와 같이 주어질 때, 함수 $y=f(x-1)f(x+1)$이 $x=-1$에서 연속이 되는 경우만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

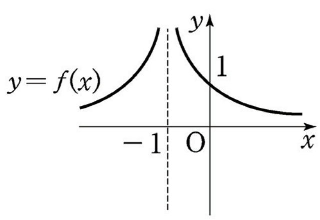
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D071

○○○
(2013−나형20)

두 함수

$$f(x)=\begin{cases}-1 & (|x|\ge 1)\\ 1 & (|x|<1)\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}1 & (|x|\ge 1)\\ -x & (|x|<1)\end{cases}$$

에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=-1$

ㄴ. 함수 $g(x+1)$은 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D072

●●●
(2011−가형8)

함수

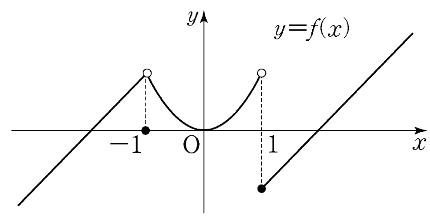
$$f(x)=\begin{cases}x+2 & (x<-1)\\ 0 & (x=-1)\\ x^2 & (-1<x<1)\\ x-2 & (x\ge 1)\end{cases}$$

에 대하여 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. $\lim_{x\to 1+}\{f(x)+f(-x)\}=0$

ㄴ. 함수 $f(x)-|f(x)|$가 불연속인 점은 1개다.

ㄷ. 함수 $f(x)f(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되는 상수 a는 없다.



① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

D073

●●● (2014-A형28)

함수

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x \le 0) \\ -\frac{1}{2}x+7 & (x>0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

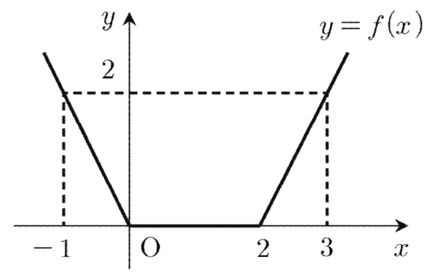
D. 함수의 연속: 곱/나누기(그래프 개형) +네 가지 경우 판단

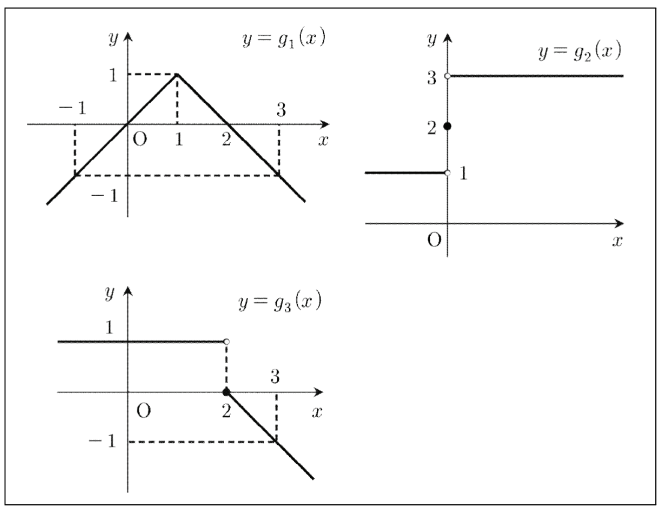
▶ 실전 이론 p.152

D074

○○ (1996-인문예체능9/자연9)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같이 주어져 있다. 아래의 그래프로 주어진 함수 $y=g_1(x)$, $y=g_2(x)$, $y=g_3(x)$ 중에서 $f(x)$와 곱하여 얻어지는 함수 $y=f(x)g_k(x)$ $(k=1,\ 2,\ 3)$이 구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이 되는 $g_k(x)$를 모두 고르면? [1점]





① $g_1(x)$　② $g_2(x)$　③ $g_1(x),\ g_2(x)$

④ $g_1(x),\ g_3(x)$　⑤ $g_1(x),\ g_2(x),\ g_3(x)$

E. 삼차함수의 그래프: 미분 가능성(절댓값)

▶ 실전 이론 p.231

E122

●●●
(2016-A형21)

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. Mm의 값은? [4점]

(가) 함수 $\lvert f(x) \rvert$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다. (나) 방정식 $f(x)=0$은 닫힌구간 $[3,\ 5]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① $\dfrac{1}{15}$　② $\dfrac{1}{10}$　③ $\dfrac{2}{15}$　④ $\dfrac{1}{6}$　⑤ $\dfrac{1}{5}$

E123

○○○
(2014(6)-B형16)

실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $(t,\ t^3)$과 직선 $y=x+6$ 사이의 거리를 $g(t)$라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. ㄴ. 함수 $g(t)$는 0이 아닌 극솟값을 갖는다. ㄷ. 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능하다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

E124

(2014－A형21)

좌표평면에서 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 P라 할 때, 원점에서 점 P까지의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$ (나) 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 21 ② 24 ③ 27 ④ 30 ⑤ 33

E125

(2022(6)－확률과통계14/미적분14/기하14)

두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=\|xf(x-p)+qx\|$이다. (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

E126

★★★ (2021-나형30)

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고,
함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases}|f(x)-g(x)| & (x<1)\\ f(x)+g(x) & (x\geq 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

E127

★★★ (2022(9)-확률과통계22/미적분22/기하22)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근
α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

E128

●●●
(2021(9)−나형30)

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=f(3)=0$ (나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오. [4점]

E. 삼차함수의 그래프: 변곡접선

▶ 실전 이론 p.237

E129

○○○
(2011(9)−가형21)

함수 $f(x)=x^3-(a+2)x^2+ax$에 대하여
곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 열린구간 $(0,\ 5)$에서 증가할 때, a의 최솟값을 구하시오. [3점]

F. 정적분으로 주어진 함수: 극대와 극소(1)

▶ 실전 이론 p.267

F021

○
(2012-나형9)

함수 $F(x)=\int_{0}^{x}(t^3-1)dt$에 대하여 $F'(2)$의 값은? [3점]

① 11 ② 9 ③ 7
④ 5 ⑤ 3

F022

○○
(2021(9)-나형28)

함수 $f(x)=-x^2-4x+a$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$$

가 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

F023

○○○
(2023-확률과통계12/미적분12/기하12)

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$n-1\le x<n$일 때, $\lvert f(x)\rvert=\lvert 6(x-n+1)(x-n)\rvert$이다. (단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0,\ 4)$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt-\int_{x}^{4}f(t)dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때,

$\int_{\frac{1}{2}}^{4}f(x)dx$의 값은? [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

F024

○○○
(2024-확률과통계12/미적분12/기하12)

함수 $f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와

실수 $t(0<t<6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -(x-t)+f(t) & (x\ge t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은? [4점]

① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$
④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

F. 정적분으로 주어진 함수: 극대와 극소(2)

▶ 실전 이론 p.268

F025

●●● (2019(9)–나형21)

사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$에 대하여

$x\geq 0$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 $g(x)=c_1$(c_1은 상수)
(나) $1<x<5$에서 $g(x)$는 감소한다.
(다) $x>5$에서 $g(x)=c_2$(c_2는 상수)

$f(\sqrt{2})$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 40 ② 42 ③ 44

④ 46 ⑤ 48

F. 정적분으로 주어진 함수: 극대와 극소 $\int_x^{x+a}$

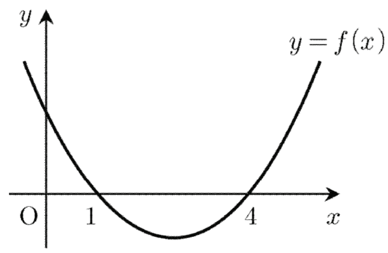
▶ 실전 이론 p.270

F026

○○○ (1994(2차)–공통3)

오른쪽 그림은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프이다.

함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt$라 할 때, $g(x)$의 최솟값은? [3점]



① $g(1)$ ② $g(2)$ ③ $g\left(\frac{5}{2}\right)$

④ $g\left(\frac{7}{2}\right)$ ⑤ $g(4)$

F027

○○○ (2023(6)–확률과통계20/미적분20/기하20)

최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

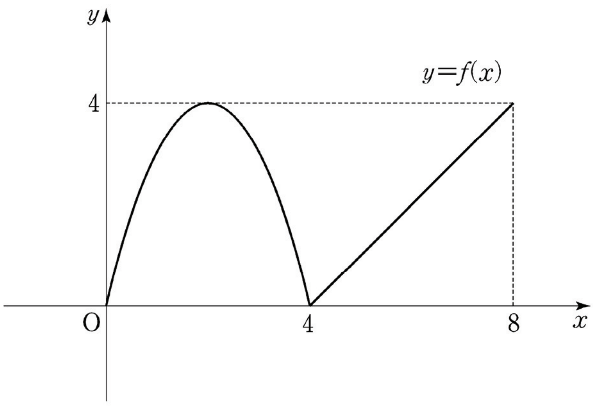
F028

●●●
(2017(9)−나형29)

구간 $[0,\ 8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-x(x-4) & (0 \le x < 4) \\ x-4 & (4 \le x \le 8)\end{cases}$$

이다. 실수 $a(0 \le a \le 4)$에 대하여 $\displaystyle\int_a^{a+4} f(x)dx$의 최솟값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



F. 정적분으로 주어진 함수: 그래프의 개형 결정

▶ 실전 이론 p.272

F029

○○○
(2013−나형21)

삼차함수 $f(x)=x^3-3x+a$에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 양수 a의 최솟값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

F030

(2009(9)−가형10)

함수 $f(x)=\begin{cases}-1 & (x<1)\\ -x+2 & (x\geq 1)\end{cases}$

에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_{-1}^{x}(t-1)f(t)dt$라 하자.

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $g(x)$는 구간 $(1,\ 2)$에서 증가한다. ㄴ. $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다. ㄷ. 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k가 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

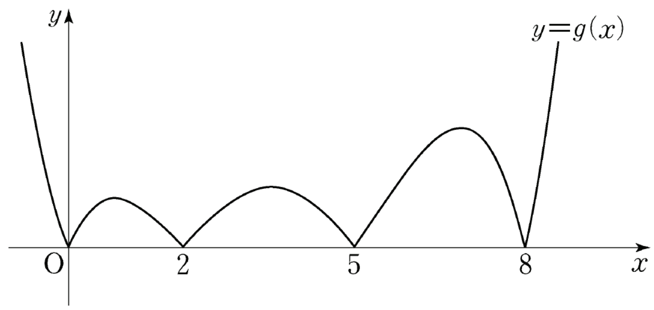
F031

(2013−가형19)

삼차함수 $f(x)$는 $f(0)>0$을 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\left|\int_{0}^{x}f(t)dt\right|$$

라 할 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다. ㄴ. $f'(0)<0$ ㄷ. $\int_{m}^{m+2}f(x)dx>0$을 만족시키는 자연수 m의 개수는 3이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

F032

(2023(6)-확률과통계14/미적분14/기하14) ●●●

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} -\int_0^x f(t)dt & (x<0) \\ \int_0^x f(t)dt & (x\geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $2<f(1)<4$일 때,
방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ㄱ, ㄴ, ㄷ

F033

(2024(6)-확률과통계20/미적분20/기하20) ●●●

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

$x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x)\geq g(4)$이고 $|g(x)|\geq|g(3)|$이다.

F. 정적분 계산

▶ 실전 이론 p.273

F034

○○ (2012(9)-나형13)

모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\int_0^3 f(x)dx=3\int_0^1 f(x)dx$
ㄴ. $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^1 f(x)dx$
ㄷ. $\int_0^1 \{f(x)\}^2dx=\left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}^2$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

F035

○ (2008(9)-가형5)

$\int_0^2 |x^2(x-1)|\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

D. 함수의 극한 계산: 귀류법

▶ 기출 문제 p.12

귀류법의 관점에서 아래의 두 예제를 풀어보자.

예제 1

$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-1)}{x-b}=2$를 만족시키는 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

풀이

$x\to a$일 때, (분자)$\to 0$, (분수)$\to 2$이므로
(분모)$=a-b\to 0$이다. 즉, $a=b$
(귀류법: 만약 (분모)가 0에 수렴하지 않으면 (분수)$\to 0$이므로 이는 가정에 모순이다.)
이를 문제에서 주어진 등식에 대입하면

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-1)}{x-b}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-1)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}(x-1)=a-1=2,\ a=3,\ b=3$$

$\therefore\ a+b=6$

답 ④

예제 2

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+bx}-2x)=3$일 때, 두 상수 a, b의 값을 구하시오.

풀이

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+bx}-2x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-4)x^2+bx}{\sqrt{ax^2+b}+2x}$$

(이때, $a=4$이어야 한다. 그렇지 않으면 발산한다.)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{bx}{\sqrt{4x^2+b}+2x}$$
$$=\frac{b}{2+2}=3,\ b=12$$

$\therefore\ a=4,\ b=12$

(※ 상수 a의 값을 다음과 같이 빠르게 구할 수도 있다.
$x\to\infty$일 때, $ax^2+bx\approx ax^2$이므로 $\sqrt{ax^2+bx}\approx\sqrt{a}x$이다.
$\sqrt{ax^2+bx}-2x\approx(\sqrt{a}-2)x$이 수렴해야 하므로
$\sqrt{a}=2$, 즉 $a=4$이다. (귀류법))

답 $a=4$, $b=12$

예제 3

다음 명제의 참, 거짓을 밝히고, 참이면 증명하고, 거짓이면 반례를 찾으시오.
두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(1) $f(a)=0$이고, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이면 $g(a)=0$이다.

(2) $f(a)=0$이고, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha(\neq 0)$이면 $g(a)=0$이다.

(3) $g(a)=0$이고, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$이면 $f(a)=0$이다.

풀이

(1) (거짓)
(반례) $f(x)=x$, $g(x)=x^2+1$일 때,
$f(0)=0$, $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+1}=0$이지만 $g(0)=1\neq 0$이다.

(2) (참)
$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{f(x)}{g(x)}}=\frac{0}{\alpha}=0,\ \text{즉}\ g(a)=0$$

(3) (참)
$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)=\alpha\times 0=0,\ \text{즉}\ f(a)=0$$

답 풀이 참조

위의 예제를 적용하여 기출문제를 풀자.

D. 함수의 극한 계산: 차수, 계수 결정

▶ 기출 문제 p.14

• 최고차수와 계수 결정

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$의 수렴과 발산에 대하여 알아보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수를 각각 a, b라고 하면

$(f(x)$의 차수$)>(g(x)$의 차수$)$:

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty(ab>0)$ 또는

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty(ab<0)$

$(f(x)$의 차수$)=(g(x)$의 차수$)$:

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}(\neq 0)$

$(f(x)$의 차수$)<(g(x)$의 차수$)$:

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

각각에 대한 예를 들면

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x}{-3x^2-1}=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{3x^2+x}=\frac{2}{3}$,

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^3+x}=0$

따라서

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$이면 함수 $f(x)$의 차수가 함수 $g(x)$의 차수보다 크다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha(\alpha\neq 0$인 상수$)$이면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 차수는 서로 같다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$이면 함수 $g(x)$의 차수가 함수 $f(x)$의 차수보다 크다.

몇 가지의 예를 들어보자.

상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$이면 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로
함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=2x^2+ax+b$(단, a, b는 상수)이다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2}{f(x)}=2$이면 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로
함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=3x^2+ax+b$(단, a, b는 상수)이다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$이면 $f(x)$는 이차함수 또는 일차함수이므로
함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=ax^2+bx+c$(단, a, b, c는 상수(단, 이 세 수가 모두 0일 수 없다.))이다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{f(x)}=0$이면 $f(x)$는 사차 이상의 함수이므로
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$
(단, $n\geq 4$, $a_n\neq 0$, a_{n-1}, $\cdots$, a_0은 상수)이다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=-\infty$이면 $f(x)$는 사차 이상의 함수이므로
함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$
(단, $n\geq 4$, $a_n<0$, $\cdots$, a_0은 상수)이다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{f(x)}=-\infty$이면 $f(x)$는 이차함수 또는 일차함수이므로
함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=ax^2+bx+c$(단, $a<0$, b, c는 상수)
또는
$f(x)=ax+b$(단, $a<0$, b는 상수)
이다.

다음과 같은 예도 생각해볼 수 있다.

$\lim\limits_{x\to 0+} x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)=3$이면 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^2}=3$이므로
$f(x)=3x^2+ax+b$이다.
이때, $x=\frac{1}{t}$으로 치환한 것이고, $x\to 0+$일 때, $t\to\infty$이다. 치환을 하는 이유는 우리에게 익숙한 식의 모양을 만들어 내기 위함이다.

● 최저차수와 계수 결정

이제 다항함수의 최저차수와 계수를 결정해보자.

예를 들어 다항함수 $f(x)$에 대하여
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=2$
이면 $f(x)=a_n x^n+\cdots+2x^3$ (단, $n\geq 3$, $a_n\neq 0$)이다.

이를 귀류법으로 증명해보자.

$f(x)=a_n x^n+\cdots+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$
(단, $a_n\neq 0$)
으로 두면
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(a_n x^{n-3}+\cdots+a_3+\frac{a_2}{x}+\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_0}{x^3}\right)$
$=a_3=2$

이때, $a_2\neq 0$, $a_1\neq 0$, $a_0\neq 0$이면 $\frac{a_2}{x}$, $\frac{a_1}{x^2}$, $\frac{a_0}{x^3}$은 모두 발산하므로
귀류법에 의하여 a_2, a_1, a_0는 모두 0을 값으로 갖는다.
$\therefore\ f(x)=a_n x^n+\cdots+2x^3$ (단, $n\geq 3$, $a_n\neq 0$)

일반적으로
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^m}=c$
이면
$f(x)=a_n x^n+\cdots+cx^m$ (단, $a_n\neq 0$, $n\geq m$)
이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

〈최고차수와 계수, 최저차수와 계수〉
다항함수 $f(x)$에 대하여
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^n}=a$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^m}=b$
(단, a와 b는 0이 아닌 상수, n, m은 자연수)
이면 함수 $f(x)$의 최고차항은 계수가 a인 n차이고, 차수가 가장 낮은 항은 계수가 b인 m차이다.
즉, $f(x)=ax^n+\cdots+bx^m$ (단, $n\geq m$)

예제 1

4차 이하의 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3+5x^2}{x^n+1}=4,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=5$$

일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. (단, n은 자연수이다.)

풀이

$n=1$:

왼쪽 등식을 만족시키는 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^3-5x^2+4x+a$ (단, a는 상수)

그런데 이는 오른쪽 등식을 만족시키지 않는다.

$n=2$:

왼쪽 등식을 만족시키는 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2x^3-x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)

그런데 이는 오른쪽 등식을 만족시키지 않는다.

$n=3$:

왼쪽 등식을 만족시키는 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=6x^3+ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수)

그런데 이는 오른쪽 등식을 만족시키지 않는다.

$n=4$: 왼쪽 등식을 만족시키는 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=4x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (단, a, b, c, d는 상수)

오른쪽 등식을 만족시키기 위해서는

$a=5$, $b=c=d=0$

즉, $f(x)=4x^4+5x^3$

$\therefore$ $f(1)=9$

답 9

예제 2

최고차항의 계수가 1인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음의 두 조건이 성립한다.

> (가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g(x)}{x^3}=1$
>
> (나) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=-1$

이때, $f(2)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

풀이

(가), (나)에서

$f(x)g(x)=x^3-x^2(=x\times x\times(x-1))$

$f(x)=x$, $g(x)=x(x-1)$: $f(2)=2$

$f(x)=x-1$, $g(x)=x^2$: $f(2)=1$

$f(x)=x^2$, $g(x)=x-1$: $f(2)=4$

$f(x)=x(x-1)$, $g(x)=x$: $f(2)=2$

따라서 구하는 값은 $1+4=5$이다.

답 5

D. 함수의 연속: 구간별로 정의되는 함수

▶ 기출 문제 p.17

예제 1

두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x$에 대하여 함수

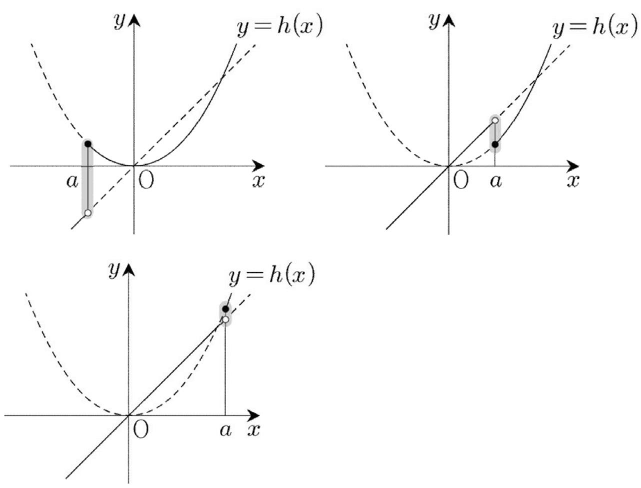
$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \ge a) \\ g(x) & (x < a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되는 상수 a의 값을 모두 찾으시오.

풀이

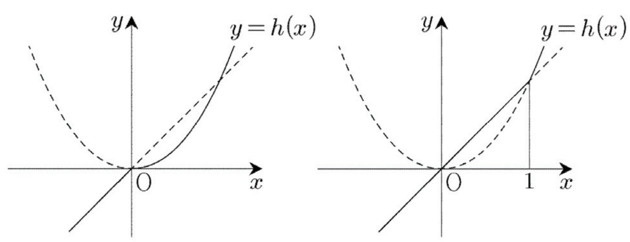
a의 값을 변화시키면서 함수 $h(x)$의 연속성을 판단하면 다음과 같다.

(1) 함수 $h(x)$가 불연속인 경우



위의 그림처럼 $a<0$, $0<a<1$, $a>1$이면 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

(2) 함수 $h(x)$가 연속인 경우



위의 그림처럼 $a=0$ 또는 $a=1$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이상에서 $a=0$ 또는 $a=1$이다.

답 $a=0$ 또는 $a=1$

위의 문제에서와 같이 실수 전체의 집합에서 연속인 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표가 a일 때,

함수 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \ge a) \\ g(x) & (x < a) \end{cases}$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 그리고 이 명제의 역도 성립한다.

이 주제에 해당하는 기출문제를 풀 때, 유용한 명제를 알아보자.

• 수의 대소 관계

함수 $y=x^2$ 또는 $y=x^3$의 그래프를 이용하여 다음 명제들의 참, 거짓을 스스로 판단해 보아라.

a, b가 실수일 때,

$a=b \Leftrightarrow a^3=b^3$ (수식 증명보다는 그래프의 개형(일대일대응)을 이용한 증명이 낫다.)

$a=b \Rightarrow a^2=b^2$

$a^2=b^2 \rightarrow a=b$ (거짓) (반례: $a=1$, $b=-1$)

$a<b \Leftrightarrow a^3<b^3$

$a<b \rightarrow a^2<b^2$ (거짓) (반례: $a=-2$, $b=1$)

$a^2<b^2 \rightarrow a<b$ (거짓) (반례: $a=1$, $b=-2$)

$a<x<b \Leftrightarrow a^3<x^3<b^3$

$a<x<b \rightarrow a^2<x^2<b^2$ (거짓)

$a^2<x^2<b^2 \rightarrow a<x<b$ (거짓)

이 주제에 해당하는 기출문제를 풀 때, 유용한 문제를 풀어보자.

• 이차방정식과 이차부등식

예제 2

(1) x에 대한 방정식 $ax+b=0$을 푸시오.

(2) x에 대한 방정식 $ax^2+bx+c=0$을 푸시오.

(3) 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$을 푸시오. (단, $a>0$)

(4) 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$을 푸시오. (단, $a>0$)

(5) 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$을 푸시오. (단, $a>0$)

(6) 이차부등식 $ax^2+bx+c\leq 0$을 푸시오. (단, $a>0$)

풀이

(1) $a=0$, $b=0$이면 $0\times x+0=0$이므로 해집합은 실수 전체의 집합이다.
$a=0$, $b\neq 0$이면 $0\times x+b=0$이므로 해집합은 공집합이다.
$a\neq 0$이면 $x=-\dfrac{b}{a}$이므로 해집합은 $\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$이다.

(2) • $a=0$인 경우
$bx+c=0$에서
$b=0$, $c=0$이면 해집합은 실수 전체의 집합,
$b=0$, $c\neq 0$이면 해집합은 공집합,
$b\neq 0$이면 해집합은 $\left\{-\dfrac{c}{b}\right\}$이다.

• $a\neq 0$인 경우
주어진 방정식은 이차방정식이므로
$D=b^2-4ac>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖고,
$D=b^2-4ac=0$이면 중근을 갖고,
$D=b^2-4ac<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(아래부터는 이차함수의 그래프 개형을 그려서 확인해보길 바랍니다.)

(3)
$D=b^2-4ac>0$인 경우: 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 하면
해집합은 $\{x|x<\alpha,\ x>\beta\}$
$D=b^2-4ac=0$인 경우: 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 중근을 α라고 하면
해집합은 $\{x|x\neq\alpha\}$
$D=b^2-4ac<0$인 경우: 해집합은 실수 전체의 집합이다.

(4)
$D=b^2-4ac>0$인 경우: 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 하면
해집합은 $\{x|x\leq\alpha,\ x\geq\beta\}$
$D=b^2-4ac=0$인 경우: 해집합은 실수 전체의 집합이다.
$D=b^2-4ac<0$인 경우: 해집합은 실수 전체의 집합이다.

(5)
$D=b^2-4ac>0$인 경우: 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 하면
해집합은 $\{x|\alpha<x<\beta\}$
$D=b^2-4ac=0$인 경우: 해집합은 공집합이다.
$D=b^2-4ac<0$인 경우: 해집합은 공집합이다.

(6) $D=b^2-4ac>0$인 경우:
방정식 $ax^2+bx+c=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라고 하면
해집합은 $\{x|\alpha\leq x\leq\beta\}$
$D=b^2-4ac=0$인 경우: 방정식 $ax^2+bx+c=0$의 중근을 α라고 하면
해집합은 $\{x|x=\alpha\}$
$D=b^2-4ac<0$인 경우: 해집합은 공집합이다.

답 풀이 참조

D. 함수의 연속: 절댓값

▶ 기출 문제 p.20

• 절댓값이 포함된 함수의 연속성

예제 1

다음 명제의 참, 거짓을 판단하시오. 그리고 참이면 증명하고, 거짓이면 반례를 찾으시오.

(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면
$|f(x)|$는 $x=a$에서 연속이다.
(2) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 연속이면
$f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
(3) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 불연속이면
$f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

(2)는 (1)의 역명제, (3)은 (1)의 대우명제이다.

풀이

(1) (참)
$g(x)=|x|$로 두자.
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고,
함수 $g(x)$가 $x=f(a)$에서 연속이므로
합성함수 $g(f(x))=|f(x)|$는 $x=a$에서 연속이다.
(2) (거짓)
(반례)
함수 $f(x)$의 방정식을

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\geq 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$

으로 두면, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.
함수 $|f(x)|$의 방정식은
$|f(x)|=1$
상수함수는 실수 전체의 집합에서 연속이므로, 함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.
(3) (참)
이 명제는 (1)의 대우명제이므로 참이다.

답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 참

참고

즉, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속임에도 함수 $|f(x)|$는 $x=a$에서 연속일 수 있다. 이런 상황은 문제 풀이에서 자주 등장하므로 반드시 기억해 두어야 한다.

이제 다음과 같은 표를 생각할 수 있다. ($x=0$에서의 연속성을 생각하자.)

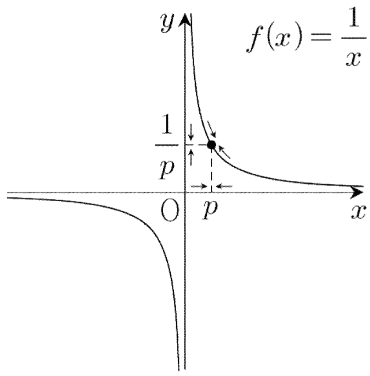
$\lvert f\rvert$ \ f	연속	불연속
연속	$f(x)=2x$	$f(x)=\begin{cases}1 & (x\geq 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$
불연속	$\times$	$f(x)=\begin{cases}1 & (x\geq 0)\\ -2 & (x<0)\end{cases}$

D. 함수의 연속: 분수함수

▶ 기출 문제 p.21

• 분수함수의 연속성

함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$의 연속성에 대하여 알아보자.



위의 그림처럼 두 구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에 속하는 임의의 실수 p에 대하여

$\lim_{x \to p} f(x)=f(p)$

이므로 함수 $f(x)$는 두 구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 연속이다.

하지만 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이 아니다.

이처럼 점에서의 연속성과 구간에서의 연속성을 구별할 수 있어야 한다.

몇 개의 예를 더 생각해보자.

함수 $y=\dfrac{1}{x-1}$는 $x=1$에서 불연속이다.

(왜냐하면 $x=1$에서 함숫값이 정의되지 않기 때문이다.)

그리고 이 함수는 두 구간 $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ \infty)$에서 연속이다.

함수 $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$는 $x=1$, $x=2$에서 불연속이다. (왜냐하면 $x=1$, $x=2$에서 함숫값이 정의되지 않기 때문이다.)

그리고 이 함수는 세 구간 $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ \infty)$에서 연속이다.

함수 $y=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}$는 $x=1$에서 불연속이다.

(왜냐하면 $x=1$에서 함숫값이 정의되지 않기 때문이다.)

그리고 이 함수는 두 구간 $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ \infty)$에서 연속이다.

이 함수의 방정식을 정리하면

$y=x-2(x \neq 1)$

이다. 이때, 이 함수가 $x=1$에서 불연속임을 잊어서는 안 된다.

함수 $y=\dfrac{x}{x(x-1)}$은 $x=0$, $x=1$에서 불연속이다.

(왜냐하면 $x=0$, $x=1$에서 함숫값이 정의되지 않기 때문이다.)

이 함수의 방정식을 정리하면

$y=\dfrac{1}{x-1}$ (단, $x \neq 0$, $x \neq 1$)

이다. 이때, 이 함수가 $x=0$에서 불연속임을 잊어서는 안 된다.

함수 $y=\dfrac{1}{x^2-x+1}$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

왜냐하면 모든 실수 x에 대하여

(분모)$=x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$이기 때문이다.

함수 $y=\dfrac{1}{ax^2+bx+c}(a \neq 0)$이 실수 전체의 집합에서 연속일 필요충분조건은

$ax^2+bx+c \neq 0$ 즉, (판별식)$=b^2-4ac<0$

이다. 다시 말하면 (분모)$\neq 0$

$\Leftrightarrow$ (분모)>0 또는 (분모)<0이다.

삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$y=\frac{1}{f(x)}$$

은 적어도 1개 이상의 점에서 불연속이다.
왜냐하면 모든 삼차방정식 $f(x)=0$은 적어도 하나 이상의 실근을 갖기 때문이다. 이때, 한 실근을 α라고 하면

$f(x)=(x-\alpha)(ax^2+bx+c)$ $(a \neq 0)$

이고, 함수

$$y=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}$$

는 $x=\alpha$에서 불연속이다.

예제 1

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $x=0$에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)g(x)=x$
(나) $g(0)=1$

이때, $f(2)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

풀이

조건 (나)에서

$f(0)g(0)=f(0)\times 1=0$, 즉, $f(0)=0$

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x^2+ax$

로 두자.

조건 (가)에서

$$g(x)=\frac{x}{f(x)} \quad (\text{단, } f(x)\neq 0)$$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$ 즉,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+ax}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+a}=\frac{1}{a}=1,\ a=1$$

$\therefore$ $f(x)=x^2+x$

$\therefore$ $f(2)=6$

답 ④

예제 2

삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$y=\frac{1}{f(x)}$$

의 연속성을 판단하시오.

풀이

$f(x)=(x-\alpha)(ax^2+bx+c)$ (단, $a\neq 0$)

$f(x)=0$

$\Leftrightarrow$ $x=\alpha$ 또는 $ax^2+bx+c=0(\cdots(*))$

이차방정식 (*)의 판별식을 D라고 하자.

$D>0$: (*)의 서로 다른 두 실근을 β, γ라고 하자.

$$f(x)=\frac{1}{a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$$

$\beta\neq\alpha$, $\gamma\neq\alpha$인 경우: 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, β, γ에서 불연속이다.

$\beta=\alpha(\gamma\neq\alpha)$인 경우: 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, γ에서 불연속이다.

$\gamma=\alpha(\beta\neq\alpha)$인 경우: 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, β에서 불연속이다.

$D=0$: (*)의 중근을 β라고 하자.

$$f(x)=\frac{1}{a(x-\alpha)(x-\beta)^2}$$

$\beta\neq\alpha$인 경우: 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, β에서 불연속이다.

$\beta=\alpha$인 경우: 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이다.

$D<0$: (*)는 실근을 갖지 않는다.

$$f(x)=\frac{1}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}$$

함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이다.

답 풀이 참조

D. 함수의 연속: 역함수

▶ 기출 문제 p.22

이 주제에 대한 특별한 실전 이론은 없습니다.

예제 1

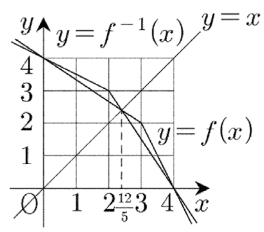
연속함수 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{3}x+4 & (x\leq 3)\\ -2x+a & (x>3)\end{cases}$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 교점들의 x좌표의 합을 구하시오.

풀이

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 3+} f(x)=f(3)$, 즉 $a-6=2$, $a=8$

두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프를 한 평면 위에 그리면



위의 그림에서

방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 해집합은 $\left\{0,\ \dfrac{12}{5},\ 4\right\}$이다.

따라서 구하는 값은 $\dfrac{32}{5}$이다.

답 $\dfrac{32}{5}$

E. 그래프의 개형: 영역

▶ 기출 문제 p.60

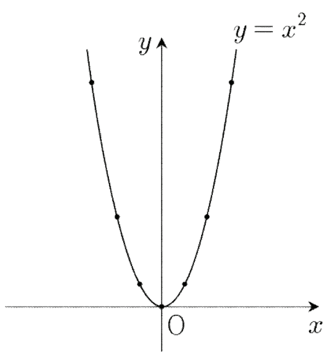
다항함수의 그래프를 그리는 순서

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역 표시)
❷ 좌표축과의 교점 (또는 중요한 정점)
❸ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소 (도함수 이용)

함수의 그래프의 개형을 그릴 때, ❶과 ❷를 간과해서는 안 된다.

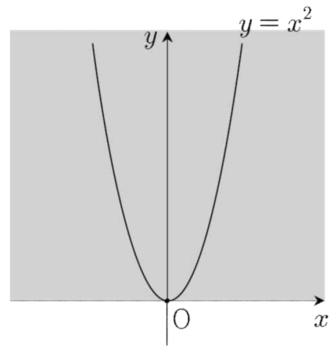
• 처음 보는 함수의 그래프는 점찍어 그린다.

교과서에서는 함수 $y=x^2$의 그래프의 개형을 처음 그릴 때, 이 곡선이 지나는 몇 개의 점을 찍고, 이 점들을 부드럽게 연결한다. 이때, 부드럽게 연결하는 이유는 이차함수가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 때문이다. 일반적으로 처음 보는 함수의 그래프의 개형을 그릴 때, 이 곡선이 지나는 몇 개의 점을 찾아 찍으면 전체 모양을 대략적으로 짐작할 수 있다.



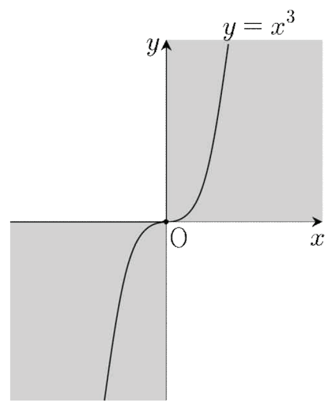
• 곡선이 지나는 영역을 표시한다. (접선을 찾게 되는 경우(귀류법))

모든 실수 x에 대하여 $x^2 \geq 0$이므로 곡선 $y=x^2$은 제1사분면과 제2사분면을 지나지만, 제3사분면과 제4사분면은 지나지 않는다. 그런데 곡선 $y=x^2$은 원점을 지나므로 아래 그림과 같이 원점에서 x축에 접할 수밖에 없다. 이처럼 곡선이 지나는 영역을 먼저 표시하면 곡선에 접하는 직선을 찾을 수도 있다. ($\because$ 귀류법)



• 곡선이 지나는 영역을 표시한다. (지나는 정점을 찾게 되는 경우(귀류법))

모든 양수 x에 대하여 $x^3>0$, 모든 음수 x에 대하여 $x^3<0$이므로 곡선 $y=x^3$은 제1사분면과 제3사분면을 지나고, 제2사분면과 제4사분면은 지나지 않는다. 이때, 곡선 $y=x^3$은 실수 전체의 집합에서 연속이므로 원점을 지날 수밖에 없다. 이처럼 곡선이 지나는 영역을 먼저 표시하면 곡선이 반드시 지나는 점을 찾을 수도 있다. ($\because$ 귀류법)



다항함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그릴 때,

❶ 삼차함수와 사차함수의 그래프의 개형

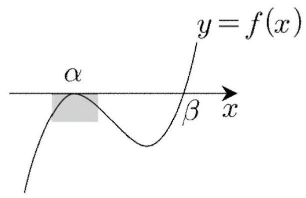
❷ 지나는 영역 (정의역/치역)

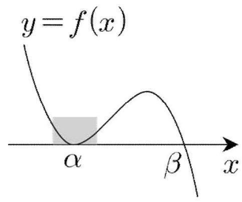
❸ 지나는 정점 (절편/그 외의 정점)

위의 세 가지를 알면 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 빠르게 그릴 수도 있다.

몇 가지의 예를 들어보자.

(1) 함수 $f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$의 그래프의 개형을 그려보자. (단, $\alpha<\beta$)





(단, 왼쪽은 $k>0$인 경우, 오른쪽은 $k<0$인 경우)

$k>0$일 때, 구간 $(\alpha-h,\ \alpha+h)$ (단, 아주 작은 양수 h)에 속하는 임의의 실수 x에 대하여

$$f(x)=\underbrace{k}_{+}\underbrace{(x-\alpha)^2}_{+\text{ 또는 }0}\underbrace{(x-\beta)}_{-}\le 0$$

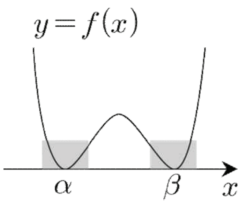
즉, 위의 그림(왼쪽)처럼 구간 $(\alpha-h,\ \alpha+h)$에서 곡선 $y=f(x)$는 x축에 접하거나, 그 아래쪽 방향에 놓여 있다.

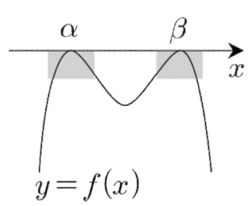
$k<0$일 때, 구간 $(\alpha-h,\ \alpha+h)$ (단, 아주 작은 양수 h)에 속하는 임의의 실수 x에 대하여

$$f(x)=\underbrace{k}_{-}\underbrace{(x-\alpha)^2}_{+\text{ 또는 }0}\underbrace{(x-\beta)}_{-}\ge 0$$

즉, 위의 그림(왼쪽)처럼 구간 $(\alpha-h,\ \alpha+h)$에서 곡선 $y=f(x)$는 x축에 접하거나, 그 위쪽 방향에 놓여 있다.

(2) 함수 $f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$의 그래프의 개형을 그려보자. (단, $\alpha<\beta$)





(단, 왼쪽은 $k>0$인 경우, 오른쪽은 $k<0$인 경우)

$k>0$일 때, 구간 $(\alpha-h,\ \alpha+h)$ (단, 아주 작은 양수 h)에 속하는 임의의 실수 x에 대하여

$$f(x)=\underbrace{k}_{+}\underbrace{(x-\alpha)^2}_{+\text{ 또는 }0}\underbrace{(x-\beta)^2}_{+}\ge 0$$

즉, 위의 그림(왼쪽)처럼 구간 $(\alpha-h,\ \alpha+h)$에서 곡선 $y=f(x)$는 x축에 접하거나, 그 위쪽 방향에 놓여 있다.

구간 $(\beta-h,\ \beta+h)$에 대해서도 마찬가지의 방법으로 생각할 수 있다.

$k<0$일 때, 구간 $(\alpha-h,\ \alpha+h)$ (단, 아주 작은 양수 h)에 속하는 임의의 실수 x에 대하여

$$f(x)=\underbrace{k}_{-}\underbrace{(x-\alpha)^2}_{+\text{ 또는 }0}\underbrace{(x-\beta)^2}_{+}\le 0$$

즉, 위의 그림(왼쪽)처럼 구간 $(\alpha-h,\ \alpha+h)$에서 곡선 $y=f(x)$는 x축에 접하거나, 그 아래쪽 방향에 놓여 있다.

구간 $(\beta-h,\ \beta+h)$에 대해서도 마찬가지의 방법으로 생각할 수 있다.

예제 1

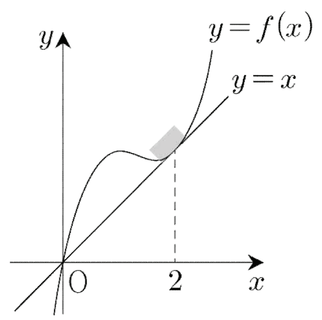
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음의 두 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0$, $f(2)=2$
(나) $x>0$일 때, $f(x) \geq x$이다.

이때, $f(1)$의 값을 구하시오.

풀이

조건 (가)에 의하여 곡선 $y=f(x)$는 두 점 $(0,\ 0)$, $(2,\ 2)$를 지난다. (이 두 점은 직선 $y=x$도 지난다.)
조건 (나)에 의하여 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$ 위의 점 $(2,\ 2)$를 지나면서 이 직선의 위쪽 방향에 놓여야 한다.
위의 두 조건을 만족시키도록 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



인수정리에 의하여

$f(x)-x=x(x-2)^2$, 즉 $f(x)=x(x-2)^2+x$

$\therefore\ f(1)=2$

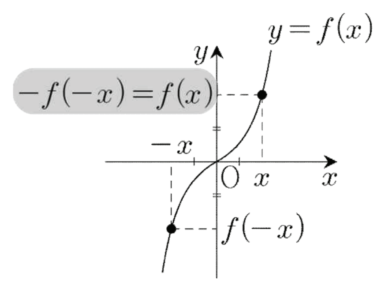
답 2

E. 그래프의 개형: 선대칭, 점대칭

▶ 기출 문제 p.62

• 기함수

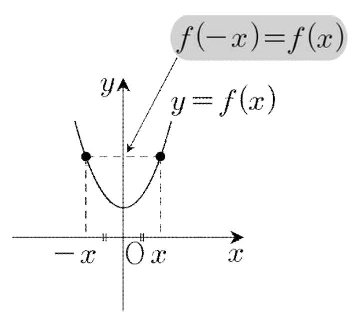
모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이 성립하면 함수 $f(x)$는 기함수라고 한다. 이때, 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 이 항등식을 기하적으로 해석하면 다음과 같다.



위의 그림에서 $f(x)=-f(-x)$ 즉, $f(-x)=-f(x)$이면 함수 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭일 수밖에 없다. 이 역도 성립한다.

• 우함수

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이 성립하면 함수 $f(x)$는 우함수라고 한다. 이때, 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 이 항등식을 기하적으로 해석하면 다음과 같다.



위의 그림에서 $f(-x)=f(x)$이면 함수 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭일 수밖에 없다. 이 역도 성립한다.

• 기함수와 우함수의 방정식 (다항함수의 경우)

다항함수 $f(x)$가 기함수 또는 우함수일 때, 이 함수의 방정식에 대하여 알아보자.

자연수 n에 대하여 $2n-1$, $2n$은 각각 홀수, 짝수이다.

모든 실수 x에 대하여

$(-x)^{2n-1}=-x^{2n-1}$ (예를 들어 $(-x)^3=-x^3$)

$(-x)^{2n}=x^{2n}$ (예를 들어 $(-x)^4=x^4$)

이므로 함수 $y=x^{2n-1}$은 기함수이고, 함수 $y=x^{2n}$은 우함수이다.

한편 상수함수 $y=c$는 y축에 대하여 대칭이므로 우함수이다.

다항함수 $f(x)$의 모든 짝수차수항의 계수와 상수항이 0이면, 이 함수는 기함수이다. (이 역도 성립한다.)

$f(x)=a_{2n-1}x^{2n-1}+a_{2n-3}x^{2n-3}+\cdots+a_1x$

(단, $a_{2n-1}\neq 0$)

다항함수 $f(x)$의 모든 홀수차수항의 계수가 0이면, 이 함수는 우함수이다. (이 역도 성립한다.)

$f(x)=a_{2n}x^{2n}+a_{2n-2}x^{2n-2}+\cdots+a_2x^2+a_0$

(단, $a_{2n}\neq 0$)

예를 들어 $f(x)=x^7-2x^3+8x$는 기함수이고,

$f(x)=-x^{10}+x^4-3$은 우함수이다.

하지만 $f(x)=x^5-x^2$은 기함수도 아니고, 우함수도 아니다.

예제 1

다항함수 $f(x)$에 대하여 아래 명제의 참, 거짓을 판단하시오.

(1) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이면 $f(0)=0$이다.

(2) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이면 $f(0)=0$이다.

(3) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이면 $f'(-x)=f'(x)$이다.

(4) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이면 $f'(-x)=-f'(x)$이다.

(5) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이면 $f'(0)=0$이다.

(6) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이면 $f'(0)=0$이다.

(7) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이고, $g(x)=\int f(x)dx$이면 $g(-x)=g(x)$이다.

(8) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이고, $g(x)=\int f(x)dx$이면 $g(-x)=-g(x)$이다.

(9) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이고, $g(x)=\int f(x)dx$이면 $g(0)=0$이다.

(10) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이고, $g(x)=\int f(x)dx$이면 $g(0)=0$이다.

이 명제들에 대한 참, 거짓의 판단은 함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ (단, $a_n\neq 0$)

으로 두고 하면 된다. 다만 이 명제들은 그래프의 개형과 함께 기억하는 편이 낫다.

풀이

함수 $f(x)$를 n차식으로 두자.

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \quad \cdots(*)$

(단, $a_n \neq 0$)

함수 $f(-x)$의 방정식은

$f(-x)=a_n(-x)^n+a_{n-1}(-x)^{n-1}+\cdots+a_1(-x)+a_0$

n이 홀수:

$f(-x)=-a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}-\cdots-a_1x+a_0 \cdots$ ㉠

n이 짝수:

$f(-x)=a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}+\cdots-a_1x+a_0 \cdots$ ㉡

함수 $-f(x)$의 방정식은

$-f(x)=-a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}-\cdots-a_1x-a_0 \cdots$ ㉢

(1) (참)

㉡=㉢으로 두면 $a_n=0$이므로 가정에 모순이다. 따라서 ㉡ $\neq$㉢이다.

㉠=㉢으로 두면 계수비교법에 의하여

$a_{n-1}=a_{n-3}=\cdots=a_2=a_0=0$

즉, 함수 $f(x)$의 짝수차수의 항의 계수와 상수항이 모두 0이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a_nx^n+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x$

(단, n은 홀수이고, $a_n \neq 0$)

$\therefore\ f(0)=0$

(2) (거짓)

(*)=㉠으로 두면 $a_n=0$이므로 가정에 모순이다. 따라서 (*)$\neq$㉠이다.

(*)=㉡으로 두면 계수비교법에 의하여

$a_{n-1}=a_{n-3}=\cdots=a_3=a_1=0$

즉, 함수 $f(x)$의 홀수차수의 항의 계수는 모두 0이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a_nx^n+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_0$

(단, n은 짝수이고, $a_n \neq 0$)

$f(0)=a_0$이고, a_0이 항상 0인 것은 아니므로

$\therefore\ f(0)\neq 0$

(3) (참)

(1)의 결과에서 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a_nx^n+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x$

(단, n은 홀수이고, $a_n \neq 0$)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-2)a_{n-2}x^{n-3}+\cdots+a_1$

(단, n은 홀수이고, $a_n \neq 0$)

함수 $f'(x)$의 홀수차수 항의 계수가 모두 0이므로

$f'(-x)=f'(x)$

(4) (참)

(2)의 결과에서 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a_nx^n+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_0$

(단, n은 짝수이고, $a_n \neq 0$)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-2)a_{n-2}x^{n-3}+\cdots+2a_2x$

(단, n은 짝수이고, $a_n \neq 0$)

함수 $f'(x)$의 짝수차수 항의 계수와 상수항이 모두 0이므로

$f'(-x)=-f'(x)$

(5) (거짓)

(1)의 결과에서 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a_nx^n+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x$

(단, n은 홀수이고, $a_n \neq 0$)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-2)a_{n-2}x^{n-3}+\cdots+a_1$

(단, n은 홀수이고, $a_n \neq 0$)

$f'(0)=a_1$이고, a_1이 항상 0인 것은 아니므로

$\therefore\ f'(0)\neq 0$

(6) (참)

(2)의 결과에서 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a_nx^n+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_0$

(단, n은 짝수이고, $a_n \neq 0$)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-2)a_{n-2}x^{n-3}+\cdots+2a_2x$

(단, n은 짝수이고, $a_n \neq 0$)

$\therefore\ f'(0)=0$

(7) (참)

(1)의 결과에서 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a_nx^n+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x$

(단, n은 홀수이고, $a_n\neq0$)

$$g(x)=\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-2}}{n-1}x^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{2}x^2+C$$

(단, $n+1$은 짝수이고, C는 적분상수)

$\therefore\ g(-x)=g(x)$

(8) (거짓)

(2)의 결과에서 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a_nx^n+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_0$

(단, n은 짝수이고, $a_n\neq0$)

$$g(x)=\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-2}}{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0x+C$$

(단, $n+1$은 홀수이고, C는 적분상수)

$g(-x)=-g(x)+2C$

(이때, 함수 $g(x)$는 점 $(0,\ C)$에 대하여 대칭이다.)

이므로

$\therefore\ g(-x)\neq-g(x)$

(9) (거짓)

함수 $f(x)$가 기함수이면 함수 $g(x)$는 우함수이므로

$\therefore\ g(0)\neq0$

(10) (거짓)

함수 $f(x)$가 우함수이면 함수 $g(x)$는 y축 위의 점에 대하여 대칭이다.

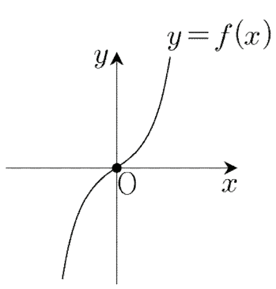
하지만 이 대칭점이 반드시 원점이라는 보장은 없다.

$\therefore\ g(0)\neq0$

답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 참 (4) 참 (5) 거짓 (6) 참 (7) 참 (8) 거짓 (9) 거짓 (10) 거짓

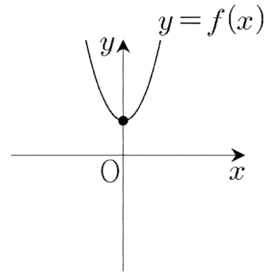
참고

(1) (참)



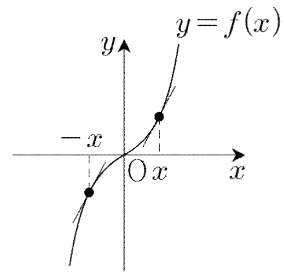
위의 그림처럼 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 원점을 지날 수밖에 없다.

(2) (거짓)



위의 그림처럼 함수 $f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭일 때 원점을 반드시 지나는 것은 아니다.

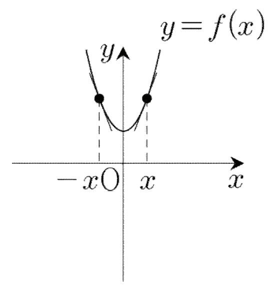
(3) (참)



위의 그림처럼 함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭일 때, 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기와

점 $(-x,\ f(-x))$에서의 접선의 기울기는 같다.

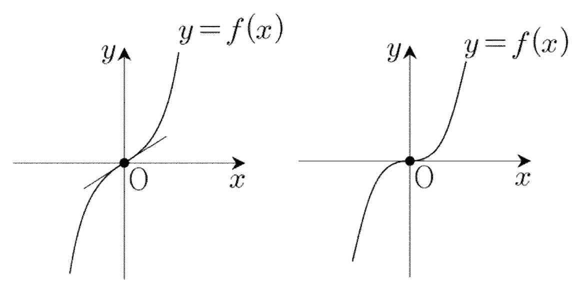
(4) (참)



위의 그림처럼 함수 $f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭일 때, 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기와

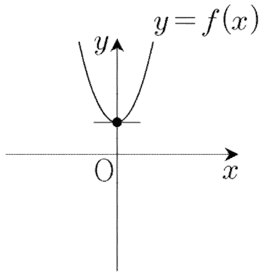
점 $(-x,\ f(-x))$에서의 접선의 기울기는 절댓값이 같고 부호가 다르다.

(5) (거짓)



위의 그림처럼 함수 $f(x)$가 원점에 대하여 대칭일 때, 원점에서의 접선의 기울기는 0일 수도 있고, 아닐 수도 있다.

(6) (참)



위의 그림처럼 함수 $f(x)$가 y축에 대하여 대칭일 때, 점 $(0, f(0))$에서의 접선의 기울기는 0이다.

(7)~(10)은 식의 관점에서 기억해둘 필요가 있다.

• 사칙연산으로 정의된 함수의 대칭성

다음의 실전이론을 살펴보자. (단, 기는 기함수, 우는 우함수이다.)

기 + 기 = 기 (←즉, 두 기함수를 합해서 만든 함수는 기함수라는 것이다.)
우 + 우 = 우
기 × 기 = 우
기 × 우 = 기
우 × 우 = 우

이를 다음과 같이 기억하면 편하다.

기 + 기 = 기	예) $x+x=2x$
우 + 우 = 우	예) $x^2+x^2=2x^2$
기 × 기 = 우	예) $x \cdot x=x^2$
기 × 우 = 기	예) $x \cdot x^2=x^3$
우 × 우 = 우	예) $x^2 \cdot x^2=x^4$

맨 위에서 네 번째 명제만 증명해보자.

증명 (네 번째 명제)
실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여
$f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$
(즉, f는 기함수, g는 우함수)
가 성립하면 함수 $f(x)g(x)$는 기함수임을 증명하시오.
$h(x)=f(x)g(x)$로 두자.
모든 실수 x에 대하여
$h(-x)=f(-x)g(-x)$
$=\{-f(x)\}g(x)=-\{f(x)g(x)\}=-h(x)$
즉, $h(-x)=-h(x)$이므로
함수 $h(x)$는 기함수이다. (나머지 명제들도 마찬가지의 방법으로 증명할 수 있다.)

• 합성함수의 대칭성

함수 $f(x)$가 기함수이고, 함수 $g(x)$가 우함수일 때,
$f(f(x))$는 기함수,
$f(g(x))$는 우함수,
$g(g(x))$는 우함수이다.

첫 번째만 증명해보자.

증명
모든 실수 x에 대하여
$f(f(-x))=f(-f(x))=-f(f(x))$
이므로 함수 $f(f(x))$는 기함수이다.

나머지 명제들도 마찬가지의 방법으로 증명할 수 있다.

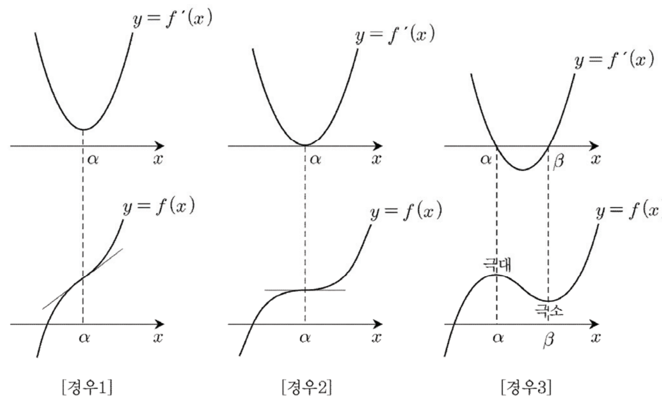
E. 삼차함수의 그래프

▶ 기출 문제 p.63

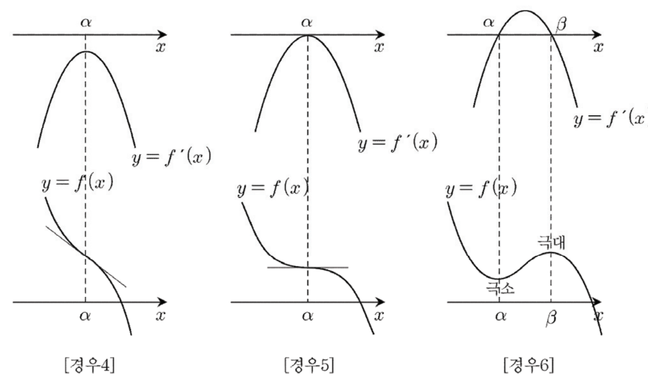
• 삼차함수의 그래프의 개형

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

• $a>0$인 경우



• $a<0$인 경우



수능 시험에서는 '$a>0$인 경우' 와 '$a<0$인 경우' 를 모두 생각할 수 있는지를 또는 구별할 수 있는지를 꾸준하게 평가하고 있다. 문제에서 $f(x)$가 삼차함수라고 주어지면 반드시 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우와 음수인 경우로 구분해야 한다.

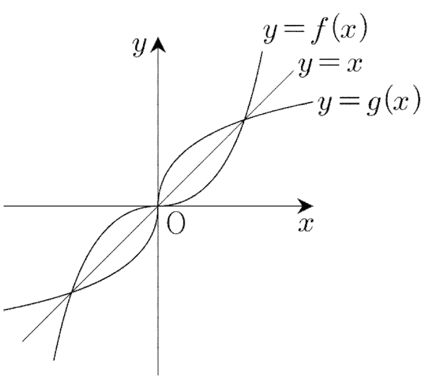
• 삼차함수의 그래프의 개형과 필요충분조건

다음의 필요충분조건은 수능에 자주 출제된다.

(1) 삼차함수 $f(x)$가 역함수를 갖는 경우에 대한 필요충분 조건

삼차함수 $f(x)$는 역함수를 가진다.
⇔ [경우1], [경우2], [경우4], [경우5]
⇔ 삼차함수 $f(x)$는 일대일대응이다.
⇔ 삼차함수 $f(x)$는 증가함수이거나 감소함수이다.
⇔ 삼차함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.
⇔ 함수 $f'(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 1 이하이다.
⇔ 방정식 $f'(x)=0$은 중근을 갖거나 서로 다른 두 허근을 갖는다.
⇔ $D/4=b^2-3ac\le 0$ (단, D는 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식)

$f(x)=x^3$의 역함수를 $g(x)$라고 하면 $g(x)=\sqrt[3]{x}$이다. 이때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 원점에서의 접선은 x축이고, 곡선 $y=g(x)$ 위의 원점에서의 접선은 y축이다. 전자의 경우 $f'(0)=0$(접선의 기울기가 0)이지만 후자의 경우 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

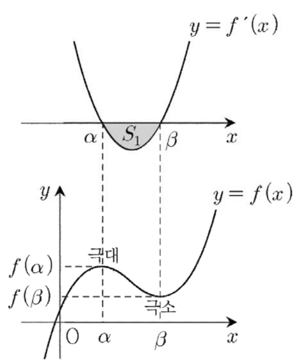


(2) 삼차함수 $f(x)$가 역함수를 갖지 않는 경우에 대한 필요충분조건

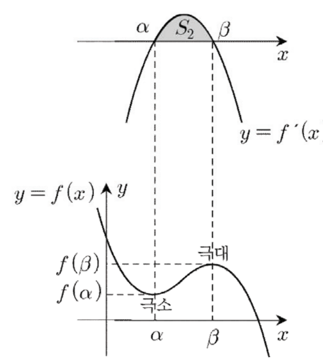
삼차함수 $f(x)$는 역함수를 갖지 않는다.
⇔ [경우3], [경우6]
⇔ 삼차함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니다.
⇔ 삼차함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.
⇔ 삼차함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
⇔ 삼차함수 $f(x)$는 극솟값을 갖는다.
⇔ 함수 $f'(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 2이다.
⇔ 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
⇔ $D/4=b^2-3ac>0$ (단, D는 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식)

• 삼차함수의 그래프의 개형과 정적분의 정의

그래프의 개형을 정적분의 정의와 연관시키는 것은 수능에 매해 출제된다.



[경우3]



[경우6]

정적분의 정의에 의하여
[경우3]:

$$f(\beta)-f(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx=-S_1$$

(함숫값의 차)$=-$(넓이)<0

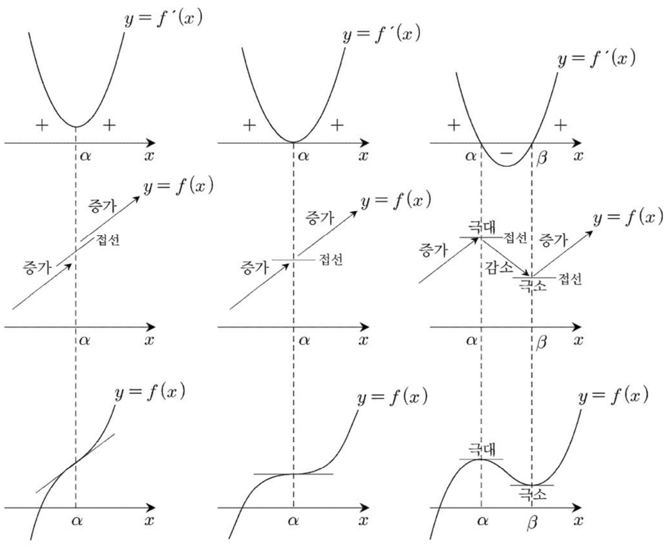
[경우6]:

$$f(\beta)-f(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx=S_2$$

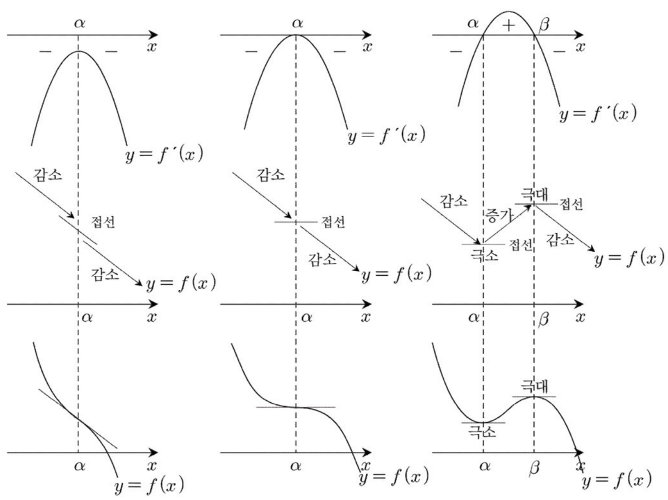
(함숫값의 차)$=$(넓이)>0

• 삼차함수의 그래프의 개형을 그리는 법(1)

삼차함수의 그래프의 개형을 그리는 과정을 좀 더 상세하게 알아보자.



[경우1] [경우2] [경우3]



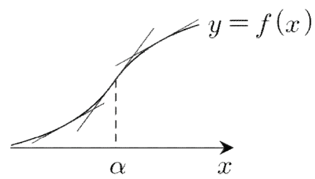
[경우4] [경우5] [경우6]

❶ 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프를 그린다.

❷ 도함수 $f'(x)$의 부호를 $+$, $-$로 표시한다. 이때, 곡선 $y=f'(x)$ 위의 점에서의 접선의 기울기의 부호를 표시해서는 안 된다.

❸ 도함수 $f'(x)$의 부호가 $+$이면 함수 $f(x)$가 증가하므로 화살표로 ↗ 표시를 하고,
도함수 $f'(x)$의 부호가 $-$이면 함수 $f(x)$가 감소하므로 화살표로 ↘ 표시를 한다.

❹ [경우1] 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$에서의 접선을 먼저 긋고(←함수 $f'(x)$는 $x=\alpha$에서 최솟값을 가지므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$에서의 접선의 기울기가 가장 작다.) 왼쪽 아래에서 오른쪽 위 방향으로 곡선 $y=f(x)$가 이 접선에 접하면서 들어오고(↱) 나가도록(⤴) 그린다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 $x=\alpha$의 좌우에서 위로 볼록(↱)이었다가 아래로 볼록(⤴)이어야 한다. 아래 그림처럼 곡선 $y=f(x)$가 $x=\alpha$의 좌우에서 아래로 볼록(⤴)이었다가 위로 볼록(↱)하게 그리면 안 된다. 왜냐하면 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$에서의 접선의 기울기가 가장 커지기 때문이다. 이는 이차함수 $f'(x)$가 $x=\alpha$에서 최솟값을 갖는 것에 모순이다. (즉, 아래 그림은 잘못된 경우이다.)



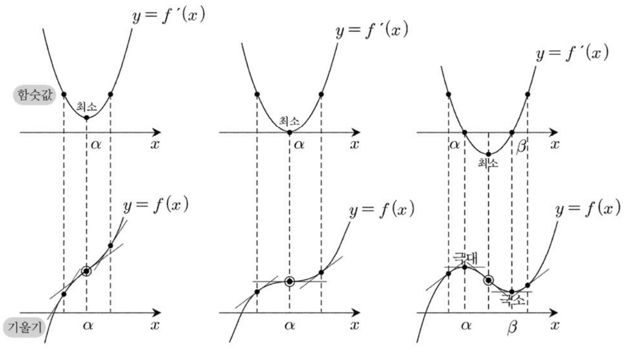
[경우2] 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$에서의 접선의 기울기가 0이라는 점만 다를 뿐 [경우1]과 마찬가지의 방법대로 그리면 된다.

[경우3] 곡선 $y=f(x)$의 극대점과 극소점을 찍고, 이 두 점에서의 접선을 긋는다. 이때, 접선의 기울기는 모두 0이다. 극대점 좌우에서 곡선 $y=f(x)$가 접선에 접하면서 들어오고(↱) 나가도록(↘) 그린다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 $x=\alpha$의 좌우에서 위로 볼록이다. 극소점 좌우에서 곡선 $y=f(x)$가 접선에 접하면서 들어오고(↳) 나가도록(⤴) 그린다. 이때, 곡선 $y=f(x)$는 $x=\beta$의 좌우에서 아래로 볼록이다.
[경우4], [경우5], [경우6]도 마찬가지의 방법으로 그릴 수 있다.

❺ 마지막으로 삼차함수 $f(x)$는 미분가능한 함수이므로 곡선이 매끄럽게 연결되었는지를 확인하자.

• 삼차함수의 그래프의 개형을 그리는 법(2)

삼차함수 $f(x)$와 이 함수의 도함수 $f'(x)$의 관계를 살펴보자.
함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 값은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기와 같다.



[경우1] [경우2] [경우3]

(단, ⦿는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점에서의 접선의 기울기가 최소가 되는 점이다.)

[경우1] 도함수 $f'(x)$ 위의 세 점의 함숫값은 모두 양수이면서 감소했다가 증가한다. 이 세 점에 대응되는 곡선 $y=f(x)$ 위의 세 점에서의 접선의 기울기는 모두 양수이면서 감소했다가 증가한다. 이때, 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$에서의 접선의 기울기가 최소가 됨을 알 수 있다.

[경우2] 도함수 $f'(x)$ 위의 세 점의 함숫값은 각각 양수, 0, 양수이면서 감소했다가 증가한다. 이 세 점에 대응되는 곡선 $y=f(x)$ 위의 세 점에서의 접선의 기울기는 각각 양수, 0, 양수이면서 감소했다가 증가한다.
이때, 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$에서의 접선의 기울기는 0으로 최소가 됨을 알 수 있다.

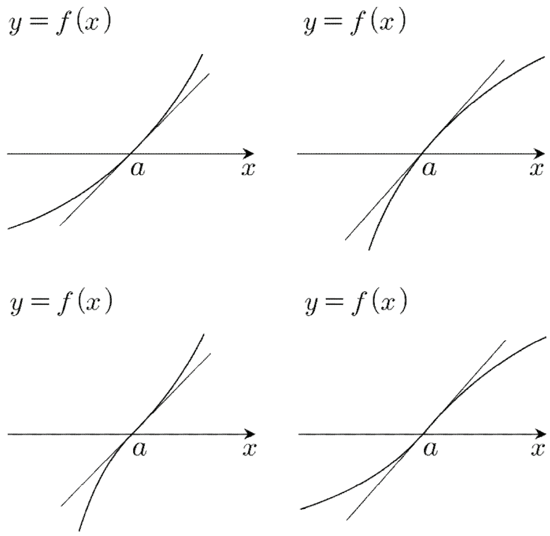
[경우3] 도함수 $f'(x)$ 위의 다섯 개의 점의 함숫값은 각각 양수, 0, 음수, 0, 양수이면서 감소했다가 증가한다. 이 다섯 개의 점에 대응되는 곡선 $y=f(x)$ 위의 다섯 개의 점에서의 접선의 기울기는 각각 양수, 0, 음수, 0, 양수이면서 감소했다가 증가한다.
이때, 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$에서의 접선의 기울기는 음수로 최소가 됨을 알 수 있다.

한 가지 더 말하자면, 접선의 기울기가 최소가 되는 점 ⦿의 좌우에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록(,)이었다가 아래로 볼록(,)이 된다는 점이다. 이는 이과생이 배우는 범위이지만 문과생도 알아두면 좋다.

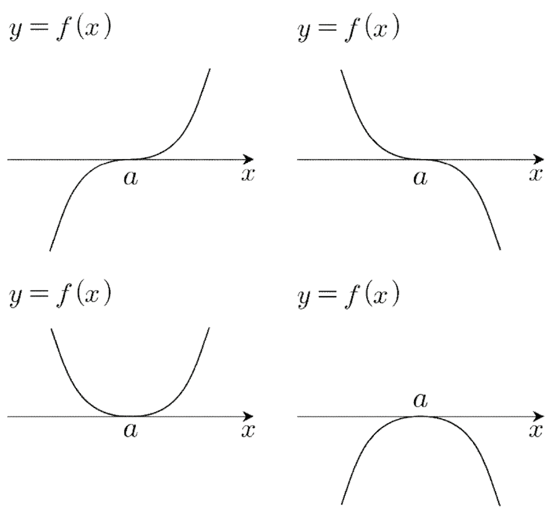
[경우4], [경우5], [경우6]도 마찬가지로 생각할 수 있다.

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=b$이면 $f(a)=0$, $f'(a)=b$이다.
곡선 $y=f(x)$는 점 $(a,\ 0)$을 지나고 이 점에서의 접선의 기울기는 b이다.
따라서 $x=a$의 좌우에서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

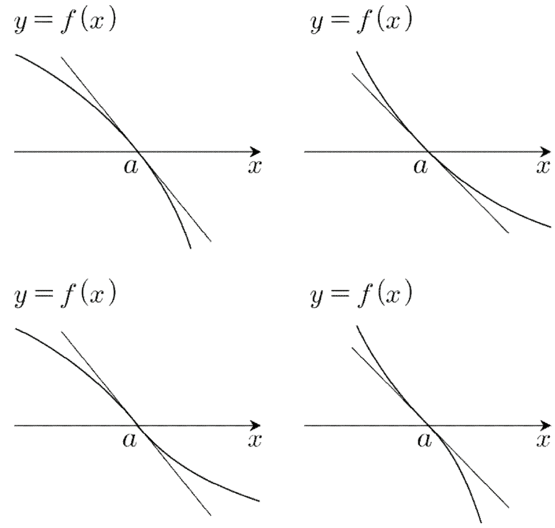
(1) $b>0$인 경우



(2) $b=0$인 경우



(3) $b<0$인 경우



E. 삼차함수의 그래프: 인수정리

▶ 기출 문제 p.65

• 인수정리 – 간단한 예

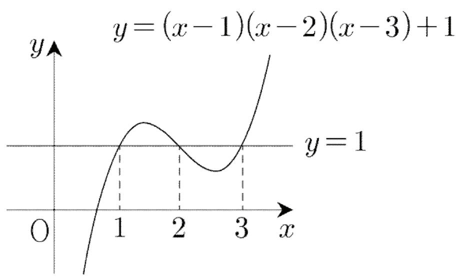
인수정리와 관련된 기본적인 문제들을 함께 풀어보자.

예제 1

(1) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
$f(1)=f(2)=f(3)=1$
일 때, $f(4)$의 값을 구하시오.
(2) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
$f(1)=f'(1)=0,\ f(2)=0$
일 때, $f(4)$의 값을 구하시오.
(3) 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
$f(1)=1,\ f'(1)=1,\ f(2)=2$일 때,
$f(0)$의 값을 구하시오.

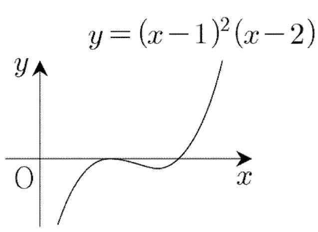
풀이

(1)



$f(1)-1=f(2)-1=f(3)-1=0$
이므로
$f(x)-1=(x-1)(x-2)(x-3)$
$\therefore\ f(4)=7$

(2)



인수정리에 의하여
$f(x)=(x-1)^2(x-2)$
$\therefore\ f(4)=18$

(3)
$g(x)=f(x)-x$로 두고 문제에서 주어진 조건들을 다시 쓰면
$g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고
$g(1)=0,\ g'(1)=0,\ g(2)=0$
인수정리에 의하여
$g(x)=(x-1)^2(x-2)$ (단, α는 상수)
따라서
$f(x)=(x-1)^2(x-2)+x$
$\therefore\ f(0)=-2$

답 (1) 7 (2) 18 (3) -2

● 인수정리 – 아론 (일반적 경우)

다항함수의 방정식을 세우는 다양한 방법들을 알아보자.

'다항함수 $f(x)$' 라는 조건이 주어졌을 때,

(1) $f(x)$를 n차식으로 둔다.

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$(단, $a_n\neq0$)

예를 들어 $f(x)$가 삼차함수이면

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (단, $a\neq0$)

$f(x)$가 사차함수이면

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ (단, $a\neq0$)

$f(x)$를 처음부터 n차식으로 둘 수도 있지만 1차식, 2차식, 3차식, 4차식, $\cdots$으로 순서대로 두고 문제를 풀어나가도 좋다.

(2) $f(\alpha)=0$이라는 조건이 주어졌다면 인수정리에 의하여

$f(x)=(x-\alpha)Q(x)$ (단, $Q(x)$는 $n-1$차식이다.)

또는 다음과 같이 둘 수도 있다.

$f(x)=a(x-\alpha)^n+b(x-\alpha)^{n-1}+\cdots+c$ (단, $a\neq0$)

(3) $f(a)=f'(a)=0$이면 $f(x)$는 $(x-a)^2$으로 나누어떨어진다.

이때, $f(x)=(x-a)^2Q(x)$ (단, $Q(x)$는 다항식)

(4) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의

접선 $y=g(x)$에 대하여

$f(x)-g(x)=(x-a)^2Q(x)$ (단, $Q(x)$는 다항식)

(3)을 증명해보자.

다항함수 $f(x)$에 대하여

$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$

이면 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$을 인수로 갖는다.

증명

$f(\alpha)=0$이므로 인수정리에 의하여

$f(x)=(x-\alpha)Q_1(x)$ $\cdots$㉠

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=Q_1(x)+(x-\alpha)Q_1'(x)$

$f'(\alpha)=0$이므로

$f'(\alpha)=Q_1(\alpha)+0\times Q_1'(\alpha)$ 즉, $Q_1(\alpha)=0$

인수정리에 의하여

$Q_1(x)=(x-\alpha)Q_2(x)$

㉠에 대입하면

$f(x)=(x-\alpha)^2Q_2(x)$

따라서 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$을 인수로 갖는다.

• 삼차함수의 그래프의 개형을 그리는 법(3)

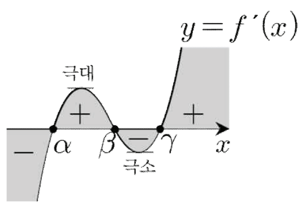
사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프의 개형을 빠르게 그리는 법에 대하여 알아보자.

❶ $f'(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$의 경우

(단, $a\neq0$, $\alpha<\beta<\gamma$)

$a>0$인 경우를 생각하자.

$f'(\alpha)=f'(\beta)=f'(\gamma)=0$이므로 곡선 $y=f'(x)$는 x축 위의 세 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$, $(\gamma,\ 0)$을 지난다. 롤의 정리에 의하여 두 구간 $(\alpha,\ \beta)$, $(\beta,\ \gamma)$에서 각각 극댓값과 극솟값을 가질 수밖에 없다.(만약 $a<0$이면 이 두 구간에서 각각 극솟값과 극댓값을 갖는다.) 따라서 함수 $f'(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



마찬가지의 방법으로 $a<0$일 때, 함수 $f'(x)$의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

❷ $f'(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$의 경우

(단, $a\neq0$, $\alpha<\beta$)

$a>0$인 경우를 생각하자.

모든 실수 x에 대하여

$a(x-\alpha)^2\geq0$ (단, 등호는 $x=\alpha$일 때에만 성립한다.)

이므로

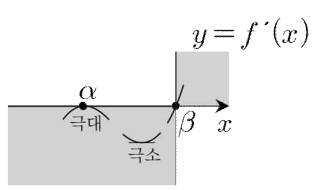
$x<\beta(x-\beta<0)$일 때, $f'(x)\leq0$

(단, 등호는 $x=\alpha$일 때에만 성립한다.)

$x=\beta(x-\beta=0)$일 때, $f'(x)=0$

$x>\beta(x-\beta>0)$일 때, $f'(x)>0$

함수 $f'(x)$가 지날 수 있는 영역은 다음과 같다.

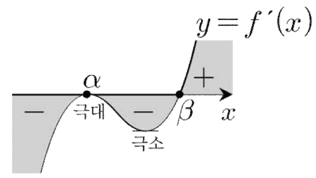


$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$이므로 곡선 $y=f'(x)$는 x축 위의 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$을 지난다.

곡선 $y=f'(x)$가 점 $(\alpha,\ 0)$을 지나면서

구간 $(\alpha-h,\ \alpha+h)$에서 x축의 아래쪽 방향에 있기 위해서는 곡선 $y=f'(x)$가 점 $(\alpha,\ 0)$에서 x축에 접해야 한다. (단, h는 충분히 작은 양수) 이때, 점 $(\alpha,\ 0)$는 함수 $f'(x)$의 극대점이다. (만약 $a<0$이면 이 점은 함수 $f'(x)$의 극소점이다.) ($\because$ 귀류법)

롤의 정리에 의하여 구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 극값(극솟값)을 가질 수밖에 없다. (만약 $a<0$이면 이 극값은 극댓값이다.) 따라서 함수 $f'(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



마찬가지의 방법으로 $a<0$일 때, 함수 $f'(x)$의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

E. 삼차함수의 그래프: 변곡점

▶ 기출 문제 p.67

변곡점에 대한 두 경우를 생각해보자.

• 삼차함수의 그래프의 개형이 기하적으로 유일한 경우

예제 1

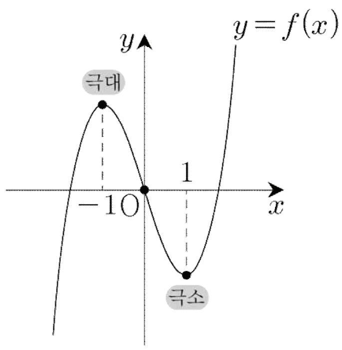
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 다음의 두 조건이 성립한다.

(가) $f(-x)=-f(x)$
(나) $f'(1)=0$

이때, 함수 $f(x)$의 방정식을 구하시오.

풀이

문제에서 주어진 모든 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 유일하다. (아래 그림)



조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭이고, 조건 (가), (나)에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖고, $x=-1$에서 극댓값을 가지므로

$f'(x)=3(x+1)(x-1)$

$f(x)=\int f'(x)dx=x^3-3x+C$

그런데 기함수는 반드시 원점을 지나므로 $C=0$이다.

$\therefore\ f(x)=x^3-3x$

답 $f(x)=x^3-3x$

• 삼차함수의 그래프의 개형이 기하적으로 유일하지 않은 경우

예제 2

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$f(-1)=2,\ f(0)=0,\ f(1)=-2$

일 때, 함수 $f(x)$의 방정식을 구하시오.

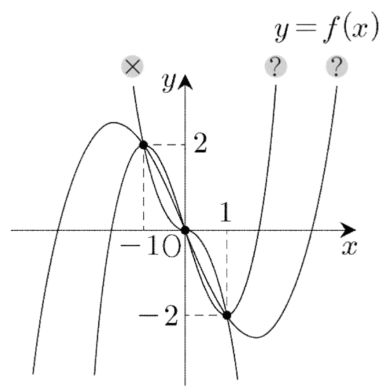
풀이

삼차함수 $f(x)$의 그래프는 세 점

$(-1,\ 2),\ (0,\ 0),\ (1,\ -2)$

를 모두 지나므로 원점에 대하여 대칭임을 알 수 있다.

문제에서 주어진 모든 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 아래 그림과 같다.



삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 극값을 갖지 않는 경우는 불가능하다.

극값을 갖는 두 그래프의 개형 중에서 어느 쪽이 맞는지를 확인하기 위하여

$f(x)=x^3+kx$(단, k는 상수)

로 두자.

$f(1)=1+k=-2$에서 $k=-3$

$\therefore\ f(x)=x^3-3x$

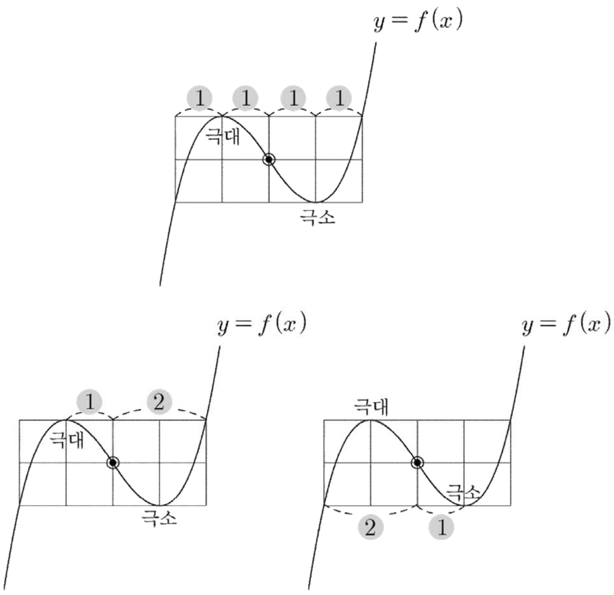
답 $f(x)=x^3-3x$

E. 삼차함수의 그래프: 비율 관계(1)

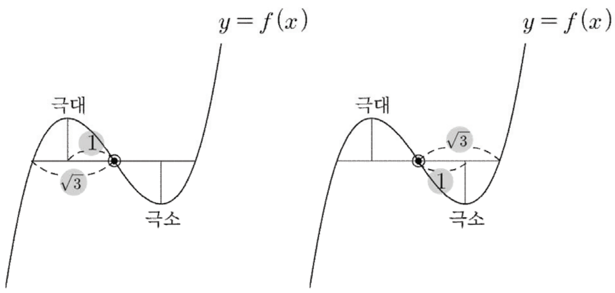
▶ 기출 문제 p.67

삼차함수의 그래프에서 다음의 비율관계가 성립한다.

❶



❷



(단, ◉는 곡선 $y=f(x)$의 볼록이 바뀌는 점이고, 모든 선분은 x축 또는 y축에 평행하다.)

예를 들어 함수 $f(x)=x^3-3x$에 대하여

❶ 두 극점의 좌표가 각각 $(-1,\ 2)$, $(1,\ -2)$이고, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=2$, $y=-2$가 만나는 두 교점 중에서 극점이 아닌 점의 x좌표가 각각 2, -2이므로 ❶이 성립함을 알 수 있다.

❷ 두 극점의 x좌표가 각각 ± 1이고, 곡선 $y=f(x)$의 x절편이 $\pm\sqrt{3}$이므로 ❷가 성립함을 알 수 있다.

E. 삼차함수의 그래프: 비율 관계(2)

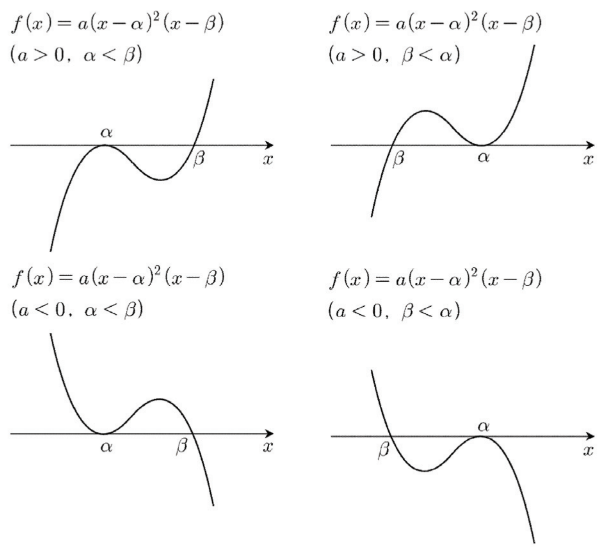
▶ 기출 문제 p.68

• 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

일 때, 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

(단, $\alpha \neq \beta$이다.)

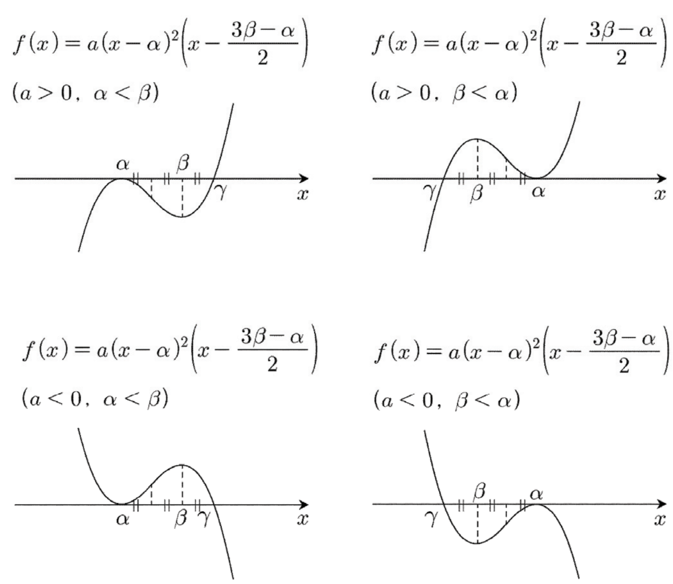


• 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$

일 때, 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

(단, $\alpha \neq \beta$, $f(\gamma)=0$이다.)



삼차함수의 그래프의 비율관계를 이용하여 좌측상단의 γ의 값을 구하면 다음과 같다.
수직선에서 γ는 α, β의 $3:1$외분점이므로

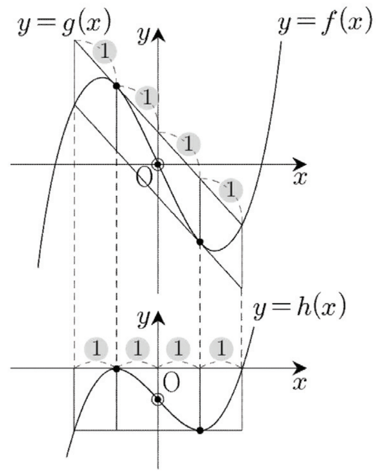
$$\gamma=\frac{3\beta-\alpha}{2}$$

마찬가지의 방법으로 나머지 세 경우에 대한 γ의 값을 구할 수 있다.

E. 삼차함수의 그래프: 비율 관계(3)

▶ 기출 문제 p.70

함수 $f(x)=x^3-6x$의 그래프 위의 점 $(-1,\ 5)$에서의 접선은 $y=-3x+2(=g(x))$이다.
세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)=f(x)-g(x)$의 그래프를 모두 그려보면 다음과 같다.



(단, •은 접점이고, ⦿은 변곡점이다.)
위의 그림과 같이 삼차함수의 비율관계 $(1:1:1:1,\ 1:2,\ 2:1)$은 유지된다.

E. 삼차함수의 그래프: 평행이동

▶ 기출 문제 p.71

• 평행이동은 계산 분량을 줄여준다.

모든 삼차함수가 점대칭임을 증명할 때,

이차함수의 정적분의 공식 $S=\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$을 유도할 때,

선대칭인 사차함수의 그래프의 방정식을 유도할 때,

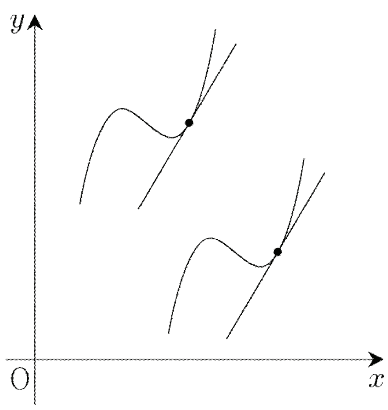
⋮

우리는 평행이동을 이용한다.

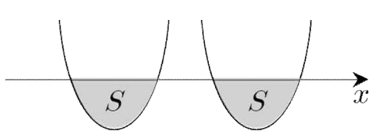
이처럼 수능에 출제되는 수학2, 미적분 문제 중에는 평행이동을 적용했을 때 계산이 쉬워지는 문제들이 적지 않다.

• 평행이동을 해도 변하지 않는 값들이 있다.

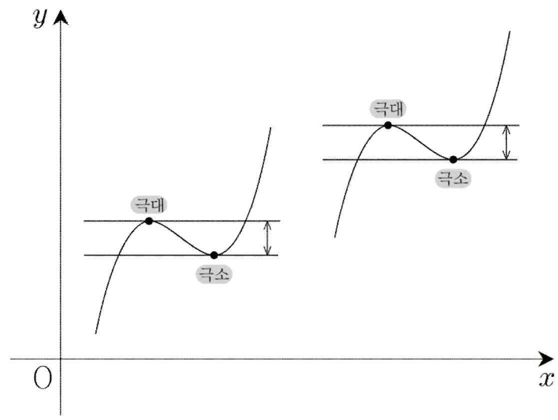
아래 그림처럼 곡선과 접선을 동시에 평행이동시켰을 때, 두 접선의 기울기는 변하지 않는다.



아래 그림처럼 곡선을 x축의 방향으로 평행이동시켰을 때, 두 도형의 넓이는 변하지 않는다.



아래 그림처럼 삼차함수 $f(x)$의 그래프를 평행이동시켰을 때, 두 극점의 x좌표의 차이와 y좌표의 차이는 변하지 않는다.



이제 아래의 문제를 평행이동의 관점에서 풀어보자.

예제 1

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$, $f(\beta)=-4$, $f'(\beta)=0$

일 때, $\beta-\alpha$의 값을 구하시오.

풀이

함수 $f(x)$의 그래프를 x축으로 평행이동시켜도 $\beta-\alpha$의 값은 변하지 않는다.

문제에서 주어진 모든 함수와 점을 x축의 방향으로 $-\alpha$만큼 평행이동시키자.

$f(0)=f'(0)=0$, $f(\beta-\alpha)=-4$, $f'(\beta-\alpha)=0$

이때, $\beta-\alpha=r$로 두면

$f(0)=f'(0)=0$, $f(\gamma)=-4$, $f'(\gamma)=0$

삼차함수의 비율관계에 의하여

$$f(x)=x^2\left(x-\frac{3}{2}\gamma\right)$$

$$f(\gamma)=-\frac{1}{2}\gamma^3=-4,\ \gamma=2$$

$\therefore\ \beta-\alpha=2$

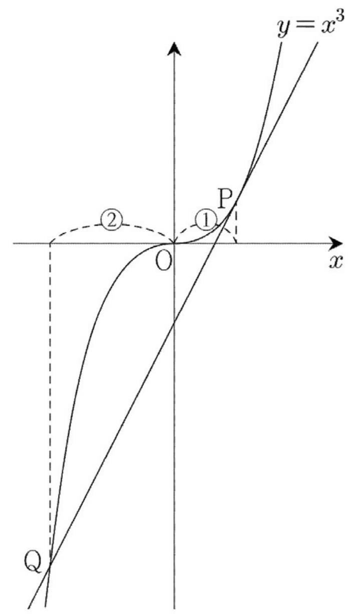
답 2

E. 삼차함수의 그래프: 직선과 서로 다른 두 점에서 만난다.(1)

▶ 기출 문제 p.71

• 삼차함수 $y=x^3$ 위의 점에서의 접선에 대한 연구

우선 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 대하여 알아보자.
(교육과정 외이지만 알아두면 편할 때가 많다.)
삼차방정식
$ax^3+bx^2+cx+d=0$(단, $a\neq 0$)
의 세 실근을 α, β, γ라고 하자.
인수정리에 의하여
$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
우변을 전개하면
ax^3+bx^2+cx+d
$=ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a\alpha\beta\gamma$
항등식의 필요충분조건에 의하여
$b=-a(\alpha+\beta+\gamma)$, $c=a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$, $d=-a\alpha\beta\gamma$
정리하면
$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$
따라서 이차항의 계수가 0인 모든 삼차방정식
$x^3+px+q=0$
에 대하여 세 근의 합은 0이다.
다음과 같은 예를 생각하자.
곡선 $y=x^3$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$에서의 접선이 이 곡선과 만나는 두 점 중에서 P가 아닌 점을 Q라고 하자.



점 P에서의 기울기가 $3t^2$이므로 접선의 방정식은
$y=3t^2(x-t)+t^3$ 즉, $y=3t^2x-2t^3$
곡선과 접선의 방정식을 연립하면
$x^3=3t^2x-2t^3$
정리하면
$x^3-3t^2x+2t^3=0$ $\cdots(*)$
좌변을 인수분해하면
$(x-t)^2(x+2t)=0$ 풀면 $x=t$ 또는 $x=-2t$
점 Q의 x좌표는 $-2t$이다.
여기까지가 교과서의 전형적인 풀이이다.
이제 이차항의 계수가 0인 삼차방정식의 모든 근의 합이 0임을 이용하여 점 Q의 x좌표를 구해보자.
점 Q의 x좌표를 s라고 하면 방정식 (*)의 세 실근은 t, t, s이다.
방정식 (*)의 이차항의 계수가 0이므로 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여
$t+t+s=0$ 즉, $s=-2t$
따라서 점 Q의 x좌표는 $-2t$이다.
위와 같이 삼차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용하면 점 Q의 좌표를 빠르게 유도할 수 있다. 물론 앞서 배운 삼차함수의 수평화에서 점 $(0,\ 0)$이 두 점 $(s,\ 0)$, $(t,\ 0)$의 $2:1$내분점임을 이용하면 $s=-2t$를 빠르게 유도할 수 있다.

예제 1

삼차함수 $f(x)$가 다음의 두 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=2$

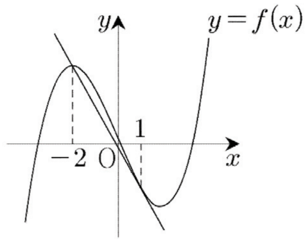
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선은 $(p,\ f(p))$를 지난다. 이때, p의 값을 구하시오. (단, $p\neq 1$이다.)

풀이

(나): $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=1$에서 함수 $f(x)$는 점 $(0,\ 1)$에 대하여 대칭이다. (즉, 이 점이 변곡점이다.)

삼차함수의 비율관계에 의하여

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선은 점 $(-2,\ f(-2))$를 지난다. (아래 그림)



답 -2

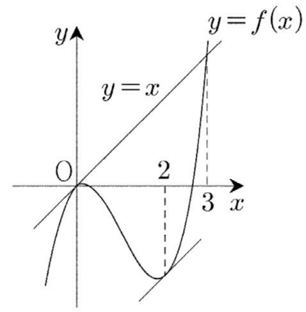
예제 2

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음의 두 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선은 $y=x$이다. (나) $f'(2)=1$

이때, $f(3)$의 값을 구하시오.

풀이



삼차함수 비율관계에 의하여

$f(x)-x=x^2(x-3)$

$\therefore\ f(3)=3$

답 3

E. 삼차함수의 그래프: 미분 가능성

▶ 기출 문제 p.76

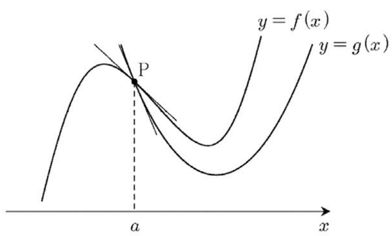
• 미분가능성과 접선의 관계에 대하여

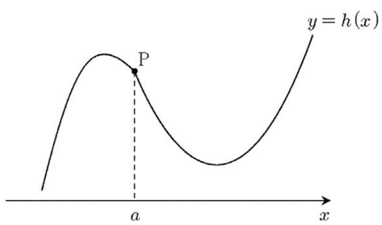
실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 P에서 만난다고 하자. (단, 점 P의 x좌표는 a이다.)

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 서로 다르면

곡선 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le a) \\ g(x) & (x > a) \end{cases}$는 점 P에서 미분가능하지 않다.



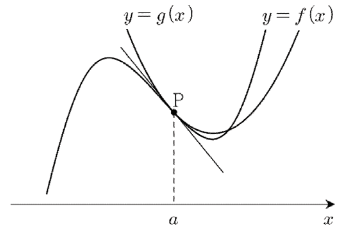


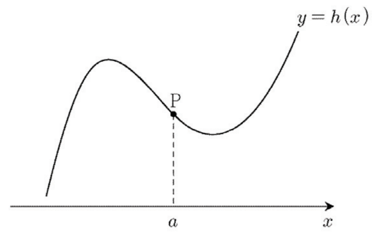
위의 그림에서 곡선 $y=h(x)$는 점 P에서 꺾여있다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 서로 같으면

곡선 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le a) \\ g(x) & (x > a) \end{cases}$는 점 P에서 미분가능하다.





위의 그림에서 곡선 $y=h(x)$는 점 P에서 부드럽게 (smooth) 연결되어있다.

예제 1

두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=-x$에 대하여

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수를 구하시오.

접근법

이 문제에 대한 풀이는 크게 세 가지이다.

❶ 미분계수의 정의

❷ 도함수의 극한

❸ 그래프의 개형

함수 $h(x)$의 그래프의 개형을 쉽게 그릴 수 있고, 이 그래프에서 꺾이는 점과 부드럽게 연결된 점을 구별하는데 어려움이 없으므로 이 문제는 ❸으로 접근해도 좋다. 하지만 함수의 그래프의 개형을 그리기 어렵거나, 그 그래프에서 꺾이는 점과 부드럽게 연결되는 점을 구별하기 힘들다면 ❸이 아닌 ❶ 또는 ❷로 접근해야 한다.

풀이1 ❶ 미분계수의 정의

함수 $h(x)$의 방정식은

$$h(x)=\begin{cases} x^2 & (x\leq -1,\ x>0) \\ -x & (-1<x\leq 0) \end{cases}$$

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $h(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 미분가능하다.

• $x=-1$에서의 미분가능성

$$\lim_{x\to -1+}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1+}\frac{-x-1}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1+}(-1)=-1,$$

$$\lim_{x\to -1-}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1-}\frac{x^2-1}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1-}(x-1)=-2$$

$$\lim_{x\to -1+}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}\neq\lim_{x\to -1-}\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}$$이므로

함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

• $x=0$에서의 미분가능성

$$\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0+}x=0,$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0-}(-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0-}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}$$이므로

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

답 2개

풀이2 ❷ 도함수의 극한

함수 $h(x)$의 방정식은

$$h(x)=\begin{cases} x^2 & (x\leq -1,\ x>0) \\ -x & (-1<x\leq 0) \end{cases}$$

함수 $h(x)$의 도함수는

$$h'(x)=\begin{cases} 2x & (x<\ -1,\ x>0) \\ -1 & (-1<x<0) \end{cases}$$

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $h(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 미분가능하다.

• $x=-1$에서의 미분가능성

$f(-1)=g(-1)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

$f'(-1)=-2\neq -1=g'(-1)$이므로

함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

• $x=0$에서의 미분가능성

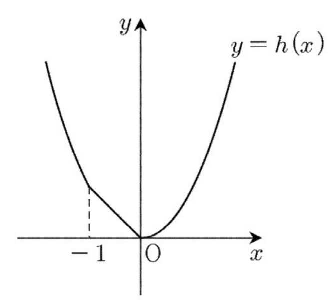
$f(0)=g(0)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$f'(0)=0\neq -1=g'(0)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

답 2개

풀이3 ❸ 그래프의 개형



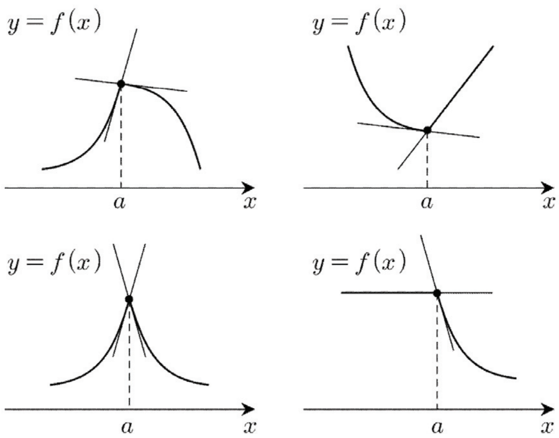
위의 그림에서 함수 $h(x)$가 $x=-1$, $x=0$에서 미분가능하지 않음을 알 수 있다.

따라서 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

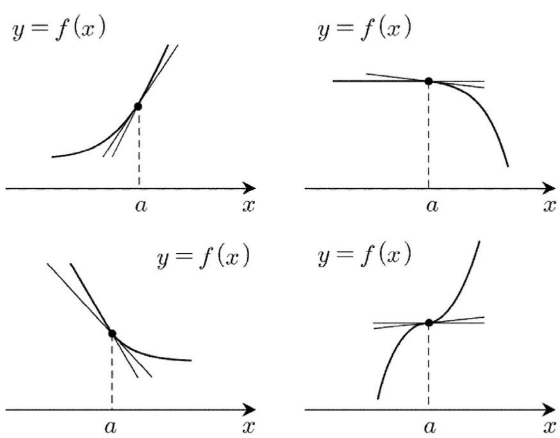
답 2개

• 그래프의 개형과 미분가능성

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분가능성을 판정할 때에는 우선 함수 $f(x)$의 $x=a$에서 연속성을 판정해야 한다.
만약 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아니면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속인 경우
❶ 미분계수의 정의를 이용하여 미분가능성을 판정한다.
❷ 도함수의 극한을 이용하여 미분가능성을 판정할 수도 있다. 이때, 계산과정이 줄어든다.
❸ 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그려서 미분가능성을 판정할 수도 있다. 만약 기하적으로(즉, 눈으로 보아서) 미분가능성을 판정할 수 없는 경우에는 ❶ 혹은 ❷의 방법 즉, 대수적인 방법으로 미분가능성을 판정해야 한다.



예를 들어 위의 곡선들이 $x=a$에서 미분가능하지 않음을 눈으로 보아서 판정할 수 있다.



(위의 네 가지 경우 모두 $x=a$에서 $f(x)$가 미분가능하지 않다.)
예를 들어 위의 곡선들이 $x=a$에서 미분가능하지 않음을 눈으로 보아서 판정할 수 없다.

예제 2

다음 함수의 $x=0$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하여라.

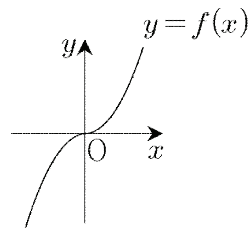
(1) $f(x)=x|x|$　　(2) $f(x)=x+|x|$
(3) $f(x)=x^2-2|x|$　　(4) $f(x)=x^2+3x-|x|$

풀이

(1) 함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x<0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$의 그래프는

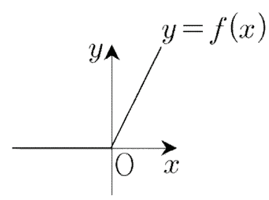


$x=0$에서의 함수 $f(x)$의 좌미분계수, 우미분계수가 모두 0이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(2) 함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$의 그래프는

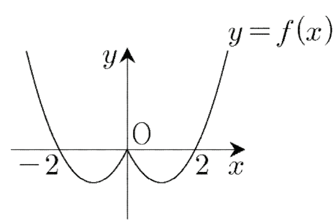


$x=0$에서의 함수 $f(x)$의 좌미분계수, 우미분계수가 각각 0, 2이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(3) 함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & (x \geq 0) \\ x^2+2x & (x<0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$의 그래프는

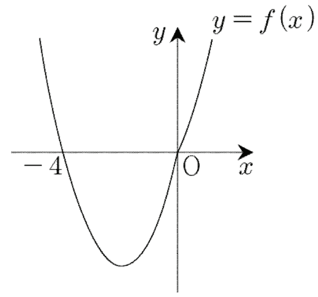


$x=0$에서의 함수 $f(x)$의 좌미분계수, 우미분계수의 부호가 각각 양(+), 음(−)이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(4) 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\begin{cases} x^2+2x & (x \geq 0) \\ x^2+4x & (x<0) \end{cases}$

함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & (x>0) \\ 2x+4 & (x<0) \end{cases}$

$\lim_{x \to 0+} f'(x)=2$, $\lim_{x \to 0-} f'(x)=4$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

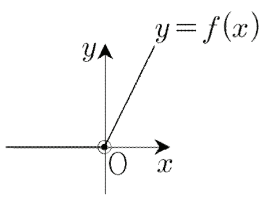
답 (1) 미분가능 (2) 미분불가능 (3) 미분불가능 (4) 미분불가능

참고

기하적인 관점에서 미분가능성을 판단해 보자.

(1) 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에서 부드럽게 연결되어 있으므로, 원점에서 미분가능하다. 이 경우와 다르게 마치 부드럽게 연결된 점처럼 보이지만 계산해보면(좌, 우 미분계수를 구해서 같은지 다른지를 비교해보면) 뾰족한 점인 경우도 있으므로, 육안으로 판단하기 모호한 경우에는 산술적인 방법(미분계수의 정의 또는 도함수의 극한)으로 미분가능성을 판단해야 한다.

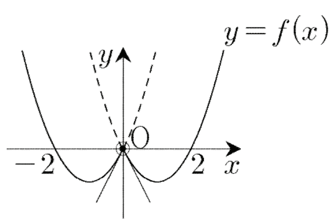
(2)



(단, ◉는 미분가능하지 않은 점이다.)

함수 $f(x)$의 그래프는 원점에서 뾰족하므로 함수 $f(x)$는 원점에서 미분가능하지 않다.

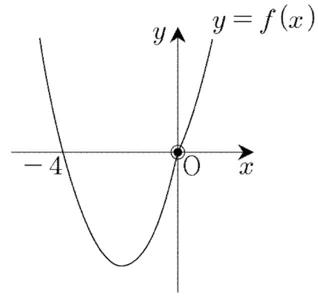
(3)



(단, ◉는 미분가능하지 않은 점이다.)

함수 $f(x)$의 그래프는 원점에서 뾰족하므로 함수 $f(x)$는 원점에서 미분가능하지 않다.

(4)



(단, ◉는 미분가능하지 않은 점이다.)

위의 그림만으로는 원점에서의 미분가능성을 판단할 수 없으므로 대수적인 방법(미분계수의 정의 또는 도함수의 극한)으로 미분가능성을 판단해야 한다.

예제 3

두 함수

$f(x)=-x^3+6x^2,\ g(x)=f'(x)$

에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)g(x)\ge 0) \\ g(x) & (f(x)g(x)<0) \end{cases}$$

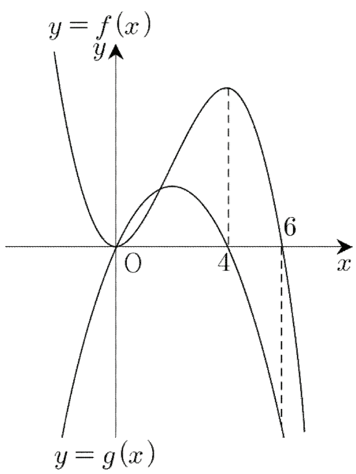
이다. 다음의 보기 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. 함수 $h(x)$는 원점에서 미분가능하다.
ㄴ. 함수 $h(x)-g(x)$가 불연속인 점의 개수는 2이다.
ㄷ. 함수 $g(x-a)\times h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되게 하는 상수 a가 존재한다.

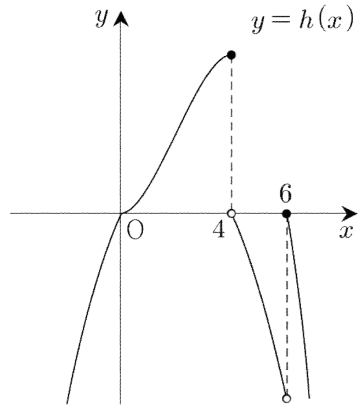
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

풀이

함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는



구간 $(-\infty,\ 0)$에서 $f(x)g(x)<0$이므로
$h(x)=g(x)$
$x=0$일 때, $f(x)g(x)=0$이므로 $h(x)=f(x)$
구간 $(0,\ 4)$에서 $f(x)g(x)>0$이므로
$h(x)=f(x)$
$x=4$일 때, $f(x)g(x)=0$이므로 $h(x)=f(x)$
구간 $(4,\ 6)$일 때, $f(x)g(x)<0$이므로
$h(x)=g(x)$
$x=6$일 때, $f(x)g(x)=0$이므로 $h(x)=f(x)$
구간 $(6,\ \infty)$에서 $f(x)g(x)>0$이므로
$h(x)=f(x)$
함수 $h(x)$의 그래프는



ㄱ. (거짓)
함수 $h(x)$의 그래프는 원점에서 꺾였으므로 함수 $h(x)$는 원점에서 미분가능하지 않다.
물론 다음과 같이 미분계수의 정의로 미분가능성을 판단해도 좋다.

$\lim_{x\to 0+} h'(x)=0,\ \lim_{x\to 0-} h'(x)=12$

이므로 미분계수의 정의에 의하여 함수 $h(x)$는 원점에서 미분가능하지 않다.
ㄴ. (참)
함수 $h(x)$는 $x=4,\ x=6$에서 불연속이다.
함수 $g(x)$는 모든 실수에 대하여 연속이다.
따라서 함수 $h(x)-g(x)$는 $x=4,\ x=6$에서 불연속이다.
ㄷ. (거짓)
(이차식)$\times h(x)$
즉, $(x-\alpha)(x-\beta)\times h(x)$ (단, $\alpha<\beta$)
가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면
$\alpha=4,\ \beta=6$가 되어야 한다.
이때, $|\alpha-\beta|=2$이다.
그런데
$g(x-a)=-3(x-a)(x-4-a)$에서
$|a-(a+4)|=4$이므로
함수 $g(x-a)\times h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되게 하는 상수 a는 존재하지 않는다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

E. 절댓값을 포함한 함수의 그래프

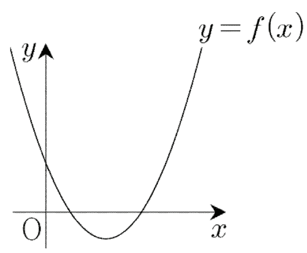
• 절댓값을 포함한 함수의 그래프

함수 $f(x)$의 그래프가 주어졌을 때, 다음의 함수들의 그래프 개형을 그려보자.
$y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$, $|y|=f(x)$, $|y|=f(|x|)$,
$y=|f(|x|)|$, $|y|=|f(x)|$, $|y|=|f(|x|)|$

수능에서는 주로
$y=|f(x)|$, $y=f(|x|)$, $y=|f(|x|)|$
의 그래프의 개형을 그리게 하는 문제들이 출제되며,
$|y|$가 포함된 도형은 $|x|+|y|=1$ 정도만이 출제된다.

예제 1

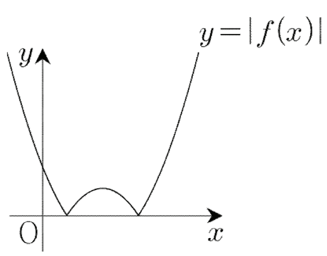
함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 함수의 그래프를 그리시오.



(1) $y=|f(x)|$ (2) $y=f(|x|)$
(3) $|y|=f(x)$ (4) $|y|=f(|x|)$
(5) $y=|f(|x|)|$ (6) $|y|=|f(x)|$
(7) $|y|=|f(|x|)|$

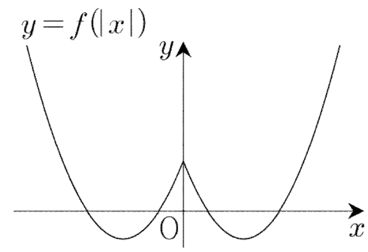
풀이

(1) $y=|f(x)|$



$$y=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq 0) \\ -f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$$

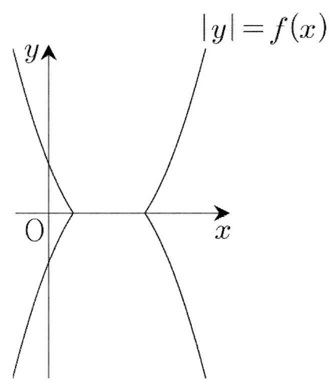
(2) $y=f(|x|)$



$$y=\begin{cases} f(x) & (x\geq 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

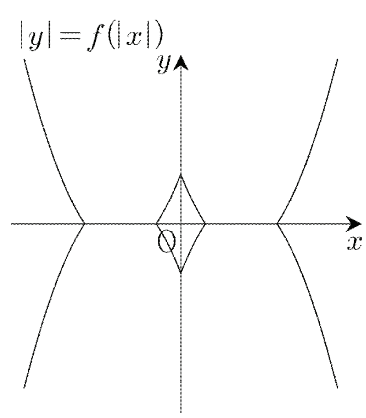
$f(|-x|)=f(|x|)$이므로 곡선 $y=f(|x|)$가 제1(4)사분면의 점 $(x,\ y)$를 지나면 제2(3)사분면의 점 $(-x,\ y)$를 지난다.

(3) $|y|=f(x)$



$y\geq 0$이면 $y=f(x)$
$y\leq 0$이면 $y=-f(x)$

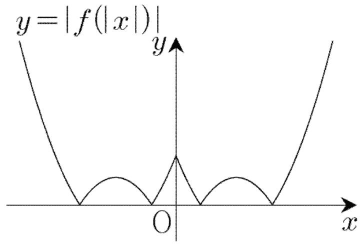
(4) $|y|=f(|x|)$



$y\geq 0$이면 $y=f(|x|)$
$y<0$이면 $y=-f(|x|)$
또는 다음의 방법을 따라도 좋다.

$x \geq 0$, $y \geq 0$: $y=f(x)$ (제1사분면)
$x \leq 0$, $y \geq 0$: $y=f(-x)$ (제2사분면)
$x \leq 0$, $y \leq 0$: $y=-f(-x)$ (제3사분면)
$x \geq 0$, $y \leq 0$: $y=-f(x)$ (제4사분면)

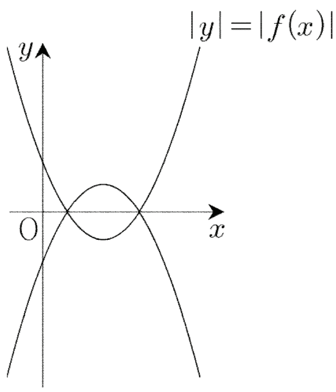
(5) $y=|f(|x|)|$



$$y=\begin{cases} f(|x|) & (f(|x|) \geq 0) \\ -f(|x|) & (f(|x|) < 0) \end{cases}$$

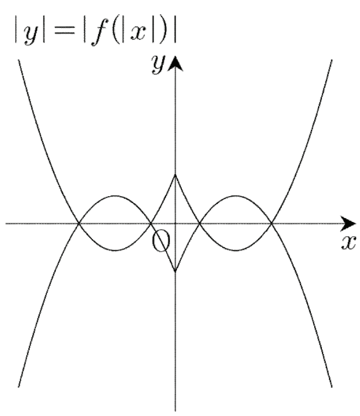
즉, 함수 $f(|x|)$의 그래프를 먼저 그리고 함수 $|f(|x|)|$의 그래프를 그린다.

(6) $|y|=|f(x)|$



$y \geq 0$이면 $y=|f(x)|$
$y < 0$이면 $y=-|f(x)|$

(7) $|y|=|f(|x|)|$



$y \geq 0$이면 $y=|f(|x|)|$
$y < 0$이면 $y=-|f(|x|)|$

또는 다음의 방법을 따라도 좋다.
$x \geq 0$, $y \geq 0$: $y=|f(x)|$ (제1사분면)
$x \leq 0$, $y \geq 0$: $y=|f(-x)|$ (제2사분면)
$x \leq 0$, $y \leq 0$: $y=-|f(-x)|$ (제3사분면)
$x \geq 0$, $y \leq 0$: $y=-|f(x)|$ (제4사분면)

답 풀이 참조

E. 삼차함수의 그래프: 미분 가능성(절댓값)

▶ 기출 문제 p.77

• 절댓값이 포함된 다항함수의 미분가능성

❶ 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$이고,
$|f(x)|$이 $x=a$에서 미분가능하면 $f'(a)=0$이다. (참)
❷ 다항함수 $f(x)$에 대하여
$f(a)=0,\ f'(a)=0$이면 $|f(x)|$은 $x=a$에서 미분가능하다. (참)

이때, ❷는 ❶의 역명제이다.

증명

❶ (참)
$f(a)=0$이므로 인수정리에 의하여
$f(x)=(x-a)Q(x)$
문제에서 주어진 조건에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{|(x-a)Q(x)|}{x-a}$$

가 존재한다.

$$\lim_{x\to a+}\frac{|(x-a)Q(x)|}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a+}\left|\frac{(x-a)Q(x)}{x-a}\right|=\lim_{x\to a+}|Q(x)|=|Q(a)|$$
$$\lim_{x\to a-}\frac{|(x-a)Q(x)|}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a-}-\left|\frac{(x-a)Q(x)}{x-a}\right|=\lim_{x\to a-}-|Q(x)|$$
$$=-|Q(a)|$$

$|Q(a)|=-|Q(a)|$에서 $|Q(a)|=0$이므로 $Q(a)=0$
인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=(x-a)^2Q_0(x)$
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=2(x-a)Q_0(x)+(x-a)^2Q_0{}'(x)$
$\therefore\ f'(a)=0$ (그리고 $x=a$에서의 $|f(x)|$의 미분계수도 0이다.) ■

❷ (참)
$f(a)=f'(a)=0$이므로 인수정리에 의하여
$f(x)=(x-a)^2Q_0(x)$

$$\lim_{x\to a+}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{|(x-a)^2Q_0(x)|}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a+}|(x-a)Q_0(x)|=0$$
$$\lim_{x\to a-}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{|(x-a)^2Q_0(x)|}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a+}-|(x-a)Q_0(x)|=0$$
$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=0\text{이므로}$$

함수 $|f(x)|$은 $x=a$에서 미분가능하다. 이때, 미분계수는 0이다. ■

따라서 다음의 필요충분조건이 성립한다.

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$일 때,
함수 $|f(x)|$은 $x=a$에서 미분가능하다.
$\Leftrightarrow$
$f'(a)=0$

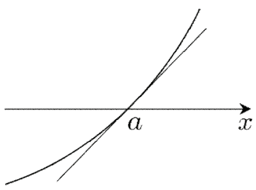
기하적 해석은 다음과 같다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ 0)$에서의 접선이 x축이면
함수 $y=|f(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.
이때, 곡선 $y=|f(x)|$ 위의 점 $(a,\ 0)$에서의 접선은 x축이다.

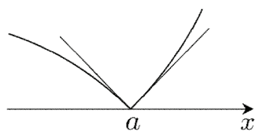
이를 그래프의 개형에서 확인해보자.

❶ $f'(a)>0$인 경우

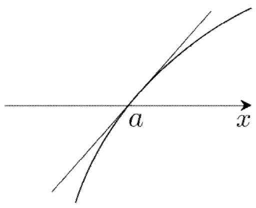
$y=f(x)$



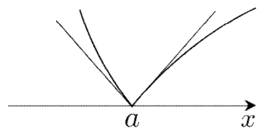
$y=|f(x)|$



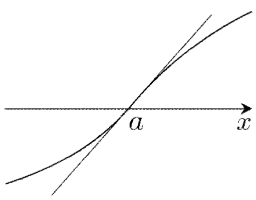
$y=f(x)$



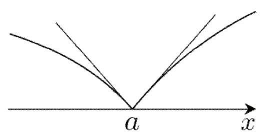
$y=|f(x)|$



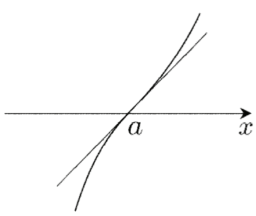
$y=f(x)$



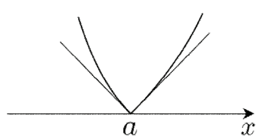
$y=|f(x)|$



$y=f(x)$



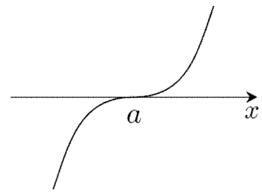
$y=|f(x)|$



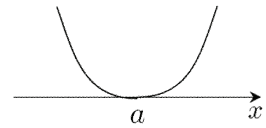
위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않음을 확인할 수 있다.

❷ $f'(a)=0$인 경우

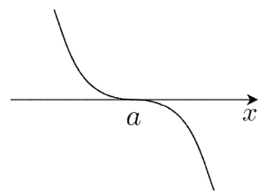
$y=f(x)$



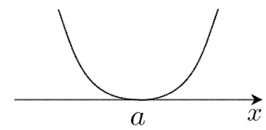
$y=|f(x)|$



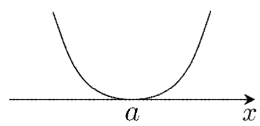
$y=f(x)$



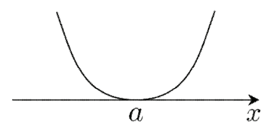
$y=|f(x)|$



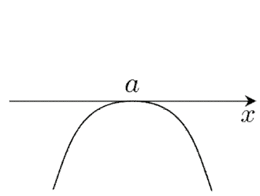
$y=f(x)$



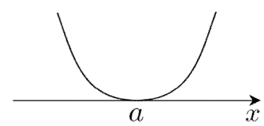
$y=|f(x)|$



$y=f(x)$

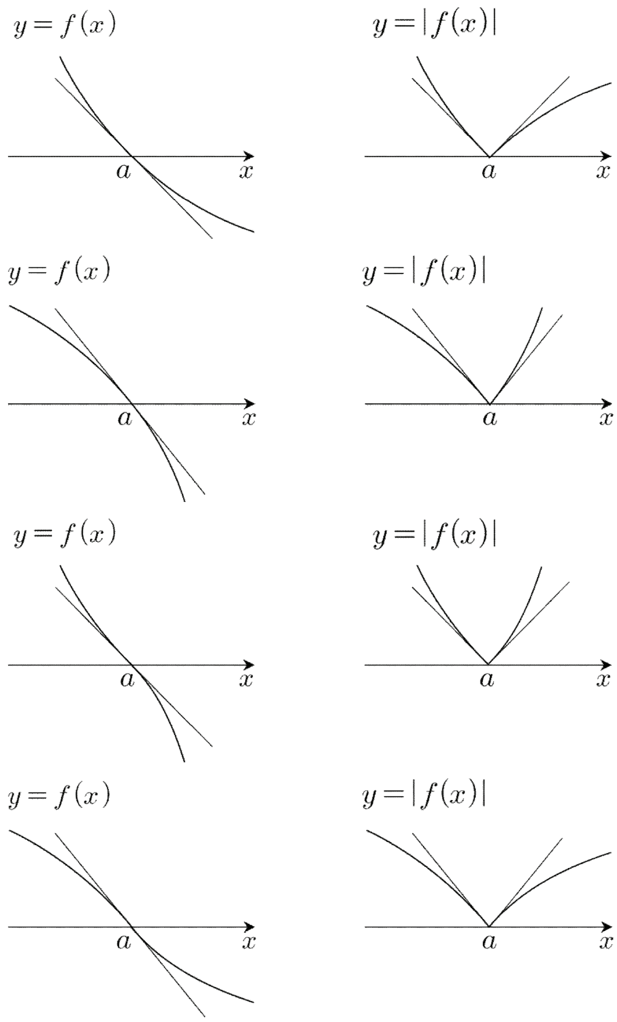


$y=|f(x)|$



위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능함을 확인할 수 있다.

❸ $f'(a)<0$인 경우



위의 그림에서 함수 $y=|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않음을 확인할 수 있다.

예제 1

다음 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점을 모두 찾으시오.

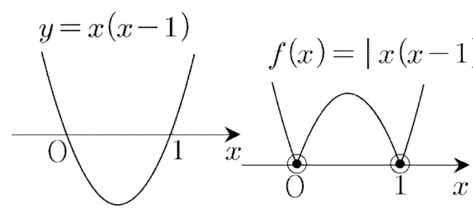
(1) $f(x)=|x(x-1)|$ (2) $f(x)=|x^2(x-1)|$

(3) $f(x)=|x^3(x-1)|$

이 문제를 풀면서 ❶ 미분계수의 정의 ❷ 도함수의 극한 ❸ 그래프의 개형 중에서 어떤 방법이 실전적일지를 생각해보아라.

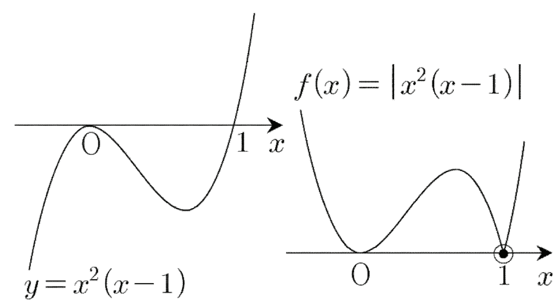
풀이

(1)



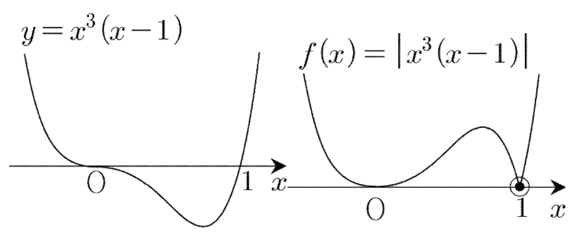
위의 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(2)



위의 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(3)



위의 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

답 풀이 참조

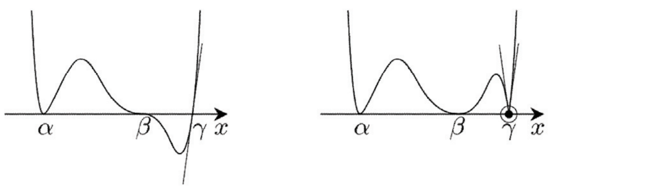
예를 들어 함수

$y = \left| (x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma) \right|$ $\cdots(*)$

(단, 세 수 α, β, γ는 모두 다르다.)

은 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 미분가능하지만, $x=\gamma$에서는 미분가능하지 않다.

$y=(x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)$ $y=\left|(x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)\right|$



(위의 그림처럼 곡선이 꺾이면 접선도 함께 꺾인다!)

❶ 곡선 $y=(x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)$가 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$에서 x축이 접하므로 함수 (*)는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 미분가능하다. 이때, 곡선 (*)는 두 점 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$에서 x축이 접한다.

❷ 곡선 $y=(x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)$ 위의 점 $(\gamma,\ 0)$에서의 접선이 x축이 아니므로 함수 (*)는 $x=\gamma$에서 미분가능하지 않다. 이때, 곡선 (*)는 점 $(\gamma,\ 0)$에서 x축에 접하지 않는다.

• 두 함수의 차로 정의된 함수의 미분가능성

❶ 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=g(a)$이고, $|f(x)-g(x)|$이 $x=a$에서 미분가능하면 $f'(a)=g'(a)$이다. (참)

❷ 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$이면 $|f(x)-g(x)|$은 $x=a$에서 미분가능하다. (참)

이때, ❷는 ❶의 역명제이다.

$h(x)=f(x)-g(x)$로 두고 앞선 정리를 적용하면 참임을 증명할 수 있다. (증명은 생략한다.)

따라서 다음의 필요충분조건이 성립한다.

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=g(a)$일 때,

함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.

$\Leftrightarrow$

$f'(a)=g'(a)$

함수 $|f(x)-g(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.

$\Leftrightarrow$

함수 $y=\begin{cases} f(x) & (x \ge a) \\ g(x) & (x < a) \end{cases}$는 $x=a$에서 미분가능하다.

❷의 기하적 해석은 다음과 같다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(a,\ b)$에서 서로 접할 때,

함수 $y=|f(x)-g(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하다.

이때, 곡선 $y=|f(x)-g(x)|$ 위의 점 $(a,\ 0)$에서의 접선은 x축이다.

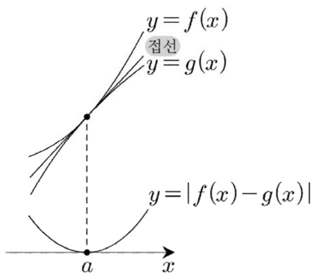
❸ 다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선을 $y=g(x)$라고 할 때,

함수 $|f(x)-g(x)|$은 $x=a$에서 미분가능하다. (참)

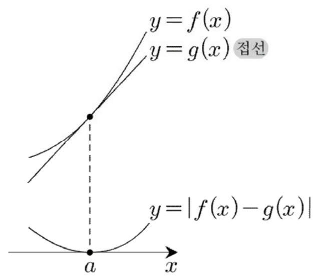
❸은 ❷의 특수한 경우이다.

위의 세 정리는 아래의 그림과 함께 기억하면 절대 잊지 않는다.

❶&❷

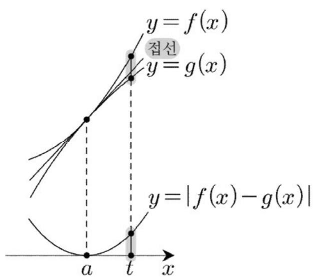


❸

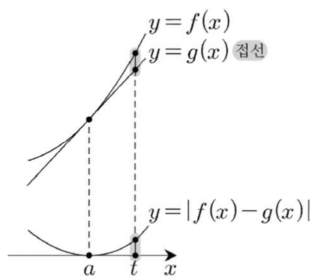


다음과 같은 관찰을 해보자.

❶&❷



❸



각각의 그림에서 두 선분의 길이는 서로 같다.

$t \to a$일 때,

(1) 두 선분의 길이는 모두 0에 수렴한다.

(2) 곡선(직선) $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$에 한없이 가까워진다. 그리고 $t=a$에서 곡선(직선) $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$에 접한다.

(3) 곡선 $y=|f(x)-g(x)|$는 x축에 한없이 가까워진다. 그리고 $t=a$에서 곡선 $y=|f(x)-g(x)|$는 x축에 접한다.

예제 2

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$는 세 점 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$을 지난다. (나) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서 그은 접선은 점 $(-1,\ 0)$을 지난다.

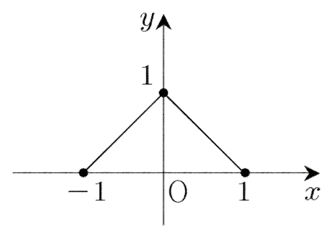
옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f'(0)=1$ ㄴ. $f'(c)=-1$인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에서 존재한다. ㄷ. 곡선 $y=\lvert f(x)-x-1\rvert$이 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

조건 (가)에서 주어진 세 점을 좌표평면 위에 나타내자.



ㄱ. (참)

조건 (나)에서

$f'(0)=$(두 점 $(0,\ 1)$, $(-1,\ 0)$의 평균변화율)

$=\dfrac{1-0}{0-(-1)}=1$

ㄴ. (참)

함수 $f(x)$가

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고

열린구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=-1=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나 이상 존재한다.

ㄷ. (참)

보기 ㄴ과 마찬가지의 방법으로

$f'(d)=1$인 d가 열린구간 $(-1,\ 0)$에서 존재한다.

요컨대

$-1<d<0<c<1$

인 두 상수 c, d에 대하여

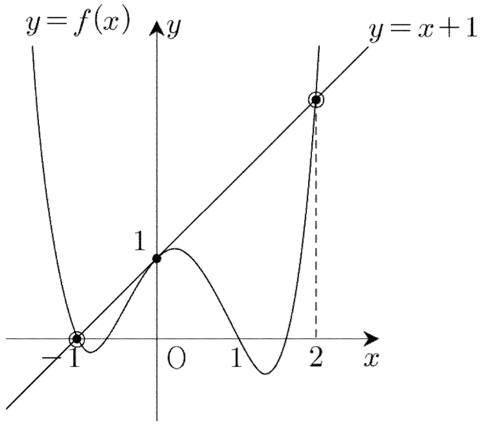
$f'(c)=-1<0$, $f'(d)=1>0$

이므로 다음이 성립한다.

구간 $(-1,\ 0)$에 속하는 어떤 열린구간에서 함수 $f(x)$는 증가하고,

구간 $(0,\ 1)$에 속하는 어떤 열린구간에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

그런데 $x\to\pm\infty$일 때, 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산하므로 곡선 $y=f(x)$는 아래 그림(↘↗↘↗)처럼 그려질 수밖에 없다.



(단, ◉는 함수 $|f(x)-x-1|$가 미분가능하지 않은 점)

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선이 $y=x+1$이므로 곡선 $y=|f(x)-x-1|$은

$x=0$에서 미분가능하다. 그런데 곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$을 지나므로 구간

$(-1,\ 1)$에서 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x+1$의 아래쪽에 놓일 수밖에 없다.

위의 그림에서 함수 $|f(x)-x-1|$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고

다음과 같이 함수 $f(x)$의 방정식을 유도하여 보기 ㄷ의 참, 거짓을 판단할 수 있다.

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

으로 두자.

조건(가)에서

$f(0)=d=1$

$f(1)=a+b+c+2=0$

$f(-1)=-a+b-c+2=0$

연립방정식을 풀면

$b=-2$, $c=-a$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+1$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=4x^3+3ax^2-4x-a$

조건 (나)에 의하여

$f'(0)=-a=\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=1$이므로 $a=-1$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4-x^3-2x^2+x+1$

ㄷ. (참)

방정식 $f(x)=x+1$을 정리하면

$x^4-x^3-2x^2=0$

좌변을 인수분해하면

$x^2(x-2)(x+1)=0$

$|f(x)-x-1|=|x^2(x-2)(x+1)|$

이므로 함수 $|f(x)-x-1|$는 $x=-1$, $x=2$에서 미분가능하지 않다.

E. 삼차함수의 그래프: 변곡접선

▶ 기출 문제 p.80

예제 1

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=x^3-3x$에 그을 수 있는 접선의 개수를 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$가 불연속이 되는 모든 실수 t의 값의 합을 구하시오.

풀이1 대수적

접점의 x좌표를 s로 두자.

접선의 방정식은

$y=(3s^2-3)(x-s)+s^3-3s$

이 직선이 점 $(t,\ 2)$를 지나므로

$2=(3s^2-3)(t-s)+s^3-3s$

정리하면

$(s+1)\{2s^2-(3t+2)s+3t+2\}=0\cdots(*1)$

$\Leftrightarrow$ $s=-1$ 또는

$2s^2-(3t+2)s+3t+2=0$ $\cdots(*2)$

(*2)에 $s=-1$을 대입하면 $t=-1$

$t=-1$을 (*2)에 대입하면

$2s^2+s-1=0,\ (2s-1)(s+1)=0$

풀면 $s=\dfrac{1}{2}$ 또는 $s=-1$

즉, $t=-1$이면 삼차방정식 (*1)의 해집합은

$\left\{-1,\ \dfrac{1}{2}\right\}$이다. 이때, -1은 중근이다.

이차방정식 (*2)의 판별식을 D라고 하자.

$D=(3t+2)^2-4\times2\times(3t+2)=3(3t+2)(t-2)$

(1) $D>0$인 경우 $\left(t<-\dfrac{2}{3}\right.$ 또는 $\left.t>2\right)$

$t<-1$ 또는 $-1<t<-\dfrac{2}{3}$ 또는 $t>2$이면

이차방정식 (*2)의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로

삼차방정식 (*1)의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$t=-1$이면

삼차방정식 (*1)의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(2) $D=0$인 경우 $\left(t=-\dfrac{2}{3}\right.$ 또는 $\left.t=2\right)$

이차방정식 (*2)의 서로 다른 실근의 개수가 1이므로

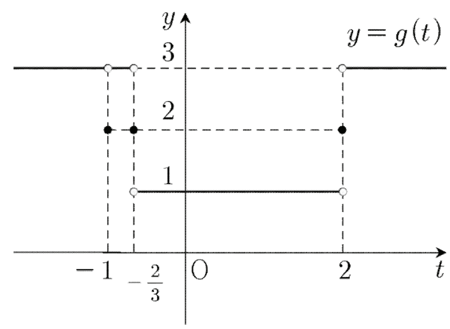
삼차방정식 (*1)의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(3) $D<0$인 경우 $\left(-\dfrac{2}{3}<t<2\right)$

이차방정식 (*2)가 허근을 가지므로

삼차방정식 (*1)의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$가 불연속인 모든 실수 t의 값의 합은 $\dfrac{1}{3}$이다.

답 $\dfrac{1}{3}$

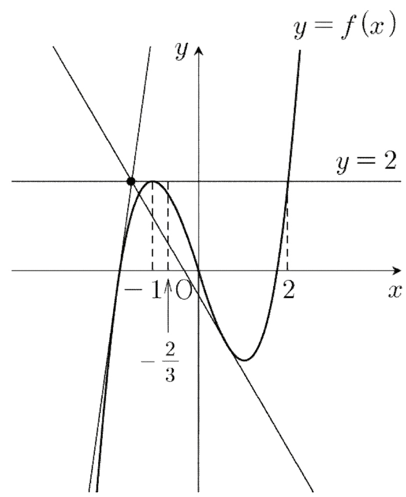
위의 풀이에서 $-1,\ 2$는 직선 $y=2$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 두 점의 x좌표이고, $-\dfrac{2}{3}$는 직선 $y=2$가 '곡선 $y=f(x)$ 위의 변곡점에서의 접선' 과 만나는 점이다. 이를 아래의 풀이에서 확인하자.

풀이2 기하적

t의 값을 변화시키면서, 실제로 접선을 그어보자.

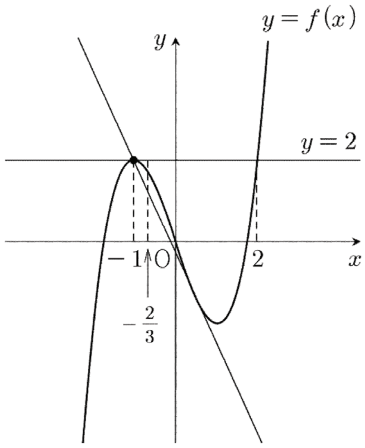
(1) $t<-1$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 3개의 접선을 그을 수 있다.



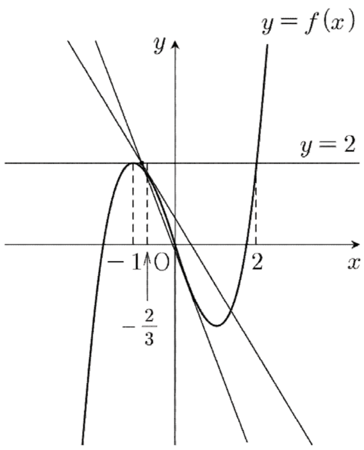
(2) $t=-1$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 2개의 접선을 그을 수 있다.



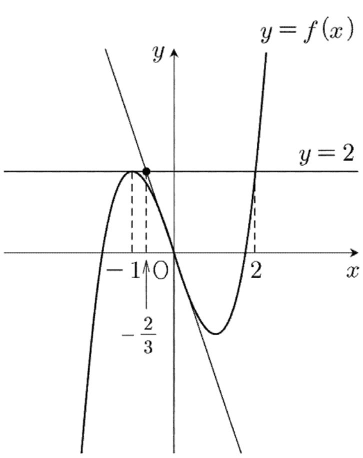
(3) $-1<t<-\frac{2}{3}$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 3개의 접선을 그을 수 있다.



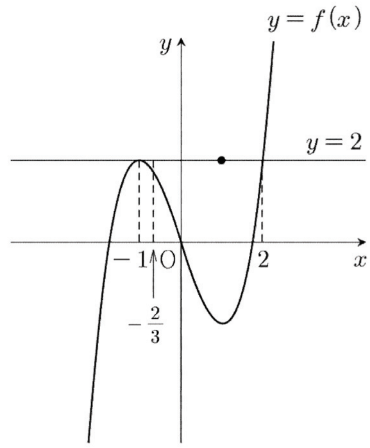
(4) $t=-\frac{2}{3}$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 2개의 접선을 그을 수 있다. 이때, 원점을 지나는 직선은 곡선 $y=f(x)$ 위의 변곡점에서의 접선이다.



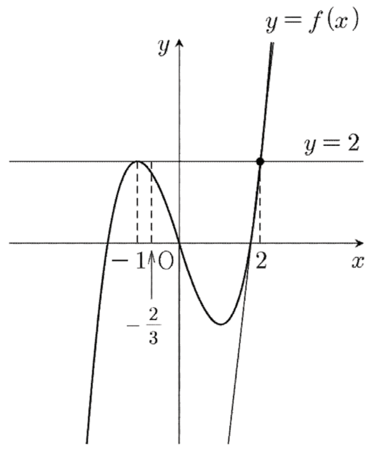
(5) $-\frac{2}{3}<t<2$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 1개의 접선을 그을 수 있다.



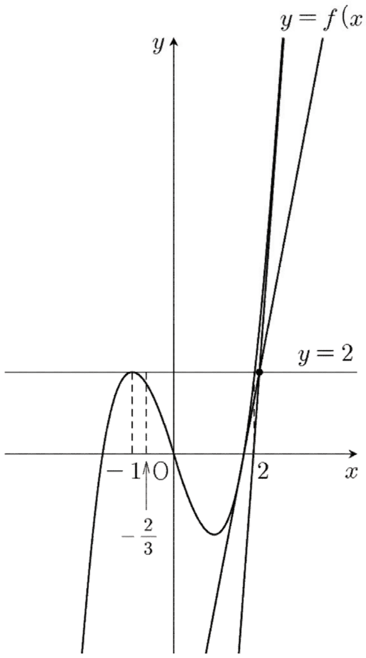
(6) $t=2$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 2개의 접선을 그을 수 있다.



(7) $t>2$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 3개의 접선을 그을 수 있다.



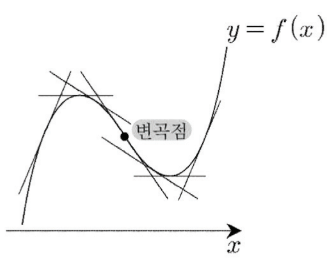
답 $\frac{1}{3}$

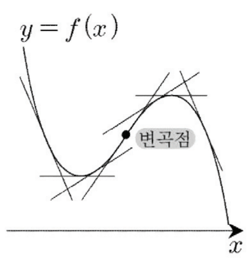
이 문제는 '대수적 풀이'와 '기하적 관찰'이 모두 가능하다. 전자의 경우 삼차방정식의 근의 분리와 이차방정식의 근의 분리가 적용된 풀이인데, 이는 수능에서 거의 매해 출제되는 전형적인 풀이에 해당하므로 반드시 익혀두어야 한다. 후자의 경우 t의 값을 변화시키면서 접선의 개수를 관찰하는 실전적인 풀이이다.

다음과 같은 관찰을 해보자.

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 점 P가 변곡점 일 때 최소가 된다. (아래 왼쪽 그림)

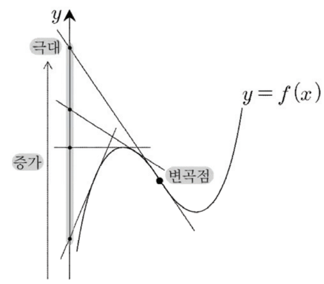
최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 점 P가 변곡점 일 때 최대가 된다. (아래 오른쪽 그림)

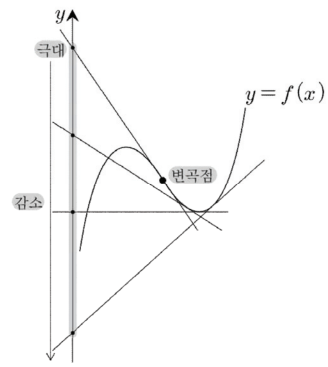




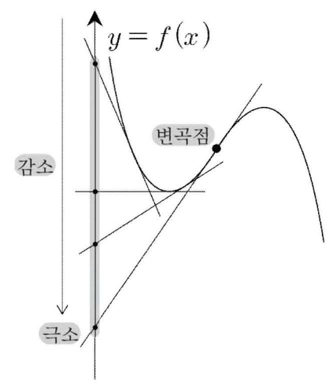
이제 다음의 관찰을 해보자.

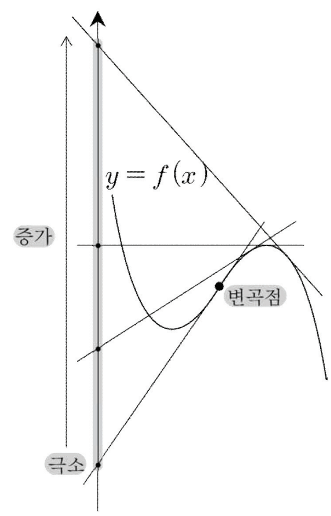
최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$는 점 P가 변곡점일 때 극댓값을 갖는다.
(단, 곡선 $y=f(x)$와 y축의 위치 관계가 아래 그림과 같을 때로 한정하자.)





최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$는 점 P가 변곡점일 때 극솟값을 갖는다.
(단, 곡선 $y=f(x)$와 y축의 위치 관계가 아래 그림과 같을 때로 한정하자.)

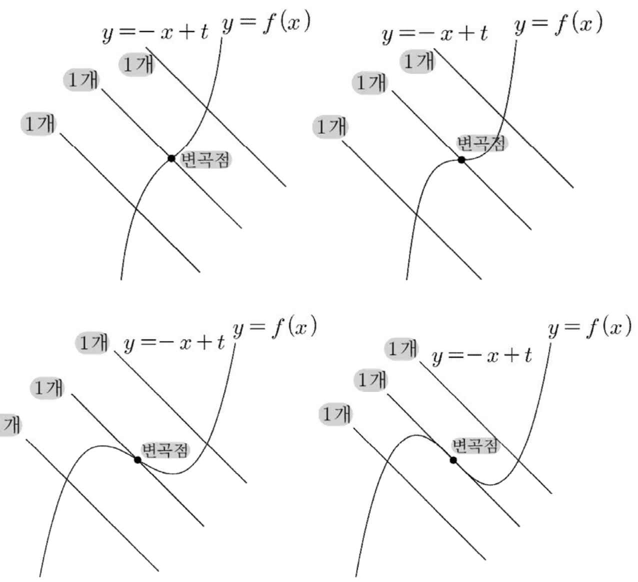




• 삼차함수와 직선의 위치 관계

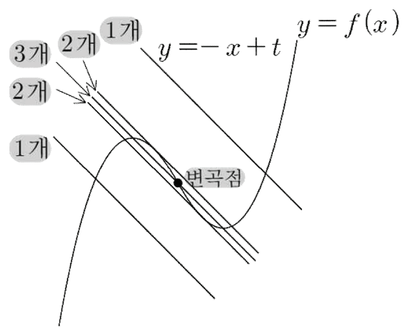
최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속인 경우와 불연속인 경우를 구분해보자.

(1) 곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서의 기울기가 -1 이상인 경우



위의 그림에서 알 수 있듯이 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(2) 곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서의 기울기가 -1보다 작은 경우



위의 그림에서 알 수 있듯이 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 불연속이다. 이때, 불연속 점의 개수는 2이다.

E. 방정식 $f(f(x))=x$에 대한 연구

▶ 기출 문제 p.83

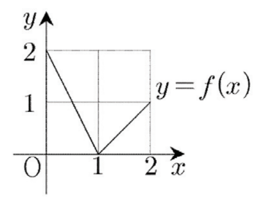
본 주제에 들어가기 전에 아래의 문제를 풀어보자.

예제 1

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 정의된 함수

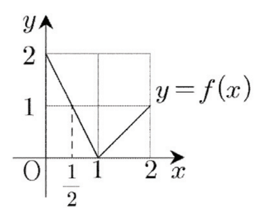
$$f(x)=\begin{cases}-2x+2 & (0\le x\le 1)\\ x-1 & (1<x\le 2)\end{cases}$$

의 그래프는 아래 그림과 같다.



방정식 $f(x+f(x))=1$을 만족시키는 모든 해의 합을 구하시오.

풀이

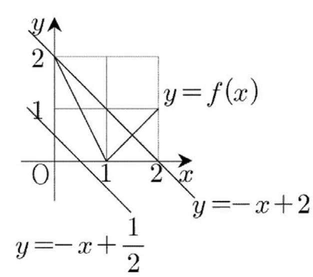


$f(\alpha)=1$을 풀면 $\alpha=\dfrac{1}{2}$ 또는 $\alpha=2$

문제에서 주어진 방정식은 다음과 필요충분조건이다.

$x+f(x)=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x+f(x)=2$

즉, $f(x)=-x+\dfrac{1}{2}(\cdots㉠)$ 또는 $f(x)=-x+2(\cdots㉡)$



위의 그림에서 ㉠은 해를 갖지 않고,

㉡: $x=0$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}$

따라서 구하는 값은 $\frac{3}{2}$이다.

답 $\frac{3}{2}$

• 방정식 $f(f(x))=x$의 실근에 대한 연구

(1) 항등식

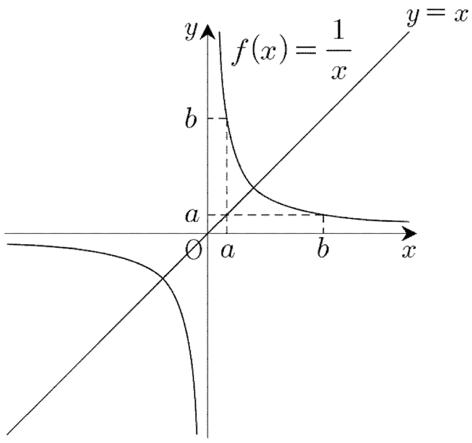
함수 $f: X \to X$의 정의역 X의 모든 x에 대하여

$f(f(x))=x$

가 성립하면 $f^{-1}=f$이다.

이때, 곡선 $y=f(x)$가 점 (a, b)를 지나면 이 곡선은 점 (b, a)를 반드시 지난다. 그리고 역도 성립한다.

예를 들어 0이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$의 역함수는 자기 자신이고, 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $f(f(x))=x$이다.



참고

모든 실수 x에 대하여

$f(f(x))=x$

가 성립하는 다항함수 $f(x)$는 일차함수이다.

왜냐하면 $f(x)$가 $n(\geq 2)$차 이상이면 $f(f(x))$는 $n^2(\geq 4)$차 이상이기 때문이다.

함수 $f(x)$의 방정식을 구하면

$f(x)=x$ 또는 $f(x)=-x+k$(단, k는 실수)이다.

(2) 방정식

어떤 실수 x에 대하여 $f(f(x))=x$가 성립하는 경우를 알아보자.

방정식

$f(f(x))=x$ $\cdots(*)$

이 실근을 가질 때, 한 실근을 a라 하고, $f(a)=b$로 두면 $f(f(a))=a$에서 $f(b)=a$이다.

$(*)$에 $x=b$를 대입하면

$f(f(b))=f(a)=b$, 즉 $f(f(b))=b$

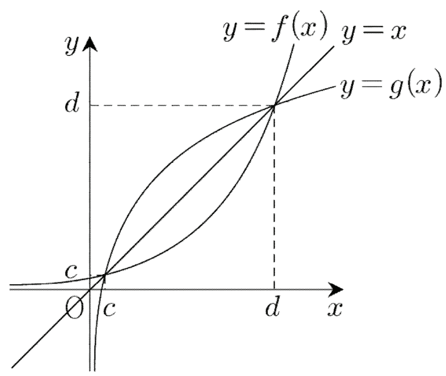
이므로 b는 방정식 $(*)$의 실근이다.

이제 곡선 $y=f(x)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시키 곡선을 $y=g(x)$라고 하자.

❶ $a=b$인 경우

두 점 (a, b), (b, a)는 점 (a, a)로 일치하고, 이 점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.



(단, $f(c)=g(c)=c$, $f(d)=g(d)=d$)

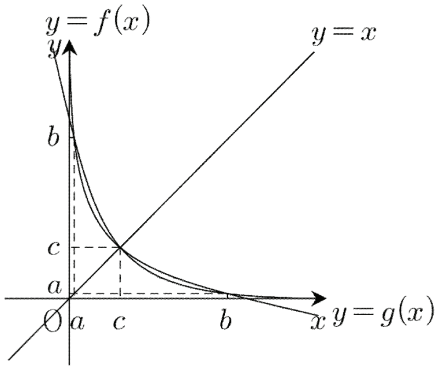
위의 그림에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 두 교점은 모두 직선 $y=x$ 위에 있다.

❷ $a \neq b$인 경우

두 점 (a, b), (b, a)는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때, 이 두 점을 연결하여 만든 직선의 기울기는 -1이다.

예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.



(단, $f(a)=b$, $g(b)=a$, $f(c)=g(c)=c$)

위의 그림에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 세 교점 중에서 두 점은 직선 $y=-x+a+b$ 위에 있고 (즉, 기울기가 -1인 직선 위에 있고) 나머지 한 점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

일반적으로 다음이 성립한다.

곡선 $y=f(x)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 곡선을 $y=g(x)$라고 하자.
두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나서 생긴 교점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 이 두 곡선은 점 $(b,\ a)$도 지나므로
$f(a)=g(a)=b$, $f(b)=g(b)=a$
즉, $f(a)=b$, $f(b)=a$
$f(f(a))=f(b)=a$, $f(f(b))=f(a)=b$
이므로 $x=a$, $x=b$는 방정식 $f(f(x))=x$의 실근이다.
역으로 $x=a$가 방정식 $f(f(x))=x$의 실근이고,
$f(a)=b$이면
$f(f(a))=f(b)=a$, 즉 $f(b)=a$
방정식 $f(f(x))=x$에 $x=b$를 대입하면
$f(f(b))=f(a)=b$, 즉 $f(f(b))=b$
이므로 $x=b$는 방정식 $f(f(x))=x$의 실근이다.
곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(a,\ b)$, $(b,\ a)$를 지나므로 곡선 $y=g(x)$는 두 점 $(b,\ a)$, $(a,\ b)$를 지난다. 따라서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 두 점 $(a,\ b)$, $(b,\ a)$를 교점으로 가진다.

참고

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 대신에
두 도형 $f(x,\ y)=0$, $g(x,\ y)=0$으로 두어야 하는 경우도 있다.

• 역함수에 대한 몇 개의 명제

다음 명제들을 생각해보자. (이해가 안 되는 명제들은 읽고 넘어가도 좋다.)

두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$에 대하여

❶ g는 f의 역함수이다.
$\Rightarrow$ $g(f(x))=x$(모든$x \in X$), $f(g(y))=y$(모든$y \in Y$)
❷ $g(f(x))=x$(모든$x \in X$), $f(g(y))=y$(모든$y \in Y$)
$\Rightarrow$ g는 f의 역함수이다.
❸ $g(f(x))=x$(모든$x \in X$)
$\to$ g는 f의 역함수이다. (거짓)
❹ $f(g(y))=y$(모든$y \in Y$)
$\to$ g는 f의 역함수이다. (거짓)
❺ $g(f(x))=x$(모든$x \in X$)
$\to$ $f(g(y))=y$(모든$y \in Y$) (거짓)
❻ $f(g(y))=y$(모든$y \in Y$)
$\to$ $g(f(x))=x$(모든$x \in X$) (거짓)

각각의 명제의 참, 거짓 판정 근거는 다음과 같다.
(자세한 증명은 생략한다. 결과만을 기억해두면 된다.)

〈근거〉
❶ 역함수의 성질에 의하여 주어진 명제는 참이다.
❷ 모든 $x \in X$에 대하여 $g(f(x))=x$이면 f는 일대일함수이다.
모든 $y \in Y$에 대하여 $f(g(y))=y$이면 f의 공역과 치역은 같다.
따라서 f는 일대일대응이고, $g=f^{-1}$이다.
❸ f는 일대일함수이지만 f의 공역과 치역이 같다는 보장은 없다.
❹ f의 공역과 치역은 같지만 f가 일대일함수라는 보장은 없다.
❺ f가 일대일함수라고 해서 f의 공역과 치역이 같으리라는 보장은 없다.
❻ f의 공역과 치역이 같다고 해서 f가 일대일함수라는 보장은 없다.

❷는 ❶의 역명제이므로 다음의 필요충분조건이 성립한다.
g는 f의 역함수이다.
$\Leftrightarrow$
$g(f(x))=x$(모든$x\in X$), $f(g(y))=y$(모든$y\in Y$)

일반적으로 다음이 성립한다.
함수 f: $X\to X$에 대하여
f는 f의 역함수이다. $\Leftrightarrow$ $f(f(x))=x$(모든$x\in X$)

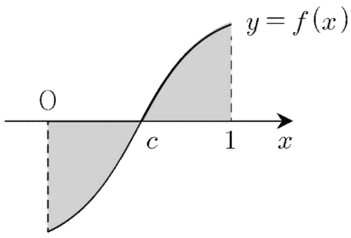
E. 사차함수의 그래프: 대칭성

▶ 기출 문제 p.84

• 사차함수의 그래프의 개형과 선대칭성

사차함수의 그래프의 개형이 선대칭인 경우를 모두 찾아보자.

사차함수
$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$(단, $a\neq 0$)
의 그래프가 y축에 평행한 어떤 직선 $x=k$에 대하여 대칭이라고 하자.
사차함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $x=k$를 x축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동하면
$f(x+k)$
$=a(x+k)^4+b(x+k)^3+c(x+k)^2+d(x+k)+e$
$=ax^4+b'x^3+c'x^2+d'x+e'$
이고, $x=0$(즉, y축)이다.
$g(x)=f(x+k)$로 두면
$g(x)=ax^4+b'x^3+c'x^2+d'x+e'$ (단, $a\neq 0$)
이제 사차함수 $g(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭일 때의 개형을 찾자.
함수 $g(x)$가 y축에 대하여 대칭이므로
모든 실수 x에 대하여
$g(-x)=g(x)$
즉, $a(-x)^4+b'(-x)^3+c'(-x)^2+d'(-x)+e'$
$=ax^4+b'x^3+c'x^2+d'x+e'$
정리하면
$b'x^3+d'x=0$
항등식의 필요충분조건에 의하여
$b'=d'=0$
함수 $g(x)$의 방정식은
$g(x)=ax^4+c'x^2+e'$ (단, $a\neq 0$)
함수 $g(x)$의 도함수는
$$g'(x)=4ax^3+2c'x=4ax\left(x^2+\frac{c'}{2a}\right)$$
(i) $\dfrac{c'}{2a}\geq 0$인 경우
방정식 $g'(x)=0$의 실근은 $x=0$뿐이다.



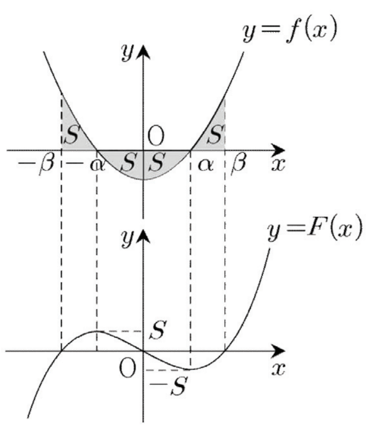
답 풀이 참조

참고

기하적인 관점에서 위의 그림을 재해석 하자. (귀류법)

구간 $[0,\ 1]$에서 연속함수 $f(x)$의 정적분 값은 0이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 x축의 아래에만 있거나, x축의 위에만 있을 수 없다.(전자의 경우에 정적분의 값은 음$(-)$이고, 후자의 경우에 정적분의 값은 양$(+)$이다.) 따라서 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 x축과 적어도 하나 이상의 점에서 만나야 한다. 이 관점이 녹아든 문제는 수능에서도 빈번하게 출제되고 있으므로, 위의 상황을 반드시 눈과 손에 익혀 두도록 하자.

y축이 대칭축인 이차함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다고 하자. (단, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$)



(단, $F(\beta)=0$, $\beta=\sqrt{3}\alpha$)

위의 그림에서 다음의 등식이 성립함을 알 수 있다.

$\int_{-\beta}^{\beta} f(x)dx=0$,

$\int_{-\beta}^{0} f(x)dx=0$, $\int_{0}^{\beta} f(x)dx=0$

$\int_{-\beta}^{\alpha} f(x)dx=-S$, $\int_{-\alpha}^{\beta} f(x)dx=-S$

F. 정적분의 계산: 영역+절댓값

▶ 기출 문제 p.115

다음의 성질을 함께 증명해보자.

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$는 연속함수이다.
모든 실수 x에 대하여
$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$
임을 이용하여, 부등식
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$
가 성립함을 증명하시오.

이때, 등호가 성립할 조건은 다음과 같다.
$f(x) \ge 0$ $(\Leftrightarrow |f(x)|=f(x))$
또는 $f(x) \le 0$ $(\Leftrightarrow |f(x)|=-f(x))$

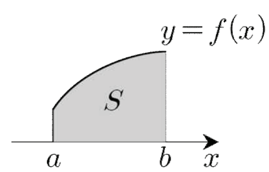
증명

모든 실수 x에 대하여
$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$
이므로
$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$
$$\therefore \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$
($\because$ 두 실수 A, B에 대하여
$-B \le A \le B$이면 $|A| \le B$이다.) ■

위의 성질을 그래프의 개형을 이용하여 재해석하자.

함수 $f(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속이다.

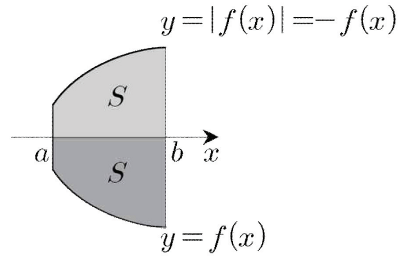
❶ 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \ge 0$인 경우



위의 그림에서

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx \ (\because |S| = S)$$

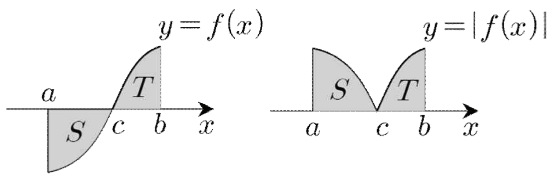
❷ 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \leq 0$인 경우



위의 그림에서

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx \ (\because |-S| = S)$$

❸ 구간 $[a,\ c]$에서 $f(x) \leq 0$이고,
구간 $[c,\ b]$에서 $f(x) \geq 0$인 경우
(단, $a < c < b$)



위의 그림에서

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = |T-S|$$

$$\int_a^b |f(x)|dx = S+T$$

$S \geq T$이면 $|T-S| = S-T$이므로

$S+T-|T-S| = 2T \geq 0$

$S < T$이면 $|T-S| = T-S$이므로

$S+T-|T-S| = 2S \geq 0$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

❶, ❷, ❸에 의하여 다음의 부등식이 항상 성립한다.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

F. 정적분의 계산: 평행이동, 대칭이동

▶ 기출 문제 p.116

평행이동의 관점을 적용하면 정적분의 계산이 간단해 지는 경우들이 있다. (미분법도 마찬가지이다. 수능에서는 평행이동의 관점을 적용하면 계산이 간단해지는 미분법, 적분법 문제가 즐겨 출제되고 있다.)

예제 1

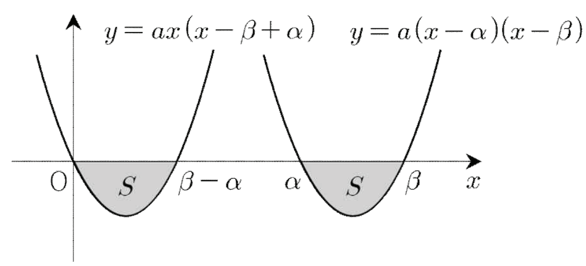
이차함수 $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 하면

$S = \dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ (단, $\beta > \alpha$)

이다. 위의 공식을 증명하여라.

증명

우선 $a > 0$인 경우를 생각하자.



문제에서 주어진 곡선을 x축의 방향으로 $-\alpha$만큼 평행이동시키면 곡선

$y = ax(x-\beta+\alpha)$

와 일치한다.

(※ 평행이동을 한 이유는? 계산을 간단히 하기 위해서이다.)

이때, 문제에서 주어진 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 평행이동시킨 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 같다. 즉, 평행이동해도 도형의 넓이가 변하지 않는다.

$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$= \int_0^{\beta-\alpha} ax(x-\beta+\alpha)dx$$

$$= \int_0^{\beta-\alpha} \{ax^2 + a(\alpha-\beta)x\}dx$$

$$= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{a}{2}(\alpha-\beta)x^2\right]_0^{\beta-\alpha}$$

$=\frac{a}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{a}{2}(\beta-\alpha)^3$

$=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$

$\therefore\ S=\left|\int_{\alpha}^{\beta}a(x-\alpha)(x-\beta)dx\right|=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$

(단, $\beta>\alpha$)

$a<0$인 경우에도 마찬가지의 방법으로 동일한 식을 얻는다.

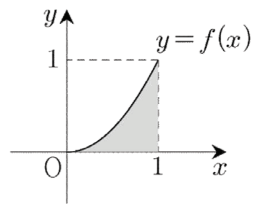
■

F. 정적분의 계산: 주기성, 대칭성

▶ 기출 문제 p.117

예제 1

$0\le x\le 1$에서 정의된 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 함수 $g(x)$는 다음을 만족시킨다.



(가) $0\le x\le 1$일 때, $g(x)=f(x)$
(나) $1\le x\le 2$일 때, $g(x)=f(2-x)$
(다) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

이때, $\int_{-1}^{5}g(x)dx$의 값을 구하시오.

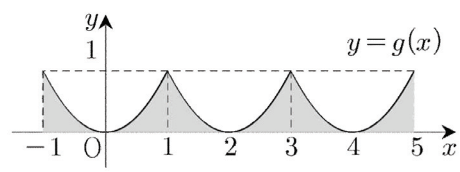
풀이

(나): $g(x)=f(-(x-2))$이므로

함수 $f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 후 x축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면 함수 $g(x)$의 그래프와 일치한다.

(다): 함수 $g(x)$의 주기는 2이다.

함수 $g(x)$의 그래프는



$\therefore\ \int_{-1}^{5}g(x)dx=6\int_{0}^{1}x^2dx=2$

답 2

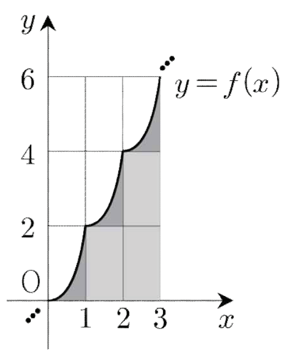
F. 정적분의 계산: 준주기성

▶ 기출 문제 p.118

준주기함수라는 표현은 교과서 어디에도 없다. 다만 주기함수와 평행이동이 결합된 것이라고 생각하면 된다. 다음의 필요충분조건이 성립한다.

모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(x-a)+b$
$\Leftrightarrow$
곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동시키면 자기 자신과 일치한다.

예를 들어
$f(x)=2x^3$ (단, $0\leq x<1$)
이고, 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(x-1)+2$
일 때, 곡선 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그림에서 더 어둡게 색칠된 도형은 모두 합동이고, 넓이가 같다.
따라서 다음과 같이 정적분을 계산할 수 있다.

$$\int_0^3 f(x)dx=3\times\int_0^1 f(x)dx+2\times3=3\times\frac{1}{2}+6=\frac{15}{2}$$

F. 정적분의 계산: 이차함수(공식)

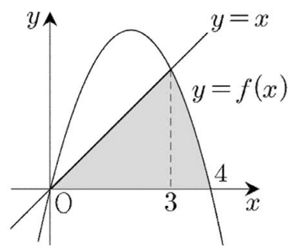
▶ 기출 문제 p.119

예제 1

함수 $f(x)=-x^2+4x$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

풀이

$-x^2+4x=x$, $x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$
$x=0$ 또는 $x=3$



구하는 넓이를 S라고 하자.

$$S=\frac{1}{6}\times4^3-\frac{1}{6}\times3^3=\frac{37}{6}$$

(즉, 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형이 넓이에서 곡선과 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 뺀 것이다.)

답 $\frac{37}{6}$

● **정적분과 넓이: 여집합**

예제 2

곡선 $y=|x^2-1|$과 직선 $y=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

풀이1

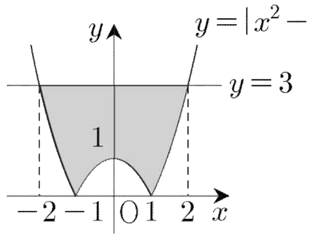
$$y=|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (|x|\geq 1) \\ 1-x^2 & (|x|\leq 1) \end{cases}$$

곡선과 직선의 방정식을 연립하면

$|x^2-1|=3$, $x^2-1=\pm 3$,

$x^2=4(\because x^2\neq -2)$

$(x+2)(x-2)=0$ 풀면 $x=2$ 또는 $x=-2$



구하는 도형의 넓이를 S라고 하면

$$S=\int_{-2}^{2}(3-|x^2-1|)dx$$

$$=2\int_{0}^{2}(3-|x^2-1|)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}\{3-(1-x^2)\}dx+2\int_{1}^{2}\{3-(x^2-1)\}dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(2+x^2)dx+2\int_{1}^{2}(4-x^2)dx$$

$$=2\left[2x+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+2\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$$

$$=\frac{14}{3}+\frac{10}{3}=8$$

답 8

풀이2

다음과 같은 빠른 계산도 가능하다.

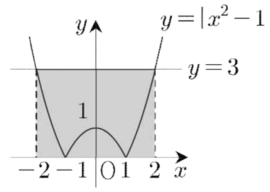
(곡선 $y=x^2-1$과 직선 $y=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이)

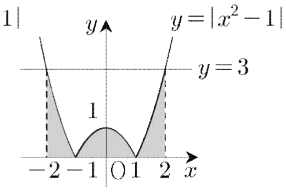
$-2\times$(곡선 $y=x^2-1$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이)

$$=\frac{1}{6}4^3-2\times\frac{1}{6}2^3=8$$

답 8

참고





문제에서 구하는 도형의 넓이는
왼쪽 그림의 직사각형의 넓이에서
오른쪽 그림의 어둡게 색칠된 도형의
넓이를 뺀 것이다.

이처럼 '여집합의 관점'에서 도형의 넓이를 구해야 하는 문제는 수능에서 매해 출제된다. 또 순열과 조합 단원의 일부 문제는 '여집합의 관점'에서 경우의 수를 세도록 출제된다. 이처럼 단원을 가리지 않고 '여집합의 관점'을 적용해야 하는 문제는 수능에서 매해 출제된다.

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

D 함수의 극한과 연속

1	⑤	2	⑤	3	④	4	⑤	5	③
6	④	7	①	8	②	9	③	10	①
11	26	12	④	13	③	14	③	15	②
16	③	17	③	18	④	19	⑤	20	30
21	16	22	③	23	⑤	24	④	25	①
26	②	27	②	28	10	29	13	30	③
31	③	32	①	33	③	34	②	35	16
36	⑤	37	6	38	⑤	39	①	40	6
41	①	42	⑤	43	③	44	⑤	45	④
46	④	47	④	48	③	49	⑤	50	④
51	①	52	24	53	①	54	20	55	⑤
56	②	57	①	58	③	59	④	60	②
61	③	62	③	63	③	64	③	65	⑤
66	④	67	①	68	①	69	8	70	④
71	④	72	②	73	13	74	⑤	75	21
76	④	77	④	78	③	79	①		

E 미분

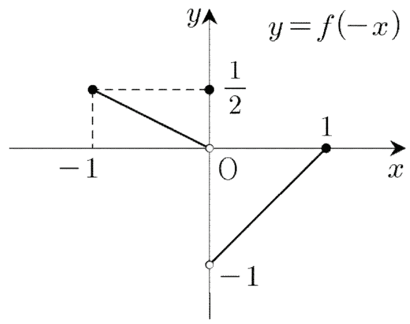
1	①	2	28	3	14	4	⑤	5	①
6	③	7	⑤	8	11	9	24	10	25
11	−6	12	3	13	②	14	50	15	28
16	①	17	24	18	②	19	③	20	12
21	10	22	③	23	19	24	⑤	25	①
26	④	27	①	28	19	29	①	30	28
31	16	32	②	33	110	34	③	35	186
36	③	37	②	38	28	39	⑤	40	97
41	③	42	20	43	25	44	②	45	32
46	③	47	②	48	5	49	④	50	②
51	②	52	20	53	②	54	①	55	⑤
56	③	57	11	58	②	59	④	60	③
61	167	62	④	63	6	64	①	65	③
66	16	67	⑤	68	③	69	3	70	⑤
71	②	72	16	73	32	74	③	75	②
76	8	77	④	78	④	79	①	80	⑤
81	③	82	③	83	③	84	⑤	85	⑤
86	⑤	87	④	88	⑤	89	380	90	10
91	⑤	92	③	93	9	94	②	95	②
96	②	97	38	98	④	99	14	100	④
101	④	102	③	103	④	104	21	105	⑤
106	243	107	21	108	③	109	①	110	51
111	61	112	③	113	13	114	58	115	①
116	19	117	①	118	65	119	483	120	13
121	⑤	122	⑤	123	③	124	④	125	③
126	39	127	108	128	105	129	13	130	③
131	④	132	②	133	④	134	5	135	40
136	13	137	①	138	15	139	⑤	140	③
141	③	142	⑤	143	65	144	⑤	145	42
146	①	147	③	148	②	149	12	150	147
151	④	152	④	153	12	154	11	155	527
156	①	157	14	158	④	159	33	160	②
161	③	162	①	163	21	164	⑤	165	22
166	3	167	⑤	168	32	169	②	170	④
171	①	172	12	173	27	174	①	175	22
176	①	177	②						

F 적분

1	④	2	12	3	④	4	10	5	②
6	⑤	7	④	8	②	9	⑤	10	20
11	①	12	①	13	②	14	16	15	③
16	⑤	17	16	18	40	19	⑤	20	④
21	③	22	5	23	②	24	③	25	④
26	②	27	13	28	43	29	②	30	③
31	⑤	32	④	33	39	34	①	35	①
36	17	37	③	38	②	39	25	40	④
41	②	42	①	43	①	44	④	45	45
46	⑤	47	16	48	①	49	⑤	50	①
51	③	52	96	53	②	54	④	55	③
56	4	57	①	58	12	59	13	60	③
61	14	62	40	63	③	64	7	65	200
66	2	67	②	68	②	69	4	70	②
71	④	72	④	73	80	74	④	75	④
76	12	77	6	78	②	79	⑤	80	⑤
81	③	82	③	83	⑤	84	③	85	17
86	⑤	87	⑤	88	②	89	④	90	④
91	③	92	③	93	①				

해설 목차

수학 II



마찬가지의 방법으로

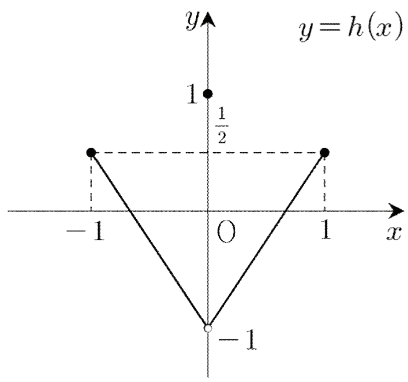
구간 $[-1,\ 0)$에서 함수 $h(x)$는

두 점 $\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$, $(0,\ -1)$을 잇는 선분($\subset 1$차식)이다.

$h(0)=f(0)+f(0)=1$

구간 $(0,\ 1]$에서 함수 $h(x)$는 두 점 $(0,\ -1)$, $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$을 잇는 선분($\subset 1$차식)이다.

함수 $h(x)$의 그래프의 개형은



[참고2]

보기 ㄷ이 거짓임을 다음과 같이 보여도 좋다.

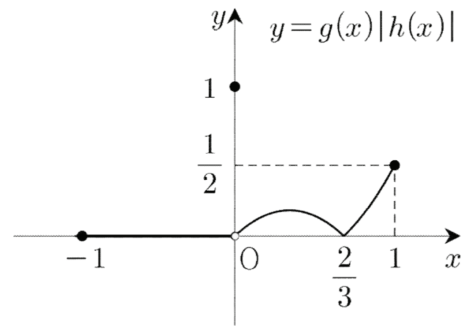
함수 $|h(x)|$의 방정식은

$$|h(x)|=\begin{cases} -\frac{3}{2}x-1 & \left(-1\le x\le -\frac{2}{3}\right) \\ \frac{3}{2}x+1 & \left(-\frac{2}{3}< x\le 0\right) \\ -\frac{3}{2}x+1 & \left(0< x\le \frac{2}{3}\right) \\ \frac{3}{2}x-1 & \left(\frac{2}{3}< x\le 1\right) \end{cases}$$

함수 $g(x)|h(x)|$의 방정식은

$$g(x)|h(x)|=\begin{cases} 0 & (-1\le x<0) \\ 1 & (x=0) \\ -\frac{3}{2}x^2+x & \left(0<x\le \frac{2}{3}\right) \\ \frac{3}{2}x^2-x & \left(\frac{2}{3}<x\le 1\right) \end{cases}$$

함수 $g(x)|h(x)|$의 그래프는



위의 그래프에서 함수 $g(x)|h(x)|$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 보기 ㄷ에서 주어진 명제는 거짓이다.

[참고3] 교육과정 외 (이과생을 위한 설명)

ㄱ. ㄴ에 대한 참, 거짓 판단을 그래프의 개형 없이도 판단할 수 있다.

▶ ㄱ. (참)

$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)+\lim_{x\to 0+} |f(x)|$

$=0+0=0$

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 0-} |f(x)|$

$=-1+1=0$

함수의 극한에 대한 정의에 의하여

$\therefore\ \lim_{x\to 0} g(x)=0$

▶ ㄴ. (참)

$\lim_{x\to 0+} |h(x)|=\lim_{x\to 0+} |f(x)+f(-x)|$

$=|0+(-1)|=1$

($\because$ $x\to 0+$일 때, $-x\to 0-$)

$\lim_{x\to 0-} |h(x)|=\lim_{x\to 0-} |f(x)+f(-x)|$

$=|-1+0|=1$

($\because$ $x\to 0-$일 때, $-x\to 0+$)

함수의 극한에 대한 정의에 의하여

$\lim_{x\to 0} |h(x)|=1$

함수 $|h(x)|$의 $x=0$에서의 함숫값은

$|h(0)|=2f(0)=1$

$\lim_{x\to 0} |h(x)|=h(0)$이므로 함수의 연속의 정의에 의하여 함수 $|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

D062 | 답 ③

[풀이1]

▶ ㄱ. (참)

$x\to 0+$일 때, $f(x)$는 1보다 큰 값을 가지면서 1에 한없이 가까워진다.

$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$

▸ ㄴ. (거짓)

$x \to 1+$일 때, $f(x)$는 2보다 작은 값을 가지면서 2에 한없이 가까워진다.

$\lim_{x \to 1+} f(x) = 2$

$x \to 1-$일 때, $f(x)$는 2 보다 작은 값을 가지면서 2에 한없이 가까워진다.

$\lim_{x \to 1-} f(x) = 2$

함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 극한값은 $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 함숫값은 $f(1)=1$

$\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$이므로 함수의 연속의 정의에 의하여

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

▸ ㄷ. (참)

함수의 극한의 성질에 의하여

$\lim_{x \to 1+} (x-1)f(x) = 0 \times 2 = 0$

$\lim_{x \to 1-} (x-1)f(x) = 0 \times 2 = 0$

함수 $(x-1)f(x)$의 $x=1$에서의 극한값은

$\lim_{x \to 1} (x-1)f(x) = 0$

함수 $(x-1)f(x)$의 $x=1$에서 함숫값은

$(1-1)f(1) = 0$

$\lim_{x \to 1} (x-1)f(x) = (1-1)f(1)$이므로

함수의 연속의 정의에 의하여

함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

[풀이2] 시험장

▸ ㄱ. (참)

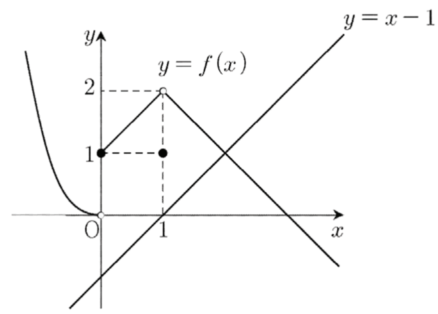
$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$

▸ ㄴ. (거짓)

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \neq 1 = f(1)$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

▸ ㄷ. (참)



함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이지만

함수 $y=x-1$이 $x=1$에서 연속이고

이 직선이 x축 위의 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

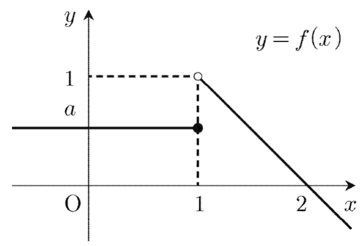
답 ③

D063 | 답 ③

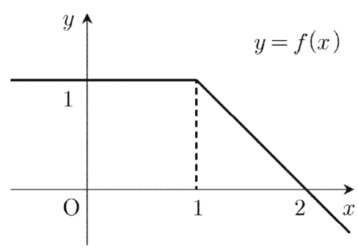
[풀이]

a의 값에 따른 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

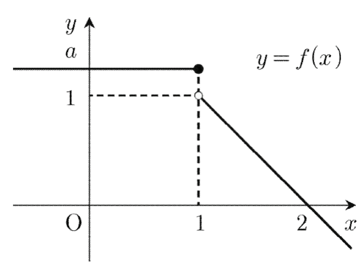
- (1) $a<1$인 경우



- (2) $a=1$인 경우



- (3) $a>1$인 경우



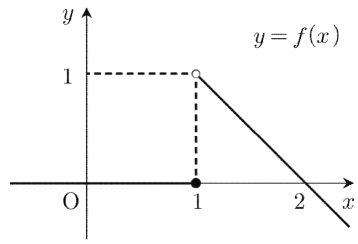
▸ ㄱ. (참)

$x \to 1+$일 때, $f(x)$는 1보다 작은 값을 가지면서 1에 한없이 가까워진다.

$\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$

▸ ㄴ. (거짓)

$a=0$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프는



$x \to 1-$일 때, $f(x)$는 0의 값을 가진다.

$\lim_{x \to 1-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 1+} f(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x \to 1-} f(x)$이므로

함수의 연속의 정의에 의하여

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

▸ ㄷ. (참)

다항함수 $y=x-1$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $f(x)$는 $x=1$을 제외한 모든 구간에서 연속이므로

연속함수의 성질에 의하여

함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$을 제외한 모든 구간에서 연속이다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x \to 1+} (x-1)f(x) = 0 \times 1 = 0$

$\lim_{x \to 1-} (x-1)f(x) = 0 \times a = 0$

함수 $(x-1)f(x)$의 $x=1$에서의 극한값은

$\lim_{x \to 1} (x-1)f(x) = 0$

함수 $(x-1)f(x)$의 $x=1$에서의 함숫값은

$(1-1)f(1) = 0$

$\lim_{x \to 1} (x-1)f(x) = (1-1)f(1)$이므로 함수의 연속의 정의에 의하여 함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 함수 $(x-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

[참고]

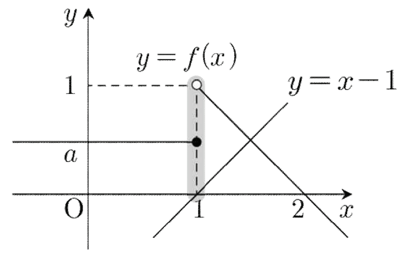
▸ ㄷ. (참)

• (1) $a=1$인 경우

두 함수 $f(x)$, $y=x-1$은 연속함수이므로

함수 $(x-1)f(x)$는 연속함수이다.

• (2) $a \neq 1$인 경우



함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

함수 $y=x-1$은 $x=1$에서 연속이고

이 직선은 x축 위의 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

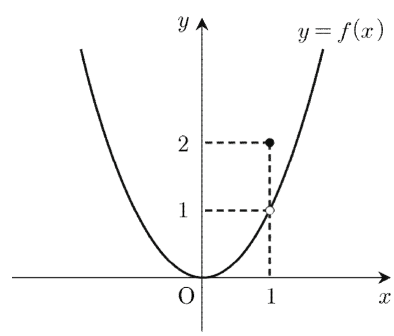
그러므로 함수 $(x-1)f(x)$는 연속함수이다.

(1), (2)에서 함수 $(x-1)f(x)$는 연속함수이다.

D064 | 답 ③

[풀이1]

함수 $f(x)$의 그래프는



▸ ㄱ. (참)

$x \to 1-$일 때, $f(x)$는 1보다 작은 값을 가지면서 1에 한없이 가까워진다.

$\lim_{x \to 1-} f(x) = 1$

$x \to 1+$일 때, $f(x)$는 1보다 큰 값을 가지면서 1에 한없이 가까워진다.

$\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$

$\therefore \lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x)$

▸ ㄴ. (거짓)

함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동시키면 함수 $g(x)$의 그래프와 일치한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 불연속이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 $x=a+1$에서 불연속이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

▸ ㄷ. (참)

다항함수 $y=x-1$은 실수 전체의 집합에서 연속이고

함수 $f(x)$는 $x=1$을 제외한 모든 구간에서 연속이므로

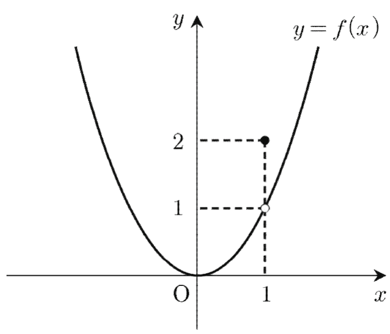
연속함수의 성질에 의하여

함수 $h(x)$는 $x=1$을 제외한 모든 구간에서 연속이다.
함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1-}(x-1)\times\lim_{x\to1-}f(x)$$
$$=0\times1=0$$
$$\lim_{x\to1+}h(x)=\lim_{x\to1+}(x-1)\times\lim_{x\to1+}f(x)$$
$$=0\times1=0$$

함수 $h(x)$의 $x=1$에서의 함숫값은
$h(1)=0$
$\lim_{x\to1}h(x)=h(1)$이므로
함수의 연속에 대한 정의에 의하여
함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
따라서 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.
답 ③

[풀이2] 시험장
함수 $f(x)$의 그래프는



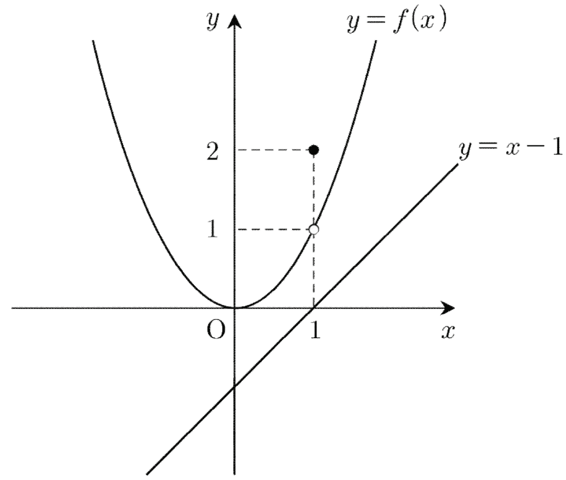
▶ ㄱ. (참)

$$\lim_{x\to1-}f(x)=1,\ \lim_{x\to1+}f(x)=1$$

이므로

$$\therefore\ \lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$$

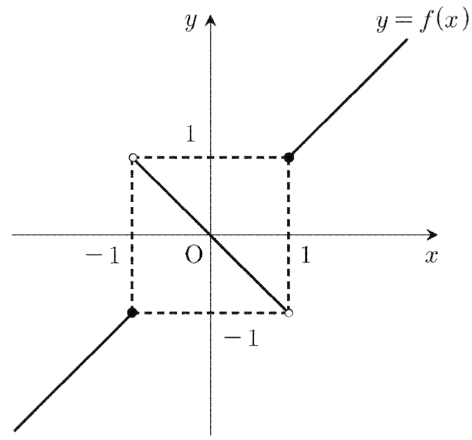
▶ ㄴ. (거짓)
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로
함수 $f(x-a)$는 $x=a+1$에서 불연속이다.
($\because$ 불연속 함수는 아무리 평행이동해도 여전히 불연속이다.)
▶ ㄷ. (참)



함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이고
연속함수 $y=x-1$은 x축 위의 점 $(1,\ 0)$을 지나므로
함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.
답 ③

D065 | 답 ⑤

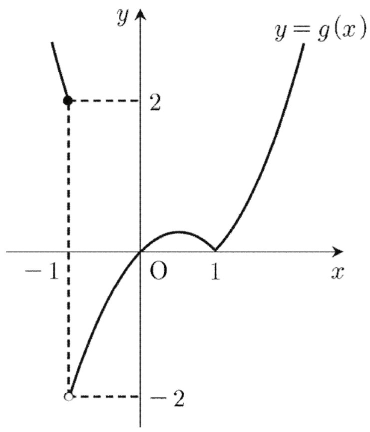
[풀이]
▶ ㄱ. (참)
함수 $f(x)$의 그래프는



위의 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이다.
따라서 함수 $f(x)$가 불연속인 점의 개수는 2이다.
▶ ㄴ. (참)
$g(x)=(x-1)f(x)$으로 두자.

$$g(x)=\begin{cases}x^2-x & (|x|\ge1)\\ -x^2+x & (|x|<1)\end{cases}$$

함수 $g(x)$의 그래프는



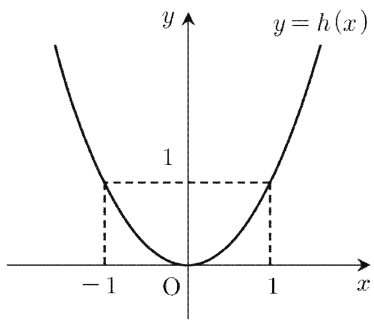
위의 그림에서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

▸ ㄷ. (참)

$h(x)=\{f(x)\}^2$으로 두자.

함수 $h(x)$의 방정식은 $h(x)=x^2$

함수 $h(x)$의 그래프는



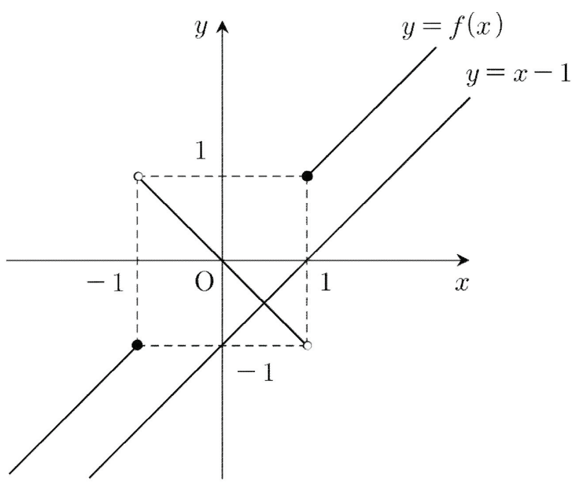
위의 그림에서 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고]

▸ ㄴ. (참)



함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이지만

함수 $y=x-1$이 $x=1$에서 연속이고

이 직선이 x축 위의 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

D066 | 답 ④

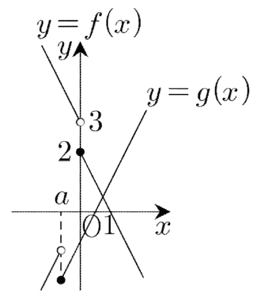
[풀이1]

함수 $f(x)$는 $x=0$에서만 불연속이고,

함수 $g(x)$는 $x=a$에서만 불연속이므로

함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$, $x=a$에서 연속일 때의 a의 값을 구하면 된다.

• (1) $a<0$인 경우



$\lim\limits_{x\to0-}f(x)g(x)$

$=(-2\times0+3)\times(2\times0-1)$

$=-3$,

$f(0)g(0)$

$=(-2\times0+2)\times(2\times0-1)$

$=-2$

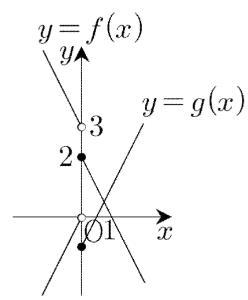
이므로

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)g(x)\neq f(0)g(0)$

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

• (2) $a=0$인 경우



$\lim\limits_{x\to0-}f(x)g(x)$

$=(-2\times0+3)\times(2\times0)$

$=0$,

$f(0)g(0)$

$=(-2\times0+2)\times(2\times0-1)$

$=-2$

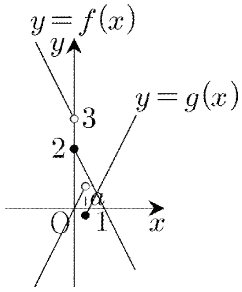
이므로

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)g(x)\neq f(0)g(0)$

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

- (3) $a>0$인 경우



$\lim\limits_{x\to0+} f(x)g(x)$

$=(-2\times0+2)\times(2\times0)$

$=0$,

$\lim\limits_{x\to0-} f(x)g(x)$

$=(-2\times0+3)\times(2\times0)$

$=0$,

$f(0)g(0)$

$=(-2\times0+2)\times(2\times0)$

$=0$

이므로

$\lim\limits_{x\to0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이제 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속일 때의 a의 값을 구하자.

$\lim\limits_{x\to a+} f(x)g(x)$

$=(-2a+2)\times(2a-1)$

$=-2(a-1)(2a-1)$, $\cdots$ ㉠

$\lim\limits_{x\to a-} f(x)g(x)$

$=(-2a+2)\times(2a)$

$=-2(a-1)(2a)$, $\cdots$ ㉡

$f(a)g(a)$

$=(-2a+2)\times(2a-1)$

$=-2(a-1)(2a-1)$ $\cdots$ ㉢

㉠=㉡=㉢(즉, ㉠=㉡)을 정리하면

$2(a-1)=0$ 풀면 $a=1(>0)$

따라서 $a=1$이면 다음이 성립한다.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=f(a)g(a)$

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

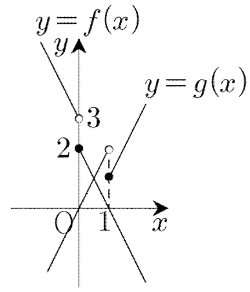
(1), (2), (3)에서 상수 a의 값은

$\therefore\ a=1$

답 ④

[풀이2] 시험장

다음과 같이 빠르게 a의 값을 구할 수도 있다.



함수 $f(x)$가 $x=0$에서 불연속이므로 $g(0)=0$이어야 한다.

왜냐하면 위의 그림처럼 $g(0)=0$이면

$\lim\limits_{x\to0} f(x)g(x)=0=f(0)g(0)$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이 되기 때문이다.

함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속이므로 $f(a)=0$이어야 한다.

즉, $a=1$이다.

왜냐하면 위의 그림처럼 $a=1$이면

$\lim\limits_{x\to1} f(x)g(x)=0=f(1)g(1)$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이 되기 때문이다.

$\therefore\ a=1$

답 ④

D067 | 답 ①

[풀이1]

- (1) $i=1$인 경우

함수 $g_1(x)$의 방정식은

$$g_1(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

$h(x)=xg_1(x)$로 두자.

함수 $h(x)$의 방정식은

$$h(x)=\begin{cases}|x| & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

즉, $h(x)=|x|$

함수 $h(x)$의 $x=0$에서의 함숫값은

$h(0)=|0|=0$

함수 $h(x)$의 $x=0$에서의 극한값은

$\lim\limits_{x\to0+} h(x)=\lim\limits_{x\to0+} x=0$

$\lim\limits_{x\to0-} h(x)=\lim\limits_{x\to0-} (-x)=0$

즉, $\lim\limits_{x\to0} h(x)=0$

$\lim_{x \to 0} h(x) = 0 = h(0)$이므로

함수의 연속의 정의에 의하여

함수 $h(x)$는 $x = 0$에서 연속이다.

$\therefore\ a_1 = 1$

• (2) $i = 2$인 경우

함수 $g_2(x)$의 방정식은

$$g_2(x) = \begin{cases} -x^2+1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$h(x) = xg_2(x)$로 두자.

함수 $h(x)$의 방정식은

$$h(x) = \begin{cases} -x^3+x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

즉, $h(x) = -x^3+x$

다항함수 $h(x)$는 $x = 0$에서 연속이다.

$\therefore\ a_2 = 1$

• (3) $i = 3$인 경우

함수 $g_3(x)$의 방정식은

$$g_3(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$h_1(x) = xg_3(x)$로 두자.

함수 $h_1(x)$의 방정식은

$$h_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0+} h_1(x) = \infty$이므로

함수의 연속의 정의에 의하여

함수 $h_1(x)$는 $x = 0$에서 불연속이다.

$h_2(x) = x^2g_3(x)$로 두자.

함수 $h_2(x)$의 방정식은

$$h_2(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

함수 $h_2(x)$의 $x = 0$에서의 함숫값은

$h_2(0) = 0$

함수 $h_2(x)$의 $x = 0$에서의 극한값은

$\lim_{x \to 0} h_2(x) = 1$

$\lim_{x \to 0} h_2(x) \neq h_2(0)$이므로

함수의 연속의 정의에 의하여

함수 $h_2(x)$는 $x = 0$에서 불연속이다.

$h_3(x) = x^3g_3(x)$로 두자.

함수 $h_3(x)$의 방정식은

$$h_3(x) = \begin{cases} x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

즉, $h_3(x) = x$

다항함수 $h_3(x)$는 $x = 0$에서 연속이다.

$\therefore\ a_3 = 3$

(1), (2), (3)에서 $a_1 = a_2 < a_3$이다.

답 ①

[풀이2] 시험장

• (1) $i = 1$, $i = 2$인 경우

함수 $g_1(x)(g_2(x))$는 $x = 0$에서 좌극한, 우극한, 함숫값이 존재하지만 불연속이다.

곡선 $y = x$는 $x = 0$에서 연속이고, 원점을 지나므로

함수 $x \times g_1(x)(x \times g_2(x))$는 $x = 0$에서 연속이다.

$\therefore\ a_1 = N(g_1) = 1$, $a_2 = N(g_2) = 1$

• (2) $i = 3$인 경우

함수 $x^2g_3(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$는 $x = 0$에서 좌극한, 우극한, 함숫값이 존재하지만 불연속이다.

곡선 $y = x$는 $x = 0$에서 연속이고, 원점을 지나므로

함수 $x \times x^2g_3(x)$는 $x = 0$에서 연속이다.

$\therefore\ a_3 = N(g_3) = 3$

$\therefore\ a_1 = a_2 < a_3$

답 ①

D068 | 답 ①

[풀이1]

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고,

함수 $g(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$에서 연속이므로

연속함수의 성질에 의하여

함수 $f(x)g(x)$는 구간 $(-\infty, 0)$에서 연속이다.

마찬가지의 이유로

함수 $f(x)g(x)$는 구간 $(0, 2)$, $(2, \infty)$에서 연속이다.

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위하여

함수 $f(x)g(x)$는 $x = 0$과 $x = 2$에서 연속이어야 한다.

$f(x) = x^2+ax+b$으로 두자.

함수 $f(x)g(x)$의 $x = 0$에서의 함숫값은

$f(0)g(0) = b \times (-1) = -b$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x \to 0-} f(x)g(x) = b \times (-1) = -b$

$\lim_{x \to 0+} f(x)g(x) = b \times 1 = b$

함수의 연속의 정의에 의하여

$\lim_{x \to 0-} f(x)g(x) = -b = b = \lim_{x \to 0+} f(x)g(x)$

풀면 $b=0$

$b=0$이면 $\lim_{x\to 0}f(x)g(x)=0=f(0)g(0)$

함수의 연속의 정의에 의하여 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^2+ax$

함수 $f(x)g(x)$의 $x=2$에서의 함숫값은

$f(2)g(2)=(4+2a)\times 1=4+2a$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 2-}f(x)g(x)=(4+2a)(-1)=-4-2a$

$\lim_{x\to 2+}f(x)g(x)=(4+2a)\times 1=4+2a$

함수의 연속의 정의에 의하여

$\lim_{x\to 2-}f(x)g(x)=\lim_{x\to 2+}f(x)g(x)$

즉, $-4-2a=4+2a$ 풀면 $a=-2$

$a=-2$이면 $\lim_{x\to 2}f(x)g(x)=0=f(2)g(2)$

함수의 연속의 정의에 의하여

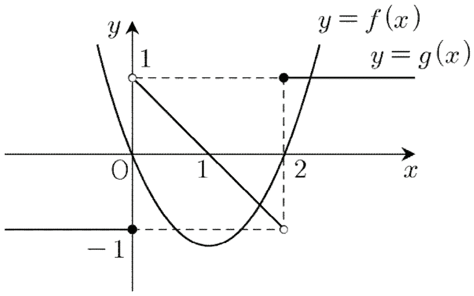
함수 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=x^2-2x$

$\therefore\ f(5)=15$

답 ①

[풀이2] 시험장



함수 $g(x)$가 $x=0$, $x=2$에서 불연속이고,

함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=2$에서 연속이므로

함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$, $x=2$에서

연속일 조건은 $f(0)=0$, $f(2)=0$이다.

따라서 이차함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x(x-2)$

$\therefore\ f(5)=15$

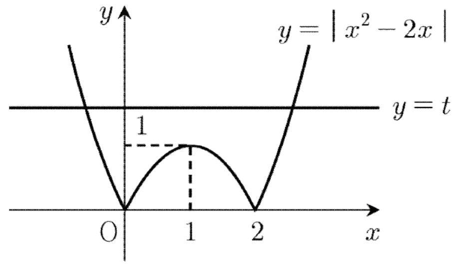
답 ①

D069 | 답 8

[풀이]

이차함수 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$의 꼭짓점은 $(1,\ -1)$이다.

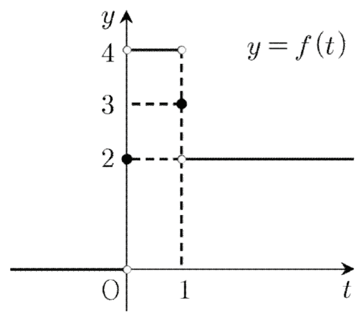
함수 $y=|x^2-2x|$의 그래프는



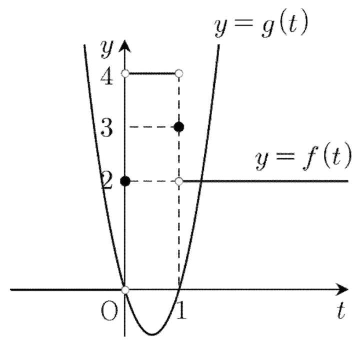
함수 $f(t)$의 방정식은

$$f(t)=\begin{cases}2 & (t>1)\\ 3 & (t=1)\\ 4 & (0<t<1)\\ 2 & (t=0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

함수 $f(t)$의 그래프는



함수 $f(t)$는 $t=0$과 $t=1$에서 불연속이다.



함수 $f(t)$가 $t=0$, $t=1$에서 불연속이고,

함수 $g(t)$가 연속함수이므로

함수 $f(t)g(t)$가 연속함수일 조건은

$g(0)=0$, $g(1)=0$이다.

이차함수 $g(t)$의 방정식은

$g(t)=t(t-1)$

$\therefore\ f(3)+g(3)=2+6=8$

답 8

[참고]

함수 $g(t)$의 방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

함수 $g(t)$의 방정식을

$g(t)=t^2+at+b$

함수 $f(t)$는 $t=0$과 $t=1$을 제외한 모든 구간에서 연속이고, 함수 $g(t)$는 연속함수이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수 $f(t)g(t)$는 $t=0$과 $t=1$을 제외한 모든 구간에서 연속이다.

• (1) 함수 $f(t)g(t)$가 $t=0$에서 연속일 조건

$\lim_{t\to0+}f(t)g(t)=\lim_{t\to0+}4(t^2+at+b)=4b$

$\lim_{t\to0-}f(t)g(t)=\lim_{t\to0+}(t^2+at+b)=0$

$f(0)g(0)=2b$

$\lim_{t\to0}f(t)g(t)=f(0)g(0)$이기 위해서는

$4b=0=2b$ 풀면 $b=0$

함수 $g(t)$의 방정식은 $g(t)=t^2+at$

• (2) 함수 $f(t)g(t)$가 $t=1$에서 연속일 조건

$\lim_{t\to1+}f(t)g(t)=\lim_{t\to1+}2(t^2+at)=2(1+a)$

$\lim_{t\to1-}f(t)g(t)=\lim_{t\to1-}4(t^2+at)=4(1+a)$

$f(1)g(1)=3(1+a)$

$\lim_{t\to1}f(t)g(t)=f(1)g(1)$이기 위해서는

$2(1+a)=4(1+a)=3(1+a)$ 풀면 $a=-1$

함수 $g(t)$의 방정식은

$g(t)=t^2-t$

D070 | 답 ④

[풀이1]

$g(x)=f(x-1)f(x+1)$으로 두자.

▸ ㄱ. (불연속)

함수 $g(x)$의 $x=-1$에서의 함숫값은

$g(-1)=f(-2)f(0)=1\times(-1)=-1$

함수 $g(x)$의 $x=-1$에서의 좌극한은

$\lim_{x\to-1-}g(x)=\lim_{x\to-1-}f(x-1)f(x+1)$

$=1\times1=1$

함수 $g(x)$의 $x=-1$에서의 우극한은

$\lim_{x\to-1+}g(x)=\lim_{x\to-1+}f(x-1)f(x+1)$

$=1\times(-1)=-1$

$\lim_{x\to-1-}g(x)\neq\lim_{x\to-1+}g(x)$이므로

함수의 연속의 정의에 의하여

함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

▸ ㄴ. (연속)

함수 $g(x)$의 $x=-1$에서의 함숫값은

$g(-1)=f(-2)f(0)=0\times(-1)=0$

함수 $g(x)$의 $x=-1$에서의 좌극한은

$\lim_{x\to-1-}g(x)=\lim_{x\to-1-}f(x-1)f(x+1)$

$=0\times1=0$

함수 $g(x)$의 $x=-1$에서의 우극한은

$\lim_{x\to-1+}g(x)=\lim_{x\to-1+}f(x-1)f(x+1)$

$=0\times1=0$

$\lim_{x\to-1}g(x)=g(-1)$이므로

함수의 연속의 정의에 의하여

함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

▸ ㄷ. (연속)

함수 $f(x)$는 $x=-2$와 $x=0$에서 모두 연속이므로

두 함수 $f(x-1)$와 $f(x+1)$는 모두 $x=-1$에서 연속이다.

연속함수의 성질에 의하여

함수 $y=g(x)$은 $x=-1$에서 연속이다.

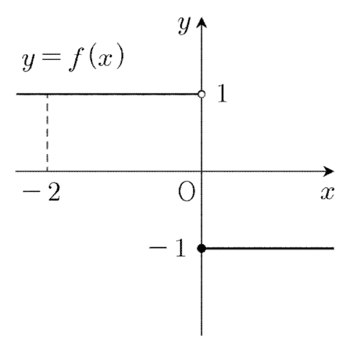
답 ④

[풀이2] 시험장 ★

함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 함수 $f(x-1)$의 그래프와 일치한다.

함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시키면 함수 $f(x+1)$의 그래프와 일치한다.

▸ ㄱ. (불연속)

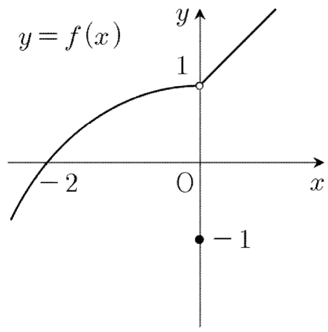


함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고,

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 연속이지만 $f(-2)\neq0$이므로

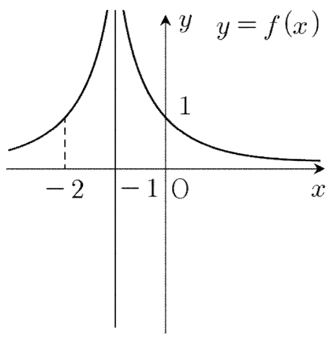
함수 $f(x-1)f(x+1)$은 $x=-1$에서 불연속이다.

▸ ㄴ. (연속)



함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고,
함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 연속이고, $f(-2)=0$이므로
함수 $f(x-1)f(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다.

▶ ㄷ. (연속)



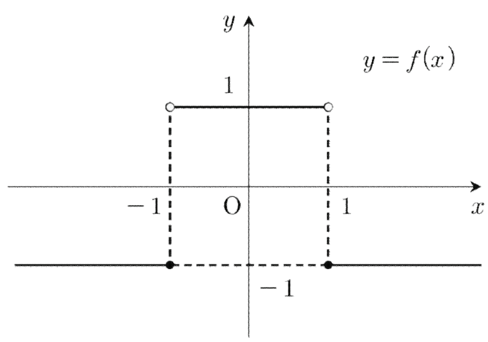
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고,
함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 연속이므로
함수 $f(x-1)f(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다.

답 ④

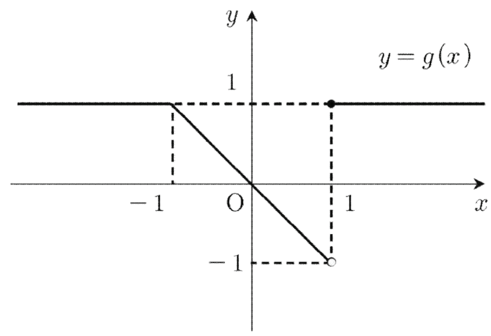
D071 | 답 ④

[풀이1]

함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $g(x)$의 그래프는



▶ ㄱ. (참)

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\times\lim_{x\to1+}g(x)$

$=-1\times1=-1$

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)\times\lim_{x\to1-}g(x)$

$=1\times(-1)=-1$

함수의 극한에 대한 정의에 의하여

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)=-1$

▶ ㄴ. (거짓)

$\lim_{x\to1-}g(x)=-1\neq1=\lim_{x\to1+}g(x)$이므로

함수의 연속에 대한 정의에 의하여
함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.
함수 $g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시키면 함수 $g(x+1)$의 그래프와 일치하므로 함수 $g(x+1)$은 $x=0$에서 불연속이다.

▶ ㄷ. (참)

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x+1)$

$=\lim_{x\to-1+}f(x)\times\lim_{x\to-1+}g(x+1)$

$=\lim_{x\to-1+}f(x)\times\lim_{x\to0+}g(x)$

$=1\times0=0$

$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x+1)$

$=\lim_{x\to-1-}f(x)\times\lim_{x\to-1-}g(x+1)$

$=\lim_{x\to-1-}f(x)\times\lim_{x\to0-}g(x)$

$=-1\times0=0$

함수 $f(x)g(x+1)$의 $x=-1$에서의 극한값은

$\lim_{x\to-1}f(x)g(x+1)=0$

함수 $f(x)g(x+1)$의 $x=-1$에서의 함숫값은

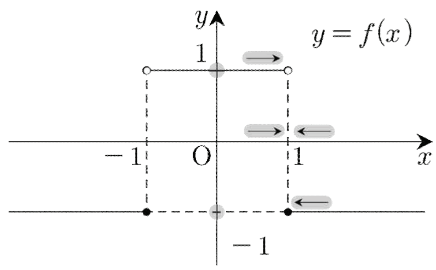
$f(-1)g(0)=-1\times0=0$

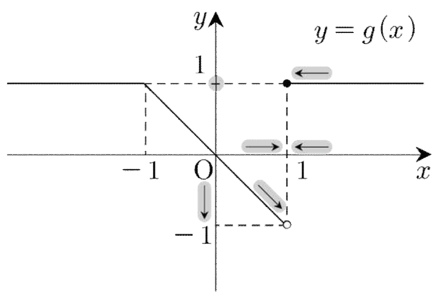
$\lim_{x\to-1}f(x)g(x+1)=f(-1)g(0)$이므로

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

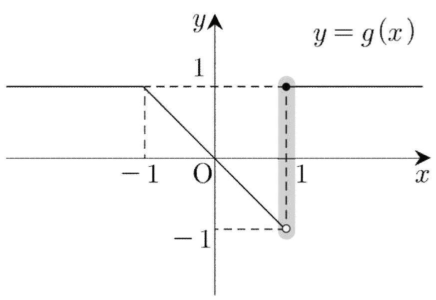
함수 $f(x)g(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.
답 ④

[풀이2] 시험장
▸ ㄱ. (참)

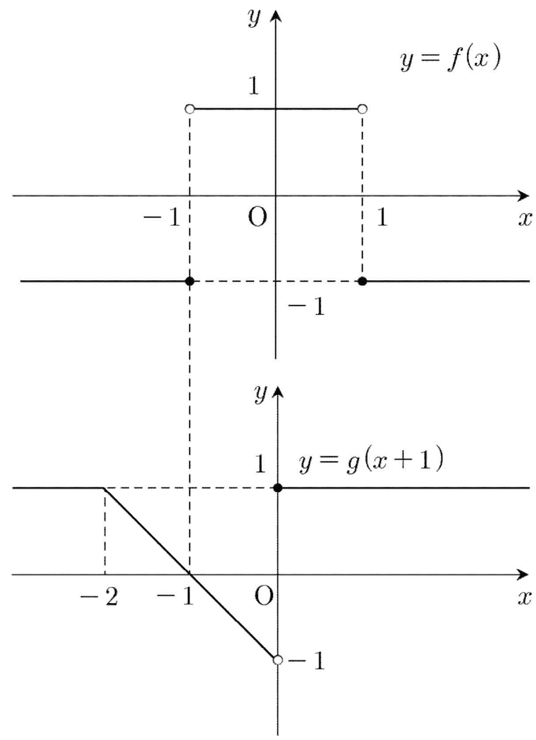




$x\to 1+$일 때, $f(x)g(x)\to(-1)\times 1=-1$
$x\to 1-$일 때, $f(x)g(x)\to 1\times(-1)=-1$
$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)g(x)=-1$
▸ ㄴ. (거짓)



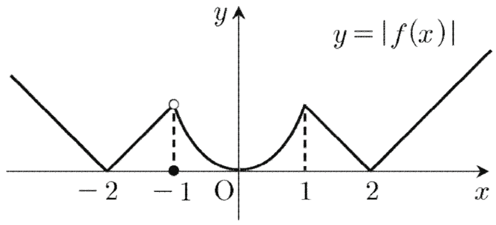
함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.
함수 $g(x+1)$의 그래프는 함수 $g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로, 함수 $g(x+1)$는 $x=0$에서 불연속이다.
▸ ㄷ. (참)



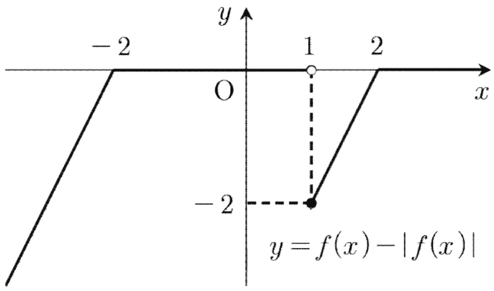
함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이지만
함수 $g(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이고
$g(-1+1)=g(0)=0$이므로
함수 $f(x)g(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.
답 ④

D072 | 답 ②

[풀이1]
▸ ㄱ. (참)
$x\to 1+$일 때, $f(x)$는 -1보다 큰 값을 가지면서 -1에 한없이 가까워진다.
$\lim_{x\to 1+} f(x)=-1$
$t=-x$로 두면 $x\to 1+$일 때, $t\to -1-$
$t\to -1-$일 때, $f(t)$는 1보다 작은 값을 가지면서 1에 한없이 가까워진다.
$\lim_{x\to 1+} f(-x)=\lim_{t\to -1-} f(t)=1$
함수의 극한에 대한 성질에 의하여
$\lim_{x\to 1+}\{f(x)+f(-x)\}=-1+1=0$
▸ ㄴ. (참)
함수 $|f(x)|$의 그래프는



함수 $f(x)-|f(x)|$의 그래프는



$\lim\limits_{x\to1+}y\neq\lim\limits_{x\to1-}y$이므로

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

함수 $f(x)-|f(x)|$는 $x=1$에서 불연속이다.

▸ ㄷ. (거짓)

함수 $f(x)f(x-1)$은 실수 전체의 집합에서 연속이 됨을 보이자.

함수 $f(x)$가 $x=-1$, $x=1$을 제외한 모든 구간에서 연속이고,

함수 $f(x-1)$가 $x=0$, $x=2$를 제외한 모든 구간에서 연속이므로

연속함수의 성질에 의하여

함수 $f(x)f(x-1)$은 $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$를 제외한 모든 구간에서 연속이다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim\limits_{x\to-1+}f(x)f(x-1)=1\times0=0$

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)f(x-1)=1\times0=0$

함수 $f(x)f(x-1)$의 $x=-1$에서의 극한값은

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)f(x-1)=0$

함수 $f(x)f(x-1)$의 $x=-1$에서 함숫값은

$f(-1)f(-2)=0\times0=0$

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)f(x-1)=f(-1)f(-2)$이므로

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

함수 $f(x)f(x-1)$은 $x=-1$에서 연속이다.

마찬가지의 방법으로 함수 $f(x)f(x-1)$는

$x=0$, $x=1$, $x=2$에서 연속이다.

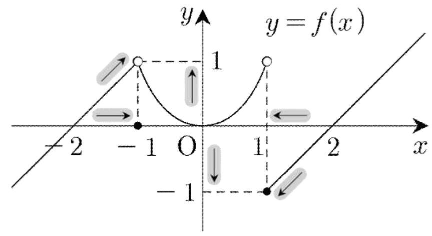
따라서 함수 $f(x)f(x-1)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

[풀이2] 시험장

▸ ㄱ. (참)



위의 그림에서

$\lim\limits_{x\to1+}\{f(x)+f(-x)\}=-1+1=0$

($\because x\to1+$일 때, $-x\to-1-$)

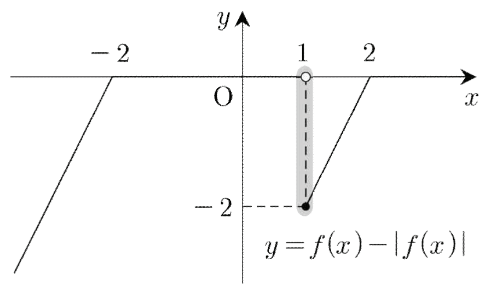
▸ ㄴ. (참)

$f(x)\ge0$이면 $|f(x)|=f(x)$,

$f(x)<0$이면 $|f(x)|=-f(x)$

이므로

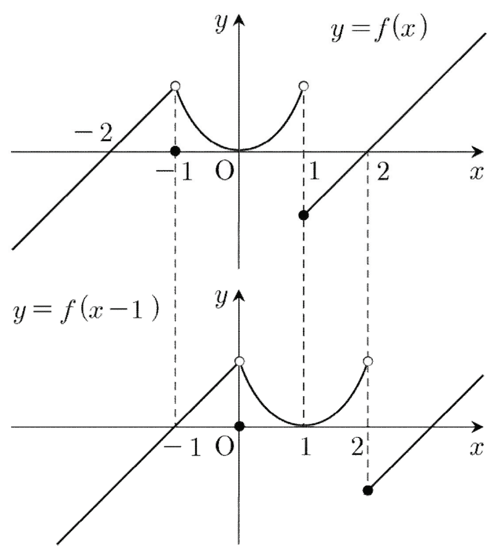
$f(x)-|f(x)|=\begin{cases}0 & (f(x)\ge0)\\ 2f(x) & (f(x)<0)\end{cases}$



위의 그림처럼 함수 $f(x)-|f(x)|$는 $x=1$에서 불연속이다.

▸ ㄷ. (거짓)

함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 함수 $f(x-1)$의 그래프와 일치한다.

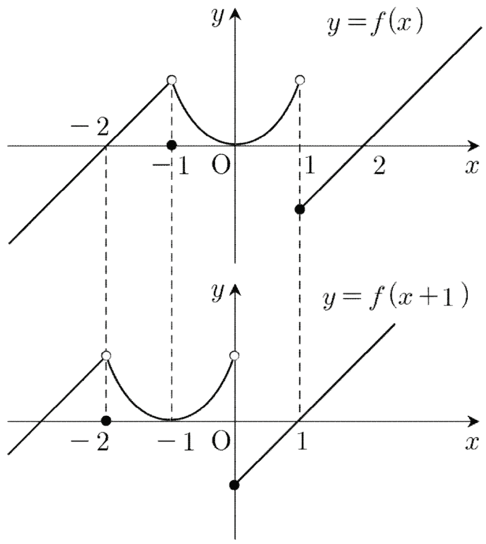


함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이지만

함수 $f(x-1)$이 $x=-1$, $x=1$에서 연속이고

$f(-1)=0$, $f(1)=0$이므로

함수 $f(x)f(x-1)$은 $x=-1$, $x=1$에서 연속이다.
마찬가지의 이유로 함수
$f(x)f(x-1)$은 $x=0$, $x=2$에서 연속이다.
따라서 함수 $f(x)f(x-1)$은 연속함수이다.
함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시키면 함수 $f(x+1)$의 그래프와 일치한다.



함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이지만
함수 $f(x+1)$이 $x=-1$, $x=1$에서 연속이고
$f(-1)=0$, $f(1)=0$이므로
함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=-1$, $x=1$에서 연속이다.
마찬가지의 이유로 함수
$f(x)f(x+1)$은 $x=-2$, $x=0$에서 연속이다.
따라서 함수 $f(x)f(x+1)$은 연속함수이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

D073

| 답 13

[풀이1]
함수 $f(x)$는 두 구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 연속이지만,
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

▸ $a=0$이라고 가정하자.
문제에서 주어진 조건에 의하여
함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=a$에서 연속이다.
함수의 연속의 정의에 의하여

$\lim_{x \to a+} f(x)f(x-a)$

$=\lim_{x \to 0+} \{f(x)\}^2$

$=49=\{f(0)\}^2$

풀면 $f(0)=\pm 7 \neq 1$이므로 이는 가정에 모순이다.
따라서 $a \neq 0$이다.

▸ $a \neq 0$인 경우
문제에서 주어진 조건에 의하여
함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=a$에서 연속이다.
함수의 연속의 정의에 의하여

$\lim_{x \to a+} f(x)f(x-a)$

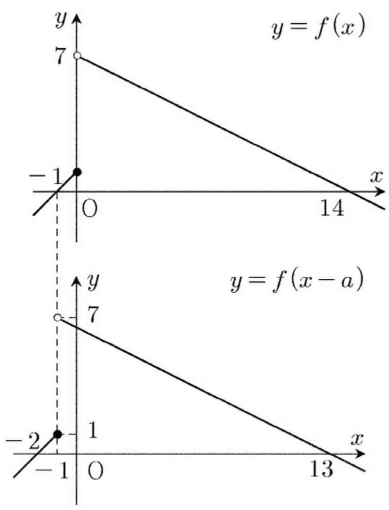
$=f(a)\times 7=7f(a)=f(a)f(0)$

그런데 $f(0)=1$이므로
$7f(a)=f(a)$ 즉, $f(a)=0$
방정식을 풀면
$a=-1$ 또는 $a=14$
따라서 구하는 값은 13이다.

답 13

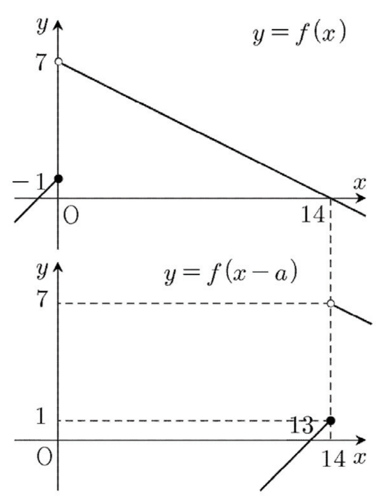
[풀이2] 시험장

• (1) $a=-1$인 경우



함수 $f(x+1)$은 $x=-1$에서 불연속이지만
함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이고
$f(-1)=0$이므로
함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다.

• (2) $a=14$인 경우



함수 $f(x-14)$는 $x=14$에서 불연속이지만

함수 $f(x)$가 $x=14$에서 연속이고

$f(14)=0$이므로

함수 $f(x)f(x-14)$는 $x=14$에서 연속이다.

따라서 구하는 값은 13이다.

답 13

[풀이3]

함수 $f(x-a)$의 방정식은

$$f(x-a)=\begin{cases} x-a+1 & (x \le a) \\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a+7 & (x>a) \end{cases}$$

• (1) $a>0$인 경우

$f(x)f(x-a)$

$$=\begin{cases} (x+1)(x-a+1) & (x \le 0) \\ \left(-\frac{1}{2}x+7\right)(x-a+1) & (0<x \le a) \\ \left(-\frac{1}{2}x+7\right)\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a+7\right) & (x>a) \end{cases}$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x \to a+} f(x)f(x-a)$

$=\lim_{x \to a+}\left(-\frac{1}{2}x+7\right)\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a+7\right)$

$=-\frac{7}{2}a+49$

함수 $f(x)f(x-a)$의 $x=a$에서의 함숫값은

$f(a)f(a-a)=\left(-\frac{1}{2}a+7\right)(a-a+1)$

$=-\frac{1}{2}a+7$

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$\lim_{x \to a+} f(x)f(x-a)=f(a)f(a-a)$

$-\frac{7}{2}a+49=-\frac{1}{2}a+7$ 즉, $a=14$

$a=14$일 때,

$\lim_{x \to a+} f(x)f(x-a)=0$

$\lim_{x \to a-} f(x)f(x-a)$

$=\lim_{x \to a-}\left(-\frac{1}{2}x+7\right)(x-a+1)$

$=-\frac{1}{2}a+7=0$

$f(a)f(a-a)=0$

이므로

$\lim_{x \to a} f(x)f(x-a)=f(a)f(a-a)$

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$a=14$일 때, 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=a$에서 연속이다.

• (2) $a=0$인 경우

$f(x)f(x-a)$

$$=\begin{cases} (x+1)^2 & (x \le 0) \\ \left(-\frac{1}{2}x+7\right)^2 & (x>0) \end{cases}$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x \to a+} f(x)f(x-a)$

$=\lim_{x \to 0+}\left(-\frac{1}{2}x+7\right)^2=49$

함수 $f(x)f(x-a)$의 $x=a$에서의 함숫값은

$f(a)f(a-a)=(a+1)^2=1$

$\lim_{x \to a+} f(x)f(x-a) \ne f(a)f(a-a)$

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=a$에서 연속이 아니다.

• (3) $a<0$인 경우

$f(x)f(x-a)$

$$=\begin{cases} (x+1)(x-a+1) & (x \le a) \\ (x+1)\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a+7\right) & (a<x \le 0) \\ \left(-\frac{1}{2}x+7\right)\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a+7\right) & (x>0) \end{cases}$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x \to a+} f(x)f(x-a)$

$=\lim_{x \to a+}(x+1)\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a+7\right)$

$=7a+7$

함수 $f(x)f(x-a)$의 $x=a$에서의 함숫값은

$f(a)f(a-a)=(a+1)(a-a+1)=a+1$

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$\lim_{x \to a+} f(x)f(x-a)=f(a)f(a-a)$

$7a+7=a+1$ 즉, $a=-1$

$a=-1$일 때,

$\lim_{x \to a+} f(x)f(x-a)=0$

$\lim_{x \to a-} f(x)f(x-a)$

$=\lim_{x \to a+}(x+1)(x-a+1)=a+1=0$

$f(a)f(a-a)=0$

이므로

$\lim_{x \to a} f(x)f(x-a)=f(a)f(a-a)$

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$a=-1$일 때, 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=a$에서 연속이다.

(1), (2), (3)에서 a의 값은 14, -1이다.

답 13

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & (x<0) \\ x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2} & (x \ge 0) \end{cases}$$

$\therefore\ g(2)=\dfrac{5}{2}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

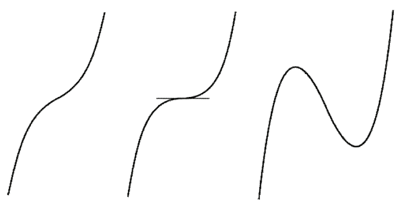
답 ⑤

E122 | 답 ⑤

[풀이1] 시험장 ★

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우만을 생각해도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수의 그래프의 개형을 모두 그리면 다음과 같다.



조건 (가)에서 $f(-1)=0$, $f'(-1)\neq 0$이다.

조건 (나)에서 $f(\alpha)=0$라고 하자. (단, $3\le\alpha\le 5$)

그런데 조건 (가)에서 함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$에서 미분가능해야 하므로 $f'(\alpha)=0$이다.

이상을 정리하면

$f(-1)=0$, $f'(-1)\neq 0$,

$f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$

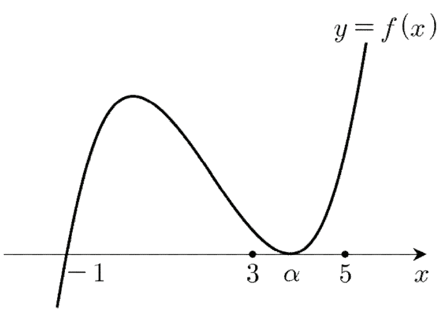
함수 $f(x)$의 그래프는

두 점 $(-1,\ 0)$, $(\alpha,\ 0)$을 지나고,

점 $(-1,\ 0)$에서 x축에 접하지 않지만

점 $(\alpha,\ 0)$에서 x축에 접해야 한다.

이를 모두 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



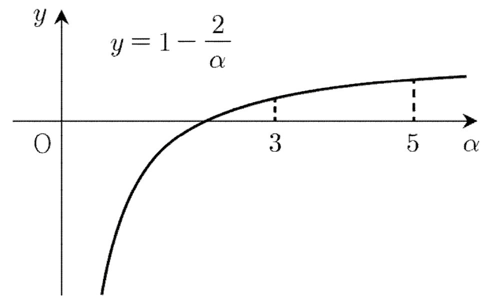
함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a(x+1)(x-\alpha)^2$ (단, $a>0$, $3\le\alpha\le 5$)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=a(x-\alpha)^2+2a(x+1)(x-\alpha)$

$$\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{a\alpha^2-2a\alpha}{a\alpha^2}=1-\frac{2}{\alpha}$$



구간 $[3,\ 5]$에서 α에 대한 함수 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$은 증가하므로

$\alpha=3$일 때, 함수 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $m=\dfrac{1}{3}$을 갖고,

$\alpha=5$일 때, 함수 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $M=\dfrac{3}{5}$을 갖는다.

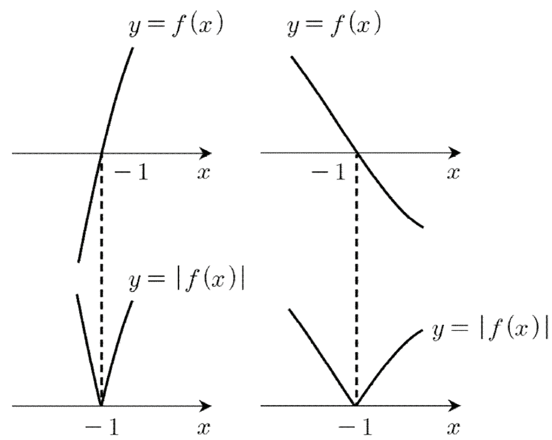
$\therefore\ Mm=\dfrac{1}{5}$

답 ⑤

[풀이2]

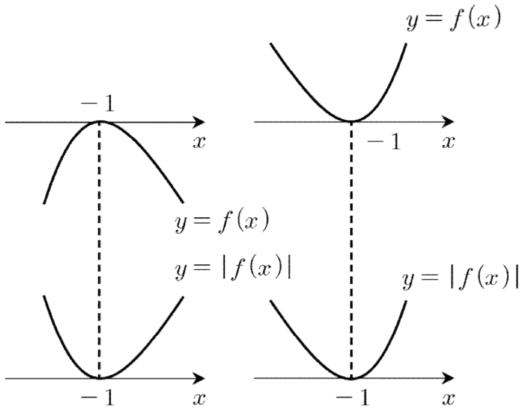
$f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우를 생각하자.

• $f(x)$가 $x+1$을 인수로 갖고 $(x+1)^2$ 또는 $(x+1)^3$을 인수로 갖지 않는 경우



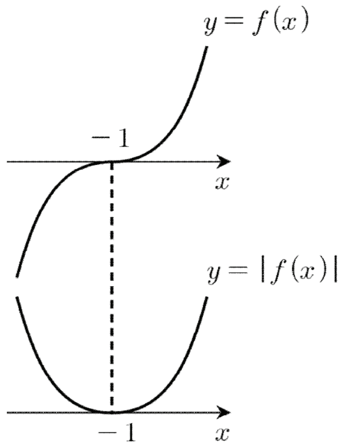
위의 그림처럼 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

• $f(x)$가 $(x+1)^2$을 인수로 갖고 $(x+1)^3$을 인수로 갖지 않는 경우



위의 그림처럼 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

- $f(x)$가 $(x+1)^3$을 인수로 갖는 경우



위의 그림처럼 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

따라서 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖고 $(x+1)^2$ 또는 $(x+1)^3$을 인수로 가질 수 없다.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)(a>0)$

조건 (나)에 의하여 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 구간 $[3,\ 5]$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖거나, 중근을 가져야 한다.

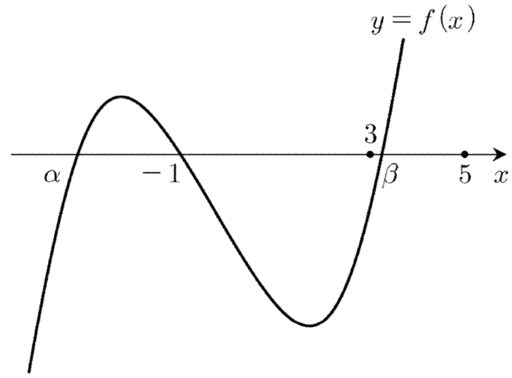
- 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

이 두 실근을 각각 α, β라고 하자.

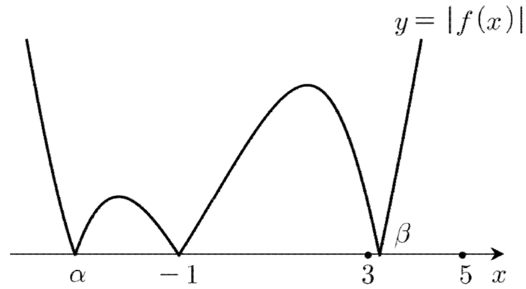
(단, $\alpha\neq\beta$, $\alpha\neq-1$, $3\leq\beta\leq5$)

$\alpha<-1<\beta$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



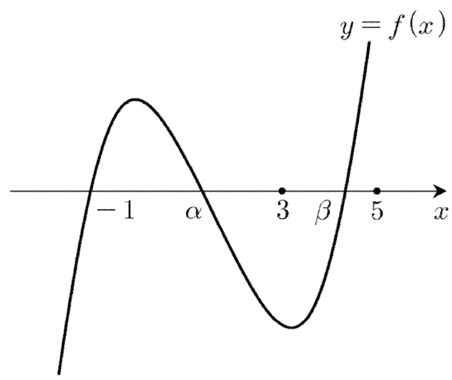
함수 $|f(x)|$의 그래프는



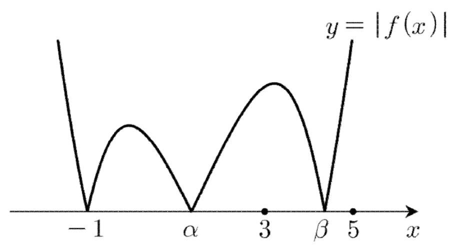
위의 그림에서 함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$, $x=-1$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$-1<\alpha<\beta$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



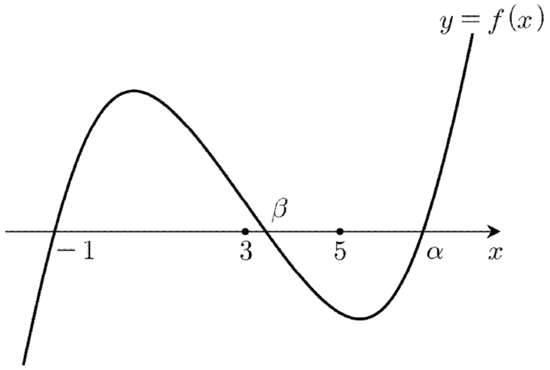
함수 $|f(x)|$의 그래프는



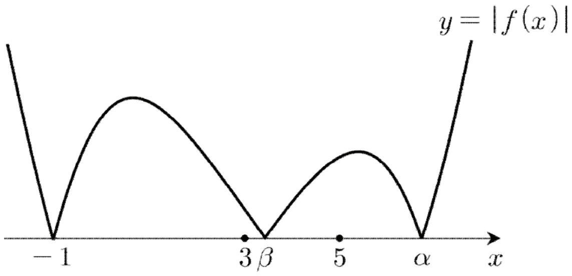
위의 그림에서 함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$, $x=-1$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$-1<\beta<\alpha$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $|f(x)|$의 그래프는

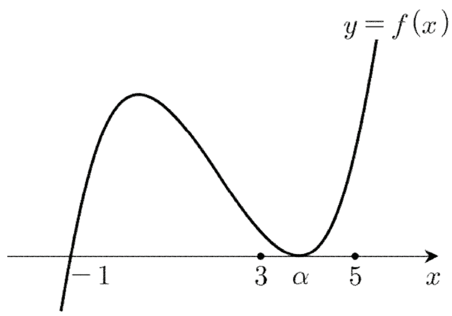


위의 그림에서 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$, $x=\beta$, $x=\alpha$에서 미분가능하지 않다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

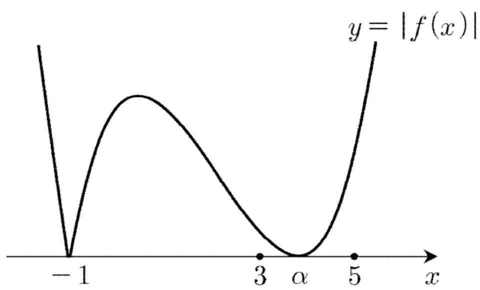
• 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 갖는 경우

중근을 α라고 하자. (단, $3\le\alpha\le5$)

함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $|f(x)|$의 그래프는



위의 그림에서 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다. 즉, 조건 (가)를 만족시킨다.

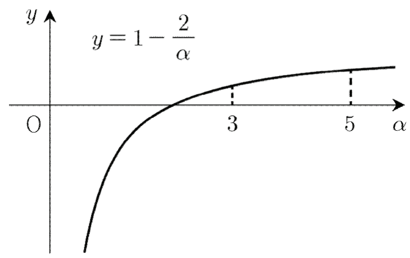
함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=a(x+1)(x-\alpha)^2$ (단, $a>0$, $3\le\alpha\le5$)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=a(x-\alpha)^2+2a(x+1)(x-\alpha)$

$$\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{a\alpha^2-2a\alpha}{a\alpha^2}=1-\frac{2}{\alpha}$$



구간 $[3,\ 5]$에서 α에 대한 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 증가하므로

$\alpha=3$일 때, 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $m=\frac{1}{3}$을 갖고,

$\alpha=5$일 때, 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $M=\frac{3}{5}$을 갖는다.

$\therefore\ Mm=\frac{1}{5}$

$f(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우에도 동일한 결과를 얻는다.

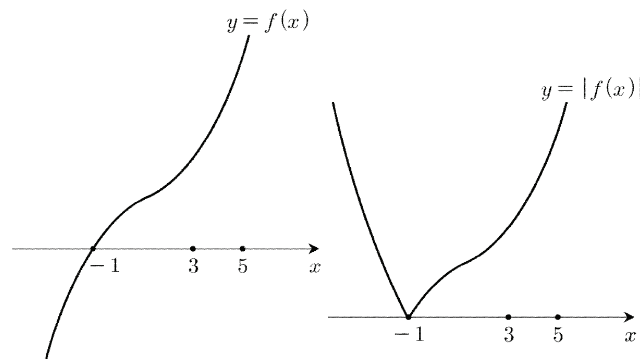
답 ⑤

[풀이3]

$f(x)$의 최고차항의 계수가 양수인 경우를 생각하자.

• 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 갖지 않는 경우

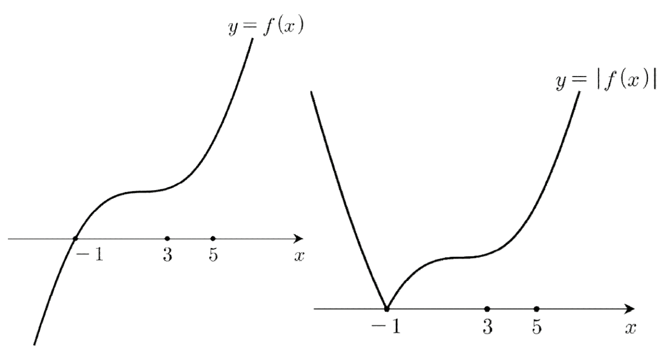
함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

• 방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖는 경우

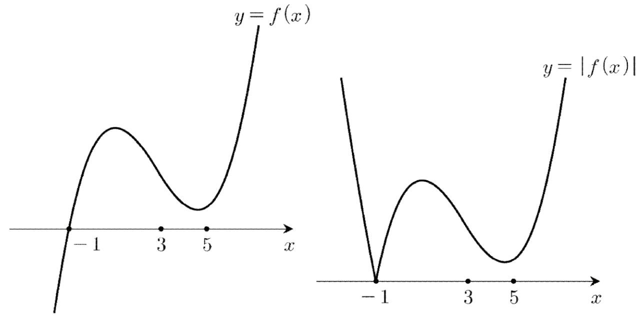
함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



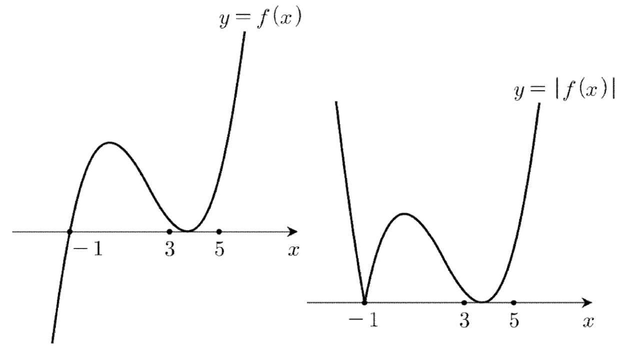
함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

• 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

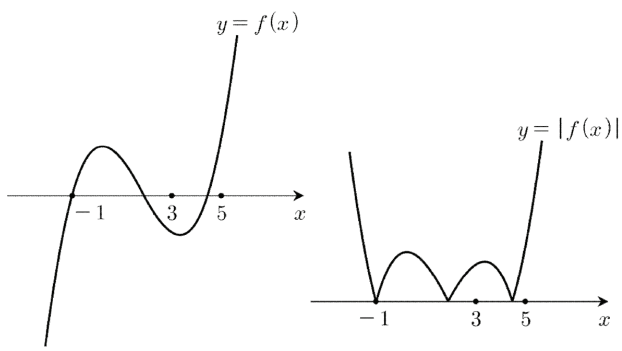
함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



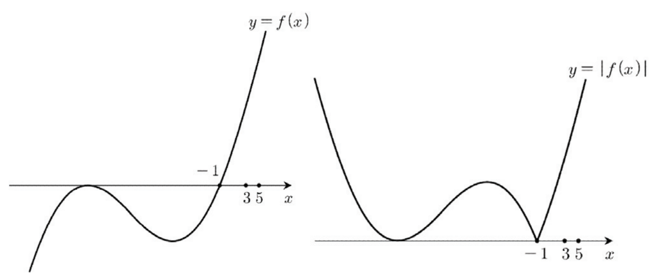
함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



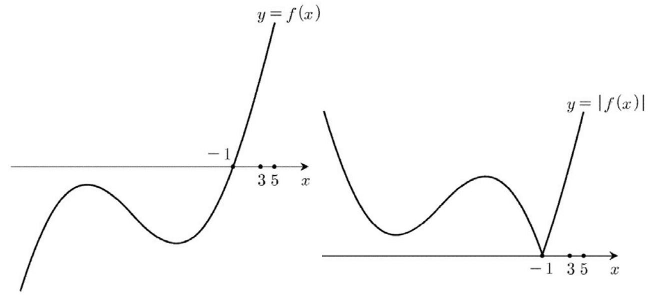
함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다.
함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



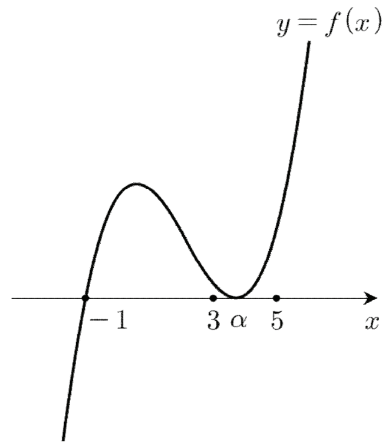
함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.

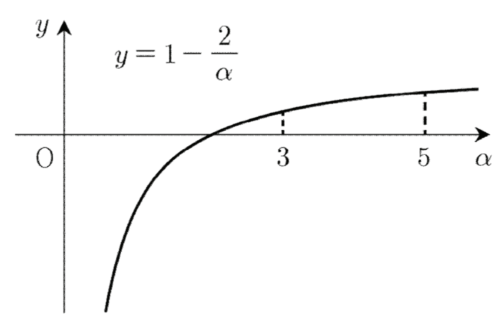


함수 $|f(x)|$의 그래프는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
이상에서 가능한 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은



방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 각각 -1, α라고 하자.
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=a(x+1)(x-\alpha)^2$
(단, $a>0$, $3 \le \alpha \le 5$)
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=a(x-\alpha)^2+2a(x+1)(x-\alpha)$
이므로

$$\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{a\alpha^2-2a\alpha}{a\alpha^2}=1-\frac{2}{\alpha}$$



구간 $[3,\ 5]$에서 α에 대한 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 증가하므로

$\alpha=3$일 때, 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 최솟값 $m=\frac{1}{3}$을 갖고,

$\alpha=5$일 때, 함수 $\frac{f'(0)}{f(0)}$은 최댓값 $M=\frac{3}{5}$을 갖는다.

$\therefore\ Mm=\frac{1}{5}$

$f(x)$의 최고차항의 계수가 음수인 경우에도 동일한 결과를 얻는다.

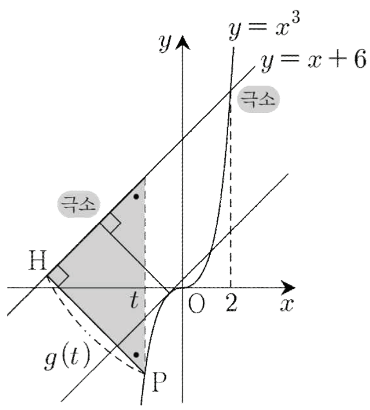
답 ⑤

E123 | 답 ③

[풀이1]

점 $(t,\ f(t))$를 P로 두고, 점 P에서 직선 $y=x+6$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$g(t)=\overline{\mathrm{PH}}$



(단, ●$=45^\circ$)

▸ ㄱ. (참)

t의 값을 $-\infty$에서 ∞까지 변화시키면서 $g(t)(=\overline{\mathrm{PH}})$의 값의 변화를 관찰하면 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속임을 알 수 있다.

▸ ㄴ. (참)

위의 그림처럼 선분 PH의 길이가 짧아졌다가 다시 길어지는 t의 값이 존재한다. 이때, 선분 PH의 길이는 0이 아니다. 따라서 함수 $g(t)$는 0이 아닌 극솟값을 갖는다.

▸ ㄷ. (거짓)

위의 그림의 어둡게 색칠된 직각이등변삼각형에서 삼각비의 정의에 의하여

$$g(t)=\overline{\mathrm{PH}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|(t+6)-t^3\right|$$

함수 $\left|(t+6)-t^3\right|$은 $t=2$에서 미분가능하지 않으므로 함수 $g(t)$도 $t=2$에서 미분가능하지 않다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

[풀이2]

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$$g(t)=\frac{\left|t-t^3+6\right|}{\sqrt{2}}$$

$t^3-t-6=(t-2)(t^2+2t+3)$에서

$t^2+2t+3=(t+1)^2+2\geq 2$이므로

$t\geq 2$이면 $t^3-t-6\geq 0$

$t<2$이면 $t^3-t-6<0$

함수 $g(t)$의 방정식은

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{t^3-t-6}{\sqrt{2}} & (t\geq 2)\\[2mm] \dfrac{-t^3+t+6}{\sqrt{2}} & (t<2)\end{cases}$$

구간 $[2,\ \infty)$에서 함수 $y=\dfrac{t^3-t-6}{\sqrt{2}}$의 그래프를 그리자.

도함수는

$$y'=\frac{3t^2-1}{\sqrt{2}}$$

구간 $[2,\ \infty)$에서 $y'>0$이므로

함수 $y=\dfrac{t^3-t-6}{\sqrt{2}}$은 구간 $[2,\ \infty)$에서 증가한다.

구간 $(-\infty,\ 2)$에서 함수 $y=\dfrac{-t^3+t+6}{\sqrt{2}}$의 그래프를 그리자.

도함수는

$$y'=\frac{-3t^2+1}{\sqrt{2}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}\left(t+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(t-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$y'=0$에서

$t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

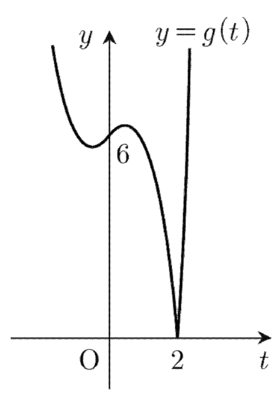
$t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$의 좌우에서 y'의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로

함수 $y=\dfrac{-t^3+t+6}{\sqrt{2}}$은 $t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$의 좌우에서 y'의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로

함수 $y=\dfrac{-t^3+t+6}{\sqrt{2}}$은 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

함수 $g(t)$의 그래프는



▸ ㄱ. (참)

위의 그림에서 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

▸ ㄴ. (참)

위의 그림에서 함수 $g(t)$는 $t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 0이 아닌 극솟값을 갖는다.

▸ ㄷ. (거짓)

위의 그림에서 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능하지 않다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

E124 | 답 ④

[풀이]

조건 (가)에서

$f(1)=1+a+b=2$ 즉, $a+b=1$ $\cdots$㉠

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

접선의 방정식은

$y=(3t^2+2at+b)(x-t)+t^3+at^2+bt$

$x=0$을 대입하면

$y=-2t^3-at^2$

함수 $g(t)$의 방정식은 $g(t)=|-2t^3-at^2|$

• (1) $a>0$인 경우

함수 $y=-2t^3-at^2$의 그래프를 그리자.

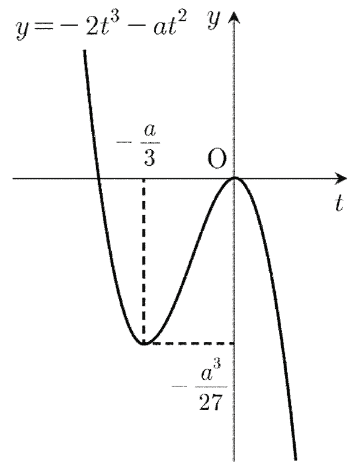
도함수는

$y'=-6t^2-2at=-2t(3t+a)$

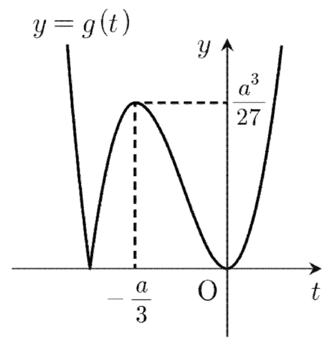
$y'=0$에서 $t=-\dfrac{a}{3}$ 또는 $t=0$

t	$\cdots$	$-\dfrac{a}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$-\dfrac{a^3}{27}$	↗	0	↘

함수 $y=-2t^3-at^2$의 그래프는



함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 1이다.

• (2) $a=0$인 경우

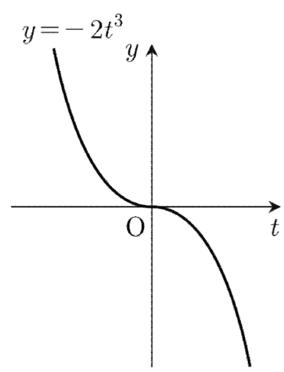
함수 $y=-2t^3$의 그래프를 그리자.

도함수는 $y'=-6t^2$

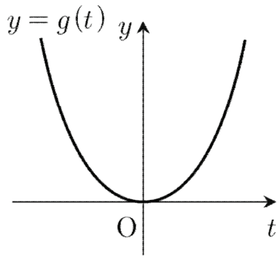
$y'=0$에서 $t=0$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$
y	↘	0	↘

함수 $y=-2t^3$의 그래프는



함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

• (3) $a<0$인 경우

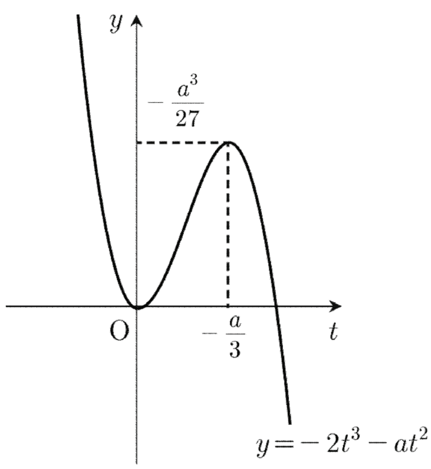
함수 $y=-2t^3-at^2$의 그래프를 그리자.

도함수는 $y'=-6t^2-2at=-2t(3t+a)$

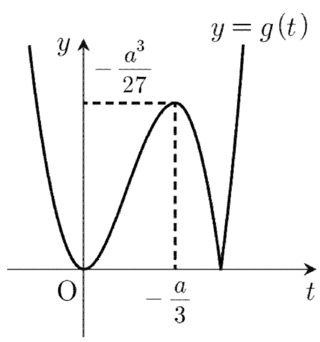
$y'=0$에서 $t=0$ 또는 $t=-\dfrac{a}{3}$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\dfrac{a}{3}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	0	↗	$-\dfrac{a^3}{27}$	↘

함수 $y=-2t^3-at^2$의 그래프는



함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$의 미분가능하지 않은 점의 개수는 1이다.

조건 (나)를 만족시키는 경우는 (2)이다.

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=x^3+x$

$\therefore\ f(3)=30$

답 ④

E125 | 답 ③

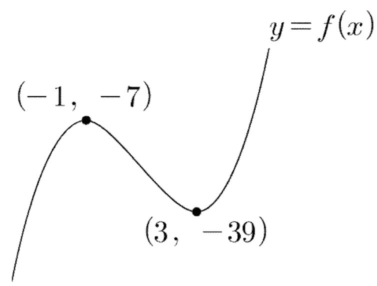
[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 그래프는



조건 (가)에서 주어진 등식을 정리하자.

$xg(x)=|x||f(x-p)+q|$

$=\begin{cases} x|f(x-p)+q| & (x>0) \\ -x|f(x-p)+q| & (x<0) \end{cases}$

이므로

$g(x)=\begin{cases} |f(x-p)+q| & (x>0) \\ -|f(x-p)+q| & (x<0) \end{cases}$

그런데 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0+} g(x)$

즉, $|f(-p)+q|=-|f(-p)+q|$

$|f(-p)+q|=0,\ g(0)=0$

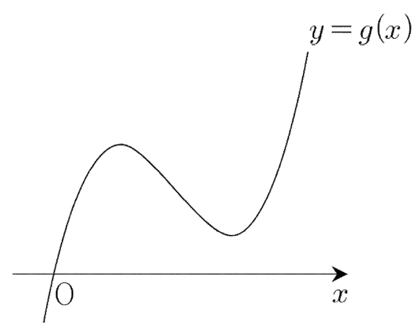
함수 $g(x)$의 방정식을 다시 쓰면

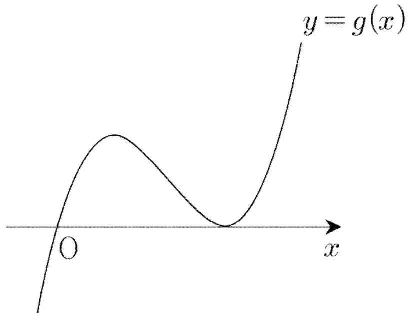
$g(x)=\begin{cases} |f(x-p)+q| & (x\geq 0) \\ -|f(x-p)+q| & (x<0) \end{cases}$

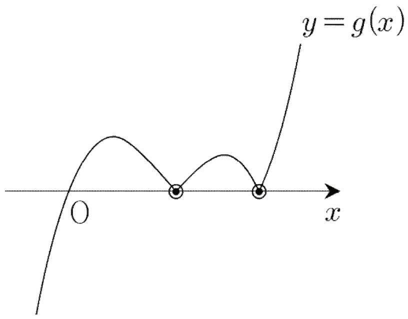
이때, 곡선 $y=g(x)$는 원점을 지난다.

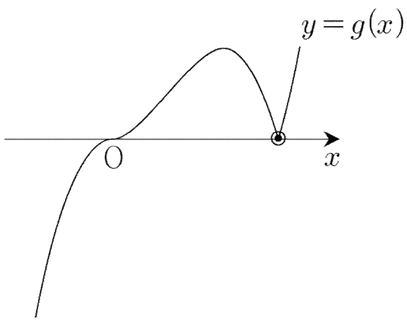
함수 $g(x)$의 그래프의 개형을 모두 그리면 다음과 같다.

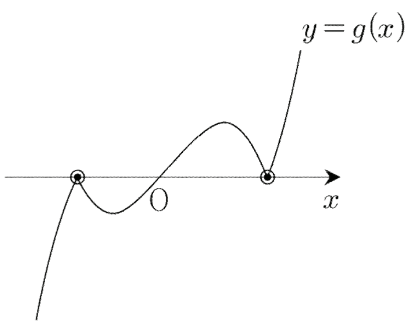
(단, ◉는 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점이다.)

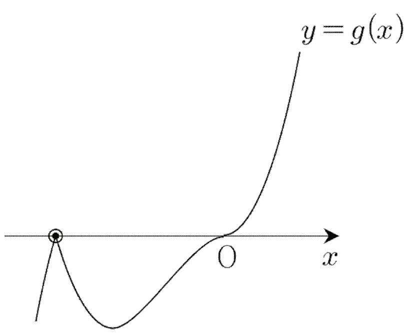


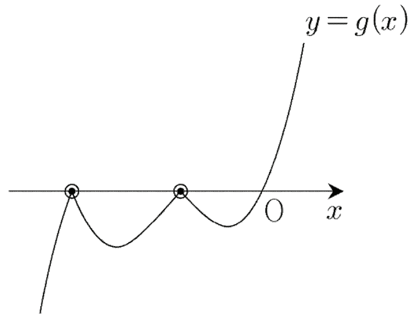


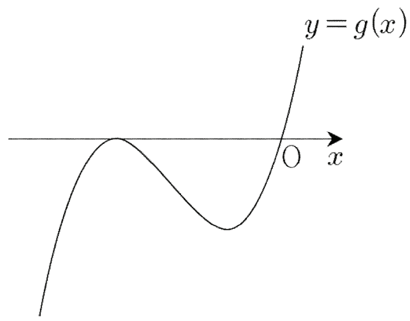


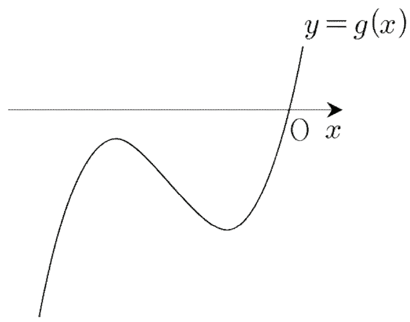






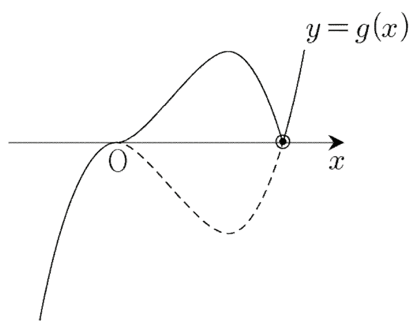






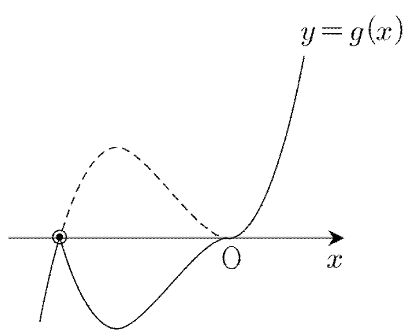
조건 (나)를 만족시키는 두 경우만 다시 그리자.

(경우1) ○



$p=1$, $q=7$이므로 p, q가 모두 양수라는 조건을 만족시킨다.

(경우2) ×



$p=-3$, $q=39$이므로 p가 양수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ p+q=8$

답 ③

E126 | 답 39

[풀이]

우선 '함수 $h(x)$가 $x=1$에서 미분가능하다.' 라는 조건을 이용하자.

$x<1$일 때, $f(x)\geq g(x)$라고 하면

$h(x)=\begin{cases} f(x)-g(x) & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1)\end{cases}$,

$h'(x)=\begin{cases} f'(x)-g'(x) & (x<1) \\ f'(x)+g'(x) & (x>1)\end{cases}$

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

연속성: $f(1)-g(1)=f(1)+g(1)$, 즉

$g(1)=0$

미분가능성: $f'(1)-g'(1)=f'(1)+g'(1)$, 즉

$g'(1)=0$

위의 두 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$는 존재하지 않는다.

왜냐하면 $g(x)$는 상수함수이기 때문이다.

귀류법에 의하여 $x<1$일 때, $f(x)<g(x)$이다.

$h(x)=\begin{cases} g(x)-f(x) & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1)\end{cases}$,

$h'(x)=\begin{cases} g'(x)-f'(x) & (x<1) \\ f'(x)+g'(x) & (x>1)\end{cases}$

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

연속성: $g(1)-f(1)=f(1)+g(1)$, 즉

$f(1)=0$

미분가능성: $g'(1)-f'(1)=f'(1)+g'(1)$, 즉

$f'(1)=0$

인수정리에 의하여

$f(x)=(x-1)^2(x-\alpha)$

한편

$h(0)=0 \Leftrightarrow |f(0)-g(0)| \Leftrightarrow f(0)=g(0)$

즉, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$는 점 $(0,\ f(0))$에서 만난다. 이때, 직선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서 접해야만 구간 $(-\infty,\ 1)$에서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.

즉, 직선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선이다. 이때, $f(0)=-\alpha$

$f'(x)=2(x-1)(x-\alpha)+(x-1)^2$

에서 $f'(0)=2\alpha+1$이므로

$g(x)=(2\alpha+1)x-\alpha$

이제 α의 값을 결정하자.

$h(2)=f(2)+g(2)=2\alpha+4=5$에서 $\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ h(4)=f(4)+g(4)$

$=9\times\dfrac{7}{2}+2\times4-\dfrac{1}{2}=39$

답 39

E127 | 답 108

[풀이]

$$\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|-|f(x-h)|+|f(x)|}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\left\{\frac{|f(x+h)|-|f(x)|}{h}+\frac{|f(x-h)|-|f(x)|}{-h}\right\}$$

$=$(함수 $|f(x)|$의 $x=x$에서의 우미분계수)

$+$(함수 $|f(x)|$의 $x=x$에서의 좌미분계수)

$=p(x)$(로 두자.)

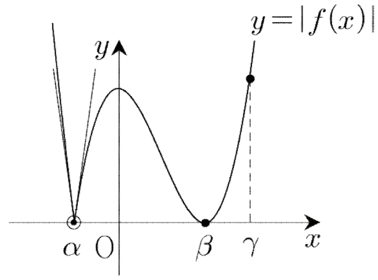
만약 함수 $|f(x)|$가 $x=x$에서 미분가능하면

$p(x)=2\times$(함수 $|f(x)|$의 $x=x$에서의 미분계수)

만약 함수 $|f(x)|$가 $x=x$에서 미분가능하지 않으면

$p(x)=0$

예를 들어보자.



(단, ⊙는 함수 $|f(x)|$가 미분가능하지 않음 점, ●는 함수 $|f(x)|$가 미분가능한 점)

$x=\alpha$에서 함수 $|f(x)|$의 좌미분계수와 우미분계수는 절댓값이 같고 부호가 다르므로

$p(x)=0$

$x=\beta$에서 함수 $|f(x)|$의 좌미분계수와 우미분계수는 0으로 같으므로

$p(x)=2\times0=0(=2f'(\beta))$

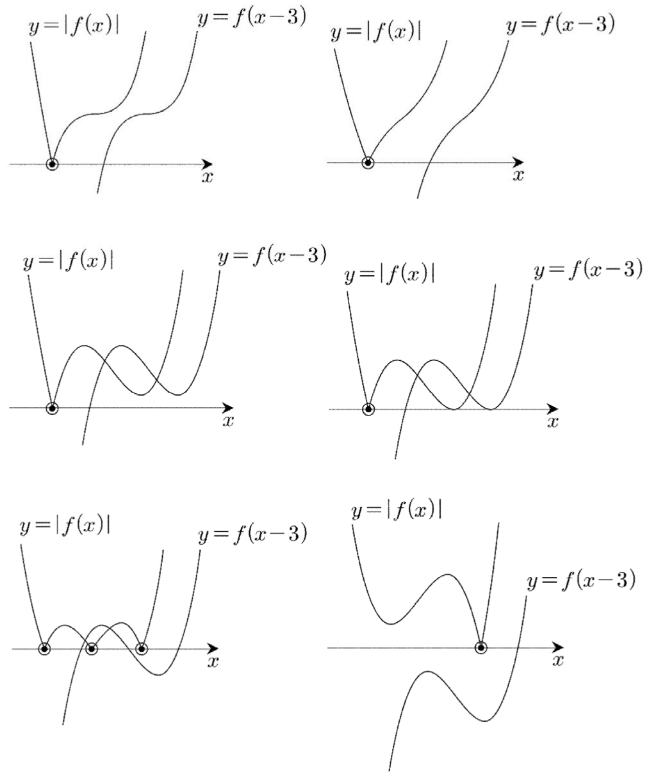
$x=\gamma$에서 함수 $|f(x)|$의 좌미분계수와 우미분계수는 $f'(\gamma)$으로 같으므로

$p(x)=2f'(\gamma)$

이때, 함수 $|f(x)|$는 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않고, $x=\beta$, $x=\gamma$에서 미분가능하다.

이제 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 결정하자.

조건 (가)를 만족시키지 않는 경우를 모두 그려보면 다음과 같다.



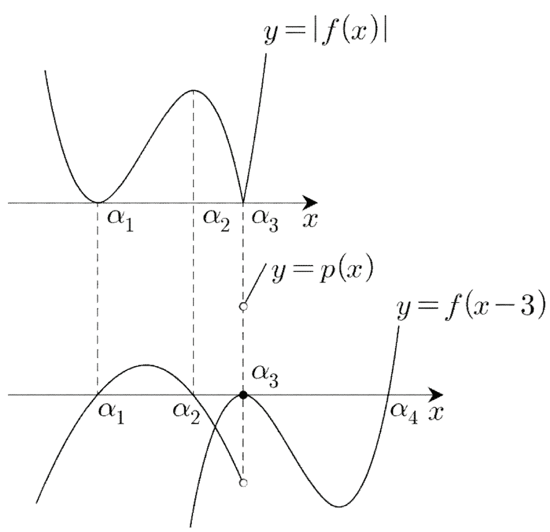
(단, ◉는 함수 $|f(x)|$가 미분가능하지 않은 점이다. 즉, 함수 $p(x)$가 연속이 아닌 점이다.)

점 ◉의 x좌표를 α라고 할 때, $p(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이고 $f(\alpha-3)\neq 0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이다.

조건 (나)에서 주어진 방정식을 풀면

$g(x)=0 \Leftrightarrow f(x-3)=0$ 또는 $p(x)=0$

두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 함수 $|f(x)|$의 그래프 개형은 다음과 같다.



(단, $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4$이다.)

$x=\alpha_3$에서 함수 $p(x)$는 불연속이지만 $f(\alpha_3-3)=0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha_3$에서 연속이다. (조건(가)○)

위의 그림에서

$\alpha_3-\alpha_1=3$, 즉 $\alpha_3=\alpha_1+3$ (평행이동)

$\alpha_2=\alpha_1+2$ (삼차함수의 비율관계)

$\alpha_4=\alpha_3+3=\alpha_1+6$ (평행이동)

이를 조건 (나)에서 주어진 등식에 대입하면

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=4\alpha_1+11=7$,

$\alpha_1=-1$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=2$, $\alpha_4=5$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x+1)^2(x-2)$

$\therefore\ f(5)=36\times 3=108$

답 108

[참고]

삼차함수의 비율관계를 이용하지 않아도

$\alpha_2=\alpha_1+2$

임을 유도할 수 있다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-\alpha_1)^2(x-\alpha_3)$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)+(x-\alpha_1)^2$

그런데 $f'(\alpha_2)=0$이므로

$f'(\alpha_2)=(\alpha_2-\alpha_1)(3\alpha_2-\alpha_1-2\alpha_3)=0$

$\alpha_1\neq\alpha_2$이므로

$$\therefore\ \alpha_2=\frac{\alpha_1+2\alpha_3}{3}=\frac{\alpha_1+2(\alpha_1+3)}{3}=\alpha_1+2$$

E128 | 답 105

[풀이] ★

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 양수로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다. (즉, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때에도 동일한 결과를 얻는다.)

우선 조건 (가)를 생각하자.

$f(1)=f(3)=0$이고,

함수 $f(x)$가

닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고

열린구간 $(1,\ 3)$에서 미분가능하므로

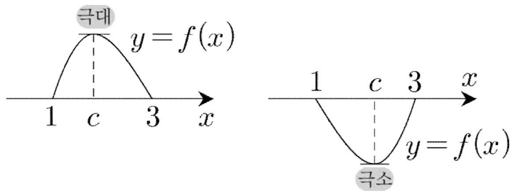
롤의 정리에 의하여

$f'(c)=0$

인 c가 구간 $(1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

그런데 조건 (나)에 의하여 c는 유일하다.

요컨대 롤의 정리에 의해 함수 $f(x)$는 구간 $(1,\ 3)$에서 극값을 갖는다. (아래 그림)

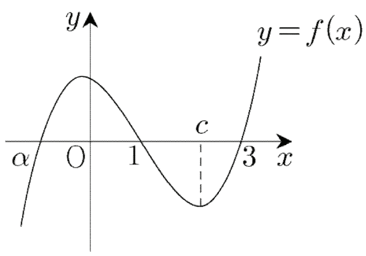


조건 (나)에 의하여

$1\le x<c,\ c<x$일 때, $f'(x)\ne 0$

이고, $f'(c)=0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



(단, $f(\alpha)=0,\ \alpha<1$)

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$f(x)=k(x-\alpha)(x-1)(x-3)$ (단, $k>0$)

함수 $f(a-x)$의 방정식은

$f(a-x)=k(a-\alpha-x)(a-1-x)(a-3-x)$

두 방정식 $f(x)=0,\ f(a-x)=0$의 해집합을 각각 $A,\ B$라고 하면

$A=\{\alpha,\ 1,\ 3\}$,

$B=\{a-\alpha,\ a-1,\ a-3\}$

(이때, $a-\alpha>a-1>a-3$)

다음의 필요충분조건이 성립한다.

'$A=B \Leftrightarrow$ 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.'

왜냐하면 $A=B$이면

$g(x)=|k^2(x-\alpha)^2(x-1)^2(x-3)^2|$

$=k^2(x-\alpha)^2(x-1)^2(x-3)^2$

이기 때문이다. (이 역도 성립한다.)

이제 $A=B$인 상수 a의 값을 구하자.

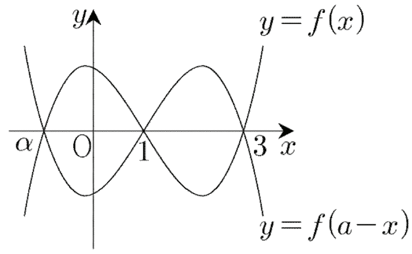
$\alpha=a-3,\ 1=a-1,\ 3=a-\alpha$

을 연립하면

$a=2,\ \alpha=-1$

이때, $A=B=\{-1,\ 1,\ 3\}$

두 함수 $f(x),\ f(a-x)$의 그래프는



(단, $\alpha=-1$)

두 함수 $f(x),\ f(a-x)$의 방정식은

$f(x)=k(x+1)(x-1)(x-3)$,

$f(a-x)=-k(x+1)(x-1)(x-3)=-f(x)$

$\therefore\ \dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}=\dfrac{(f(8))^2}{f(0)\times f(8)}$

$=\dfrac{k\times 9\times 7\times 5}{3k}=105$

답 105

[참고1]

α의 값을 다음과 같이 빠르게 구할 수 있다.

다음의 필요충분조건을 생각할 수 있다.

$A=B$

$\Leftrightarrow$

두 삼차함수 $f(x),\ f(a-x)$의 그래프는 x축 위의 서로 다른 세 점에서 만난다.

$\Leftrightarrow$

삼차함수 $f(x)$의 변곡점이 x축 위에 있다. $\cdots$(*)

$\Leftrightarrow$

삼차함수 $f(a-x)$의 변곡점이 x축 위에 있다.

(*)에 의하여

$\dfrac{\alpha+3}{2}=1$

$\therefore\ \alpha=-1$

[참고2]

미분계수의 정의를 이용하여 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능할 조건을 따져보자.

• 함수 $g(x)$의 $x=1$에서의 미분가능성

$\lim_{x\to 1+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1+}\left|\dfrac{k(x-1)Q(x)f(a-x)}{x-1}\right|$

(이때, $Q(x)=(x+\alpha)(x-3)$)

$=\lim_{x\to 1+}|kQ(x)f(a-x)|$

$=|kQ(1)f(a-1)|$

마찬가지의 방법으로

$$\lim_{x \to 1-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -|kQ(1)f(a-1)|$$

미분계수의 정의에 의하여

$|kQ(1)f(a-1)| = -|kQ(1)f(a-1)|$

즉, $kQ(1)f(a-1)=0$에서

$f(a-1)=0$ ($\because k \neq 0$, $Q(1) \neq 0$)

• 함수 $g(x)$의 $x=\alpha$, $x=3$에서의 미분가능성

위와 마찬가지의 방법으로

$f(a-\alpha)=0$, $f(a-3)=0$

이상에서

$\{\alpha, 1, 3\} = \{a-\alpha, a-1, a-3\}$

이고, $a=2$, $\alpha=-1$을 얻는다.

E129

| 답 13

[풀이1]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-2(a+2)x+a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$x=0$을 대입하여 $g(t)$의 방정식을 구하면

$g(t)=f(t)-tf'(t)=-2t^3+(a+2)t^2$

함수 $g(t)$의 도함수는

$g'(t)=-6t^2+2(a+2)t$

$g'(t)=0$에서 $t=0$, $t=\dfrac{a+2}{3}$

• (1) $a \leq -2$인 경우

구간 $(0, 5)$에서 $g'(t)<0$이므로

구간 $(0, 5)$에서 함수 $g(t)$는 감소한다.

• (2) $-2<a<13$인 경우

구간 $\left(0, \dfrac{a+2}{3}\right)$에서 $g'(t)>0$이므로

구간 $\left(0, \dfrac{a+2}{3}\right)$에서 함수 $g(t)$는 증가한다.

구간 $\left(\dfrac{a+2}{3}, 5\right)$에서 $g'(t)<0$이므로

구간 $\left(\dfrac{a+2}{3}, 5\right)$에서 함수 $g(t)$는 감소한다.

• (3) $a \geq 13$인 경우

구간 $(0, 5)$에서 $g'(t)>0$이므로

구간 $(0, 5)$에서 함수 $g(t)$는 증가한다.

(1), (2), (3)에서

$\therefore\ a \geq 13$

답 13

[풀이2] 시험장

$f(0)=0$이므로 곡선 $y=f(x)$은 원점을 지난다.

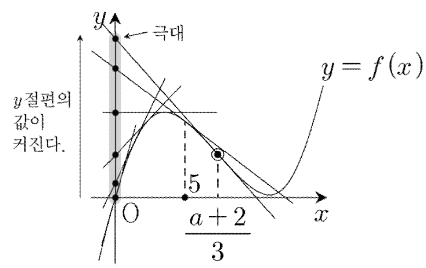
함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-2(a+2)x+a$

이 함수는 $x=-\dfrac{-2(a+2)}{2 \cdot 3}=\dfrac{a+2}{3}$일 때 최솟값을 갖는다.

기하학적으로 보면 $x=\dfrac{a+2}{3}$일 때, 접선의 기울기가 최솟값을 갖는다.

예를 들어 함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같으면 함수 $g(t)$는 구간 $(0, 5)$에서 증가한다.



(단, ⦿는 접선의 기울기가 최소인 점이다. 즉, '변곡점' 이다.)

위의 그림에서 생각하면,

함수 $g(t)$는 구간 $\left(0, \dfrac{a+2}{3}\right)$에서 증가하고,

구간 $\left(\dfrac{a+2}{3}, \infty\right)$에서 감소한다.

이때, 함수 $g(t)$는 $t=\dfrac{a+2}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

$5 \leq \dfrac{a+2}{3}$을 풀면 $a \geq 13$이므로 a의 최솟값은 13이다.

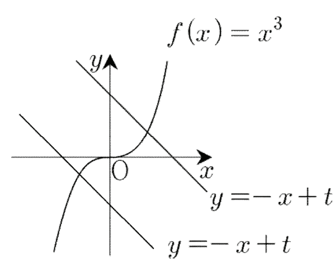
답 13

E130

| 답 ③

[풀이1] 시험장

▸ ㄱ. (참)



위의 그림처럼 t의 값에 관계없이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수는 1이므로 $g(t)=1$(상수함수)이다.

▸ ㄴ. (참)

F020 | 답 ④

[풀이]

문제에서 주어진 항등식에 $x=1$, $x=0$을 대입하면

$f(1)=2+4a$, $0=3a+\int_1^0 f(t)dt$, $\int_0^1 f(t)dt=3a$

$f(1)=\int_0^1 f(t)dt$이므로 $2+4a=3a$, $a=-2$

(그리고 $f(1)=-6$)

문제에서 주어진 항등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=6x^2-4x+f(x)$

$xf'(x)=6x^2-4x$, $f'(x)=6x-4$

$f(x)=\int f'(x)dx=3x^2-4x+C$

(단, C는 적분상수)

그런데 $f(1)=-1+C=-6$, 즉 $C=-5$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=3x^2-4x-5$

$\therefore\ a+f(3)=-2+10=8$

답 ④

F021 | 답 ③

[풀이]

적분과 미분의 관계에서

$F'(x)=x^3-1$

$\therefore\ F'(2)=7$

답 ③

F022 | 답 5

[풀이]

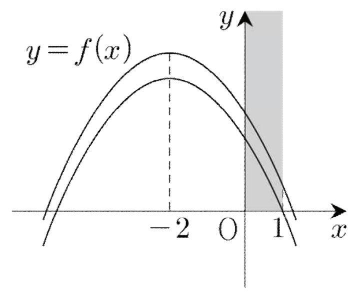
함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=\frac{d}{dx}\int f(t)dt=f(x)$

구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $g(x)$가 증가하므로

이 구간에서 $g'(x)\geq 0(f(x)\geq 0)$이어야 한다.

함수 $f(x)=-(x+2)^2+a+4$의 그래프는



위의 그림에서

$f(1)\geq 0$, 즉 $a-5\geq 0$, $a\geq 5$

따라서 a의 최솟값은 5이다.

답 5

F023 | 답 ②

[풀이]

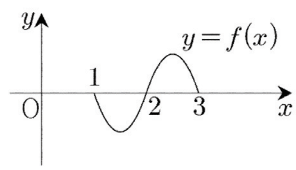
$g(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_4^x f(t)dt$

$g'(x)=f(x)+f(x)=2f(x)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

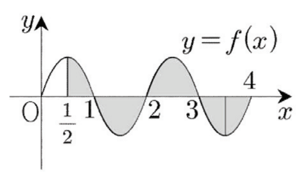
$f(2)=0$이고 $x=2$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로

구간 $(1,\ 3)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는



$g(2)=0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(t)dt=\int_2^4 f(t)dt$

위의 등식을 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프는 다음이 유일하다.



(단,  모양의 도형의 넓이는 1로 같고,

 모양의 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}$로 같다.

이때, $S=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$의 공식을 적용한 것이다.)

$\therefore\ \int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx=\int_{\frac{7}{2}}^4 f(x)dx=-\frac{1}{2}$

답 ②

F024 | 답 ③

[풀이]

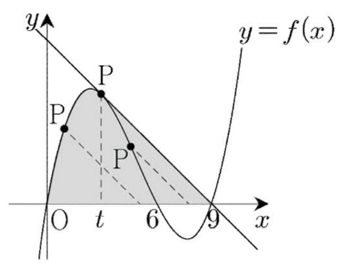
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$를 P라고 하자.

함수 $g(x)$에 대하여

$x \geq t$일 때, $g(x)=$(기울기가 -1이고 점 P를 지나는 직선)

함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(t)$라고 하자.

함수 $f(x)$의 그래프는



점 P를 움직이면서 $S(t)$의 값의 변화를 관찰하면

위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 -1일 때, $S(t)$는 최대가 된다.

$9f'(x)=(x-6)(x-9)+x(x-9)+x(x-6)$

$=3x^2-30x+54$

$f'(x)=-1 \Leftrightarrow x=3$

$\therefore\ S(3)$

$$=\int_0^3\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+6x\right)dx+\frac{9-3}{2}\times f(3)$$

$$=\left[\frac{1}{36}x^4-\frac{5}{9}x^3+3x^2\right]_0^3+3\times 6$$

$$=\frac{129}{4}$$

답 ③

[참고]

$$S(t)=\int_0^t f(x)dx+\frac{1}{2}\{f(t)\}^2$$

$S'(t)=f(t)+f(t)f'(t)=f(t)\{1+f'(t)\}$

$S'(t)=0 \Leftrightarrow f'(t)=-1\ (\because f(t)\neq 0)$

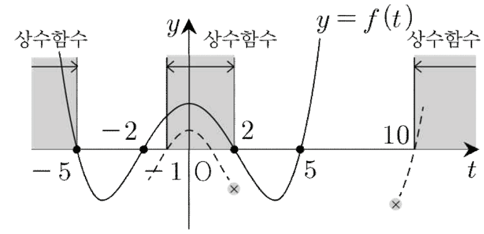
F025 | 답 ④

[풀이1] 시험장

모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=f(x)$

이므로 함수 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.



$$f(t)-|f(t)|=\begin{cases}0 & (f(t)\geq 0)\\ 2f(t) & (f(t)<0)\end{cases}$$

조건 (가), (다)에 의하여

세 개의 구간

$(-1,\ 2),\ (-\infty,\ -5),\ (10,\ \infty)$

에서 $f(t)\geq 0$이다. $\cdots$(*)

그래야만 두 구간 $(0,\ 1),\ (5,\ \infty)$에서

함수 $g(x)$는 상수함수이다.

- 곡선 $y=f(t)$는 점 $(-1,\ 0)$을 지나지 않는다. (귀류법)

곡선 $y=f(t)$가 점 $(-1,\ 0)$을 지난다고 가정하면

구간 $(1,\ 2)$에서 $f(t)<0$이므로 (*)를 만족시키지 않는다.

- 곡선 $y=f(t)$는 점 $(2,\ 0)$을 지난다.

곡선 $y=f(t)$가 점 $(2,\ 0)$을 지나면

구간 $(-1,\ 2)$에서 $f(t)\geq 0$이므로 (*)를 만족시킨다.

- 곡선 $y=f(t)$는 점 $(10,\ 0)$을 지나지 않는다. (귀류법)

곡선 $y=f(t)$가 점 $(10,\ 0)$을 지난다고 가정하면

구간 $(-10,\ -5)$에서 $f(t)<0$이므로 (*)를 만족시키지 않는다.

- 곡선 $y=f(t)$는 점 $(-5,\ 0)$을 지난다.

곡선 $y=f(t)$가 점 $(-5,\ 0)$을 지나면

두 구간 $(-\infty,\ -5),\ (10,\ \infty)$에서 $f(t)\geq 0$이므로 (*)를 만족시킨다.

이상에서 함수 $f(t)$의 방정식은

$f(t)=(t+2)(t-2)(t+5)(t-5)$

$\therefore\ f(\sqrt{2})=-2\times(-23)=46$

답 ④

[풀이2]

우선 함수 $f(x)$의 그래프의 개형에 대하여 생각하자.

모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=(-x)^4+a(-x)^2+b$

$=x^4+ax^2+b=f(x)$ 즉, $f(-x)=f(x)$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=4x^3+2ax=2x(2x^2+a)$

방정식

$f'(x)=0$ $\cdots$(*)

을 풀면

$x=0$ 또는 $2x^2+a=0$

• $a>0$인 경우

이차방정식 $2x^2+a=0$은 서로 다른 두 허근을 가지므로 (*)의 해집합은 $\{0\}$이다.

• $a=0$인 경우

이차방정식 $2x^2+a=0(2x^2=0)$은 0을 중근으로 가지므로 (*)의 해집합은 $\{0\}$이다.

• $a<0$인 경우

이차방정식 $2x^2+a=0$을 정리하면

$x^2=-\dfrac{a}{2}$에서 $x=-\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$ 또는 $x=\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$

(*)의 해집합은 $\left\{-\sqrt{-\dfrac{a}{2}},\ 0,\ \sqrt{-\dfrac{a}{2}}\right\}$이다.

한편 $h(x)=f(x)-|f(x)|$로 두자.

$f(x)\ge 0$일 때, $|f(x)|=f(x)$이므로

$h(x)=f(x)-f(x)=0$

$f(x)<0$일 때, $|f(x)|=-f(x)$이므로

$h(x)=f(x)-(-f(x))=2f(x)$

정리하면

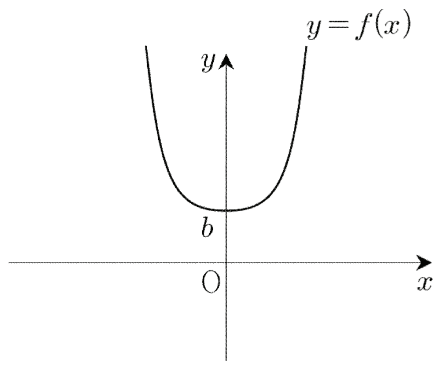
$$h(x)=\begin{cases}0 & (f(x)\ge 0)\\ 2f(x) & (f(x)<0)\end{cases}$$

▸ (경우1) $a\ge 0$인 경우

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. 이때, 극솟값은 $f(0)=b$이다.

• $b>0$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



$h(t)=0$이므로

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}0dt=[c]_{-x}^{2x}=c$$

(단, c는 상수)

그런데 $g(0)=\displaystyle\int_0^0 0dt=0$이므로 $c=0$이다.

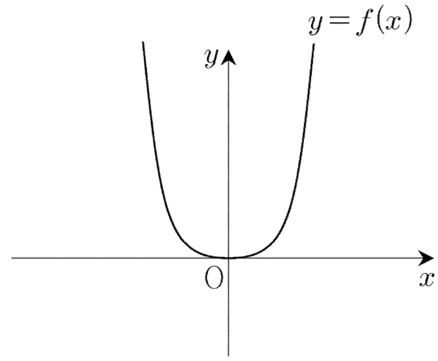
함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=0$(상수함수)

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

• $b=0$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



$h(t)=0$이므로

$b>0$인 경우와 마찬가지의 방법으로

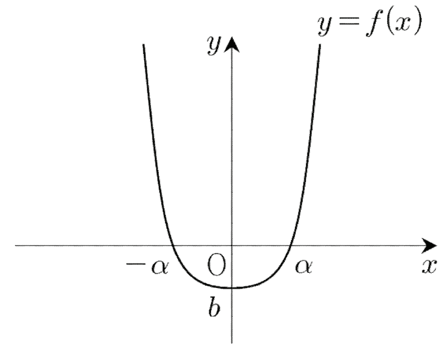
함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=0$(상수함수)

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

• $b<0$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는

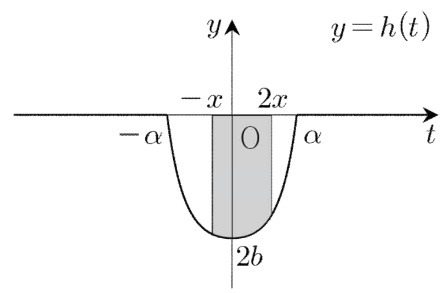


(단, $\alpha>0$, $f(\alpha)=f(-\alpha)=0$이다.)

함수 $h(t)$의 방정식은

$$h(t)=\begin{cases}0 & (t\le-\alpha,\ t\ge\alpha)\\ 2f(t) & (-\alpha<t<\alpha)\end{cases}$$

함수 $h(t)$의 그래프는



$0<x<\dfrac{\alpha}{2}$일 때, x의 값이 커짐에 따라

위의 그림에서 색칠된 도형의 넓이가 커지므로 $g(x)$는 감소한다.

이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

▸ (경우2) $a<0$인 경우

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

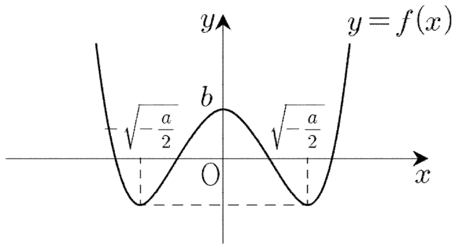
x	$\cdots$	x_1	$\cdots$	0	$\cdots$	x_2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

(단, $x_1 = -\sqrt{-\dfrac{a}{2}}$, $x_2 = \sqrt{-\dfrac{a}{2}}$)

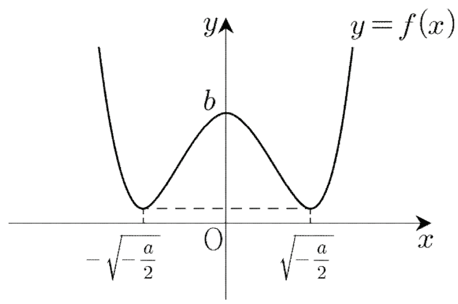
극댓값: $f(0) = b$

극솟값: $f\left(-\sqrt{-\dfrac{a}{2}}\right) = f\left(\sqrt{-\dfrac{a}{2}}\right) = -\dfrac{a^2}{4} + b$

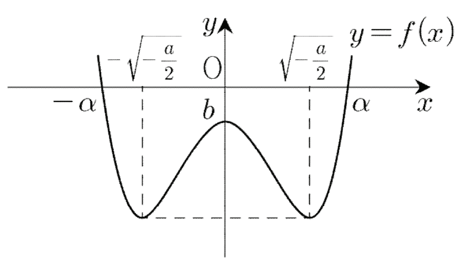
함수 $f(x)$의 그래프는



만약 아래 그림처럼 함수 $f(x)$의 극솟값이 음이 아닌 실수라면 $g(x) = 0$(상수함수)이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다. 이는 가정에 모순이다. 따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 음수이다.



아래 그림처럼 함수 $f(x)$의 극댓값(즉, b)가 양이 아닌 실수라고 가정하자.

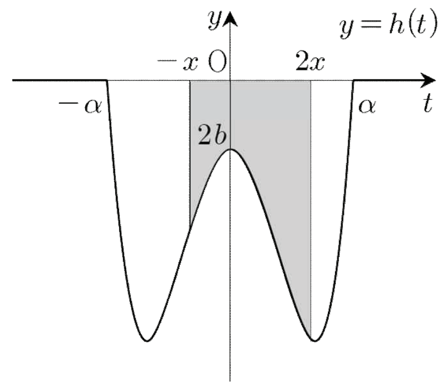


(단, $\alpha > 0$, $f(\alpha) = f(-\alpha) = 0$이다.)

함수 $h(t)$의 방정식은

$$h(t) = \begin{cases} 0 & (t \le -\alpha,\ t \ge \alpha) \\ 2f(t) & (-\alpha < t < \alpha) \end{cases}$$

함수 $h(t)$의 그래프는



$0 < x < \dfrac{\alpha}{2}$일 때, x의 값이 커짐에 따라

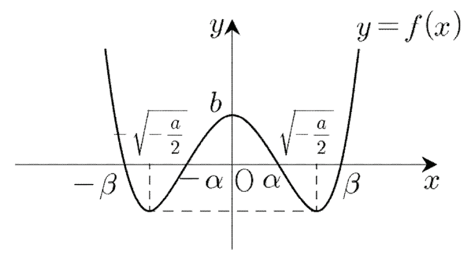
위의 그림에서 색칠된 도형의 넓이가 커지므로 $g(x)$는 감소한다.

이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

귀류법에 의하여 함수 $f(x)$의 극댓값(즉, b)는 양수이다.

요컨대 함수 $f(x)$의 극댓값은 양수, 극솟값은 음수이다.

함수 $f(x)$의 그래프는



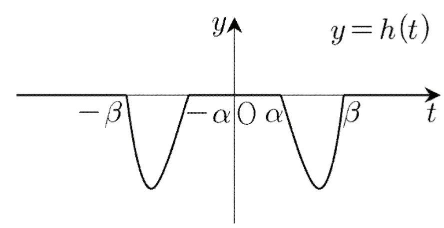
(단, $0 < \alpha < \beta$, $f(\alpha) = f(-\alpha) = 0$,

$f(\beta) = f(-\beta) = 0$이다.)

함수 $h(t)$의 방정식은

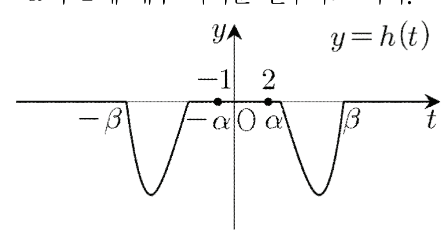
$$h(t) = \begin{cases} 0 & (t \le -\beta,\ -\alpha < t < \alpha,\ t \ge \beta) \\ 2f(t) & (-\beta < t \le -\alpha,\ \alpha \le t < \beta) \end{cases}$$

함수 $h(t)$의 그래프는



- $a = 2$임을 귀류법을 이용하여 보이자.

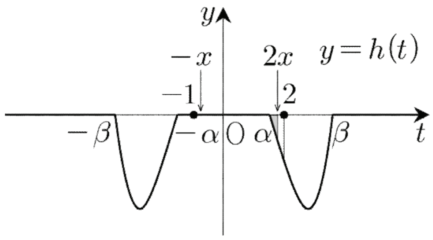
$\alpha > 2$이고 α가 2에 매우 가까운 실수라고 하자.



$1 < x < \dfrac{\alpha}{2}$일 때, $g(x) = 0$(상수함수)이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$\alpha < 2$이고 α가 2에 매우 가까운 실수라고 하자.



$\frac{\alpha}{2} < x < 1$일 때, x의 값이 커짐에 따라

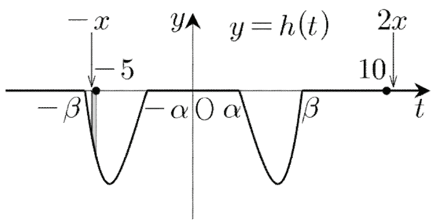
위의 그림에서 색칠된 도형의 넓이가 커지므로 $g(x)$는 감소한다.

이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

따라서 귀류법에 의하여 $\alpha = 2$이다.

- $\beta = 5$임을 귀류법을 이용하여 보이자.

$\beta > 5$이고 β가 5에 매우 가까운 실수라고 하자.

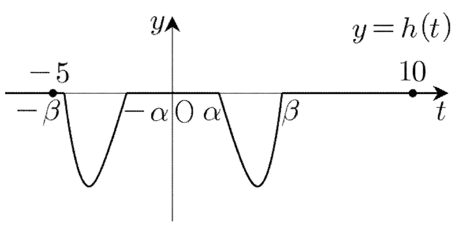


$5 < x < \beta$일 때, x의 값이 커짐에 따라

위의 그림에서 색칠된 도형의 넓이가 커지므로 $g(x)$는 감소한다.

이는 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

$\beta < 5$이고 β가 5에 매우 가까운 실수라고 하자.



$\beta < x < 5$일 때, $g(x) = 2\int_{\alpha}^{\beta} h(t)dt$(상수함수)이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 귀류법에 의하여 $\beta = 5$이다.

인수정리에 의하여

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = (x+2)(x-2)(x+5)(x-5)$

$= (x^2-4)(x^2-25)$

$\therefore\ f(\sqrt{2}) = -2 \times (-23) = 46$

답 ④

F026 | 답 ②

[풀이] ★

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = a(x-1)(x-4)(a > 0)$

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하자.

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

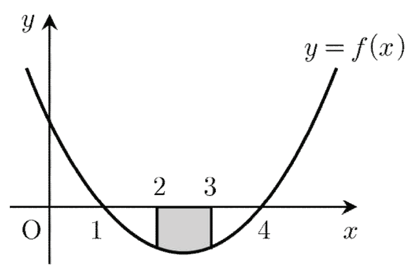
$g(x) = \int_{x}^{x+1} f(t)dt = [F(t)]_{x}^{x+1} = F(x+1) - F(x)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x) = f(x+1) - f(x) = 2a(x-2)(a > 0)$

$g'(x) = 0$에서 $x = 2$

$x = 2$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x = 2$에서 극솟값(최솟값)을 갖는다.



답 ②

[참고] ★

최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$의 대칭축은 $x = \frac{5}{2}$이므로

정적분 $\int_{x}^{x+1} f(t)dt$의 값이 최소가 되는 x의 값은 다음과 같이 구해도 좋다.

$\frac{x+x+1}{2} = \frac{2x+1}{2} = \frac{5}{2}\quad \therefore\ x = 2$

즉, 적분구간 $[x,\ x+1]$의 양 끝점을 연결한 선분의 중점이 $\frac{5}{2}$일 때, 정적분의 값은 최소가 된다.

F027 | 답 13

[풀이]

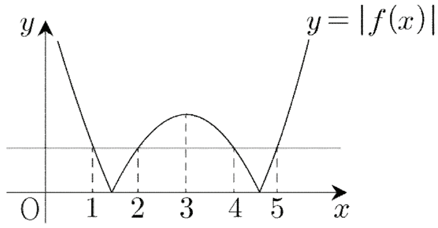
$g'(x) = |f(x+1)| - |f(x)|$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x+1)| = |f(x)| \qquad \cdots(*)$

$x = 1$과 $x = 4$는 방정식 (*)의 근이므로

$|f(1)| = |f(2)|,\ |f(4)| = |f(5)|$

위의 두 등식을 만족시키는 함수 $|f(x)|$의 그래프는



위의 그림에서 이차함수 $f(x)$의 대칭축은 $x=3$이므로

$f(x)=2(x-3)^2+a$

$f(1)=-f(2)$, 즉 $a+8=-(a+2)$, $a=-5$

$\therefore\ f(0)=13$

답 13

F028

|답 43

[풀이] ★

$g(a)=\displaystyle\int_a^{a+4} f(x)dx$으로 두자.

그리고 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하자.

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_a^{a+4} f(x)dx=[F(x)]_a^{a+4}=F(a+4)-F(a)$$

이므로 $g(a)=F(a+4)-F(a)$

양변을 a에 대하여 미분하면

$g'(a)=f(a+4)-f(a)$

$g'(a)=0$이면 $f(a+4)=f(a)$ $\cdots$ ㉠

$f(8)=4\neq 0=f(4)$이므로 $a=4$는 방정식 ㉠의 해가 아니다.

$0\leq a<4$일 때,

$f(a+4)=a$, $f(a)=-a(a-4)$

이므로 방정식 ㉠은

$a=-a^2+4a$

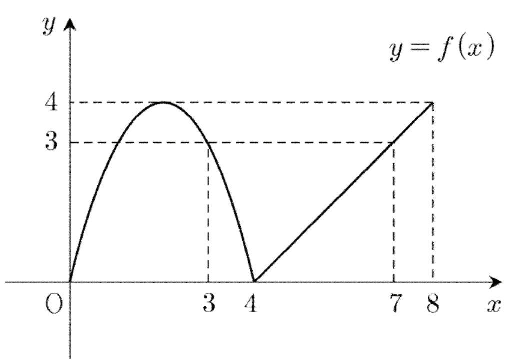
정리하면

$a^2-3a=0$ 좌변을 인수분해하면

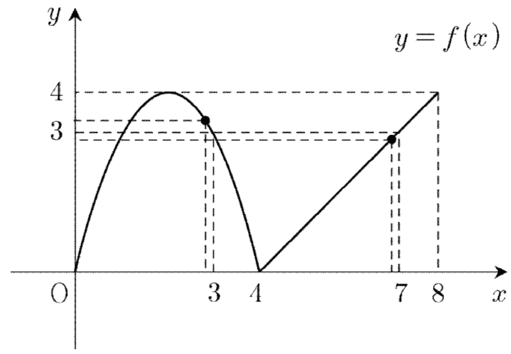
$a(a-3)=0$

풀면

$a=0$ 또는 $a=3$

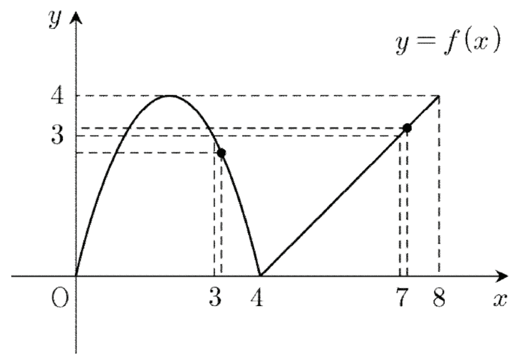


h가 충분히 작은 양수라고 하자.



구간 $(3-h,\ 3)$에 속하는 a에 대하여

$f(a+4)-f(a)<0$이다.



구간 $(3,\ 3+h)$에 속하는 a에 대하여

$f(a+4)-f(a)>0$이다.

$a=3$의 좌우에서 $g'(a)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $g(a)$는 $a=3$에서 극솟값을 갖는다.

정적분의 성질과 정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$g(3)=\int_3^7 f(x)dx=\int_3^4 f(x)dx+\int_4^7 f(x)dx$$

$$=\int_3^4(-x^2+4x)dx+\int_4^7(x-4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_3^4+\frac{1}{2}\times3\times3$$

$$=\frac{5}{3}+\frac{9}{2}=\frac{37}{6}$$

그리고

$$g(0)=\int_0^4 f(x)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$

$$g(4)=\int_4^8 f(x)dx=\frac{1}{2}\times4\times4=8$$

이므로 구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $g(a)$의 최솟값은 $\dfrac{37}{6}$이다.

$p=6$, $q=37$

$\therefore\ p+q=43$

답 43

[참고1] ★

정적분의 성질에 의하여

$$\int_{a}^{a+4} f(x)dx = \int_{0}^{a+4} f(x)dx - \int_{0}^{a} f(x)dx$$

적분과 미분의 관계에 의하여

$g'(a) = f(a+4) - f(a)$

[참고2]

정적분의 성질과 정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$g(a) = \int_{a}^{a+4} f(x)dx = \int_{a}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{a+4} f(x)dx$$

$$= \int_{a}^{4} (-x^2 + 4x)dx + \int_{4}^{a+4} (x-4)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_{a}^{4} + \frac{1}{2} \times a \times a$$

$$= \frac{a^3}{3} - \frac{3}{2}a^2 + \frac{32}{3}$$

F029 | 답 ②

[풀이1] 시험장

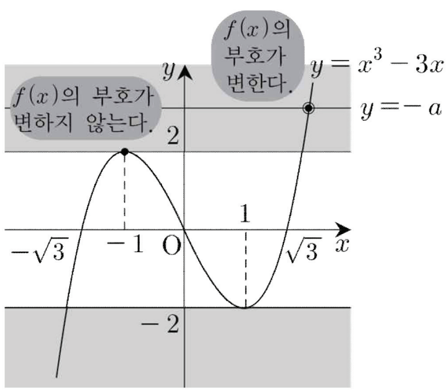
주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x) = f(x)$

함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$이므로, $f(x)$의 부호로 $F(x)$의 증감을 따지면 된다.

삼차함수의 비율관계($1 : \sqrt{3}$)를 이용하여

함수 $y = x^3 - 3x$의 그래프를 빠르게 그리자.



위의 그림처럼 직선 $y = -a$가 어둡게 색칠된 영역에 포함되면 함수 $F(x)$는 극값을 오직 하나만 가진다. 왜냐하면 $f(x)$의 부호가 바뀌는 곡선 $y = x^3 - 3x$와 직선 $y = -a$의 교점은 오직 하나이기 때문이다. 따라서 a의 범위는

$a \leq -2$ 또는 $a \geq 2$

양수 a의 최솟값은 2이다.

답 ②

[풀이2] ★

적분과 미분의 관계에 의하여

$F'(x) = f(x)$

방정식 $F'(x) = 0$은 $x^3 - 3x = -a$

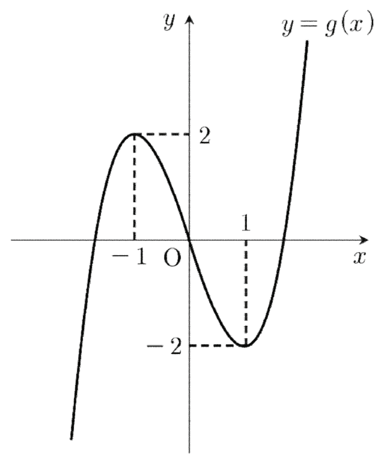
$g(x) = x^3 - 3x$로 두고, 함수 $g(x)$의 그래프와 직선 $y = -a$의 위치관계를 생각하자.

함수 $g(x)$의 도함수는 $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$g'(x) = 0$에서 $x = 1$ 또는 $x = -1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

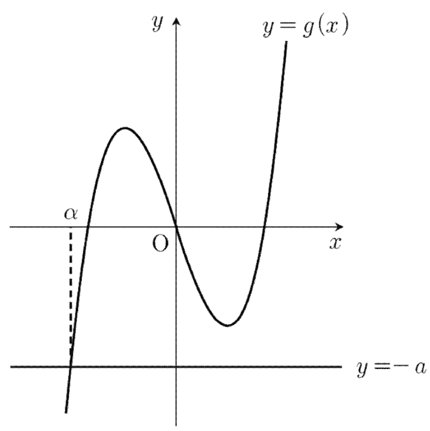
함수 $g(x)$의 그래프는



• (1) $a > 2$인 경우

함수 $g(x)$의 그래프와 직선 $y = -a$는 한 점에서 만난다.

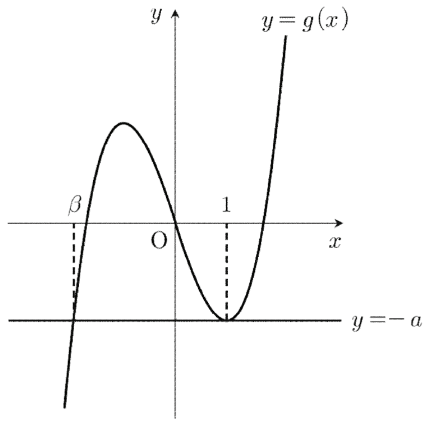
이 교점의 x좌표를 α라고 하자.



$x = \alpha$의 좌우에서 $F'(x)$의 부호는 음(−)에서 양(+)으로 변하므로 함수 $F(x)$는 $x = \alpha$에서 극솟값을 갖는다.

• (2) $a = 2$인 경우

함수 $g(x)$의 그래프와 직선 $y = -a$는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 교점 중 한 점의 x좌표는 1이고, 나머지 한 점의 x좌표를 β라고 하자.

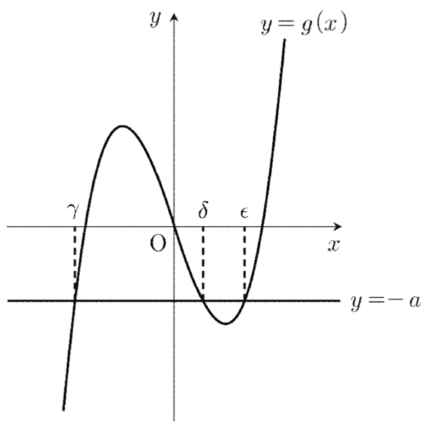


$x=1$의 좌우에서 $F'(x)$의 부호는 양수이므로 함수 $F(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖지 않는다.

$x=\beta$의 좌우에서 $F'(x)$의 부호는 음$(-)$에서 양$(+)$으로 변하므로 함수 $F(x)$는 $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다.

- (3) $0<a<2$인 경우

함수 $g(x)$의 그래프와 직선 $y=-a$는 서로 다른 세 점에서 만난다. 이 세 교점의 x좌표를 각각 γ, δ, ϵ이라고 하자. (단, $\gamma<\delta<\epsilon$)



$x=\gamma$의 좌우에서 $F'(x)$의 부호는 음$(-)$에서 양$(+)$으로 변하므로 함수 $F(x)$는 $x=\gamma$에서 극솟값을 갖는다.

$x=\delta$의 좌우에서 $F'(x)$의 부호는 양$(+)$에서 음$(-)$으로 변하므로 함수 $F(x)$는 $x=\delta$에서 극댓값을 갖는다.

$x=\epsilon$의 좌우에서 $F'(x)$의 부호는 음$(-)$에서 양$(+)$으로 변하므로 함수 $F(x)$는 $x=\epsilon$에서 극솟값을 갖는다.

(1), (2), (3)에서 양수 a에 대하여

$a \ge 2$이면 함수 $F(x)$의 극값의 개수는 1이다.

답 ②

F030 | 답 ③

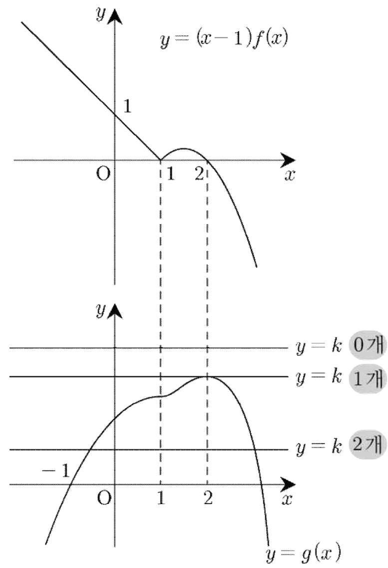
[풀이1] 시험장

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=(x-1)f(x)$

$$=\begin{cases} 1-x & (x<1) \\ -(x-1)(x-2) & (x \ge 1) \end{cases}$$

두 함수 $g'(x)(=(x-1)f(x))$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



(단, $g(-1)=0$)

▸ ㄱ. (참)

▸ ㄴ. (참)

왜냐하면 $g'(1)=0$이기 때문이다.

▸ ㄷ. (거짓)

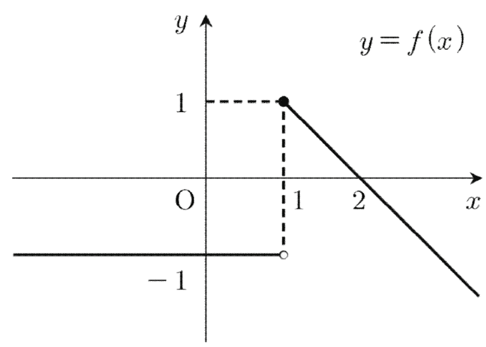
곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수는 2 이하이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

[풀이2] ★

함수 $f(x)$의 그래프는



▸ ㄱ. (참)

적분과 미분의 관계에 의하여

$g'(x)=(x-1)f(x)$

구간 $(1,\ 2)$에서 $x-1>0$, $f(x)>0$

이므로 $g'(x)>0$이다.

구간 $(1,\ 2)$에서 함수 $g(x)$는 증가한다.

▸ ㄴ. (참)

$g'(1)=(1-1)f(1)=0\times1=0$

함수 $g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는 0이다.

즉, 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

▸ ㄷ. (거짓)

$g'(x)=(x-1)f(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

정적분의 성질에 의하여

$$g(1)=\int_{-1}^{1}(t-1)f(t)dt=\int_{-1}^{1}(1-t)dt$$

$$=\int_{-1}^{1}1dt=[t]_{-1}^{1}=2$$

$$g(2)=\int_{-1}^{2}(t-1)f(t)dt$$

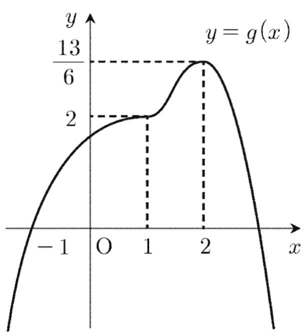
$$=\int_{-1}^{1}(t-1)f(t)dt+\int_{1}^{2}(t-1)f(t)dt$$

$$=2+\int_{1}^{2}(t-1)(2-t)dt$$

$$=2+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-2t\right]_1^2=\frac{13}{6}$$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	2	↗	$\frac{13}{6}$	↘

함수 $g(x)$의 그래프는



곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수의 최댓값은 2이다. 따라서 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k는 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

[참고]

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이지만, 함수 $y=x-1$이 연속이고, 이 직선이 x축 위의 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

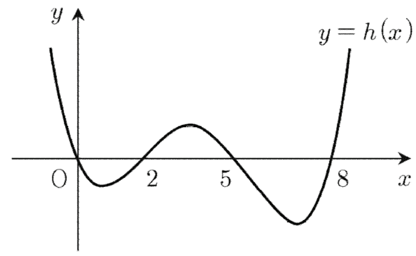
함수 $(x-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 따라서 함수 $g(x)$를 정의할 수 있다.

F031 | 답 ⑤

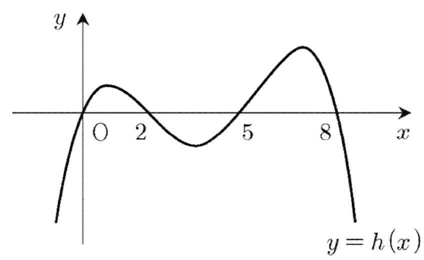
[풀이] ★

$h(x)=\int_0^x f(t)dt$로 두자.

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때, 함수 $h(x)$의 그래프는



함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수일 때, 함수 $h(x)$의 그래프는



적분과 미분의 관계에 의하여

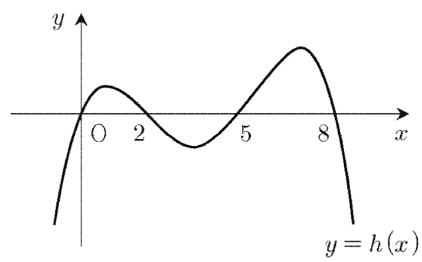
$h'(x)=f(x)$

주어진 조건에 의하여

$h'(0)=f(0)>0$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 증가한다.

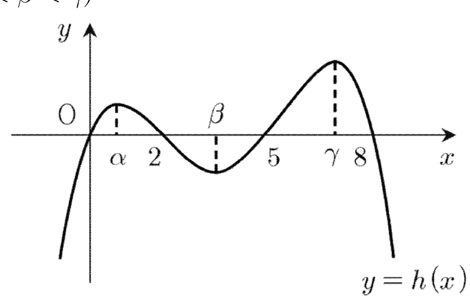
따라서 함수 $h(x)$의 그래프는



▸ ㄱ. (참)

함수 $h(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\gamma$에서 극댓값을 갖고, $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다고 하자.

(단, $\alpha<\beta<\gamma$)



$h(x)$의 도함수가 $f(x)$이므로

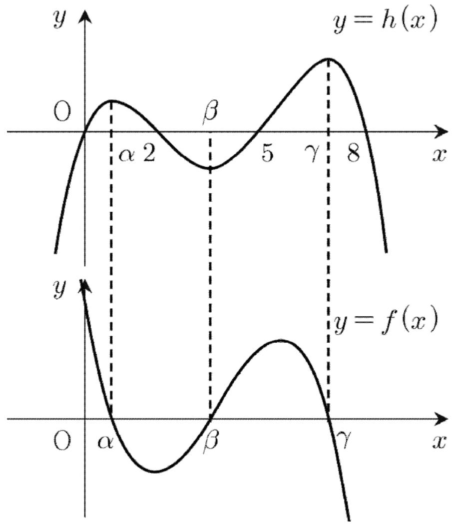
방정식 $f(x)=0$의 해집합은

$\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$

따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.

▸ ㄴ. (참)

두 함수 $h(x)$, $f(x)(=h'(x))$의 그래프는 다음과 같다.



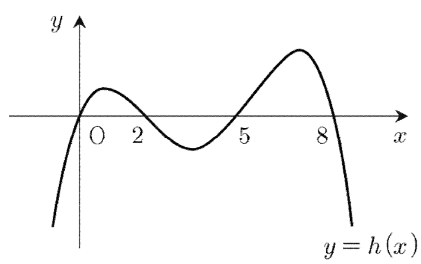
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 감소하므로

$\therefore\ f'(0)<0$

▸ ㄷ. (참)

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_{m}^{m+2} f(x)dx = h(m+2)-h(m)$$



위의 그림에서

$m=1$일 때, $h(3)-h(1)<0$

$m=2$일 때, $h(4)-h(2)<0$

$m=3$일 때, $h(5)-h(3)>0$

$m=4$일 때, $h(6)-h(4)>0$

$m=5$일 때, $h(7)-h(5)>0$

$m=6$일 때, $h(8)-h(6)<0$

⋮

주어진 부등식을 만족시키는 자연수 m은 3, 4, 5 뿐이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

F032 | 답 ④

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<0) \\ f(x) & (x>0) \end{cases}$ ($g'(x)$는 이차함수)

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0-} g'(x) = \lim_{x\to 0+} g'(x)$, 즉 $-f(0)=f(0)$

$\therefore\ f(0)=0$

▸ ㄴ. (거짓)

함수 $g'(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

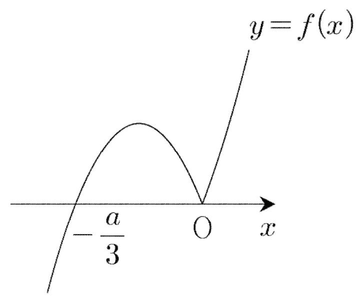
$g'(x)=3x^2+ax$ ($\because g'(0)=0$(ㄱ))

함수 $f(x)$의 방정식은

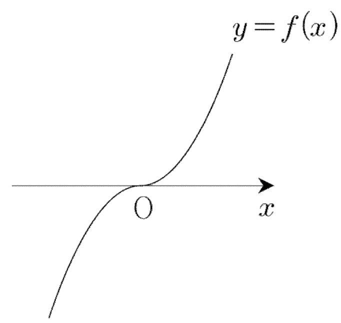
$f(x)=\begin{cases} -3x^2-ax & (x<0) \\ 3x^2+ax & (x\geq 0) \end{cases}$

함수 $f(x)$의 그래프는

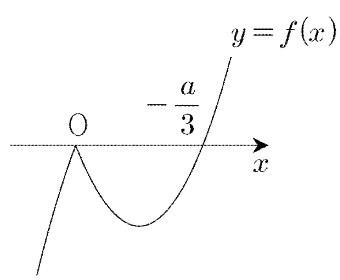
• $a>0$인 경우 (극댓값을 갖는다.)



• $a=0$인 경우 (극값을 갖지 않는다.)



• $a<0$인 경우 (극댓값을 갖는다.)



따라서 주어진 명제는 거짓이다.

▸ ㄷ. (참)

$2<f(1)=3+a<4$, 즉, $-1<a<1$

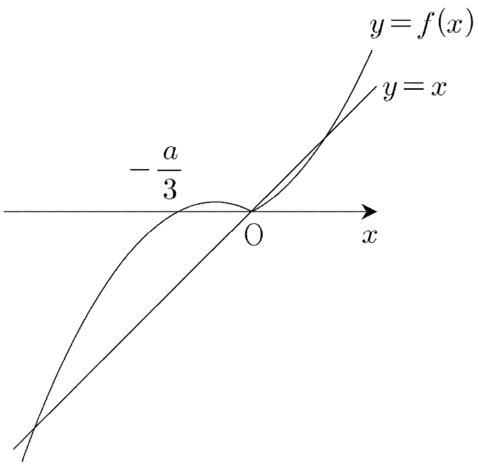
이므로 다음이 성립한다.

$-1<$(곡선 $y=f(x)$ 위의 원점 O에서의 우미분계수의 크기)<1,

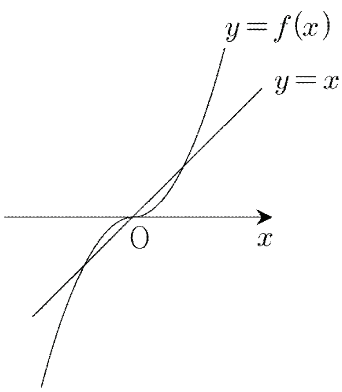
$-1<$(곡선 $y=f(x)$ 위의 원점 O에서의 좌미분계수의 크기)<1

방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 각각

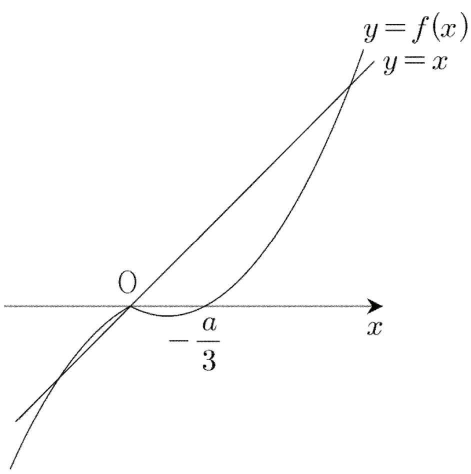
- $a>0$의 경우 (3개)



- $a=0$의 경우 (3개)



- $a<0$의 경우 (3개)



따라서 주어진 명제는 참이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

F033 | 답 39

[풀이]

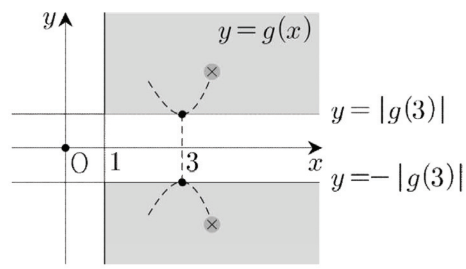
$g(x)=\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{3}x^3+\cdots$

이고, $g(0)=0$이다.

$x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq g(4)$이므로

함수 $g(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 갖는다. $\cdots$(*)

한편 $g(3)\neq 0$이라고 하자.



만약 $x\geq 1$일 때, $g(x)\geq |g(3)|$이면 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다. 이는 (*)에 모순이다.

만약 $x\geq 1$일 때, $g(x)\leq -|g(3)|$이면

함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.

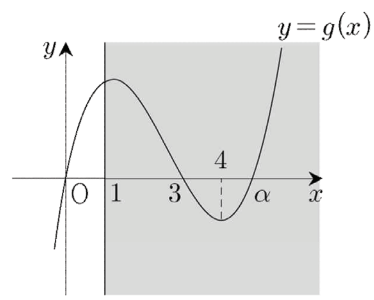
그런데 $g(4)<0$이고 $x\to\infty$일 때, $g(x)\to\infty$이므로

함수 $g(x)$의 그래프는 x축과 반드시 만나야 한다.

($\because$ 사이값 정리)

귀류법에 의하여 $g(3)=0$

함수 $g(x)$의 그래프는



$g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-\alpha)$로 두자. (단, $\alpha>4$)

$g'(x)=\frac{1}{3}(x-3)(x-\alpha)+\frac{1}{3}x(x-\alpha)$

$+\frac{1}{3}x(x-3)$

$g'(4)=\frac{4-\alpha}{3}+\frac{4(4-\alpha)}{3}+\frac{4}{3}$

$=\frac{24-5\alpha}{3}=0,\ \alpha=\frac{24}{5}$

$\therefore\ f(9)=g'(9)$

$=\frac{1}{3}\times 6\times\frac{21}{5}+\frac{1}{3}\times 9\times\frac{21}{5}+\frac{1}{3}\times 9\times 6$

$=39$

답 39

F034 | 답 ①

[풀이]

▸ ㄱ. (거짓)

(반례)

$f(x)=x$으로 두면

(좌변)$=\int_0^3 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$

(우변)$=3\int_0^1 x\,dx=3\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{3}{2}$

$\int_0^3 f(x)dx \neq 3\int_0^1 f(x)dx$

▸ ㄴ. (참)

정적분의 성질에 의하여

$\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx$

양변에서 $\int_1^2 f(x)dx$을 빼면

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx$

그런데 $\int_2^1 f(x)dx=-\int_1^2 f(x)dx$이므로

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^1 f(x)dx$

따라서 주어진 등식은 항상 성립한다.

▸ ㄷ. (거짓)

(반례)

$f(x)=x$으로 두면

(좌변)$=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

(우변)$=\left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}^2=\left\{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right\}^2=\frac{1}{4}$

$\int_0^1 \{f(x)\}^2dx \neq \left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}^2$

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ①

F035 | 답 ①

[풀이]

구간 $[0,\ 1]$에서 $x^2(x-1)\le 0$

구간 $[1,\ 2]$에서 $x^2(x-1)\ge 0$

정적분의 성질에 의하여

$\int_0^2 |x^2(x-1)|\,dx$

$=\int_0^1 (x^2-x^3)dx+\int_1^2 (x^3-x^2)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$

$=\frac{1}{12}+\frac{17}{12}=\frac{3}{2}$

답 ①

F036 | 답 17

[풀이]

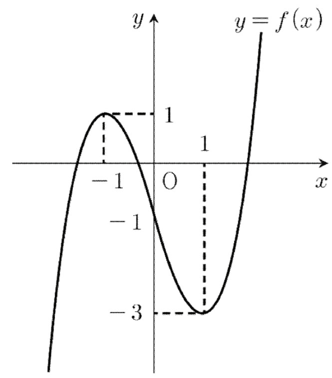
함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

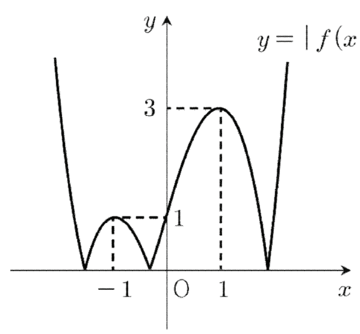
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $y=|f(x)|$의 그래프는



구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $g(t)$의 방정식은

$g(t)=\begin{cases}1 & (-1\le t\le 0)\\ -t^3+3t+1 & (0<t\le 1)\end{cases}$

구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $g(t)$의 그래프는

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

★ 스포일러: 2024 학년도 수능 수학 푼 사람만 읽으세요 !

2024 수능에서 보여준 출제 경향

〈 공통(수학1+수학2) 〉

- 공통 8 - 인수분해(고1)+함수의 연속성+우함수/기함수의 정적분
- 공통 10 - 삼차함수의 비율관계(빠른계산)+절댓값이 붙은 다항함수의 그래프의 개형
- 공통 12 - 최대최소 문제: 관찰 또는 식 세우기. 두 방법 모두 가능.
- 공통 14 - 교육청 2학년 문제를 보는 듯. 삼차함수와 직선의 교점의 개수가 2인 상황+이차함수의 대칭축과 꼭짓점의 위치(고1)
- 공통 15 - 수열+수형도. 전형적인 문제.
- 공통 19 - 삼각함수의 그래프가 아닌 단위원+부등식과 필요충분조건을 이루는 방정식 찾기.
- 공통 20 - 원의 성질, 두 개의 직각삼각형이 주어진 기하적 상황
- 공통 22 - 다항함수의 그래프의 개형을 그릴 때, x절편, y절편을 가장 먼저 결정해야 함. 삼차함수의 특징($-\infty \to 0 \to \infty$)+사이값 정리+귀류법. 계산은 거의 없음.

〈 확률과 통계 〉

- 확률과 통계 26 - 함수의 정의에 대한 근본을 묻는 문제. 쉽지만, 너무나도 좋은 문제.
- 확률과 통계 29 - 수의 대소 관계($a < b$, $a = b$, $a > b$)+중복조합. 교사경 기출에서 자주 다룬 유형의 문제.

〈 미적분 〉

- 미적분 28 - '2022-미적분30', '2023-확률과통계22/미적분22/기하22'의 계보를 잇는 문제. 곡선 위의 점을 먼저 찍고, 곡선을 그리면 어려울 것이 없음.
- 미적분 30 - 변곡접선을 소재로 하는 문제. (※올해 수능에서 삼차함수의 비율관계, 변곡접선, …등의 실전이론이 출제되었습니다. 앞으로의 수능에서 이런 실전이론들이 출제되지 말라는 법은 없습니다.)

〈 기하 〉

- 기하 28 - 공간도형 문제는 결국 평면도형에서 해결해야 함. 타원의 정의+원의 성질+두 개 이상의 직각삼각형이 주어진 기하적 상황
- 기하 30 - 교사경 문제인 '2013(10)고3-B형21'의 변형 문제.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

학년도	시험	실시년도/월
5차 교육과정		
1991	실험평가(1차)	1990년 12월
1992	실험평가(2차)	1991년 5월
1992	실험평가(3차)	1991년 8월
1992	실험평가(4차)	1991년 11월
1993	실험평가(5차)	1992년 5월
1993	실험평가(6차)	1992년 8월
1993	실험평가(7차)	1992년 11월
1994	대학수학능력(1차)	1993년 8월
1994	대학수학능력(2차)	1993년 11월
1995	대학수학능력	1994년 11월
1996	대학수학능력	1995년 11월
1997	대학수학능력	1996년 11월
1998	대학수학능력	1997년 11월
6차 교육과정		
1999	대학수학능력	1998년 11월
2000	대학수학능력	1999년 11월
2001	대학수학능력	2000년 11월
2002	대학수학능력	2001년 11월
2003	모의평가(9월)	2002년 9월
2003	대학수학능력	2002년 11월
2004	모의평가(6월)	2003년 6월
2004	모의평가(9월)	2003년 9월
2004	대학수학능력	2003년 11월
7차 교육과정		
2005	예비시행	2003년 12월
2005	모의평가(6월)	2004년 6월
2005	모의평가(9월)	2004년 9월
2005	대학수학능력	2004년 11월
2006	모의평가(6월)	2005년 6월
2006	모의평가(9월)	2005년 9월
2006	대학수학능력	2005년 11월
2007	모의평가(6월)	2006년 6월
2007	모의평가(9월)	2006년 9월
2007	대학수학능력	2006년 11월
2008	모의평가(6월)	2007년 6월
2008	모의평가(9월)	2007년 9월
2008	대학수학능력	2007년 11월
2009	모의평가(6월)	2008년 6월
2009	모의평가(9월)	2008년 9월
2009	대학수학능력	2008년 11월
2010	모의평가(6월)	2009년 6월
2010	모의평가(9월)	2009년 9월
2010	대학수학능력	2009년 11월
2011	모의평가(6월)	2010년 6월
2011	모의평가(9월)	2010년 9월
2011	대학수학능력	2010년 11월

학년도	시험	실시년도/월
2007개정 교육과정		
2012	모의평가(6월)	2011년 6월
2012	모의평가(9월)	2011년 9월
2012	대학수학능력	2011년 11월
2014	예비시행	2012년 5월
2013	모의평가(6월)	2012년 6월
2013	모의평가(9월)	2012년 9월
2013	대학수학능력	2012년 11월
2014	모의평가(6월)	2013년 6월
2014	모의평가(9월)	2013년 9월
2014	대학수학능력	2013년 11월
2015	모의평가(6월)	2014년 6월
2015	모의평가(9월)	2014년 9월
2015	대학수학능력	2014년 11월
2016	모의평가(6월)	2015년 6월
2016	모의평가(9월)	2015년 9월
2016	대학수학능력	2015년 11월
2009개정 교육과정		
2017	모의평가(6월)	2016년 6월
2017	모의평가(9월)	2016년 9월
2017	대학수학능력	2016년 11월
2018	모의평가(6월)	2017년 6월
2018	모의평가(9월)	2017년 9월
2018	대학수학능력	2017년 11월
2019	모의평가(6월)	2018년 6월
2019	모의평가(9월)	2018년 9월
2019	대학수학능력	2018년 11월
2020	모의평가(6월)	2019년 6월
2020	모의평가(9월)	2019년 9월
2020	대학수학능력	2019년 11월
2015개정 교육과정		
2021	예시문항	2020년 5월
2021	모의평가(6월)	2020년 6월
2021	모의평가(9월)	2020년 9월
2021	대학수학능력	2020년 11월
2022	모의평가(6월)	2021년 6월
2022	모의평가(9월)	2021년 9월
2022	대학수학능력	2021년 11월
2023	모의평가(6월)	2022년 6월
2023	모의평가(9월)	2022년 9월
2023	대학수학능력	2022년 11월
2024	모의평가(6월)	2023년 6월
2024	모의평가(9월)	2023년 9월
2024	대학수학능력	2023년 11월

○ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
소단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며,
출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

○ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
다른 풀이 및 참고 사항을 최대한 수록하여 문제 해결의 다양한 시각을 제시하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 - 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

<u>특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.</u>

수능/평가원 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다. 그리고 모든 풀이를 보여준다는 의미에서 교육과정 외의 풀이도 수록하였으나, 이를 반드시 읽어야(공부해야) 하는 것은 아닙니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)
[풀이] (교육과정 외)
[참고] (교육과정 외)

목 차

미적분

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

G 수열의 극한

- 2015개정 교육과정

○ 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 공식은 수학 I 삼각함수 단원을 따름
○ 삼각형, 사각형, 원, 부채꼴의 기하학적 성질은 개정 중학교 수학 교과서를 따름
○ 주기 함수 관련 문제 포함
○ 부등식의 영역 관련 문제 제외 또는 변형 수록
○ 사인법칙, 코사인법칙 관련 문제 포함
○ 라디안 표현이 포함된 문제 포함

G. 등비급수(기하): 이등변삼각형

▶ 실전 이론 p.235

G131

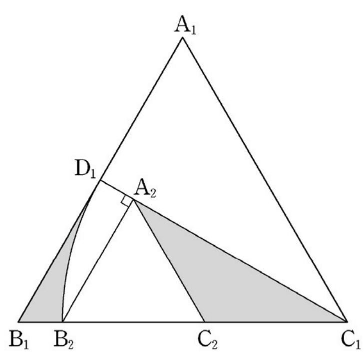
○○○
(2018−나형19)

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 선분 A_1B_1의 중점을 D_1이라 하고, 선분 B_1C_1 위의 $\overline{C_1D_1}=\overline{C_1B_2}$인 점 B_2에 대하여 중심이 C_1인 부채꼴 $C_1D_1B_2$를 그린다. 점 B_2에서 선분 C_1D_1에 내린 수선의 발을 A_2, 선분 C_1B_2의 중점을 C_2라 하자. 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 D_1B_2로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_1A_2C_2$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

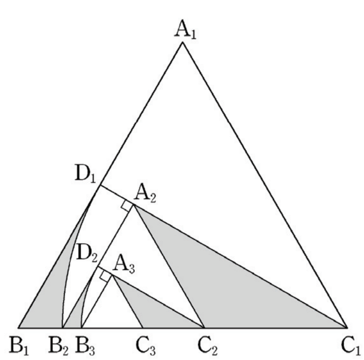
그림 R_1에서 선분 A_2B_2의 중점을 D_2라 하고, 선분 B_2C_2 위의 $\overline{C_2D_2}=\overline{C_2B_3}$인 점 B_3에 대하여 중심이 C_2인 부채꼴 $C_2D_2B_3$을 그린다. 점 B_3에서 선분 C_2D_2에 내린 수선의 발을 A_3, 선분 C_2B_3의 중점을 C_3이라 하자. 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 D_2B_3으로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_2A_3C_3$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



① $\dfrac{11\sqrt{3}-4\pi}{56}$ ② $\dfrac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$ ③ $\dfrac{15\sqrt{3}-6\pi}{56}$

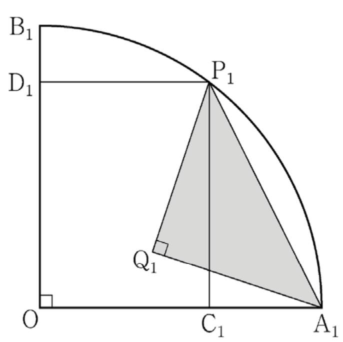
④ $\dfrac{15\sqrt{3}-6\pi}{52}$ ⑤ $\dfrac{15\sqrt{3}-4\pi}{52}$

G132

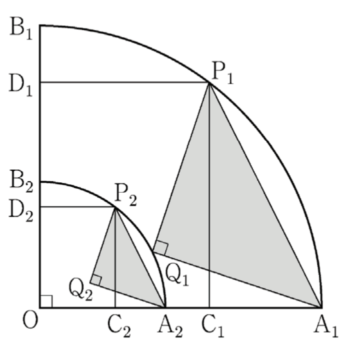
○○○
(2023-미적분27)

그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1 위에 점 P_1, 선분 OA_1 위에 점 C_1, 선분 OB_1 위에 점 D_1을 사각형 $OC_1P_1D_1$이 $\overline{OC_1}:\overline{OD_1}=3:4$인 직사각형이 되도록 잡는다.
부채꼴 OA_1B_1의 내부에 점 Q_1을 $\overline{P_1Q_1}=\overline{A_1Q_1}$, $\angle P_1Q_1A_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 이등변삼각형 $P_1Q_1A_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2와 선분 OB_1 위의 점 B_2를 $\overline{OQ_1}=\overline{OA_2}=\overline{OB_2}$가 되도록 잡고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OQ_1}$, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 P_2, C_2, D_2, Q_2를 잡고, 이등변삼각형 $P_2Q_2A_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{9}{40}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{11}{40}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{13}{40}$

G. 등비급수(기하): 직각삼각형 2개

▶ 실전 이론 p.235

G133

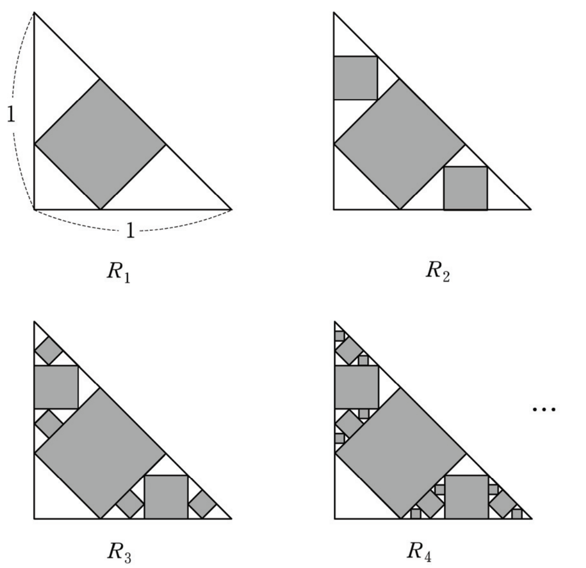
○○○
(2007-가형17/나형17)

아래와 같이 직각을 낀 두 변의 길이가 1인 직각이등변삼각형이 있다. 이 직각이등변삼각형의 빗변에 2개의 꼭짓점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭짓점이 있는 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 합동인 2개의 직각이등변삼각형의 각 빗변에 2개의 꼭짓점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭짓점이 있는 2개의 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 합동인 4개의 직각이등변삼각형의 각 빗변에 2개의 꼭짓점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭짓점이 있는 4개의 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 정사각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

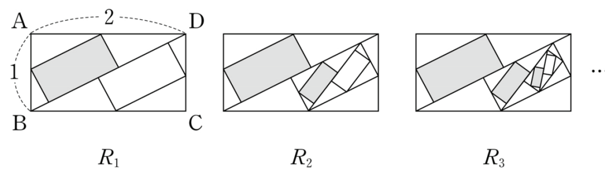


① $\frac{3\sqrt{2}}{20}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

G134

●●●
(2014(6)-A형18)

직사각형 ABCD에서 $\overline{AB}=1$, $\overline{AD}=2$이다. 그림과 같이 직사각형 ABCD의 한 대각선에 의하여 만들어지는 두 직각삼각형의 내부에 두 변의 길이의 비가 1 : 2인 두 직사각형을 긴 변이 대각선 위에 놓이면서 두 직각삼각형에 각각 내접하도록 그리고, 새로 그려진 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 새로 그려진 두 직사각형 중 색칠되어 있지 않은 직사각형에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



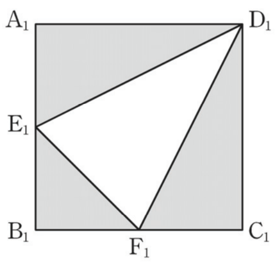
① $\frac{37}{61}$ ② $\frac{38}{61}$ ③ $\frac{39}{61}$
④ $\frac{40}{61}$ ⑤ $\frac{41}{61}$

G135

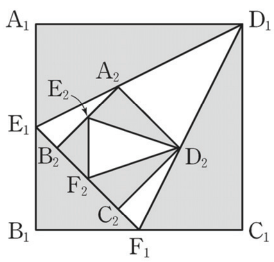
○○○
(2017(6)-나형17)

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1B_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 E_1, F_1이라 하자. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부와 삼각형 $E_1F_1D_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 D_1E_1 위의 점 A_2, 선분 D_1F_1 위의 점 D_2와 선분 E_1F_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 삼각형 $E_2F_2D_2$를 그리고 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부와 삼각형 $E_2F_2D_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

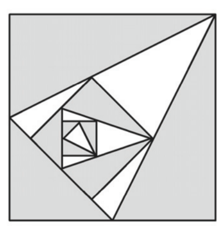
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2



R_3 ⋯

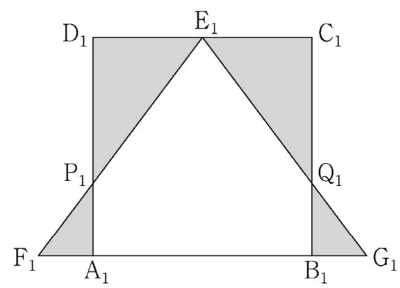
① $\frac{125}{37}$ ② $\frac{125}{38}$ ③ $\frac{125}{39}$ ④ $\frac{25}{8}$ ⑤ $\frac{125}{41}$

G136

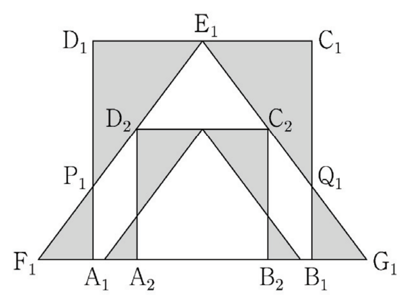
○○○
(2020(6)-나형17)

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 C_1D_1의 중점을 E_1이라 하고, 직선 A_1B_1 위에 두 점 F_1, G_1을 $\overline{E_1F_1}=\overline{E_1G_1}$, $\overline{E_1F_1}:\overline{F_1G_1}=5:6$이 되도록 잡고 이등변삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다. 선분 D_1A_1과 선분 E_1F_1의 교점을 P_1, 선분 B_1C_1과 선분 G_1E_1의 교점을 Q_1이라 할 때, 네 삼각형 $E_1D_1P_1$, $P_1F_1A_1$, $Q_1B_1G_1$, $E_1Q_1C_1$로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 F_1G_1 위의 두 점 A_2, B_2와 선분 G_1E_1 위의 점 C_2, 선분 E_1F_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{61}{6}$ ② $\frac{125}{12}$ ③ $\frac{32}{3}$ ④ $\frac{131}{12}$ ⑤ $\frac{67}{6}$

G137

○○○
(2023(9)−미적분27)

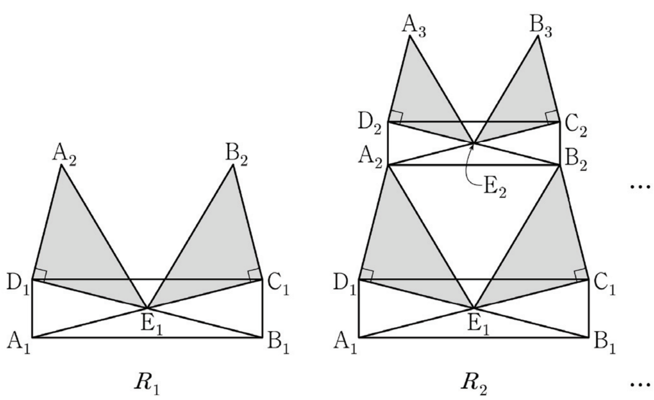
그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 두 대각선의 교점을 E_1이라 하자.

$\overline{A_2D_1}=\overline{D_1E_1}$, $\angle A_2D_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 A_2E_1이 만나도록 점 A_2를 잡고, $\overline{B_2C_1}=\overline{C_1E_1}$, $\angle B_2C_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 B_2E_1이 만나도록 점 B_2를 잡는다.

두 삼각형 $A_2D_1E_1$, $B_2C_1E_1$을 그린 후  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:1$이고 선분 D_2C_2가 두 선분 A_2E_1, B_2E_1과 만나지 않도록 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 E_2, A_3, B_3을 잡고 두 삼각형 $A_3D_2E_2$, $B_3C_2E_2$를 그린 후  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{68}{5}$ ② $\frac{34}{3}$ ③ $\frac{68}{7}$
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{68}{9}$

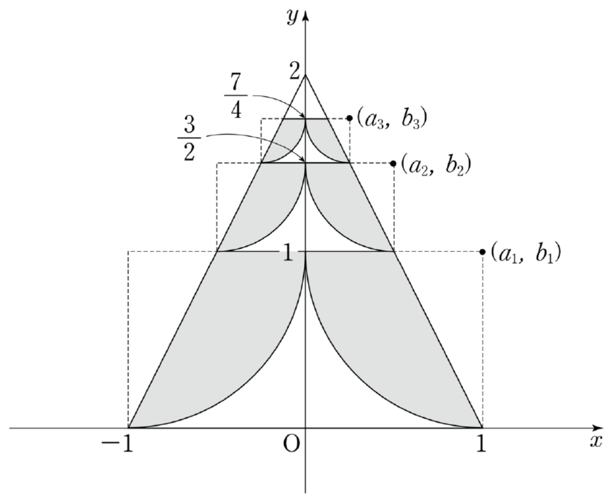
G138

●●●
(2012(6)−가형14/나형14변형)

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이 각각

$$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

이다. 좌표평면에서 중심이 $(a_n,\ b_n)$이고 y축에 접하는 원과 두 직선 $y=b_n$, $y=-2x+2$로 둘러싸인 네 개의 영역 중에서 원점에 가까운 영역을 P_n이라 하고, y축에 대하여 P_n과 대칭인 영역을 Q_n이라 하자. P_n의 넓이와 Q_n의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

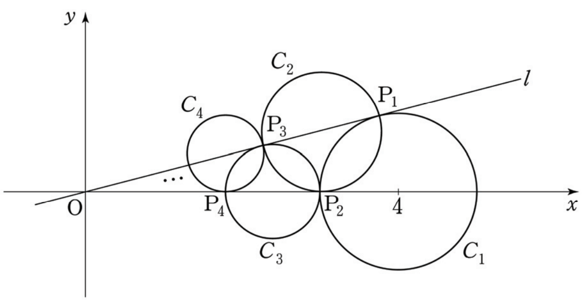


① $\frac{5(\pi-1)}{9}$ ② $\frac{11(\pi-1)}{18}$ ③ $\frac{2(\pi-1)}{3}$
④ $\frac{13(\pi-1)}{18}$ ⑤ $\frac{7(\pi-1)}{9}$

G139

●●● (2009-가형14/나형14)

좌표평면에 원 C_1 : $(x-4)^2+y^2=1$이 있다. 그림과 같이 원점에서 원 C_1에 기울기가 양수인 접선 l을 그었을 때 생기는 접점을 P_1이라 하자. 중심이 직선 l 위에 있고 점 P_1을 지나며 x축에 접하는 원을 C_2라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_2라 하자. 중심이 x축 위에 있고 점 P_2를 지나며 직선 l에 접하는 원을 C_3이라 하고 이 원과 직선 l의 접점을 P_3이라 하자. 중심이 직선 l 위에 있고 점 P_3을 지나며 x축에 접하는 원을 C_4라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_4라 하자. 이와 같은 과정을 계속할 때, 원 C_n의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, 원 C_{n+1}의 반지름의 길이는 원 C_n의 반지름의 길이보다 작다.) [4점]



① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$
④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

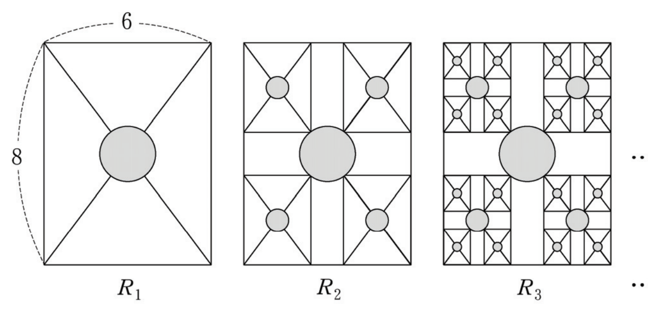
G. 등비급수(기하): 원의 정의(중심/반지름)

▶ 실전 이론 p.237

G140

○○○ (2008-가형17/나형17)

아래와 같이 가로의 길이가 6이고 세로의 길이가 8인 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 직사각형의 각 꼭짓점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 있는 합동인 4개의 직사각형 각각에서 각 꼭짓점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? (단, 모든 직사각형의 가로와 세로는 각각 서로 평행하다.) [4점]



① $\frac{37}{9}\pi$ ② $\frac{34}{9}\pi$ ③ $\frac{31}{9}\pi$
④ $\frac{28}{9}\pi$ ⑤ $\frac{25}{9}\pi$

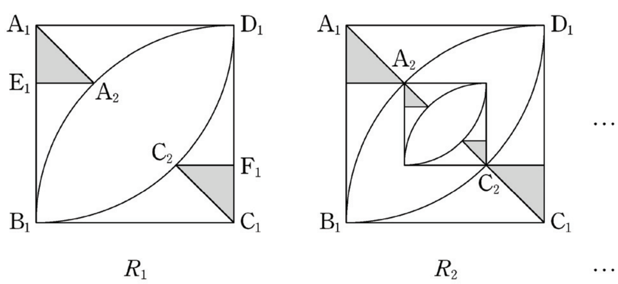
G141

○○
(2017(9)−나형16)

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 안에 꼭짓점 A_1, C_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1, C_1D_1을 반지름으로 하는 사분원을 각각 그린다. 선분 A_1C_1이 두 사분원과 만나는 점 중 점 A_1과 가까운 점을 A_2, 점 C_1과 가까운 점을 C_2라 하자. 선분 A_1D_1에 평행하고 점 A_2를 지나는 직선이 선분 A_1B_1과 만나는 점을 E_1, 선분 B_1C_1에 평행하고 점 C_2를 지나는 직선이 선분 C_1D_1과 만나는 점을 F_1이라 하자. 삼각형 $A_1E_1A_2$와 삼각형 $C_1F_1C_2$를 그린 후 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 A_2C_2를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 정사각형 안에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 개의 사분원과 두 개의 삼각형을 그리고 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



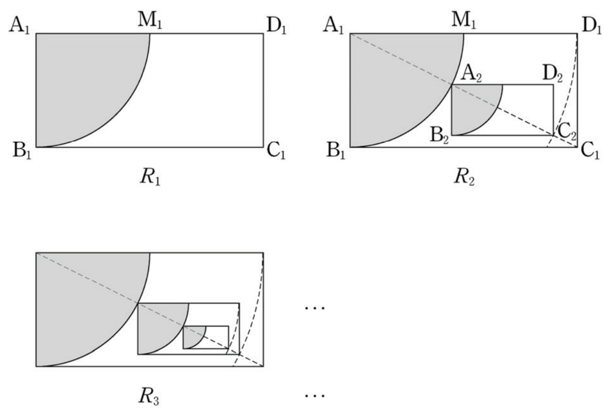
① $\frac{1}{12}(\sqrt{2}-1)$ ② $\frac{1}{6}(\sqrt{2}-1)$ ③ $\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$
④ $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$ ⑤ $\frac{5}{12}(\sqrt{2}-1)$

G142

○○○
(2015(6)−A형18/B형15)

그림과 같이 $\overline{A_1D_1}=2$, $\overline{A_1B_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1D_1의 중점을 M_1이라 하자. 중심이 A_1, 반지름의 길이가 $\overline{A_1B_1}$이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $A_1B_1M_1$을 그리고, 부채꼴 $A_1B_1M_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 부채꼴 $A_1B_1M_1$의 호 B_1M_1이 선분 A_1C_1과 만나는 점을 A_2라 하고, 중심이 A_1, 반지름의 길이가 $\overline{A_1D_1}$인 원이 선분 A_1C_1과 만나는 점을 C_2라 하자. 가로와 세로의 길이의 비가 2 : 1이고 가로가 선분 A_1D_1과 평행한 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 그림 R_1에서 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 부채꼴에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



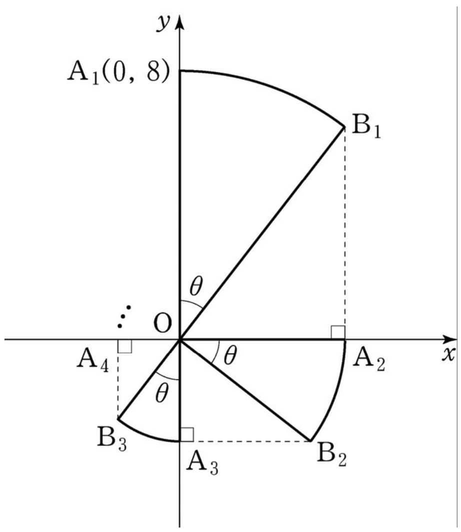
① $\frac{5}{16}\pi$ ② $\frac{11}{32}\pi$ ③ $\frac{3}{8}\pi$
④ $\frac{13}{32}\pi$ ⑤ $\frac{7}{16}\pi$

G143

○○ (2006-가형15/나형15)

그림과 같이 원점 O와 점 $A_1(0,\ 8)$을 이은 선분 OA_1을 반지름으로 하고, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_1B_1을 그린다. 점 B_1에서 x축에 내린 수선의 발을 A_2라 하고, 반지름이 선분 OA_2이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 점 B_2에서 y축에 내린 수선의 발을 A_3이라 하고, 반지름이 선분 OA_3이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_3B_3을 그린다. 이와 같이 시계 방향으로 x축과 y축에 번갈아 수선의 발을 내리는 과정을 계속하여 얻은 부채꼴 OA_nB_n의 호 A_nB_n의 길이를 l_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = 12\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다.) [4점]



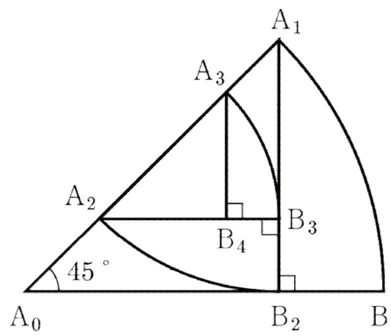
① $\frac{1}{7}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{5}$

④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{3}$

G144

○○ (2011(9)-가형12/나형12)

그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 45°인 부채꼴 $A_0A_1B_1$이 있다. 점 A_1에서 선분 A_0B_1에 내린 수선의 발을 B_2라 하고, 선분 A_0A_1위의 $\overline{A_1B_2}=\overline{A_1A_2}$인 점 A_2에 대하여 중심각의 크기가 45°인 부채꼴 $A_1A_2B_2$를 그린다. 점 A_2에서 선분 A_1B_2에 내린 수선의 발을 B_3이라 하고, 선분 A_1A_2위의 $\overline{A_2B_3}=\overline{A_2A_3}$인 점 A_3에 대하여 중심각의 크기가 45°인 부채꼴 $A_2A_3B_3$을 그린다.
이와 같은 과정을 계속하여 점 A_n에서 선분 $A_{n-1}B_n$에 내린 수선의 발을 B_{n+1}이라 하고, 선분 $A_{n-1}A_n$위의 $\overline{A_nB_{n+1}}=\overline{A_nA_{n+1}}$인 점 A_{n+1}에 대하여 중심각의 크기가 45°인 부채꼴 $A_nA_{n+1}B_{n+1}$을 그린다.
부채꼴 $A_{n-1}A_nB_n$의 호 A_nB_n의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [3점]



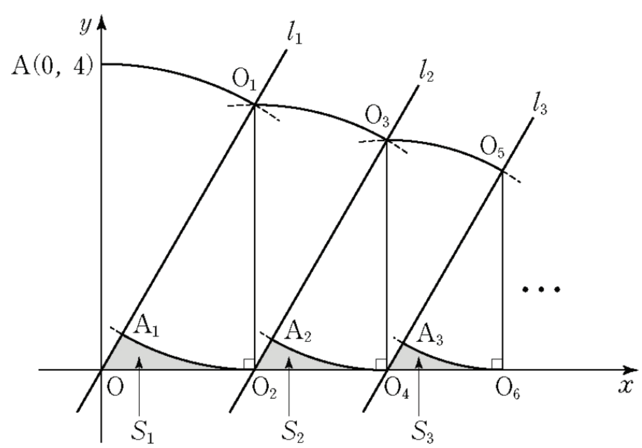
① $(4-\sqrt{2})\pi$　② $(2+\sqrt{2})\pi$　③ $(2+2\sqrt{2})\pi$

④ $(4+\sqrt{2})\pi$　⑤ $(4+2\sqrt{2})\pi$

G145

○○ (2010(9)−가형9/나형9)

그림과 같이 원점 O를 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선 l_1과 점 $\mathrm{A}(0,\ 4)$가 있다.
점 O를 중심으로 하고 선분 OA를 반지름으로 하는 원이 직선 l_1과 제1사분면에서 만나는 점을 O_1이라 하자. 점 O_1에서 x축에 내린 수선의 발을 O_2라 하자. 점 O_1을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$를 반지름으로 하는 원이 선분 OO_1과 만나는 점을 A_1이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{O}$, 선분 OO_2, 호 $\mathrm{O}_2\mathrm{A}_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자.
점 O_2를 중심으로 하고 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$를 반지름으로 하는 원이 점 O_2를 지나고 직선 l_1에 평행한 직선 l_2와 제1사분면에서 만나는 점을 O_3이라 하자. 점 O_3에서 x축에 내린 수선의 발을 O_4라 하자. 점 O_3을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{O}_3\mathrm{O}_4$를 반지름으로 하는 원이 선분 $\mathrm{O}_2\mathrm{O}_3$과 만나는 점을 A_2라 하자. 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{O}_2$, 선분 $\mathrm{O}_2\mathrm{O}_4$, 호 $\mathrm{O}_4\mathrm{A}_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [3점]

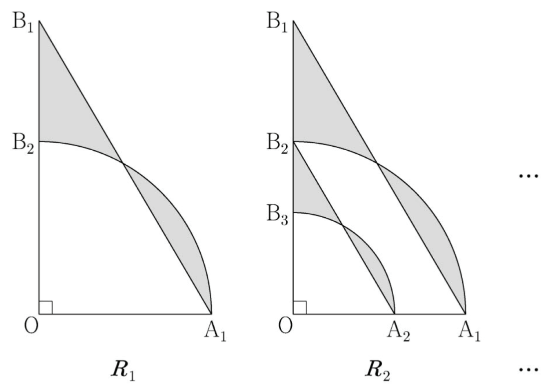


① $4\sqrt{3}-2\pi$　② $8\sqrt{3}-4\pi$　③ $4\sqrt{3}-\pi$
④ $8\sqrt{3}-2\pi$　⑤ $16\sqrt{3}-4\pi$

G146

○○○ (2019−나형16)

그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA}_1}=4$, $\overline{\mathrm{OB}_1}=4\sqrt{3}$인 직각삼각형 $\mathrm{OA}_1\mathrm{B}_1$이 있다. 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OA}_1}$인 원이 선분 OB_1과 만나는 점을 B_2라 하자. 삼각형 $\mathrm{OA}_1\mathrm{B}_1$의 내부와 부채꼴 $\mathrm{OA}_1\mathrm{B}_2$의 내부에서 공통된 부분을 제외한  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$에 평행한 직선이 선분 OA_1과 만나는 점을 A_2, 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OA}_2}$인 원이 선분 OB_2와 만나는 점을 B_3이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OA}_2\mathrm{B}_2$의 내부와 부채꼴 $\mathrm{OA}_2\mathrm{B}_3$의 내부에서 공통된 부분을 제외한  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

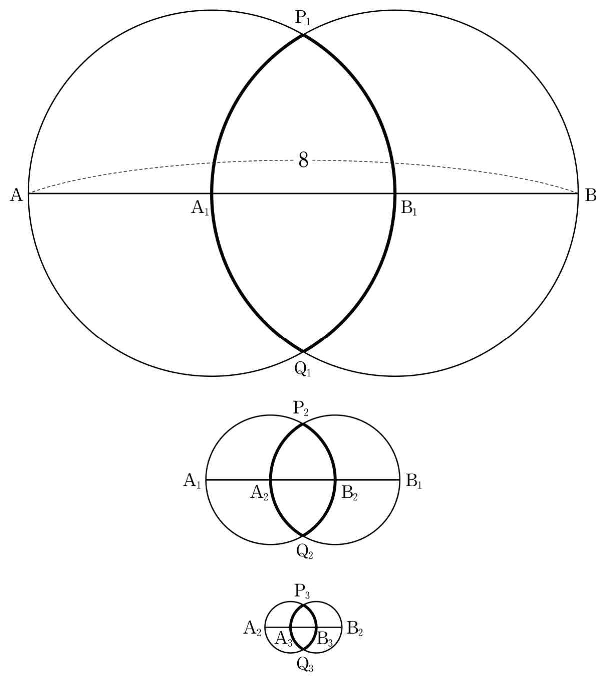


① $\dfrac{3}{2}\pi$　② $\dfrac{5}{3}\pi$　③ $\dfrac{11}{6}\pi$
④ 2π　⑤ $\dfrac{13}{6}\pi$

G147

○○ (2009(6)-가형14/나형14)

그림과 같이 길이가 8인 선분 AB가 있다. 선분 AB의 삼등분점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{A_1B_1}$을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$이라고 하자. 선분 $\mathrm{A_1B_1}$의 삼등분점 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$를 중심으로 하고 선분 $\mathrm{A_2B_2}$를 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$라고 하자. 선분 $\mathrm{A_2B_2}$의 삼등분점 $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{B_3}$을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{A_3B_3}$을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 $\mathrm{P_3}$, $\mathrm{Q_3}$이라고 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 호 $\mathrm{P}_n\mathrm{A}_n\mathrm{Q}_n$, $\mathrm{P}_n\mathrm{B}_n\mathrm{Q}_n$의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [3점]



① $\dfrac{10}{3}\pi$ ② 4π ③ $\dfrac{14}{3}\pi$

④ $\dfrac{16}{3}\pi$ ⑤ 6π

G148

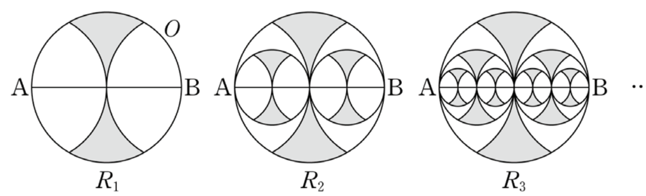
○○○ (2013(9)-가형9/나형9)

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. A, B를 각각 중심으로 하고 원 O와 반지름의 길이가 같은 두 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 ⧖ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 AB를 2등분한 선분을 각각 지름으로 하는 두 원을 그리고, 이 두 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ⧖ 모양의 두 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에 선분 AB를 4등분한 선분을 각각 지름으로 하는 네 원을 그리고, 이 네 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ⧖ 모양의 네 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 ⧖ 모양의 모든 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

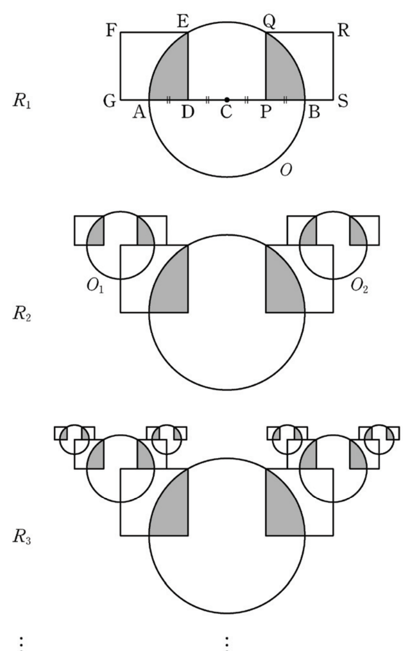


① $3\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\pi$ ② $2\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\pi$ ③ $2\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2}$

④ $3\sqrt{3}-\pi$ ⑤ $3\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\pi$

G149
○○○
(2017-나형17)

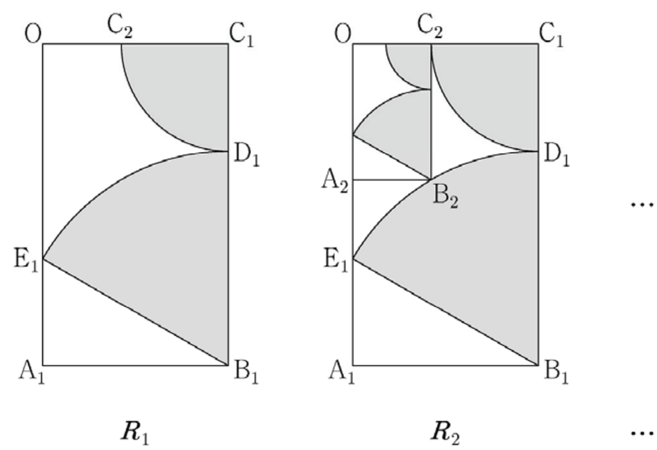
그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원의 중심을 C라 하고, 선분 AC의 중점과 선분 BC의 중점을 각각 D, P라 하자. 선분 AC의 수직이등분선과 선분 BC의 수직이등분선이 원 O의 위쪽 반원과 만나는 점을 각각 E, Q라 하자. 선분 DE를 한 변으로 하고 원 O와 점 A에서 만나며 선분 DF가 대각선인 정사각형 DEFG를 그리고, 선분 PQ를 한 변으로 하고 원 O와 점 B에서 만나며 선분 PR가 대각선인 정사각형 PQRS를 그린다. 원 O의 내부와 정사각형 DEFG의 내부의 공통부분인 모양의 도형과 원 O의 내부와 정사각형 PQRS의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}}$인 원 O_1, 점 R를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}$인 원 O_2를 그린다. 두 원 O_1, O_2에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 2개의 도형과 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{12\pi-9\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{8\pi-6\sqrt{3}}{5}$ ③ $\frac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$
④ $\frac{28\pi-21\sqrt{3}}{10}$ ⑤ $\frac{16\pi-12\sqrt{3}}{5}$

G150
○○
(2022(예시문항)-미적분26)

그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA_1}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{OC_1}}=1$인 직사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$이 있다. 선분 $\mathrm{B_1C_1}$ 위의 $\overline{\mathrm{B_1D_1}}=2\overline{\mathrm{C_1D_1}}$인 점 $\mathrm{D_1}$에 대하여 중심이 $\mathrm{B_1}$이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{B_1D_1}}$인 원과 선분 $\mathrm{OA_1}$의 교점을 $\mathrm{E_1}$, 중심이 $\mathrm{C_1}$이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{C_1D_1}}$인 원과 선분 $\mathrm{OC_1}$의 교점을 $\mathrm{C_2}$라 하자. 부채꼴 $\mathrm{B_1D_1E_1}$의 내부와 부채꼴 $\mathrm{C_1C_2D_1}$의 내부로 이루어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{OA_1}$ 위의 점 $\mathrm{A_2}$, 호 $\mathrm{D_1E_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$와 점 $\mathrm{C_2}$, 점 O를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $\mathrm{OA_2B_2C_2}$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $\mathrm{OA_2B_2C_2}$에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

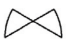


① $\frac{5+2\sqrt{3}}{12}\pi$ ② $\frac{2+\sqrt{3}}{6}\pi$ ③ $\frac{3+2\sqrt{3}}{12}\pi$
④ $\frac{1+\sqrt{3}}{6}\pi$ ⑤ $\frac{1+2\sqrt{3}}{12}\pi$

G151

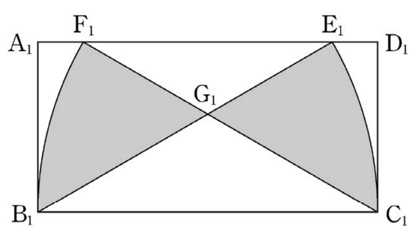
○○ (2019(6)-나형18)

그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1 위의 $\overline{B_1C_1}=\overline{B_1E_1}$, $\overline{C_1B_1}=\overline{C_1F_1}$인 두 점 E_1, F_1에 대하여 중심이 B_1인 부채꼴 $B_1E_1C_1$과 중심이 C_1인 부채꼴 $C_1F_1B_1$을 각각 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 내부에 그리고, 선분 B_1E_1과 선분 C_1F_1의 교점을 G_1이라 하자. 두 선분 G_1F_1, G_1B_1과 호 F_1B_1로 둘러싸인 부분과 두 선분 G_1E_1, G_1C_1과 호 E_1C_1로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

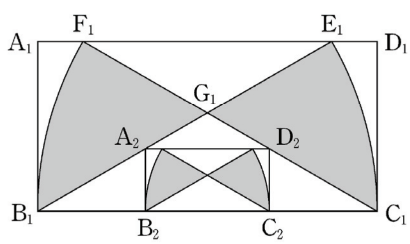
그림 R_1에서 선분 B_1G_1 위의 점 A_2, 선분 C_1G_1 위의 점 D_2와 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 내부에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\dfrac{3\sqrt{3}\pi-7}{9}$ ② $\dfrac{4\sqrt{3}\pi-12}{9}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{3}\pi-5}{9}$

④ $\dfrac{4\sqrt{3}\pi-10}{9}$ ⑤ $\dfrac{4\sqrt{3}\pi-8}{9}$

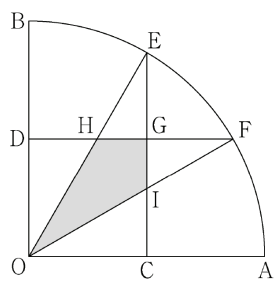
G152

○○○ (2020(9)-나형18)

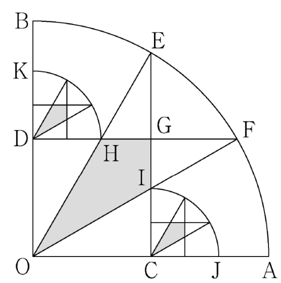
그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OA의 중점을 C, 선분 OB의 중점을 D라 하자. 점 C를 지나고 선분 OB와 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점을 E, 점 D를 지나고 선분 OA와 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점을 F라 하자. 선분 CE와 선분 DF가 만나는 점을 G, 선분 OE와 선분 DG가 만나는 점을 H, 선분 OF와 선분 CG가 만나는 점을 I라 하자. 사각형 OIGH를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 중심이 C, 반지름의 길이가 $\overline{CI}$, 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 CJI와 중심이 D, 반지름의 길이가 $\overline{DH}$, 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 DHK를 그린다. 두 부채꼴 CJI, DHK에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 개의 사각형의 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

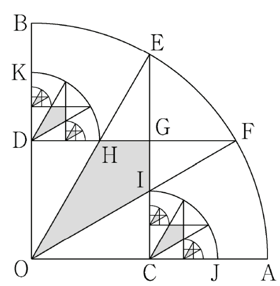
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2



R_3

⋯

⋯

① $\dfrac{2(3-\sqrt{3})}{5}$ ② $\dfrac{7(3-\sqrt{3})}{15}$ ③ $\dfrac{8(3-\sqrt{3})}{15}$

④ $\dfrac{3(3-\sqrt{3})}{5}$ ⑤ $\dfrac{2(3-\sqrt{3})}{3}$

G153

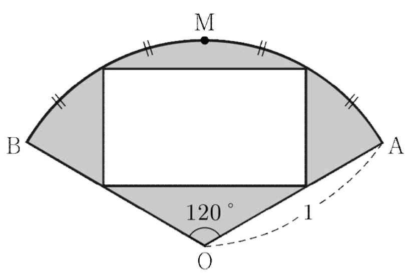
○○○
(2015(9)–A형18/B형16)

중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 120°인 부채꼴 OAB가 있다. 그림과 같이 호 AB를 이등분하는 점을 M이라 하고 호 AM과 호 MB를 각각 이등분하는 점을 두 꼭짓점으로 하는 직사각형을 부채꼴 OAB에 내접하도록 그리고, 부채꼴의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

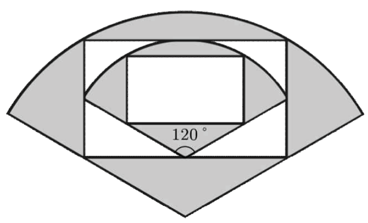
그림 R_1에 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 120°인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에 새로 그려진 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 120°인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2

⋮

① $\dfrac{2\pi-3\sqrt{3}}{2}$ ② $\dfrac{\pi-\sqrt{2}}{3}$ ③ $\dfrac{2\pi-3\sqrt{2}}{3}$

④ $\dfrac{\pi-\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\dfrac{2\pi-2\sqrt{3}}{3}$

G. 등비급수(기하): 원(직각)

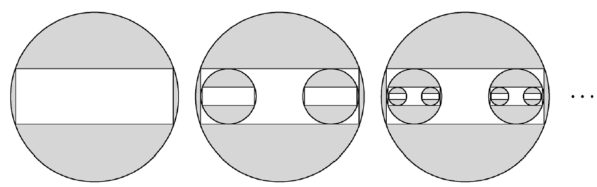
G154

○○○
(2012–가형14/나형14)

반지름의 길이가 1인 원이 있다. 그림과 같이 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 3 : 1인 직사각형을 이 원에 내접하도록 그리고, 원의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 직사각형의 세 변에 접하도록 원 2개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에서 새로 그려진 직사각형의 세 변에 접하도록 원 4개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2 R_3 ⋯

① $\dfrac{5}{4}\pi-\dfrac{5}{3}$ ② $\dfrac{5}{4}\pi-\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{4}{3}\pi-\dfrac{8}{5}$

④ $\dfrac{5}{4}\pi-1$ ⑤ $\dfrac{4}{3}\pi-\dfrac{16}{15}$

H. 그래프 개형: 수평화

▶ 실전 이론 p.347

H198

●●● (2007-가형29)

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$를 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식을
$y=g(x)$라 하자.
직선 $y=g(x)$가 함수 $f(x)$의 그래프와 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 접할 때, 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $a\neq b$이다.) [4점]

ㄱ. $h'(b)=0$
ㄴ. 방정식 $h'(x)=0$은 3개 이상의 실근을 갖는다.
ㄷ. 점 $(a,\ h(a))$는 곡선 $y=h(x)$의 변곡점이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H. 그래프 개형: $y=x^n e^x$

▶ 실전 이론 p.369

H199

○○ (2003(9)-자연6)

함수 $f(x)=x^n e^{-x}$에 대한 〈보기〉의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, n은 자연수) [3점]

ㄱ. n이 짝수일 때, $f(x)$의 최솟값은 0이다.
ㄴ. n이 짝수일 때, $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖고 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. n이 홀수일 때, $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고 $x=n$에서 극솟값을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H200

○○○ (2015(9)-B형20)

3 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=x^n e^{-x}$$

일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f\left(\frac{n}{2}\right)=f'\left(\frac{n}{2}\right)$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 점 $(0,\ 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H201
(2016(6)−B형21)

2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $1\le g(n)\le 8$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 43 ② 46 ③ 49
④ 52 ⑤ 55

H202
(2016(9)−B형30)

양수 a와 두 실수 b, c에 대하여 함수

$$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 갖는다.
(나) $0\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1\ge 0$이다.

세 수 a, b, c의 곱 abc의 최댓값을 $\frac{k}{e^3}$라 할 때, $60k$의 값을 구하시오. [4점]

H203
(2022(9)−미적분29)

이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.
(나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라고 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.) [4점]

H. 그래프 개형: $y=\dfrac{f(x)}{x}$

▶ 실전 이론 p.374

H204

○
(1998−자연4)

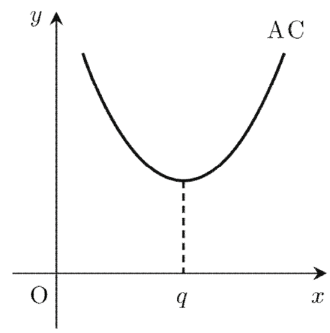
함수 $y=\dfrac{\ln x}{x}$가 최댓값을 가질 때의 x의 값은? [3점]

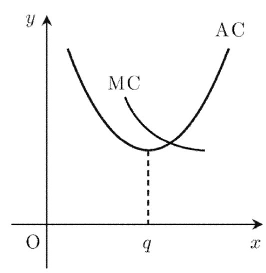
① 1　② e　③ $\dfrac{1}{e}$　④ $2e$　⑤ e^2

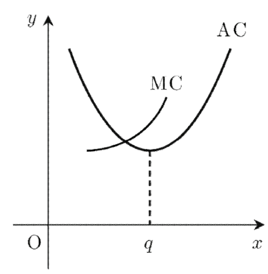
H205

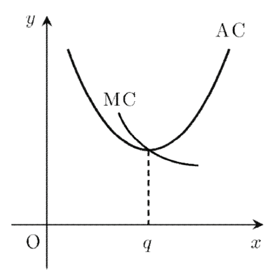
○○○
(2003−자연24)

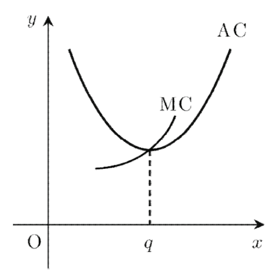
어떤 제품의 생산량이 x일 때 생산비를 $f(x)$라고 하자. 이때, $\dfrac{f(x)}{x}$를 평균생산비라 하고, AC로 나타낸다. 또, $f(x)$가 미분가능하면 $f'(x)$를 생산량이 x일 때의 한계생산비라 하고 MC로 나타낸다. 평균생산비 $\mathrm{AC}=\dfrac{f(x)}{x}$의 그래프가 그림과 같고 $x=q$에서 극솟값을 가질 때, $x=q$ 근방에서 한계생산비 $\mathrm{MC}=f'(x)$의 그래프의 개형은? [3점]

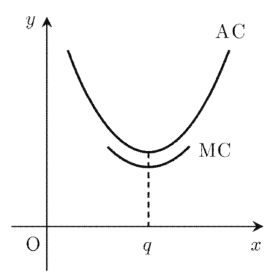


①


②


③


④


⑤


H206

★★★ (2017-가형30)

$x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

(가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여
$(x-a)f(x)=g(x)$이다.
(나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여
함수 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$)
(다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

H. 그래프 개형: $y=x\sin x$

▶ 실전 이론 p.376

H207

●●● (2012-가형18)

정의역이 $\{x\,|\,0\le x\le \pi\}$인 함수 $f(x)=2x\cos x$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f'(a)=0$이면 $\tan a=\dfrac{1}{a}$이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지는 a가 구간 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3}\right)$에 있다.
ㄷ. 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H. 그래프 개형: 그 외

▶ 실전 이론 p.377

H208

○○○
(2006-가형30)

양수 a에 대하여 닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 함수

$f(x)=\dfrac{x-5}{(x-5)^2+36}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m=0$이 되도록 하는 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

H209

○○○
(2009-가형28)

함수 $f(x)=4\ln x+\ln(10-x)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 $13\ln 2$이다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 함수 $y=e^{f(x)}$의 그래프는 구간 $(4,\ 8)$에서 위로 볼록하다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H210

●●●
(2018(6)-가형20)

양수 a와 실수 b에 대하여 함수 $f(x)=ae^{3x}+be^{x}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [4점]

(가) $x_1<\ln\dfrac{2}{3}<x_2$를 만족시키는 모든 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2)<0$이다.
(나) 구간 $[k,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값을 m이라 할 때, $f(2m)=-\dfrac{80}{9}$이다.

① -15 ② -12 ③ -9
④ -6 ⑤ -3

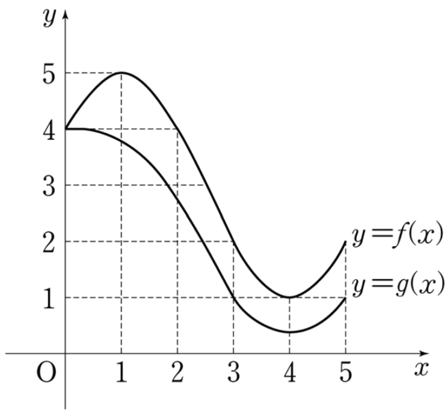
H. 그래프 개형: 합성함수(1)

▶ 실전 이론 p.381

H211

○○○
(2014(예비)−B형20)

열린구간 $(0,\ 5)$에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 그림과 같다. 합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. $h(3)=4$
ㄴ. $h'(2)\geq 0$
ㄷ. 함수 $h(x)$는 구간 $(3,\ 4)$에서 감소한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

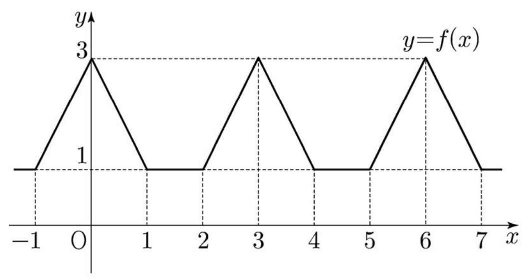
H212

★★★
(2021(6)−가형30)

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $0\leq x<3$일 때 $f(x)=|x-1|+|x-2|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{h}\right|$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속인 a의 값 중에서 열린구간 $(-5,\ 5)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 a_1, a_2, $\cdots$, a_n(n은 자연수)라 할 때, $n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}$의 값을 구하시오. [4점]



H. 그래프 개형: 합성함수(2)

▶ 실전 이론 p.282

H213

(2008-가형27)

함수 $f(x)=x+\sin x$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=(f\circ f)(x)$로 정의할 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 열린구간 $(0,\ \pi)$에서 위로 볼록하다.
ㄴ. 함수 $g(x)$는 열린구간 $(0,\ \pi)$에서 증가한다.
ㄷ. $g'(x)=1$인 실수 x가 열린구간 $(0,\ \pi)$에 존재한다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H214

(2011(9)-가형29)

다항함수 $f(x)$에 대하여 다음 표는 x의 값에 따른 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$의 변화 중 일부를 나타낸 것이다.

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$		0		1
$f''(x)$	$+$		$+$	0
$f(x)$		$\frac{\pi}{2}$		π

함수 $g(x)=\sin(f(x))$에 대하여 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $g'(3)=-1$
ㄴ. $1<a<b<3$이면 $-1<\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$이다.
ㄷ. 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H215

(2021-가형30)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f(\sin^2 \pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.
(나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2)=a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

H216

★★★
(2019(9)−가형30)

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f \circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
> (나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다.
> (다) 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

$f'(5)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$) [4점]

H217

●●●
(2023(6)−미적분28)

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq 0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은? [4점]

> (가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고,
> 함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이다.
> (다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$
④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

H218

★★★
(2023-미적분30)

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=e^{\sin\pi x}-1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)=g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
> (나) 열린구간 $(0,\ 3)$에서 방정식 $h(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

$f(3)=\frac{1}{2}$, $f'(3)=0$일 때, $f(2)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

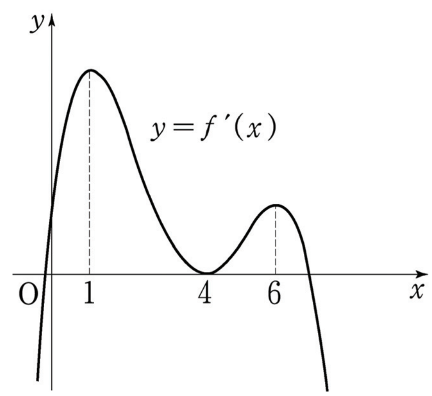
H. 그래프 개형: 볼록성

▶ 실전 이론 p.385

H219

○○○
(2006(9)-가형29)

오른쪽 그림은 5차 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프이다. 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $f'(4)=0$이고 $f''(1)=f''(4)=f''(6)=0$ 이다.)
[4점]



> ㄱ. $f(x)$는 서로 다른 세 점에서 극값을 갖는다.
> ㄴ. $4<x_1<x_2<6$인 x_1, x_2에 대하여
> $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$이다.
> ㄷ. $f(0)=0$일 때, 양의 실수 a에 대하여 $y=f(x)$의 그래프와 $y=a$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나면 $f(x)$의 극댓값은 a이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

I. 정적분: 선대칭

▶ 실전 이론 p.441

I037

(2021-가형20)

함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0, 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
> $$\int_{-1}^{1}h(x)dx=2,\ \int_{-1}^{1}xh(x)dx=-\frac{1}{32}$$
> 이다.

① 8　② 10　③ 12
④ 14　⑤ 16

I038

(2024-미적분28)

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이고, $x<0$일 때 $f(x)=-4xe^{4x^2}$이다. 모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자.
두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여

$$2g(t)+h(t)=k\ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. $\int_{0}^{7}f(x)dx=e^4-1$일 때, $\dfrac{f(9)}{f(8)}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{2}e^5$　② $\dfrac{4}{3}e^7$　③ $\dfrac{5}{4}e^9$
④ $\dfrac{6}{5}e^{11}$　⑤ $\dfrac{7}{6}e^{13}$

I. 정적분: 점대칭

▶ 실전 이론 p.449

I039

○○○
(1997-자연11)

모든 실수 x에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

$$f(1-x)=1-f(x)$$

다음 중 항상 성립한다고 할 수 없는 것은? [3점]

① $f(0)+f(1)=1$　② $f'(0)=f'(1)$

③ $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$　④ $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

⑤ $f(0)=0$

I040

★★★
(2018(6)-가형30)

실수 a와 함수 $f(x)=\ln(x^4+1)-c(c>0$인 상수$)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 α_1, α_2, $\cdots$, α_m(m은 자연수)이다.

$a=\alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

(나) $\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx=k\alpha_m\int_0^1 |f(x)|dx$

$mk\times e^c$의 값을 구하시오. [4점]

I. 정적분: 주기성

▶ 실전 이론 p.450

I041

★★★
(2022(9)−미적분30)

최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\times f(x))}{x}=0$

(나) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

함수 $g(x)$는 $0\le x<1$일 때 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1)=g(x)$이다.
$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때,
$\int_0^5 xg(x)dx=\frac{p}{q}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

I. 정적분: 역함수

▶ 실전 이론 p.452

I042

●●●
(2022(예시문항)−미적분29)

함수 $f(x)=e^x+x-1$과 양수 t에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x\{t-f(s)\}ds$$

가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가질 때, 실수 α의 값을 $g(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $\int_{f(1)}^{f(5)}\frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt$의 값을 구하시오. [4점]

I043

●●●
(2014(예비)−B형21)

함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1\le x<1$일 때 $f(x)=\frac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$이다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\int_{-2}^{2}f(x)dx=4\int_0^1 f(x)dx$

ㄴ. $1<x<2$일 때 $f'(x)>0$이다.

ㄷ. $\int_1^3 x|f'(x)|dx=4$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

I044

★★★
(2020(6)-가형30)

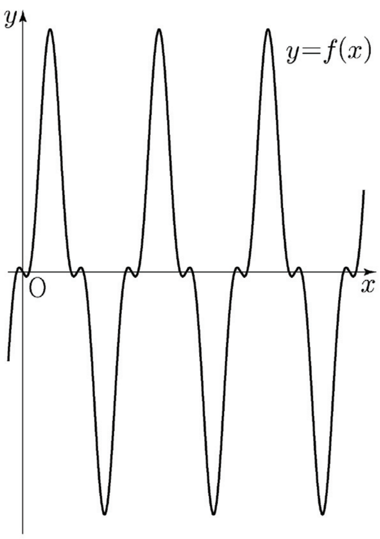
상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin^3 x+b\sin x$가

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2},\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=5\sqrt{3}$$

을 만족시킨다. 실수 $t(1<t<14)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 x_n이라 하고

$$c_n=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_n)}dt$$

라 하자. $\sum_{n=1}^{101}c_n=p+q\sqrt{2}$일 때, $q-p$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]



I. 정적분으로 주어진 함수

I045

○○○
(2019(6)-가형15)

함수 $f(x)=a\cos(\pi x^2)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2+1}{x}\int_1^{x+1}f(t)dt\right\}=3$$

일 때, $f(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

I046

●●●
(2017-가형21)

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f(x)dx=2,\ \int_0^1|f(x)|dx=2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 함수 $F(x)$가

$$F(x)=\int_0^x|f(t)|dt\ (0\le x\le 1)$$

일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)dx$의 값은? [4점]

① $4-\sqrt{2}$　② $2+\sqrt{2}$　③ $5-\sqrt{2}$　④ $1+2\sqrt{2}$　⑤ $2+2\sqrt{2}$

예제 3

수열 $\left\{\sqrt{9^n+a^n}-3^n\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오.

풀이

$$\sqrt{9^n+a^n}-3^n=\frac{a^n}{\sqrt{9^n+a^n}+3^n} \qquad \cdots(*)$$

$n\to\infty$일 때,

$$a=1:\ (*)=\frac{1}{\sqrt{9^n+1}+3^n}\to 0$$

$$a=2:\ (*)=\frac{2^n}{\sqrt{9^n+2^n}+3^n}\approx\frac{2^n}{2\times 3^n}\to 0$$

$$a=3:\ (*)=\frac{3^n}{\sqrt{9^n+3^n}+3^n}\approx\frac{3^n}{2\times 3^n}\to\frac{1}{2}$$

$$a\ge 4:\ (*)=\frac{a^n}{\sqrt{9^n+a^n}+3^n}\approx\frac{a^n}{a^{\frac{n}{2}}}=(\sqrt{a})^n\to\infty$$

$\therefore\ a=1,\ 2,\ 3$

따라서 구하는 값은 6이다.

답 6

G. 수열의 극한: 함수의 방정식

▶ 기출 문제 p.12

• 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산 (공비의 범위)

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산을 판단할 때, 공비 r의 범위를 다음과 같이 다섯 가지의 경우로 구분할 수 있다.

$r<-1,\ r=-1,\ -1<r<1,\ r=1,\ r>1$ …㉠

이때,

$r<-1$ 또는 $r>1$인 경우 → $|r|>1$

$-1<r<1$인 경우 → $|r|<1$

으로 두면 공비 r의 범위를 다음과 같이 네 가지의 경우로 구분할 수 있다.

$|r|>1,\ |r|<1,\ r=1,\ r=-1$ …㉡

공비 r의 범위를 구분할 때, ㉠, ㉡ 중에서 편한 쪽을 택하면 되지만, 아래의 문제들은 ㉡을 따르는 것이 좋다. 그래야 풀이가 좀 더 깔끔해진다.

$|r|>1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=0$,

$\left(\because -1<\dfrac{1}{r}<0 \text{ 또는 } 0<\dfrac{1}{r}<1\right)$

$|r|<1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$,

$r=1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=1$,

$r=-1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}r^n$는 진동($\pm1$)하므로 발산한다.

참고로 $r=1,\ r=-1$일 때에는 문제에서 주어진 식에 각각 $r=1,\ r=-1$을 대입하고, 문제에서 주어진 식이 성립하는지(예를 들어 분모가 0이 되지는 않는지), 성립한다면 일정한 수에 수렴하는지 또는 발산하는지를 판단해야 한다.

예제 1

$r>0$일 때, 수열 $\left\{\dfrac{r^n}{1+r^n}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하여라.

풀이

(i) $0<r<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\frac{0}{1+0}=0$$

(ii) $r=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(iii) $r>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\infty$에서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{r^n}+1}=\frac{1}{0+1}=1$$

답 풀이 참조

예제 2

수열 $\left\{\dfrac{r^n-3^n}{r^n+3^n}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하여라. (단, $r\neq -3$)

접근법

두 실수 a, b가 주어지면

$a<b$, $a=b$, $a>b$의 세 경우로 나누어 생각한다.

풀이

$$\frac{r^n-3^n}{r^n+3^n}=\frac{\left(\dfrac{r}{3}\right)^n-1}{\left(\dfrac{r}{3}\right)^n+1}$$

에서 $\dfrac{r}{3}$의 범위를 다음과 같이 나누자.

$$\left|\frac{r}{3}\right|>1,\ \frac{r}{3}=1,\ \left|\frac{r}{3}\right|<1$$

(i) $\left|\dfrac{r}{3}\right|>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{r}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-3^n}{r^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\dfrac{3}{r}\right)^n}{1+\left(\dfrac{3}{r}\right)^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

(ii) $\dfrac{r}{3}=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{r}{3}\right)^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-3^n}{r^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{r}{3}\right)^n-1}{\left(\dfrac{r}{3}\right)^n+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $\left|\dfrac{r}{3}\right|<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{r}{3}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-3^n}{r^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{r}{3}\right)^n-1}{\left(\dfrac{r}{3}\right)^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

답 풀이참조

✪ 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산 (두 개의 공비의 대소 관계)

분모에서 주어진 두 등비수열 $\{r^n\}$, $\{3^n\}$의 공비는 각각 r, 3이다. 교과서의 전형적인 풀이를 적용하기 위하여 이 두 수의 대소 관계를 따지면 다음과 같다.

$|r|>|3|$, $r=3$, $|r|<|3|$ (단, $r\neq -3$)

($\longleftarrow$공비의 절댓값의 대소 비교임을 상기하자!)

정리하면

$\left|\dfrac{r}{3}\right|>1$, $\dfrac{r}{3}=1$, $\left|\dfrac{r}{3}\right|<1$ (단, $\dfrac{r}{3}\neq -1$)

각 변을 $|3|$으로 나눈 이유는 $\dfrac{r}{3}=r'$로 치환할 수 있기 때문이다. 즉,

$|r'|>1$, $r'=1$, $|r'|<1$ (단, $r'\neq -1$)

예제 3

다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라. (단, a, b는 양수이다.)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$$

접근법

두 실수 a, b가 주어지면

$a>b$, $a=b$, $a<b$

의 세 경우로 나눠야 한다.

풀이

(ⅰ) $a>b(>0)$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+b\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

$$=\frac{a+0}{1+0}=a$$

(ⅱ) $a=b(>0)$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a^{n+1}}{2a^n}=\lim_{n\to\infty}a=a$$

(ⅲ) $(0<)a<b$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\frac{a}{b}\right)^n+b}{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}$$

$$=\frac{0+b}{0+1}=b$$

답 풀이참조

G. 수열의 극한: 치환

▶ 기출 문제 p.14

치환을 이용하여 수열의 극한값의 계산을 해보자.

2개 이상의 일반항의 사칙 연산으로 만든 일반항은 새로운 일반항으로 치환한다.

예를 들어 아래의 예제에서 a_n-b_n은 두 일반항 a_n, b_n의 차로 만들어진 일반항이고, 이를 새로운 일반항 c_n으로 치환한다. 즉, $a_n-b_n=c_n$으로 둔다.

예제 1

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$의 값을 구하시오. (단, α, β는 상수이다.)

풀이

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\boxed{a_n-b_n})=\beta$에서 $\boxed{}$은 수열 $\{a_n-b_n\}$의 일반항이고,

이를 새로운 일반항 c_n으로 치환하자.

$a_n-b_n=c_n$으로 두면

$b_n=a_n-c_n$이고, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=\beta$이므로

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-c_n)=\alpha-\beta$$

답 $\alpha-\beta$

[풀이2]

$b_n=a_n-(a_n-b_n)=\alpha-\beta$

와 같이 식의 변형으로 문제를 해결해도 좋다. 즉,

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}=\alpha-\beta$$

답 $\alpha-\beta$

예제 2

다음 명제들의 참, 거짓을 판단하시오. (참이면 증명하고, 거짓이면 반례를 찾으시오.)

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \beta$일 때, $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\beta}{\alpha}$이다.
(단, $a_n \neq 0$이고, $\alpha(\neq 0)$, β는 상수이다.)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이다. (단, α는 상수이다.)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \beta$이면

$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\alpha-\beta}{2}$이다.

ㄹ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$이다.

풀이

ㄱ. (참)

$a_n b_n = c_n$으로 두면 $b_n = \frac{c_n}{a_n}$이고, $\lim_{n\to\infty} c_n = \beta$이므로

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = \frac{\beta}{\alpha}$$

ㄴ. (참)

$a_n - b_n = c_n$으로 두면 $b_n = a_n - c_n$이고,

$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = \infty$$

ㄷ. (참)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n + \beta_n + \alpha_n - \beta_n}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n + \beta_n - (\alpha_n - \beta_n)}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

ㄹ. (참)

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$이고,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n\left(1 - \frac{b_n}{a_n}\right) = \alpha$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{b_n}{a_n}\right) = 0$, 즉

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$$

답 ㄱ. 참 ㄴ. 참 ㄷ. 참 ㄹ. 참

예제 3

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} \frac{na_n + 7n^2}{2n^2+1} = 10$일 때,

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$의 값은? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

풀이1

$\frac{na_n + 7n^2}{2n^2+1} = b_n$으로 두면 $a_n = b_n\left(2n + \frac{1}{n}\right) - 7n$이고,

$\lim_{n\to\infty} b_n = 10$이다.

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left\{b_n\left(2 + \frac{1}{n^2}\right) - 7\right\} = 13$$

답 ④

풀이2

$n\to\infty$일 때, $a_n \approx 13n$이면

$$\frac{na_n + 7n^2}{2n^2+1} \approx \frac{13n^2 + 7n^2}{2n^2} \to \frac{13+7}{2} = 10$$

임을 알 수 있다.

$n\to\infty$일 때, $\frac{a_n}{n} \approx 13$

답 ④

예제 4

$\lim_{n\to\infty}\left(na_n - \frac{3n^2-2n}{n+1}\right)=5$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.

풀이1

$b_n = na_n - \frac{3n^2-2n}{n+1}$으로 두면 $\lim_{n\to\infty}b_n=5$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{n}+\frac{3n-2}{n+1}\right)=0+3=3$$

답 3

풀이2

$n\to\infty$일 때,

$$na_n-\frac{3n^2-2n}{n+1}=n\left(a_n-\frac{3n^2-2n}{n^2+n}\right)$$

$$\approx \underbrace{n}_{\infty}\times\underbrace{(a_n-3)}_{0}\to 5$$

이므로 $a_n\approx 3$이다.

답 3

풀이3

$$\lim_{n\to\infty}\left(na_n-\frac{3n^2-2n}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\underbrace{(a_n-3)}_{0}n^2+\underbrace{(a_n+2)}_{5}n}{n+1}\right)=5$$

이므로 $a_n\approx 3$일 수 밖에 없다.

답 3

G. 수열의 극한: 수렴하는 수열

▶ 기출 문제 p.15

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$($\alpha$는 상수) $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty}a_{n-1}=\alpha$이다

예를 들어 일반항이 $a_n=\frac{1}{n}$일 때,

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim_{n\to\infty}a_{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}=0$

이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n-1}=0$이다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$($\alpha$는 상수)이면 $\lim_{n\to\infty}a_{n-1}=\alpha$이다.

이 명제의 역도 성립한다.

다음의 세 명제를 생각해보자.

(1) $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$이다. (참)

(2) $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이다. (거짓)

(반례) 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$a_{2n-1}=1+\frac{1}{n}$, $a_{2n}=\frac{1}{n}$

이면 $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=1$, $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=0$이므로

수열 $\{a_n\}$은 진동하면서 발산한다.

(3) $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\alpha$이면

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이다. (참)

• 수렴하는 수열의 극한값의 계산

문제에서 '수렴하는 수열 $\{a_n\}$' 이라는 표현이 주어지면

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$($\alpha$는 상수)로 둔다.

예제 1

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3a_n - 1}{2a_n + 1} = 1$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1})$의 값을 구하여라.

풀이1

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$로 둘 수 있다. (단, α는 상수이다.)

수렴하는 수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3a_n - 1}{2a_n + 1} = \frac{3\alpha - 1}{2\alpha + 1} = 1 \text{ 풀면 } \alpha = 2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1}) = 4$$

답 4

풀이2

$\frac{3a_n - 1}{2a_n + 1} = b_n$으로 두면

$\lim_{n\to\infty} b_n = 1$이고 $a_n = \frac{b_n + 1}{3 - 2b_n}$이다.

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n + 1}{3 - 2b_n} = \frac{1+1}{3 - 2\cdot 1} = 2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1}) = 4$$

답 4

G. 수열의 극한: 샌드위치

▶ 기출 문제 p.15

수렴하는 수열의 극한의 대소 관계에 대하여 다음과 같은 성질이 성립하는 것이 알려져 있다.

〈수열의 극한의 대소 관계〉

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$($\alpha$, β는 실수)일 때

❶ 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$이다.

❷ 수열 $\{c_n\}$과 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\alpha = \beta$이면 수열 $\{c_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

참고

각 경우에 대한 예를 생각해보자.

(1) ❶에서 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2}{n}$일 때,

모든 자연수 n에 대하여 $a_n < b_n$이지만

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$인 경우도 있다.

(2) ❷에서

$a_n = 1 - \frac{1}{n}$, $b_n = 1 + \frac{3}{n}$, $c_n = 1 + \frac{1}{n}$일 때,

모든 자연수 n에 대하여 $a_n < c_n < b_n$이지만

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$인 경우도 있다.

식 변형을 한 후에 샌드위치 정리를 적용하는 문제들을 함께 풀어보자.

예제 1

다음의 두 명제의 참, 거짓을 판정하시오. 그리고 참이면 증명하고, 거짓이면 반례를 찾으시오.

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < c_n < b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$이면 $\lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$이다.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < c_n < b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$이다.

증명

(1) (참)

모든 자연수 n에 대하여 $0 < c_n - a_n < b_n - a_n$이고, $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$이므로 수렴하는 수열의 극한값의 대소 관계에 의하여

$\therefore \lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$

(2) (거짓)

(반례)

예를 들어 $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $b_n = 1 + \frac{3}{n}$, $c_n = 1 + \frac{2}{n}$이면

$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0$이지만 $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$이다.

(반례)

예를 들어

$a_n = \sqrt{n}$, $b_n = \sqrt{n+2}$, $c_n = \sqrt{n+1}$

이면

$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = 0$

이지만 $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$이다.

답 풀이 참조

예제 2

다음 명제의 참, 거짓을 말하고, 참이면 증명하고, 거짓이면 반례를 찾으시오.

(1) 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$0 < a_n < n$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} = 0$이다.

(2) 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$0 \le a_n \le n$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$은 수렴한다.

(3) 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대하여

$a_n < b_n < c_n$이고,

$\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty}(2n-1)c_n = 0$이면

$\lim_{n\to\infty} nb_n = 0$이다.

풀이

(1) (참)

주어진 부등식의 각 변을 n^2으로 나누면

$0 < \frac{a_n}{n^2} < \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} 0 = 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$이므로

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} = 0$

(2) (거짓)

$a_n = n|\sin\pi n|$이면 모든 자연수 n에 대하여

$0 \le n\left|\sin\frac{n}{2}\pi\right| \le n$이다.

수열 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ (즉, $\left|\sin\frac{n}{2}\pi\right|$)을 나열하면

1, 0, 1, 0, $\cdots$ (즉, 1, 0이 반복되어 나타난다.)

이때, 수열 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$은 진동하면서 발산한다.

(3) (참)

$(2n+1)a_n = p_n$, $(2n-1)c_n = q_n$으로 두면

$a_n = \frac{p_n}{2n+1}$, $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$이고,

$c_n = \frac{q_n}{2n-1}$, $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$이다.

문제에서 주어진 부등식을 정리하면

$\frac{np_n}{2n+1} < nb_n < \frac{nq_n}{2n-1}$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\frac{np_n}{2n+1}=\frac{1}{2}\cdot 0=0$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{nq_n}{2n-1}=\frac{1}{2}\cdot 0=0$

이므로

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}nb_n=0$

답 풀이 참조

예제 3

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_n>0,\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{2023}{2024}$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+n-2}{4a_n+3n+1}$의 값을 구하여라.

접근법

- 답을 먼저 구하고, 이를 나중에 증명한다. (문제해결전략)

이 문제를 풀 때에는 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2023}{2024}(<1)$으로 두어도 좋다. 즉, 문제에서 주어진 조건의 일부만을 사용하여 답을 구하는 것이다. 이처럼 복잡도가 높은 문제를 풀 때에는 일부의 조건만을 사용하여 빠르게 답을 구하고, 이 답이 참임을 나중에 증명하는 것이 보편적이다. (일반적이지는 않지만 부등호가 주어졌을 때, 보통 등호가 성립하는 경우가 답일 확률이 높다.)

풀이

2 이상의 자연수 n에 대하여

$\frac{a_2}{a_1}\le\frac{2023}{2024},\ \frac{a_3}{a_2}\le\frac{2023}{2024},\ \frac{a_4}{a_3}\le\frac{2023}{2024},$

$\cdots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\le\frac{2023}{2024}$

위의 부등식을 변변히 모두 곱하면

$\frac{a_2}{a_1}\,\frac{a_3}{a_2}\,\frac{a_4}{a_3}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}\le\left(\frac{2023}{2024}\right)^{n-1}$

정리하면

$\frac{a_n}{a_1}\le\left(\frac{2023}{2024}\right)^{n-1}$

즉, $0<a_n\le a_1\left(\frac{2023}{2024}\right)^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty}a_1\left(\frac{2023}{2024}\right)^{n-1}=0$

이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+n-2}{4a_n+3n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\frac{a_n}{n}+1-\frac{2}{n}}{4\frac{a_n}{n}+3+\frac{1}{n}}=\frac{0+1-0}{0+3+0}=\frac{1}{3}$

답 $\frac{1}{3}$

예제 4

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$2n-1<na_n<\sqrt{4n^2+n}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{n+3}$의 값을 구하여라.

풀이

문제에서 주어진 부등식을 변형하면

$\frac{2n-1}{n}<a_n<\frac{\sqrt{4n^2+n}}{n}$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+n}}{n}=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+3}\cdot a_n=2\cdot 2=4$

답 4

예제 5

다음 극한의 수렴과 발산을 판단하시오. 만약 수렴한다면 극한값을 구하시오.

(1) 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = \sin\frac{n}{2}\pi$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

(2) 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = (-1)^n n$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

풀이

(1)

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \cdots$

(즉, $1,\ 0,\ -1,\ 0$이 반복된다.)

수열 $\{S_n\}$을 나열하면

$1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ \cdots$

(즉, $1,\ 1,\ 0,\ 0$이 반복된다.)

$\frac{S_{4n-3}}{4n-3}=\frac{1}{4n-3},\ \frac{S_{4n-2}}{4n-2}=\frac{1}{4n-2},$

$\frac{S_{4n-1}}{4n-1}=0,\ \frac{S_{4n}}{4n}=0$이고,

$n\to\infty$일 때, $\frac{1}{4n-3}\to 0,\ \frac{1}{4n-2}\to 0,\ 0\to 0$이므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$$

(2)

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ 6,\ -7,\ 8,\ \cdots$

수열 $\{S_n\}$을 나열하면

$-1,\ 1,\ -2,\ 2,\ -3,\ 3,\ -4,\ 4,\ \cdots$

$\frac{S_{2n-1}}{2n-1}=-\frac{n}{2n-1},\ \frac{S_{2n}}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$이고,

$n\to\infty$일 때, $-\frac{n}{2n-1}\to -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$은 발산한다.

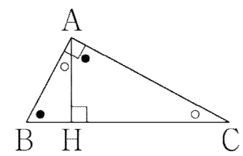
답 (1) 0 (2) 발산

G. 수열의 극한: 직각삼각형 2개

▶ 기출 문제 p.26

평면기하의 활용은 '삼각함수의 극한과 평면기하' 편에서 자세하게 다룬다. 여기서는 직각삼각형의 닮음에 대한 기하학적 상황을 공부해보자. (이 역시 '삼각함수의 극한과 평면기하' 편에서 아주 자세하게 다시 다룬다.)

$\angle \mathrm{CAB}=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



(단, ●+○$=90^\circ$)

위의 그림에서 세 직각삼각형

ABC, HBA, HAC

중 어느 두 삼각형도 서로 닮음이다.

$\overline{\mathrm{AH}}^2=\overline{\mathrm{BH}}\times\overline{\mathrm{HC}}$

즉, 세 선분 BH, AH, HC의 길이는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

증명

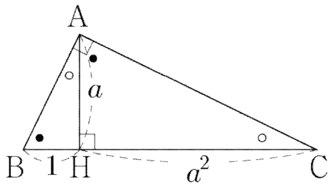
$\triangle\mathrm{BHA}\sim\triangle\mathrm{AHC}$

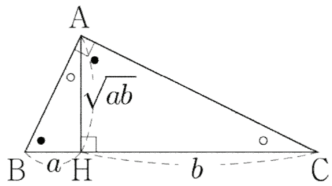
이므로

$\overline{\mathrm{BH}}:\overline{\mathrm{HA}}=\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{HC}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AH}}^2=\overline{\mathrm{BH}}\times\overline{\mathrm{HC}}$

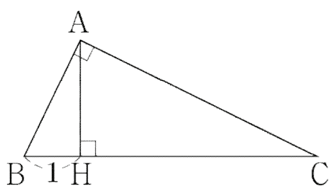
예를 들어 다음의 두 경우를 생각해 볼 수 있다.





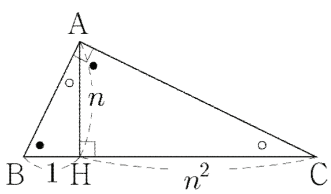
예제 1

$\angle CAB=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자. $\overline{BH}=1$, $\tan(\angle CBA)=n$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{BC}}{n^2}$의 값을 구하시오.



풀이

'삼각형의 세 내각의 합은 180°이다.'를 이용하면 다음과 같이 각의 크기를 결정할 수 있다.
그리고 △ABC∽△HBA∽△HAC이므로 두 변 AH, HC가 다음과 같다.



$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{BC}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n^2}{n^2}=1$$

답 1

G. 수열의 극한: 극한의 기하적 해석

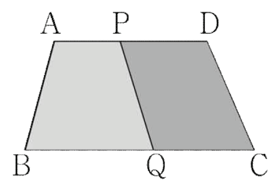
▶ 기출 문제 p.27

• 수열의 극한의 기하적 해석

아래의 네 문제를 풀고, 기하적 관점에서 해석해보아라.

예제 1

사다리꼴 ABCD에 대하여 선분 AD의 $n:n+1$ 내분점을 P, 선분 BC의 $2n:n+2$ 내분점을 Q라고 하자. 두 사각형 ABQP, PQCD의 넓이를 각각 $S(n)$, $T(n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{T(n)}$의 값을 구하시오.
(단, $\overline{AD}=2$, $\overline{BC}=3$이다.)



풀이1

$$\frac{S(n)}{T(n)}=\frac{\frac{n}{2n+1}\overline{AD}+\frac{2n}{3n+2}\overline{BC}}{\frac{n+1}{2n+1}\overline{AD}+\frac{n+2}{3n+2}\overline{BC}}$$

이므로 $n\to\infty$일 때, $\frac{S(n)}{T(n)}\to\frac{\frac{1}{2}\times2+\frac{2}{3}\times3}{\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{3}\times3}=\frac{3}{2}$

답 $\frac{3}{2}$

풀이2

$n\to\infty$일 때, $n:n+1$은 $1:1$이고, $2n:n+2$은 $2:1$이므로
점 P는 선분 AD의 중점이고, 점 Q는 선분 BC의 $2:1$ 내분점이다.
즉, $\overline{AP}=1$, $\overline{BQ}=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{T(n)}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

예제 2

두 직선 $y=nx-2n$, $y=-x+3$의 교점의 x좌표를 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

풀이1

두 직선의 방정식을 연립하면

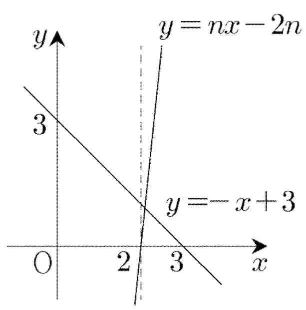
$nx-2n=-x+3$, $(n+1)x=2n+3$, $x=\frac{2n+3}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+1}=2$

답 2

풀이2

두 직선 $y=-x+3$, $y=n(x-2)$를 한 좌표평면에 그리자.



위의 그림처럼 두 직선의 교점의 x좌표는 2에 한없이 가까워진다.

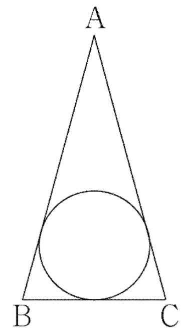
$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n$

$=$(두 직선 $y=-x+3$, $x=2$의 교점의 x좌표)$=2$

답 2

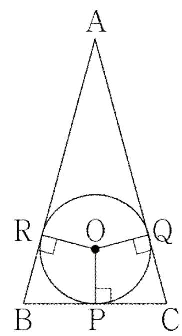
예제 3

$\overline{BC}=2$, $\overline{AB}=\overline{AC}(=n)$인 이등변삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} r_n$의 값을 구하시오.



풀이1

원의 중심을 O, 점 O에서 세 선분 BC, CA, AC에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R이라고 하자.



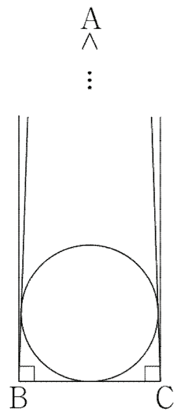
($\triangle$ABC의 넓이)=($\triangle$ABO의 넓이)+($\triangle$OBC의 넓이)+($\triangle$AOC의 넓이)

즉, $\sqrt{n^2-1}=\frac{1}{2}(2n+2)r_n$, $r_n=\frac{\sqrt{n^2-1}}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n+1}=1$

답 1

풀이2



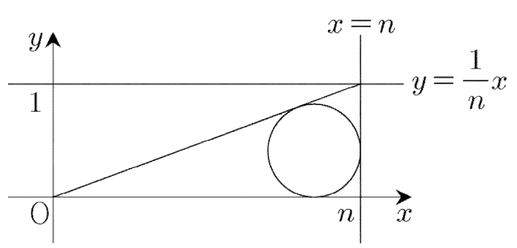
위의 그림처럼 원의 반지름의 길이는 1에 수렴한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} r_n = 1$

답 1

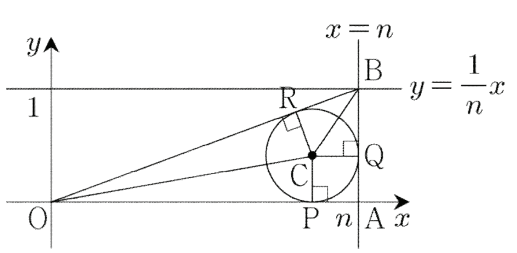
예제 4

좌표평면에서 두 직선 $y=\frac{1}{n}x$, $x=n$과 x축으로 둘러싸인 삼각형의 내접원 반지름의 길이를 r_n이라고 하자. $\lim_{n\to\infty} r_n$의 값을 구하시오.



풀이1

원의 중심을 C, 점 C에서 x축, 두 직선 $x=n$, $y=\frac{1}{n}x$에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R이라고 하자. (단, A$(n,\ 0)$, B$(n,\ 1)$이다.)



$\overline{OB}=\overline{OR}+\overline{RB}=\overline{OP}+\overline{QB}$, 즉

$\sqrt{n^2+1}=(n-r_n)+(1-r_n)$

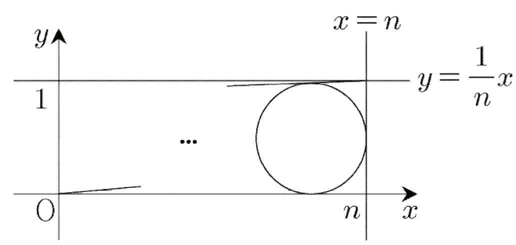
$$r_n=\frac{n+1-\sqrt{n^2+1}}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} r_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-\sqrt{n^2+1}}{2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1+\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

풀이2



$n\to\infty$일 때, 직선 $y=\frac{1}{n}x$는 점 $(n,\ 1)$을 지나면서 직선 $y=1$에 한없이 가까워지므로

위의 그림처럼 원의 지름의 길이는 1에 한없이 가까워진다.

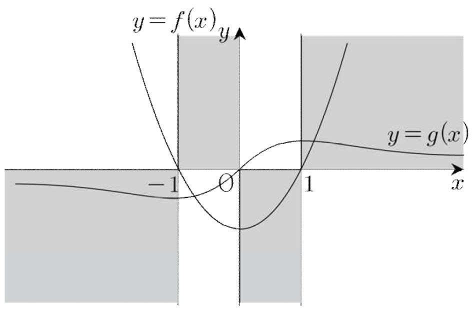
$\therefore \lim_{n\to\infty} r_n=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

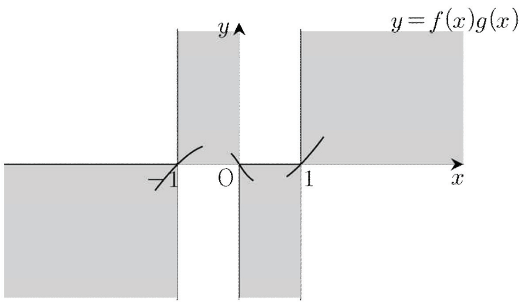
H. 그래프 개형: 사칙연산

• 두 함수 $f(x)=x^2-1$, $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$의 그래프를 그려보자.

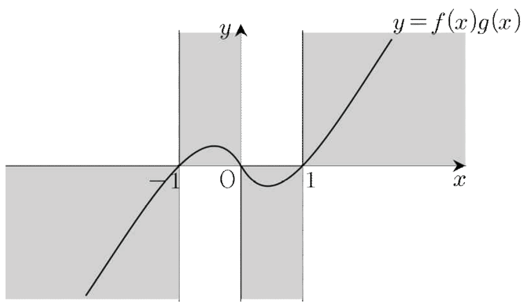
우선 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프를 한 평면에 그리고, $f(x)g(x)$의 부호를 따져서 곡선 $y=f(x)g(x)$가 지나는 영역을 색칠하자. 이때, $f(x)g(x)=0$이 되는 x의 값을 먼저 찾아서 경계를 만들어준다.



함수 $f(x)g(x)$는 연속함수이므로 $x=-1$의 좌우, $x=0$의 좌우, $x=1$의 좌우에서 아래 그림과 같이 그려져야 한다.



이제 곡선을 부드럽게 연결하자.

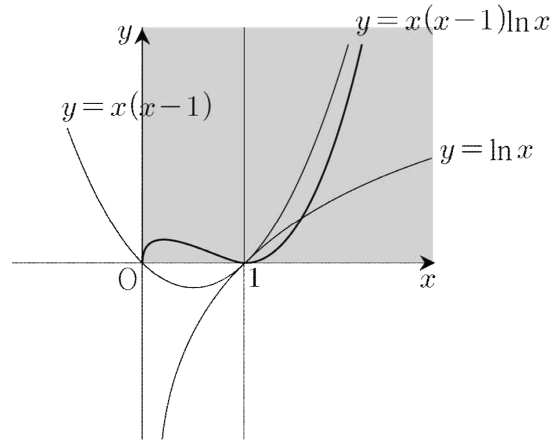


사이값 정리에 의하여 구간 $[-1, 0]$, $[0, 1]$에서 $f'(x)=0$인 x가 각각 적어도 하나 이상씩 존재한다. 즉, 극점이 하나 이상씩 존재한다. 이때, 극점의 개수를 결정하기 위해서는 함수 $f(x)g(x)$의 도함수를 이용해야 한다.

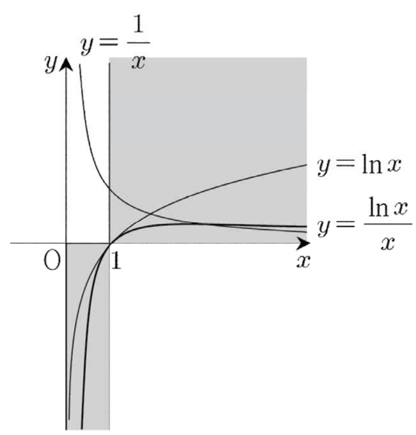
$x\to\infty$, $x\to-\infty$일 때, 발산하는지 점근선을 갖는지는 함수의 극한으로 판단하면 된다.

마찬가지의 방법으로 세 개의 그래프를 더 그려보자.

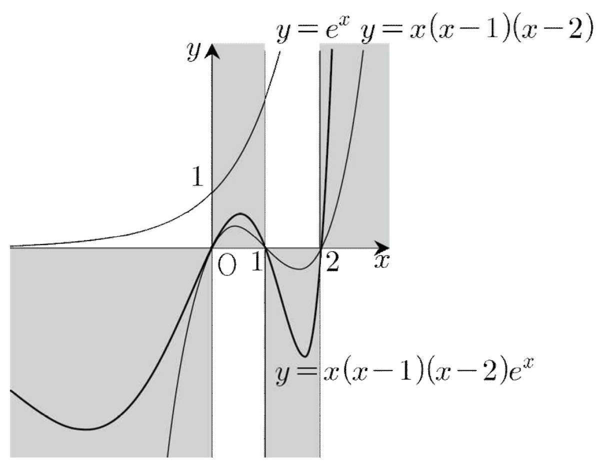
• $y=x(x-1)$, $y=\ln x$, $y=x(x-1)\ln x$



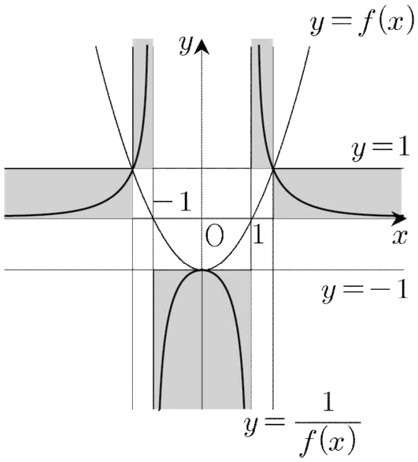
• $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\ln x$, $y=\dfrac{\ln x}{x}$



• $y=x(x-1)(x-2)$, $y=e^x$, $y=x(x-1)(x-2)e^x$



• $f(x)=x^2-1$일 때, 함수 $\dfrac{1}{f(x)}$의 그래프를 그려보자.



분모인 $f(x)$가 0이 될 수 없으므로 $f(x)=0$이 되는 $x=\pm1$에서 곡선 $y=\dfrac{1}{f(x)}$는 점근선을 갖는다. 즉, 점근선은 $x=1$, $x=-1$이다.

실수 a에 대하여

$|a|>1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|a|}<1$

$|a|=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|a|}=1$

$|a|<1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|a|}>1$

이 성립함을 이용하여 곡선 $y=\dfrac{1}{f(x)}$이 지나는 영역에 색칠한다.

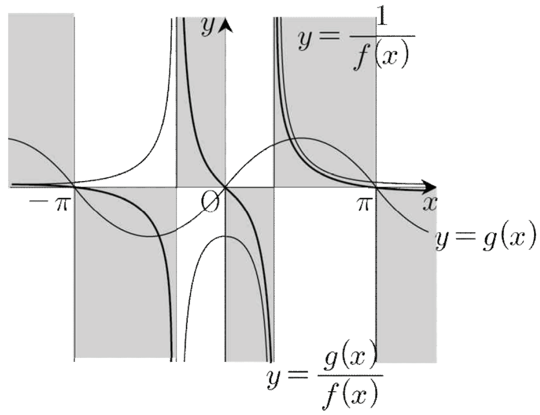
$f(x)\to\pm\infty \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}\to0\pm$

이므로 x축이 점근선임을 알 수 있다.

$\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=-\dfrac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$에서 $f'(x)$와 $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'$의 부호가 정반대임을 이용하여 곡선을 완성한다. 즉, 전자가 증가하면 후자는 감소하고, 전자가 감소하면 후자는 증가한다.

마찬가지의 방법으로 한 개의 그래프를 더 그려보자.

• 두 함수 $f(x)=x^2-1$, $g(x)=\sin x$에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$의 그래프를 그려보자.



$\dfrac{g(x)}{f(x)}=g(x)\times\dfrac{1}{f(x)}$이므로 두 곡선 $y=g(x)$, $y=\dfrac{1}{f(x)}$을 그리고 나서 곡선 $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$를 그리면 된다.

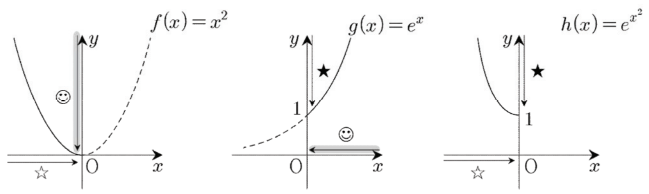
H. 그래프 개형: 합성함수(1)

▶ 기출 문제 p.145

• 합성함수의 그래프 그리기

두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=e^x$에 대하여 함수

$h(x)=g(f(x))$, 즉 $h(x)=e^{x^2}$의 그래프를 그리자.

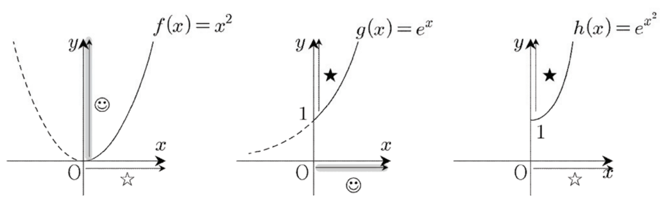


☆: x가 $-\infty$에서 0까지 변할 때,

☺: $f(x)$는 ∞에서 0까지 변하므로,

★: $g(f(x))$는 ∞에서 1까지 변한다.

즉, x가 $-\infty$에서 0까지 변할 때, $g(f(x))$는 ∞에서 1까지 변한다. (이때, ☺는 사라지고 ☆와 ★만이 남는다.)



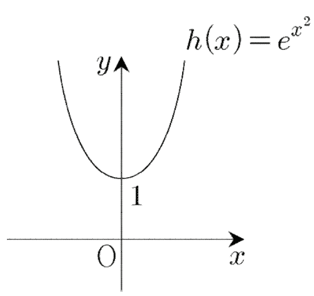
☆: x가 0에서 ∞까지 변할 때,

☺: $f(x)$는 0에서 ∞까지 변하므로,

★: $g(f(x))$는 1에서 ∞까지 변한다.

즉, x가 0에서 ∞까지 변할 때, $g(f(x))$는 1에서 ∞까지 변한다. (이때, ☺는 사라지고 ☆와 ★만이 남는다.)

따라서 함수 $h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 예에서 함수 $f(x)$는 우함수이고, $g(x)$는 대칭성을 갖지 않지만 함수 $h(x)$는 우함수이다.

왜냐하면 모든 실수 x에 대하여

$h(-x)=g(f(-x))=g(f(x))=h(x)$

이기 때문이다.

• 합성함수의 우함수와 기함수

모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$(기함수), $g(-x)=g(x)$(우함수)

일 때,

$f(f(x))$, $g(g(x))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$

는 각각 기함수, 우함수, 우함수, 우함수이다.

증명

(1) $f(f(x))$는 기함수이다.

모든 실수 x에 대하여

$f(f(-x))=f(-f(x))=-f(f(x))$

이므로 함수 $f(f(x))$는 기함수이다.

(2) $g(g(x))$는 우함수이다.

모든 실수 x에 대하여

$g(g(-x))=g(g(x))$

이므로 함수 $g(g(x))$는 우함수이다.

(3) $f(g(x))$는 우함수이다.

모든 실수 x에 대하여

$f(g(-x))=f(g(x))$

이므로 함수 $f(g(x))$는 우함수이다.

(4) $g(f(x))$는 우함수이다.

모든 실수 x에 대하여

$g(f(-x))=g(-f(x))=g(f(x))$

이므로 함수 $g(f(x))$는 우함수이다.

그리고 모든 함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 우함수이면 합성함수 $h(g(x))$는 우함수이다.

왜냐하면 모든 실수 x에 대하여

$h(g(-x))=h(g(x))$

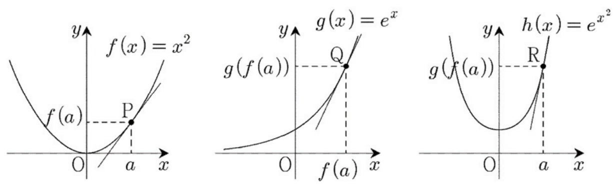
이기 때문이다. 예를 들어 함수 $y=e^{x^2}$은 우함수이다. 이때, 함수 $y=x^2$은 우함수이지만, 함수 $y=e^x$는 대칭성을 갖지

않는다.

• 합성함수의 미분계수

두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=e^x$에 대하여

함수 $h(x)=g(f(x))$, 즉 $h(x)=e^{x^2}$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



합성함수의 미분법에 의하여
$h'(a)=g'(f(a))f'(a)$
이다. 이를 위의 그림에서 보면

(곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(a,\ h(a))$에서의 접선의 기울기)
=(곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(f(a),\ g(f(a))$에서의 접선의 기울기)
×(곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기)

이와 같은 기하적 의미는 중요하므로 반드시 익혀두어야 한다.

H. 그래프 개형: 합성함수(2)

▶ 기출 문제 p.146

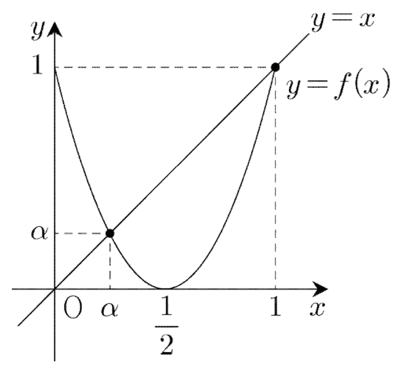
• 합성함수의 그래프 그리기

① 화살표로 증가감소를 우선 나타내고
② 미분가능한 함수라면 부드럽게 연결하여 곡선을 그린다.
③ 이때, 접선의 기울기로 오목볼록에 대한 판단을 할 수도 있다.

합성함수의 그래프를 그려보자.

• $f(x)=4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$에 대하여 함수 $(f\circ f)(x)$의 그래프를 그리시오.

(1) 우선 곡선 $y=(f\circ f)(x)$가 반드시 지나는 점을 찾아보자.

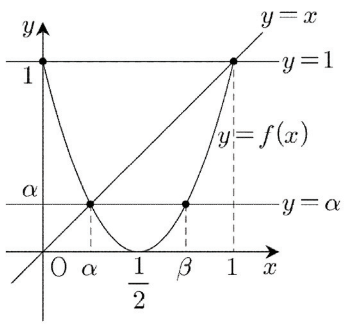


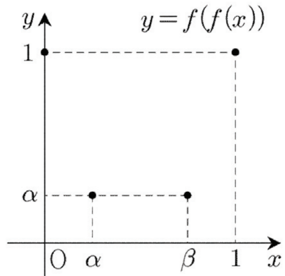
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점의 x좌표는 각각

$\dfrac{1}{4}(=\alpha)$, 1

이다. 이때,
$f(f(\alpha))=f(\alpha)=\alpha$, $f(f(1))=f(1)=1$
이므로 곡선 $y=f(f(x))$는 두 점 $(\alpha,\ \alpha)$, $(1,\ 1)$을 반드시 지난다.

(2) 곡선 $y=(f\circ f)(x)$가 지나는 점을 좀 더 찾아보자.



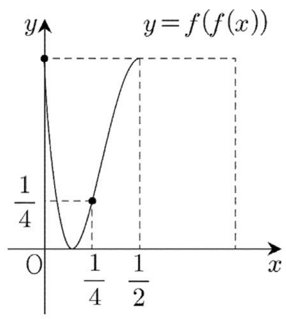


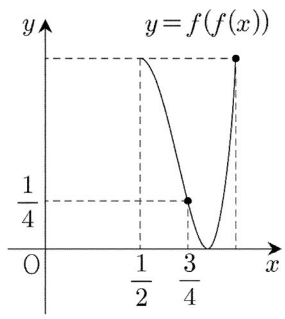
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\alpha$가 만나는 두 교점 중에서 $(\alpha,\ \alpha)$가 아닌 점의 x좌표를 β라고 하자. 그리고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1$이 만나는 두 교점 중에서 $(1,\ 1)$이 아닌 점은 $(0,\ 1)$이다. 이때,

$f(f(\beta))=f(\alpha)=\alpha,\ f(f(0))=f(1)=1$

이므로 곡선 $y=f(f(x))$는 두 점 $(\beta,\ \alpha)$, $(1,\ 1)$을 반드시 지난다.

(3) 이제 함수 $f(f(x))$의 그래프를 그리자.





x: $0 \Rightarrow \frac{1}{2}$

$f(x)$: $1 \Rightarrow 0$

$f(f(x))$: $1 \Rightarrow 0 \Rightarrow 1$

이므로 왼쪽 그림처럼 그려진다.

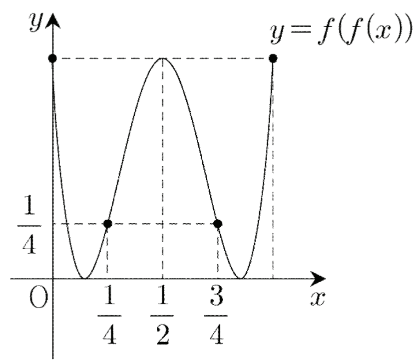
x: $\frac{1}{2} \Rightarrow 1$

$f(x)$: $0 \Rightarrow 1$

$f(f(x))$: $1 \Rightarrow 0 \Rightarrow 1$

이므로 오른쪽 그림처럼 그려진다.

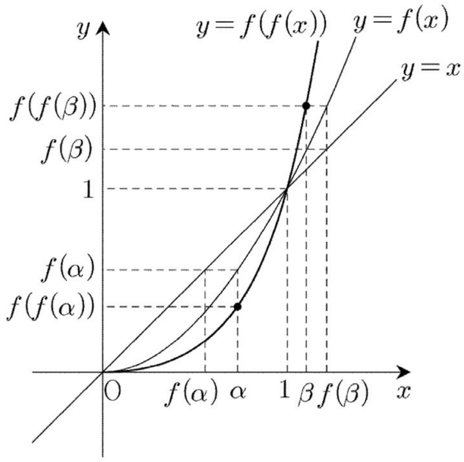
따라서 함수 $f(f(x))$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



고정점을 이용한 합성함수의 그래프의 개형을 그리는 기출문제는 이미 평균값의 정리에서 다룬 바가 있다.

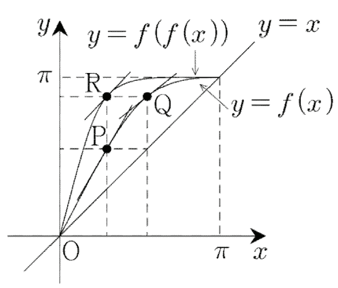
• 합성함수의 그래프와 오목볼록

(1) 함수 $f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



$0<\alpha<1$일 때, $f(f(\alpha))<f(\alpha)$이므로
구간 $(0,\ 1)$에서 곡선 $y=f(f(x))$는 곡선 $y=f(x)$의 아래쪽에 있다.
$\beta>1$일 때, $f(\beta)<f(f(\beta))$이므로
구간 $(1,\ \infty)$에서 곡선 $y=f(f(x))$는 곡선 $y=f(x)$의 위쪽에 있다.
이때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f(f(x))$ 모두 아래로 볼록임을 알 수 있다.

(2) 접선의 기울기를 이용한 오목볼록의 판단
함수 $f(x)=x+\sin x$ $(0\le x\le \pi)$에 대하여 합성함수 $(f\circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같다.



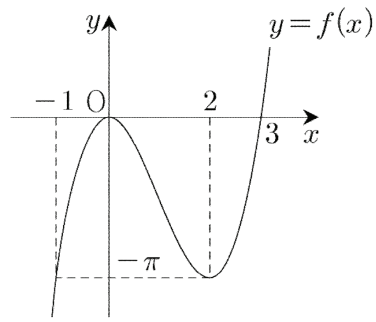
세 점 P, Q, R은 각각
$\mathrm{P}(t,\ f(t))$, $\mathrm{Q}(f(t),\ f(f(t)))$, $\mathrm{R}(t,\ f(f(t)))$
이다.
기하적으로
(곡선 $y=f(f(x))$ 위의 점 R에서의 접선의 기울기)
=(곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기)
×(곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기)
이다.

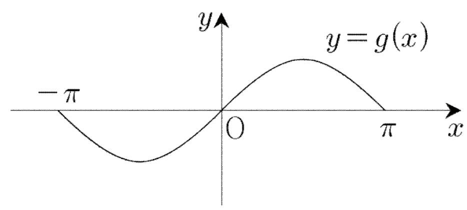
곡선 $y=f(f(x))$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 4이고, 곡선 $y=f(f(x))$ 위의 점 $(\pi,\ \pi)$에서의 접선의 기울기는 0이므로 구간 $[0,\ \pi]$에서 곡선 $y=f(f(x))$는 위로 볼록일 수밖에 없다. 왜냐하면 구간 $[0,\ \pi]$에서 두 접선 $y=4x$, $y=\pi$에 동시에 접하도록 곡선을 그리면 위로 볼록이기 때문이다.

예제 1

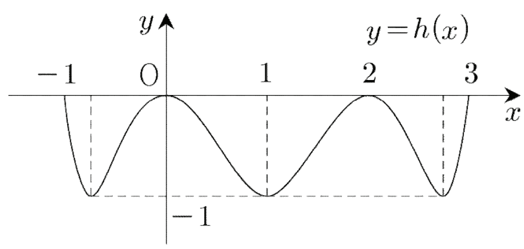
두 함수 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}x^2(x-3)$, $g(x)=\sin x$에 대하여 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $g(f(x))$의 그래프를 그리시오.

풀이
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는





x: -1 ⇨ 0, $f(x)$: $-\pi$ ⇨ 0, $g(f(x))$: 0 ⇨ -1 ⇨ 0
x: 0 ⇨ 2, $f(x)$: 0 ⇨ $-\pi$, $g(f(x))$: 0 ⇨ -1 ⇨ 0
x: 2 ⇨ 3, $f(x)$: $-\pi$ ⇨ 0, $g(f(x))$: 0 ⇨ -1 ⇨ 0
함수 $h(x)$의 그래프는



답 풀이 참조

예제 2

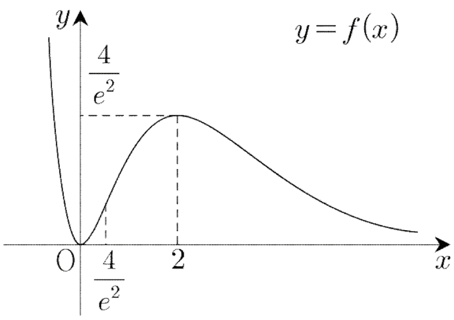
함수 $f(x)=x^2e^{-x}$에 대하여 함수 $f(f(x))$의 그래프를 그리시오.

풀이

$f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 극솟값은 0이고, 극댓값은 $\dfrac{4}{e^2}$이다.

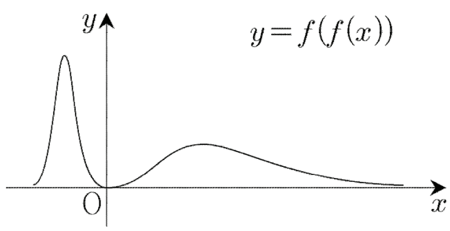


x: $-\infty$ ⇨ 0, $f(x)$: ∞ ⇨ 0, $f(f(x))$: (0) ⇨ 극대 ⇨ 0

x: 0 ⇨ 2, $f(x)$: 0 ⇨ $\dfrac{4}{e^2}$, $f(f(x))$: 0 ⇨ $f\left(\dfrac{4}{e^2}\right)$ (극대)

x: 2 ⇨ ∞, $f(x)$: $\dfrac{4}{e^2}$ ⇨ (0), $f(f(x))$: $f\left(\dfrac{4}{e^2}\right)$(극대) ⇨ (0)

함수 $f(f(x))$의 그래프는



답 풀이 참조

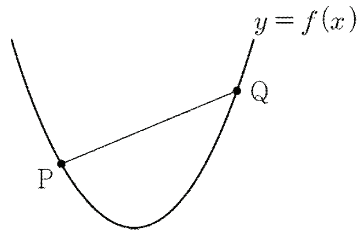
H. 그래프 개형: 볼록성

▶ 기출 문제 p.148

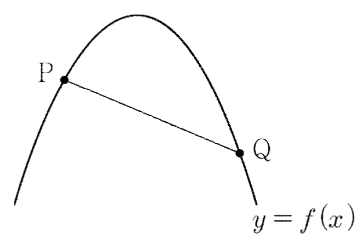
교과서 본문에서는 함수의 오목과 볼록을 다음과 같이 정의하고 있다.

• 곡선의 오목과 볼록의 정의

어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점 P, Q에 대하여 이 두 점 사이에 있는 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 아래쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록(또는 위로 오목)하다고 한다.



어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점 P, Q에 대하여 이 두 점 사이에 있는 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 위쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록(또는 아래로 오목)하다고 한다.



✪ 극점은 변곡점이 아니고, 변곡점은 극점이 아니다.

다음의 두 명제를 생각해보자.
함수가 연속인 이계도함수를 가질 때,
❶ 변곡점은 극점일 수 없다. (참)
❷ 극점은 변곡점일 수 없다. (참)
위의 두 명제를 대수적으로 증명할 필요는 없다.(어렵진 않다.) 기하적 관점에서 기억해두면 된다.

함수 $f(x)$가 이계도함수를 가질 때, 이 함수의 오목과 볼록은 이계도함수의 부호로 판단할 수 있다.

• 이계도함수를 이용한 곡선의 오목과 볼록의 판단

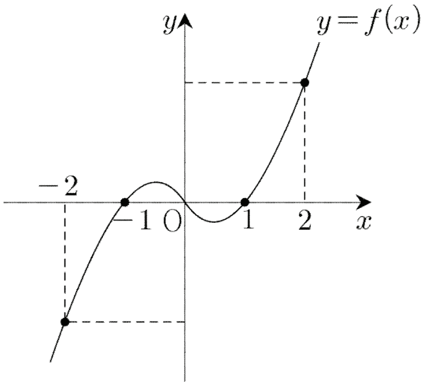
함수 $f(x)$가 이계도함수를 가질 때,
함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에서
(1) $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.
(2) $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

예제 1

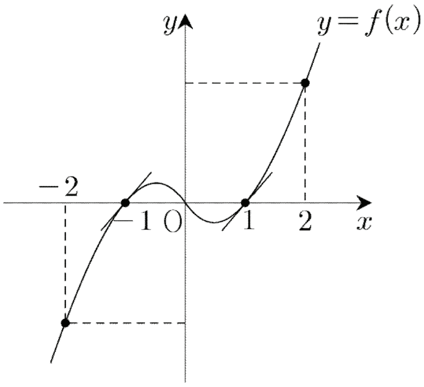
실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.
(가) $f(-2)=-2$, $f(1)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=0$이다.
옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]
ㄱ. $f'(-1)=f'(1)$
ㄴ. 열린구간 $(-2,\ 0)$에서 함수 $f(x)$의 그래프가 위로 볼록하면 열린구간 $(0,\ 2)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.
ㄷ. 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수의 최솟값은 2이다.
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

✪ 이 문제는 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 아예 그리지 않고 대수적으로만 풀 수도 있고, 계산을 최소로 줄이고 그래프의 개형에 의존하여 풀 수도 있다. 실전에서는 아무래도 후자로 접근해야 빠르게 답을 구할 수 있겠으나, (이 문제와 달리) 대수적으로 엄밀하게 참, 거짓을 판단해야 하는 문제도 종종 출제되므로(즉, 그래프의 개형에만 의존하면 오판할 가능성이 커지는 문제들), 전후 두 가지의 방법을 모두 알아두어야 한다.
이제 풀이를 시작하자.
조건 (가)에 의하여
곡선 $y=f(x)$는 두 점 $(-2,\ -2)$, $(1,\ 0)$을 지난다.
조건 (나)에서 주어진 항등식을 변형하면
$f(-x)=-f(x)$
이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
그러므로 곡선 $y=f(x)$는
두 점 $(2,\ 2)$, $(-1,\ 0)$을 지난다.
문제에서 주어진 두 조건을 모두 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프의 개형 중 하나를 그리면 다음과 같다.



ㄱ. (참)



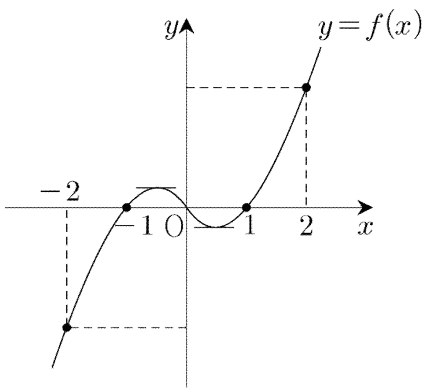
함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 원점에 대하여 서로 대칭인 두 점 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 서로 같다.

$\therefore\ f'(-1)=f'(1)$

ㄴ. (참)

함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $f(x)$의 그래프가 열린구간 $(-2,\ 0)$에서 위로 볼록하면 함수 $f(x)$의 그래프는 열린구간 $(0,\ 2)$에서 아래로 볼록이다.

ㄷ. (참)



함수 $f(x)$가

닫힌구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이고

열린구간 $(-1,\ 0)$에서 미분가능하므로

롤의 정리에서

$$\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=f'(c_1) \text{ 즉, } f'(c_1)=0$$

인 c_1이 열린구간 $(-1,\ 0)$에서 적어도 하나 존재한다.

마찬가지의 방법으로

$f'(c_2)=0$

인 c_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나 존재한다.

따라서 $f'(c)=0$을 만족하는 c가 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 적어도 두 개 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고

ㄱ, ㄴ이 참임을 산술적으로 증명하면 다음과 같다.

ㄱ. (참)

조건 (나)에서 주어진 항등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-f'(-x)=0$

모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=f'(-x)$ $\cdots(*)$

$x=1$을 대입하면

$f'(1)=f'(-1)$

ㄴ. (참)

(*)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f''(x)=-f''(-x)$

곡선 $y=f''(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로

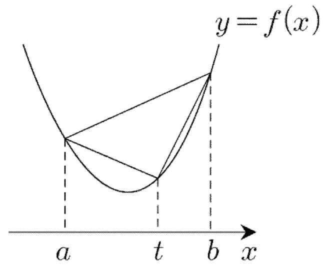
열린구간 $(-2,\ 0)$에서 $f''(x)<0$이면

열린구간 $(0,\ 2)$에서 $f''(x)>0$이다.

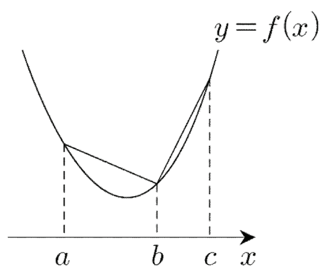
따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 열린구간 $(0,\ 2)$에서 아래로 볼록이다.

이계도함수와 관련된 다음의 두 정리를 알아보자.

(1) 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.
$a<t<b$인 임의의 세 수 a, t, b에 대하여
$\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<\dfrac{f(b)-f(t)}{b-t}$
이면 함수 $f(x)$는 아래로 볼록이다.



(2) 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $a<b<c$인 모든 a, b, c에 대하여
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$
일 필요충분조건은 $x_1<x_2$인 모든 x_1, x_2에 대하여
$f'(x_1)<f'(x_2)$ ($\Leftrightarrow$ 이 구간에서 함수 $f(x)$는 아래로 볼록이다.)

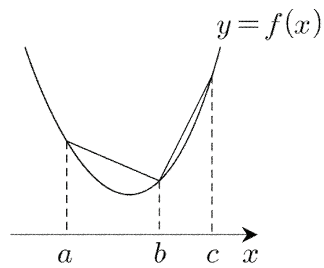


(1)을 이용하여 (2)가 참임을 증명하시오.
(※(1)은 그림을 그려서 참임을 알 수 있으면 된다. 즉, 대수적인 증명은 하지 않아도 좋다.)

증명
($\Rightarrow$)
함수 $f(x)$는 아래로 볼록이므로
세 수 $a<x<b$에 대해서
$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$
$x\to a$이면 $f'(a)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$이고,
$x\to b$이면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(b)$이다.
$a<b$일 때, $f'(a)<f'(b)$이므로 $f'(x)$는 증가함수이다.
($\Leftarrow$)
평균값 정리에 의하여
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\alpha)$ (단, $a<\alpha<b$)
$\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(\beta)$ (단, $b<\beta<c$)
이므로
$f'(\alpha)<f'(\beta)$에서
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$
따라서 함수 $f(x)$는 아래로 볼록이다. ■

이제 다음과 같은 필요충분조건을 생각할 수 있다.

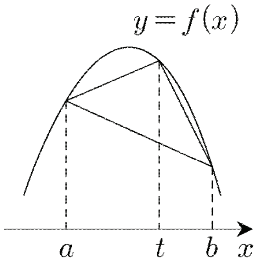
실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $\alpha<a<b<c<\beta$인 모든 a, b, c에 대하여
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$
이다.



$\Leftrightarrow$
구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 함수 $f(x)$는 아래로 볼록이다.

물론 아래의 두 정리도 생각할 수 있다.

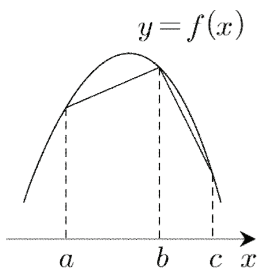
(1) 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.
$a<t<b$인 임의의 세 수 a, t, b에 대하여
$\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>\dfrac{f(b)-f(t)}{b-t}$
이면 함수 $f(x)$는 위로 볼록이다.



(2) 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $a<b<c$인 모든 a, b, c에 대하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

일 필요충분조건은 $x_1<x_2$인 모든 x_1, x_2에 대하여 $f'(x_1)>f'(x_2)$ ($\Leftrightarrow$ 이 구간에서 함수 $f(x)$는 위로 볼록이다.)

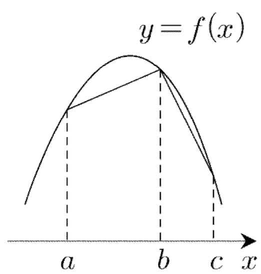


이제 다음과 같은 필요충분조건을 생각할 수 있다.

실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $\alpha<a<b<c<\beta$인 모든 a, b, c에 대하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

이다.



$\Leftrightarrow$

구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 함수 $f(x)$는 위로 볼록이다.

이제 위의 필요충분조건을 이용하여 아래의 예제를 풀어보자.

예제 2

$0<a<b<c<\dfrac{\pi}{2}$인 a, b, c에 대하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

을 만족하는 함수 $f(x)$를 고르면?

ㄱ. $f(x)=\sin x$ ㄴ. $f(x)=\cos x$

ㄷ. $f(x)=\tan x$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

풀이

문제에서 주어진 조건에 의하여

함수 $f(x)$는 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 아래로 볼록이다.

구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서

ㄱ. 함수 $f(x)=\sin x$는 위로 볼록이다.

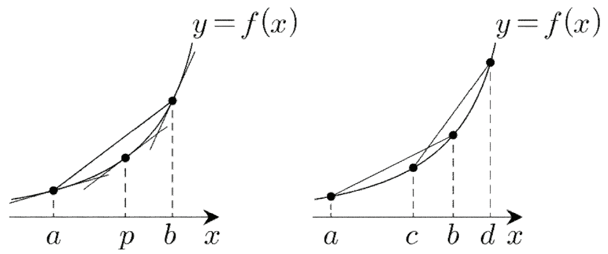
ㄴ. 함수 $f(x)=\cos x$는 위로 볼록이다.

ㄷ. 함수 $f(x)=\tan x$는 아래로 볼록이다.

답 ③

이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

- 함수 $f(x)$가 아래로 볼록인 경우



왼쪽: 평균값의 정리에 의하여

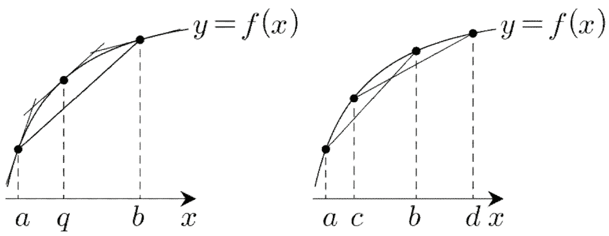
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(p)$이고, $f'(a)<f'(p)<f'(b)$이므로

$$f'(a)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(b)$$

오른쪽: 평균값의 정리를 두 번 적용하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{f(d)-f(c)}{d-c}$$

- 함수 $f(x)$가 위로 볼록인 경우



왼쪽: 평균값의 정리에 의하여

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(q)$이고, $f'(a)>f'(q)>f'(b)$이므로

$$f'(a)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>f'(b)$$

오른쪽: 평균값의 정리를 두 번 적용하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(d)-f(c)}{d-c}$$

예제 3

구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=x\sin x$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 갖는다고 하자. (단, $\alpha<\beta$)

이때, 다음의 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\sec^2\beta>\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\pi-\beta}>\sec^2\alpha$$

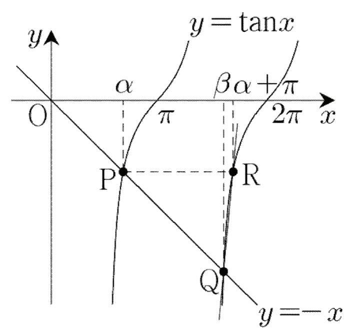
증명

$f'(x)=\sin x+x\cos x=\cos x\{\tan x-(-x)\}$

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$이므로

아래 그림처럼 구간 $[0,\ 2\pi]$에서

곡선 $y=\tan x$와 직선 $y=-x$의 두 교점의 x좌표는 각각 α, β이다.



(단 $\mathrm{P}(\alpha,\ -\alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ -\beta)$, $\mathrm{R}(\alpha+\pi,\ \tan\alpha)$)

(곡선 $y=\tan x$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기)

$=\sec^2\alpha$,

(곡선 $y=\tan x$ 위의 점 Q에서의 접선의 기울기)

$=\sec^2\beta$,

(직선 QR의 기울기)

$=\frac{-\alpha+\beta}{\alpha+\pi-\beta}$

세 직선의 기울기의 대소 비교를 하면

다음의 부등식을 얻는다.

$$\therefore\ \sec^2\beta>\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\pi-\beta}>\sec^2\alpha$$

답 풀이 참조

H. 변곡접선

▶ 기출 문제 p.150

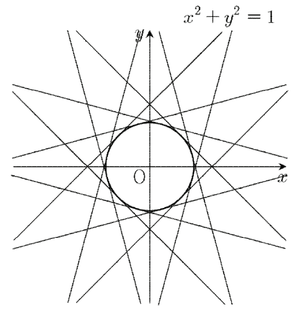
곡선 위 또는 곡선 밖의 점 P에서 이 곡선에 접선을 그을 때, 점 P가 아래의 세 선(직선 또는 곡선)으로 나누어지는 경계와 영역 중 어떤 경계 또는 어떤 영역에 속하는가에 따라서 접선의 개수가 달라진다.

❶ 곡선
❷ 곡선 위의 변곡점에서의 접선
❸ 점근선

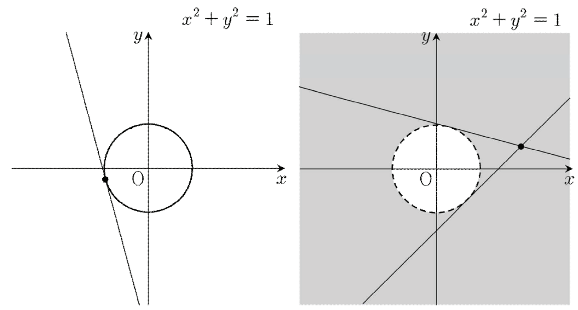
이에 대한 몇 개의 예를 살펴보자.

• 원

원 $x^2+y^2=1$ 위의 점에서 접선을 그으면 다음과 같다.



좌표평면 위의 점에서 그을 수 있는 접선의 개수는 다음과 같다.

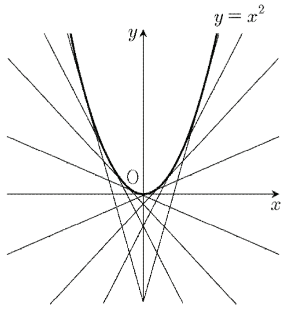


경계(곡선), 영역	접선의 개수
원의 내부	0
원의 둘레	1
원의 외부	2

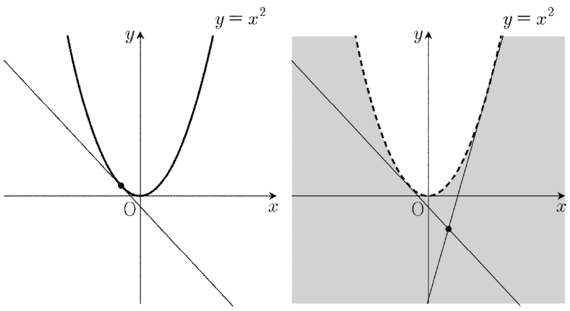
이처럼 경계(원)를 기준으로 접선의 개수가 달라질 수 있다.

• 포물선

포물선 $y=x^2$ 위의 점에서 접선을 그으면 다음과 같다.



좌표평면 위의 점에서 그을 수 있는 접선의 개수는 다음과 같다.

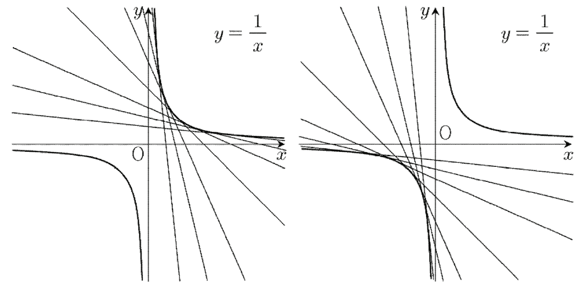


경계(곡선), 영역	접선의 개수
$y=x^2$의 위쪽 영역	0
$y=x^2$	1
$y=x^2$의 아래쪽 영역	2

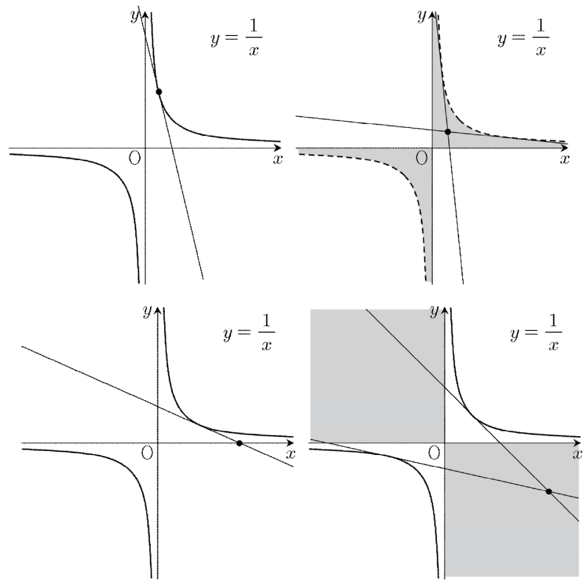
이처럼 경계(포물선)를 기준으로 접선의 개수가 달라질 수 있다.
(물론 대수적인 풀이도 가능하다. 하지만 기하적인 관찰만 해도 좋다.)

• 유리함수 (쌍곡선)

쌍곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위의 점에서 접선을 그으면 다음과 같다.



좌표평면 위의 점에서 그을 수 있는 접선의 개수는 다음과 같다.

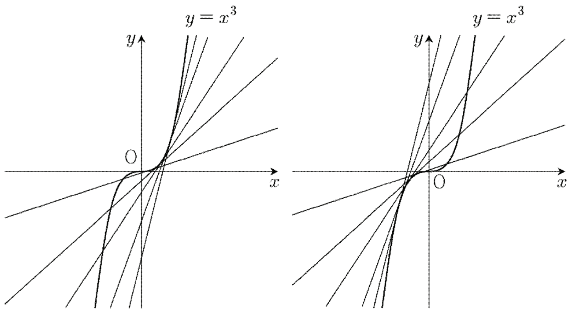


경계(곡선, 점근선), 영역	접선의 개수
$xy=1$의 위쪽 영역(제1사분면)과 아래쪽 영역(제3사분면)	0
첫 번째 그림 $xy=1$	1
두 번째 그림	2
세 번째 그림 x축 또는 y축 (단, 원점 제외)	1
원점	0
네 번째 그림	2

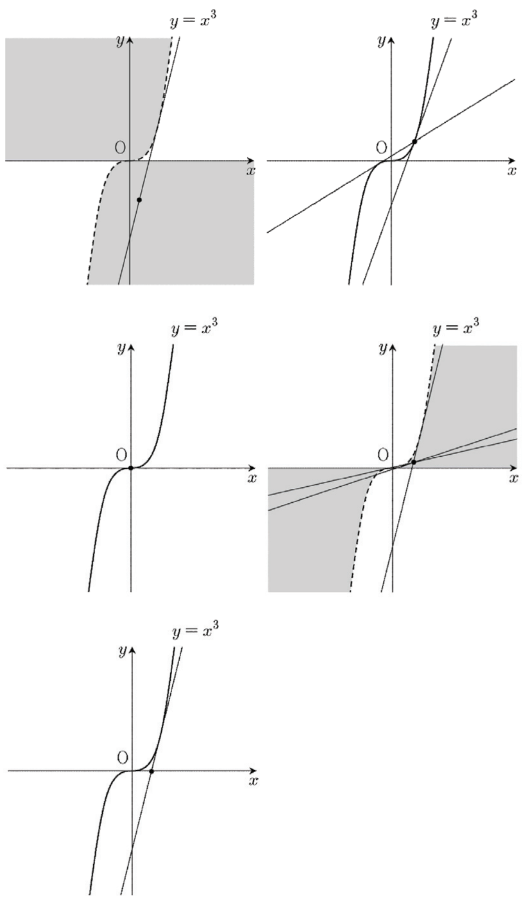
이처럼 경계(쌍곡선, 점근선)를 기준으로 접선의 개수가 달라질 수 있다.
(물론 대수적인 풀이도 가능하다. 하지만 기하적인 관찰만 해도 좋다.)

• 삼차함수

곡선 $y=x^3$ 위의 점에서 접선을 그으면 다음과 같다.



좌표평면 위의 점에서 그을 수 있는 접선의 개수는 다음과 같다.



경계(곡선, 변곡점에서의 접선), 영역	접선의 개수
첫 번째 그림	1
두 번째 그림 $y=x^3(x\neq 0)$	2
세 번째 그림 원점	1
네 번째 그림	3
다섯 번째 그림 x축 (원점 제외)	2

이처럼 경계(3차 함수의 그래프, 변곡점에서의 접선)를 기준으로 접선의 개수가 달라질 수 있다.
(물론 대수적인 풀이도 가능하다. 하지만 기하적인 관찰만 해도 좋다.)

이제 아래의 문제를 풀어보자.

예제 1

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=x^3-3x$에 그을 수 있는 접선의 개수를 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$가 불연속이 되는 모든 실수 t의 값의 합은? [4점]

① -1　② $-\dfrac{2}{3}$　③ $-\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{1}{3}$　⑤ 1

참고

이 문제는 '대수적인 풀이' 와 '기하적인 관찰' 이 모두 가능하다. 전자의 경우 삼차방정식의 근의 분리와 이차방정식의 근의 분리가 적용된 풀이인데, 이는 수능에서 매해 출제되는 전형적인 풀이에 해당하므로 반드시 익혀두어야 한다. 후자의 경우 t의 값을 변화시키면서 접선의 개수를 관찰하는 것이다.

✪ [풀이1]은 '곡선 밖의 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식' 에 대한 교과서 예제의 풀이와 '고차방정식의 해법' 에 대한 교과서 예제의 풀이만으로 이 문제를 푼 것이다.
[풀이2]는 좌표평면을 문제에서 주어진 '곡선' , 이 곡선 위의 '변곡점에서의 접선' 으로 분할하고(이에 따라 직선 $y=2$도 분할한다!), t의 값에 따라 점 $(t,\ 2)$에서 주어진 곡선에 접선을 그어가면서 이 문제를 푼 것이다.

풀이1

접점의 x좌표를 s로 두자.
접선의 방정식은
$y=(3s^2-3)(x-s)+s^3-3s$
이 직선이 점 $(t,\ 2)$를 지나므로
$2=(3s^2-3)(t-s)+s^3-3s$
정리하면
$(s+1)\{2s^2-(3t+2)s+3t+2\}=0\cdots(*1)$
$\Leftrightarrow s=-1$ 또는

$2s^2-(3t+2)s+3t+2=0$ $\cdots(*2)$

$(*2)$에 $s=-1$을 대입하면 $t=-1$

$t=-1$을 $(*2)$에 대입하면

$2s^2+s-1=0$, $(2s-1)(s+1)=0$

풀면 $s=\frac{1}{2}$ 또는 $s=-1$

즉, $t=-1$이면 삼차방정식 $(*1)$의 해집합은

$\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$이다. 이때, -1은 중근이다.

이차방정식 $(*2)$의 판별식을 D라고 하자.

$D=(3t+2)^2-4\times2\times(3t+2)=3(3t+2)(t-2)$

(1) $D>0$인 경우 $\left(t<-\frac{2}{3}\right.$ 또는 $\left.t>2\right)$

$t<-1$ 또는 $-1<t<-\frac{2}{3}$ 또는 $t>2$이면

이차방정식 $(*2)$의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로

삼차방정식 $(*1)$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$t=-1$이면

삼차방정식 $(*1)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(2) $D=0$인 경우 $\left(t=-\frac{2}{3}\right.$ 또는 $\left.t=2\right)$

이차방정식 $(*2)$의 서로 다른 실근의 개수가 1이므로

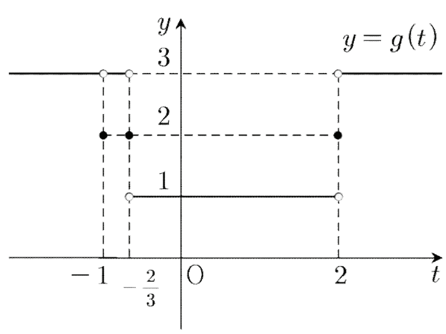
삼차방정식 $(*1)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(3) $D<0$인 경우 $\left(-\frac{2}{3}<t<2\right)$

이차방정식 $(*2)$가 허근을 가지므로

삼차방정식 $(*1)$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$가 불연속인 모든 실수 t의 값의 합은 $\frac{1}{3}$이다.

답 ④

풀이2

$f(x)=x^3-3x$으로 두고, 함수 $f(x)$의 그래프를 그리자.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-3$에서 $f'(x)=0$이면 $x=-1$ 또는 $x=1$

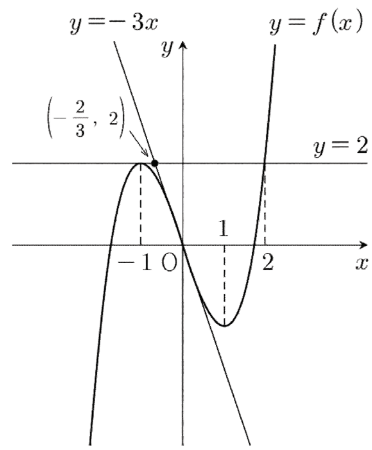
함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=6x$에서 $f''(x)=0$이면 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	2 극대점	↘	0 변곡점	↘	-2 극소점	↗

함수 $f(x)$의 그래프는



곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서의 접선의 방정식은

$y=-3x$,

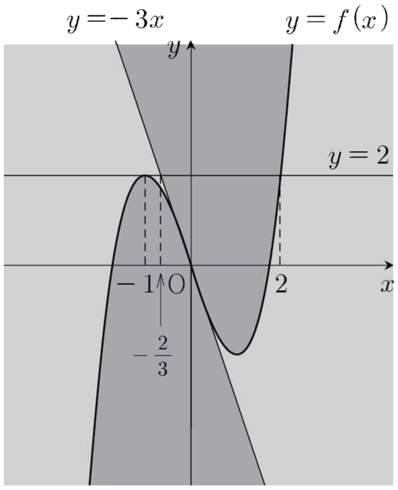
직선 $y=2$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 두 점의 좌표는 각각

$(-1, 2)$, $(2, 2)$

두 직선 $y=2$와 $y=-3x$가 만나는 점의 좌표는

$\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$

곡선 $y=f(x)$, 곡선 $y=f(x)$ 위의 변곡점에서의 접선에 의하여 평면은 아래 그림과 같이 4개의 영역으로 나뉜다.



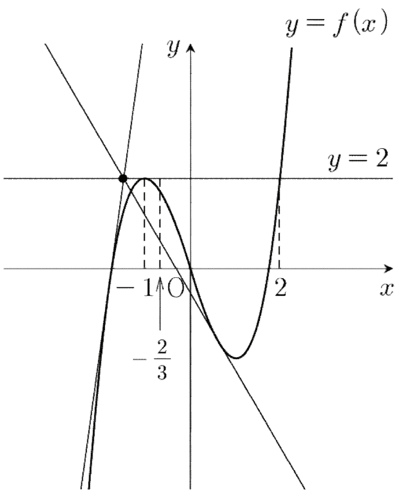
위의 4개의 영역에 의하여 점 $(t,\ 2)$가 놓인 직선 $y=2$는 4개의 부분으로 나뉜다. 이제 다음과 같은 7가지의 경우를 생각하자.

$t<-1,\ t=-1,\ -1<t<-\frac{2}{3},\ t=-\frac{2}{3},$

$-\frac{2}{3}<t<2,\ t=2,\ t>2$

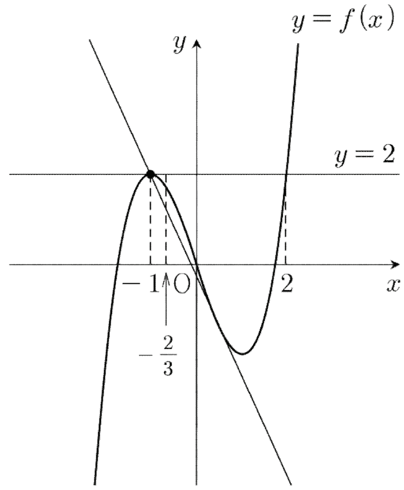
(1) $t<-1$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 3개의 접선을 그을 수 있다.



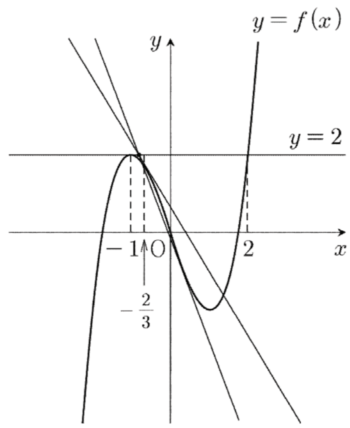
(2) $t=-1$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 2개의 접선을 그을 수 있다.



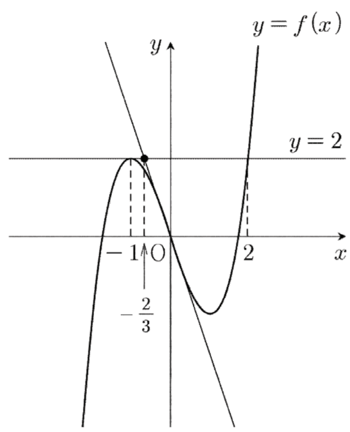
(3) $-1<t<-\frac{2}{3}$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 3개의 접선을 그을 수 있다.



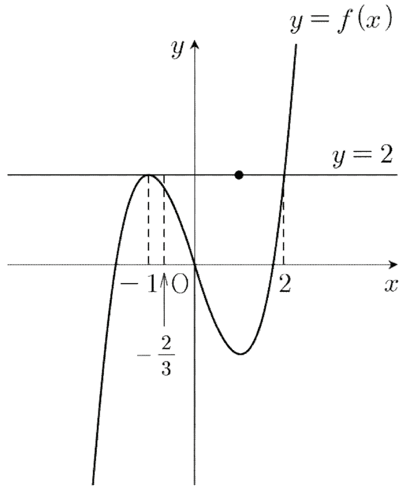
(4) $t=-\frac{2}{3}$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 2개의 접선을 그을 수 있다.



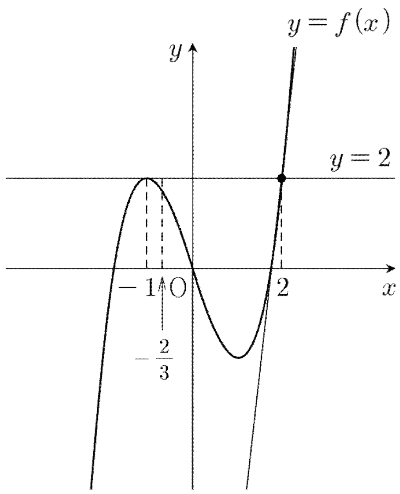
(5) $-\frac{2}{3}<t<2$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 1개의 접선을 그을 수 있다.



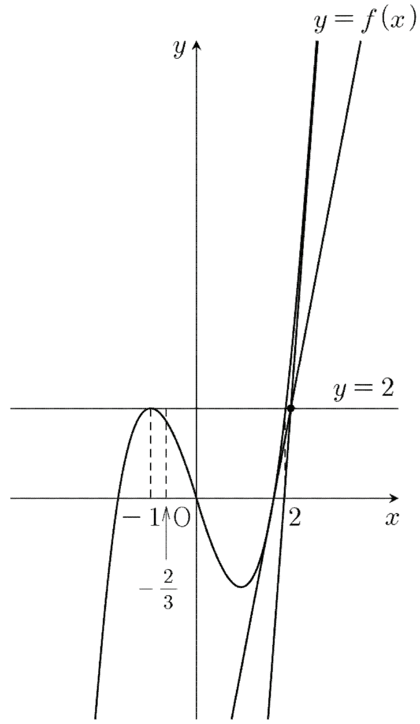
(6) $t=2$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 2개의 접선을 그을 수 있다.

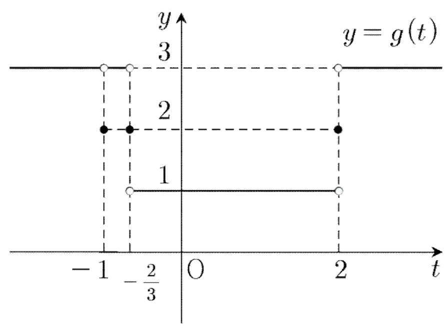


(7) $t>2$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 3개의 접선을 그을 수 있다.



함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$가 불연속인 모든 실수 t의 값의 합은 $\frac{1}{3}$이다.

답 ④

아래의 두 문제도 '대수적인 풀이'와 '기하적인 관찰'이 모두 가능하다. 실전에서는 아무래도 후자로 접근해야 풀이 시간이 단축되지만(지금까지 그래왔지만), 전자로 접근해야 풀이가 더 간략해지도록 출제될 가능성을 아예 배제할 수 없다.

예제 2

점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=x^3-x^2$에 그을 수 있는 접선의 개수가 3일 때, 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

풀이

문제에서 주어진 함수의 도함수는

$y'=3x^2-2x$

접점의 x좌표를 t라고 하면

접선의 기울기는 $3t^2-2t$이다.

접선의 방정식은

$y=(3t^2-2t)(x-t)+t^3-t^2$

이 접선이 점 $(0,\ k)$를 지나므로

$k=(3t^2-2t)(0-t)+t^3-t^2$

정리하면

$-2t^3+t^2=k$ $\cdots(*)$

접점의 개수가 3이므로 방정식 (*)의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

이제 $f(t)=-2t^3+t^2$으로 두자.

함수 $f(t)$의 도함수는

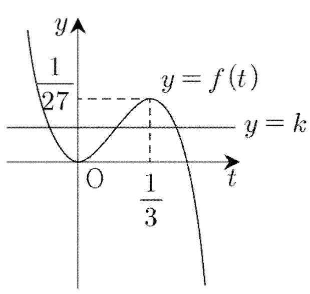
$f'(t)=-6t^2+2t=-2t(3t-1)$

방정식 $f'(t)=0$을 풀면 $t=0$ 또는 $t=\dfrac{1}{3}$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 정리하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(t)$의 그래프는



방정식 (*)의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되는 k의 범위는

$\therefore\ 0<k<\dfrac{1}{27}$

[풀이2]

$f(x)=x^3-x^2$으로 두자.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-2x=3x\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$

방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$x=0$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 정리하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=6x-2$

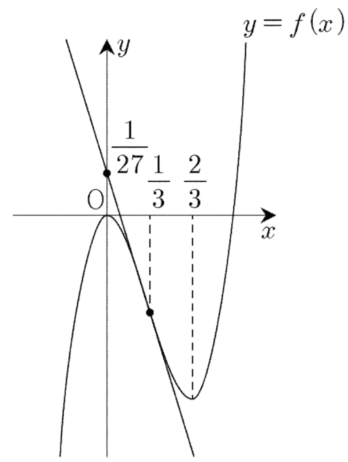
방정식 $f''(x)=0$을 풀면 $x=\dfrac{1}{3}$이므로

곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 $\left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{2}{27}\right)$

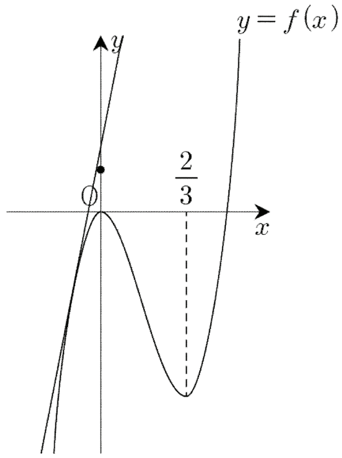
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{2}{27}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{27}$

함수 $f(x)$의 그래프와 변곡점에서의 접선을 한 평면 위에 나타내면 다음과 같다.

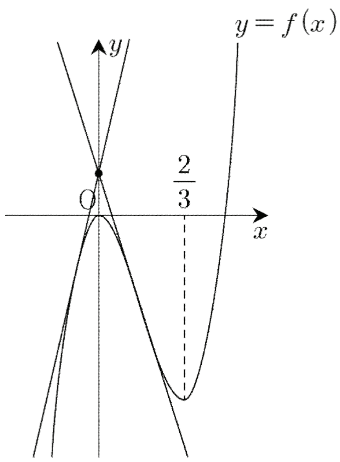


(1) $k>\dfrac{1}{27}$인 경우



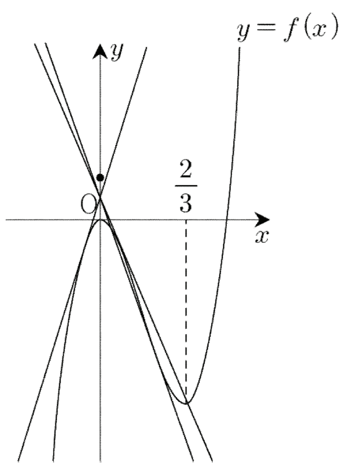
점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그을 수 있는 접선의 개수는 1이다.

(2) $k=\dfrac{1}{27}$인 경우



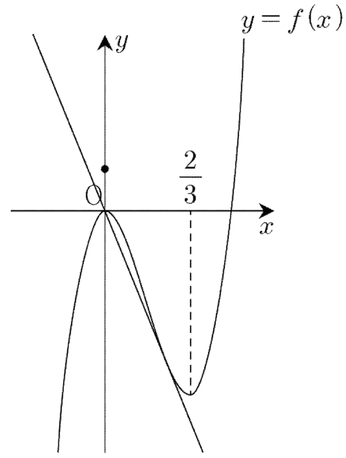
점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다.

(3) $0<k<\dfrac{1}{27}$인 경우



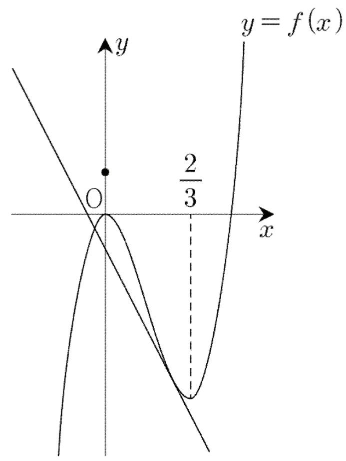
점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그을 수 있는 접선의 개수는 3이다.

(4) $k=0$인 경우



점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다.

(5) $k<0$인 경우



점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그을 수 있는 접선의 개수는 1이다.

(1)~(5)에서 k의 범위는

$\therefore\ 0<k<\dfrac{1}{27}$

답 $0<k<\dfrac{1}{27}$

예제 3

점 $(0,\ t)$에서 곡선 $y=\dfrac{\ln x}{x}$에 그을 수 있는 접선의 개수를 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$가 불연속이 되는 모든 실수 t의 값을 구하시오. [4점]

[풀이1]은 '곡선 밖의 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식'에 대한 교과서 예제의 풀이와 '미분법의 방부등식에의 활용'에 대한 교과서 예제의 풀이만으로 이 문제를 푼 것이다.

[풀이2]는 좌표평면을 문제에서 주어진 '곡선', 이 곡선 위의 '변곡점에서의 접선', 이 곡선의 '점근선'으로 분할하고(이에 따라 y축도 분할), t의 값에 따라 점 $(0,\ t)$에서 주어진 곡선에 접선을 그어가면서 이 문제를 푼 것이다.

풀이1

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$로 두자. (단, $x>0$)

점 $(0,\ t)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접선을 그었을 때 생기는 접점의 좌표를 $(s,\ f(s))$로 두자. (단, $s>0$)

접선의 방정식은

$$y=\frac{1-\ln s}{s^2}(x-s)+\frac{\ln s}{s}$$

이 직선이 점 $(0,\ t)$를 지나므로

$$t=\frac{1-\ln s}{s^2}(0-s)+\frac{\ln s}{s}\quad \text{즉,}\quad t=\frac{2\ln s-1}{s}$$

함수 $h(s)=\dfrac{2\ln s-1}{s}$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 $g(t)$이다.

함수 $h(s)$의 그래프를 그리자.

함수 $h(s)$의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다.

$h(\sqrt{e})=0$이므로 함수 $h(s)$의 그래프는 점 $(\sqrt{e},\ 0)$을 지난다.

함수 $h(s)$의 도함수는

$$h'(s)=\frac{3-2\ln s}{s^2}\text{에서 } h'(s)=0\text{이면 } s=e^{\frac{3}{2}}$$

함수 $h(s)$의 이계도함수는

$$h''(s)=\frac{4\ln s-8}{s^3}\text{에서 } h''(s)=0\text{이면 } s=e^2$$

함수 $h(s)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

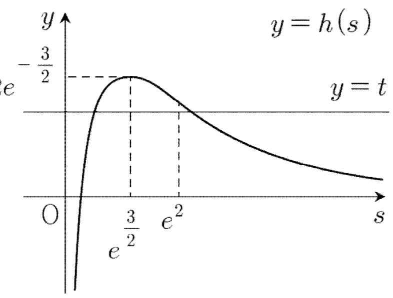
s	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$h'(s)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$h''(s)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$h(s)$		↗	$2e^{-\frac{3}{2}}$ 극대점	↘	$3e^{-2}$ 변곡점	↘

$\lim\limits_{s\to\infty}h(s)=\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{p}{e^{\frac{p+1}{2}}}=0$이므로, 함수 $h(s)$는 s축을 점근선으로 갖는다.

$\lim\limits_{s\to0+}h(s)=\lim\limits_{p\to-\infty}\dfrac{p}{e^{\frac{p+1}{2}}}=\lim\limits_{q\to\infty}\dfrac{-qe^{\frac{q}{2}}}{\sqrt{e}}=-\infty$이므로,

함수 $h(s)$는 y축을 점근선으로 갖는다.

함수 $h(s)$의 그래프는



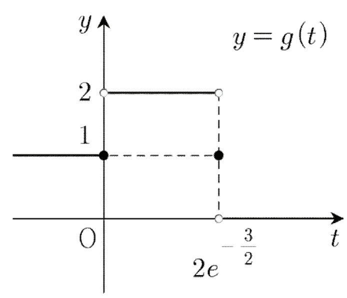
$t>2e^{-\frac{3}{2}}$이면 $g(t)=0$

$t=2e^{-\frac{3}{2}}$이면 $g(t)=1$

$0<t<2e^{-\frac{3}{2}}$이면 $g(t)=2$

$t\le 0$이면 $g(t)=1$

함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$가 불연속이 되는 t의 값은 0 또는 $2e^{-\frac{3}{2}}$이다.

답 0 또는 $2e^{-\frac{3}{2}}$

풀이2

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$로 두고, 함수 $f(x)$의 그래프를 그리자.

함수 $f(x)$의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다.

$f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지난다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=e$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$이므로 $f''(x)=0$에서 $x=e^{\frac{3}{2}}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

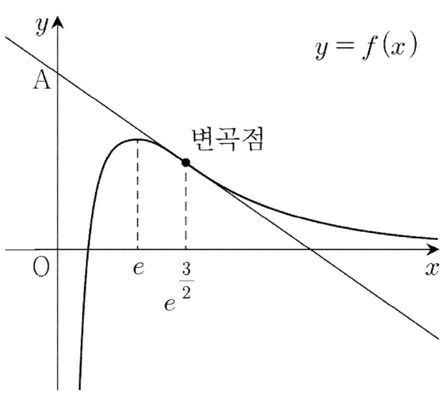
x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−	−	−
$f''(x)$		−	−	−	0	+
$f(x)$		↗	e^{-1} 극대점	↘	$\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$ 변곡점	↘

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{e^t}=0$이므로, 함수 $f(x)$는 x축을 점근선으로 갖는다.

$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{t\to -\infty}\dfrac{t}{e^t}=\lim\limits_{s\to\infty}(-se^s)=-\infty$이므로,

함수 $f(x)$는 y축을 점근선으로 갖는다.

함수 $f(x)$의 그래프는



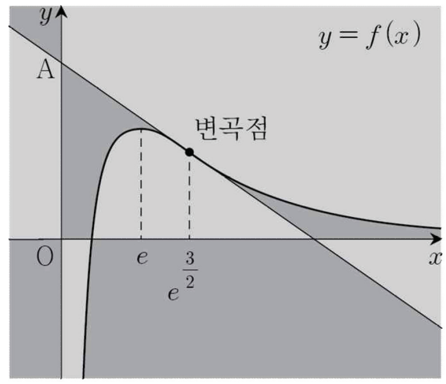
위의 그림에서 점 A는 곡선 $y=f(x)$ 위의 변곡점에서의 접선이 y축과 만나는 점이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 변곡점에서의 접선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2}e^{-3}x+2e^{-\frac{3}{2}}$

이므로, 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(0,\ 2e^{-\frac{3}{2}})$이다.

곡선 $y=f(x)$, 곡선 $y=f(x)$ 위의 변곡점에서의 접선, 점근선(x축과 y축)에 의하여 평면은 아래 그림과 같이 10개의 영역으로 나뉜다.



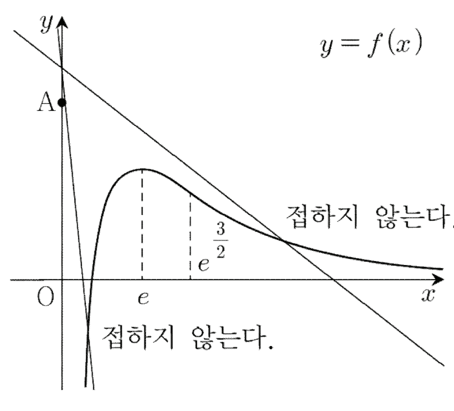
위의 10개의 영역에 의하여 점 $(0,\ t)$가 놓인 직선 $x=0$ (y축)은 3개의 부분으로 나뉜다. 이제 다음과 같은 5가지의 경우를 생각하자.

$t<0,\ t=0,\ 0<t<2e^{-\frac{3}{2}},\ t=2e^{-\frac{3}{2}},$

$t>2e^{-\frac{3}{2}}$

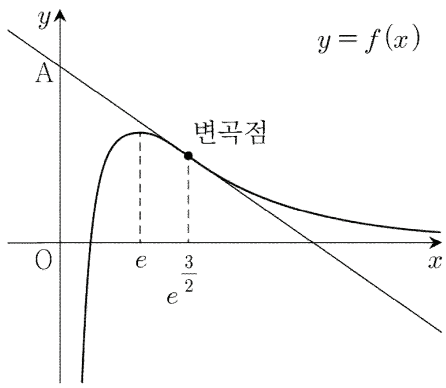
(1) $t>2e^{-\frac{3}{2}}$인 경우

점 $(0,\ t)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접선을 그을 수 없다.



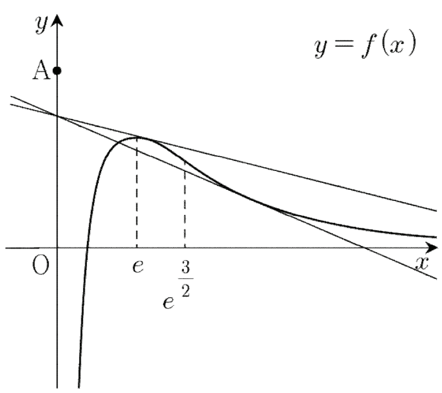
(2) $t=2e^{-\frac{3}{2}}$인 경우

점 $(0,\ t)$에서 곡선 $y=f(x)$에 1개의 접선을 그을 수 있다. 이때, 접점은 변곡점이다.



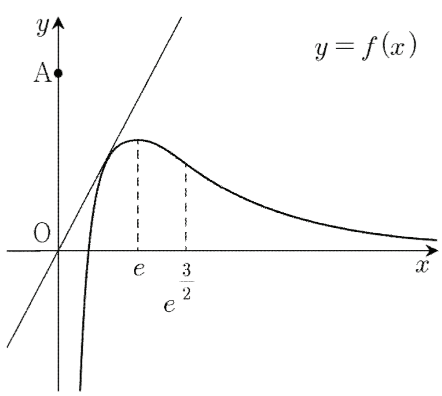
(3) $0 < t < 2e^{-\frac{3}{2}}$인 경우

점 $(0,\ t)$에서 곡선 $y=f(x)$에 2개의 접선을 그을 수 있다.



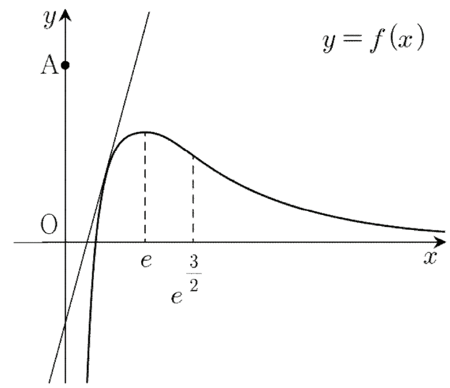
(4) $t=0$인 경우

점 $(0,\ t)$에서 곡선 $y=f(x)$에 1개의 접선을 그을 수 있다.

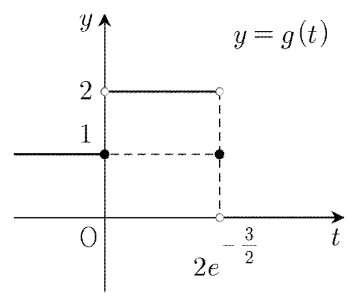


(5) $t<0$인 경우

점 $(0,\ t)$에서 곡선 $y=f(x)$에 1개의 접선을 그을 수 있다.



(1)~(5)에서 함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$가 불연속이 되는 t의 값은 0 또는 $2e^{-\frac{3}{2}}$이다.

답 0 또는 $2e^{-\frac{3}{2}}$

예제 4

x축 위의 점 $(k,\ 0)$에서 곡선 $y=(x-1)e^{x}$에 두 개의 접선을 그을 수 있을 때, k의 값의 범위를 구하시오.

풀이1

$f(x)=(x-1)e^{x}$로 두자.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=xe^{x}$

문제에서 주어진 점에서 곡선에 그은 접선의 접점의 x좌표를 t라고 하자.

접선의 기울기는 te^{t}이므로 접선의 방정식은

$y=te^{t}(x-t)+(t-1)e^{t}$

이 직선이 점 $(k,\ 0)$을 대입하면

$0=te^{t}(k-t)+(t-1)e^{t}$

$t^{2}-(k+1)t+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(k+1)^{2}-4>0,\ (k+3)(k-1)>0$

풀면 $k<-3$ 또는 $k>1$

따라서 문제에서 주어진 점에서 곡선에 그은 접선의 개수가

2가 되는 k의 범위는

$k<-3$ 또는 $k>1$

답 $k<-3$ 또는 $k>1$

풀이2

$f(x)=(x-1)e^{x}$로 두자.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=xe^{x}$

방정식 $f'(x)=0$을 풀면 $x=0$

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=(x+1)e^{x}$

방정식 $f''(x)=0$을 풀면 $x=-1$

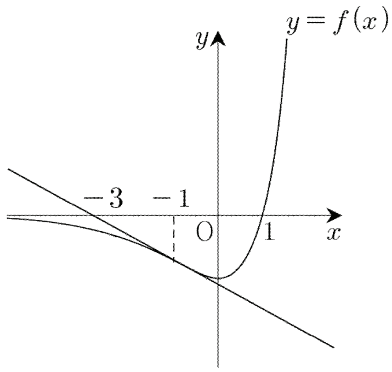
$x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 변하므로

점 $\left(-1,\ -\dfrac{2}{e}\right)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 변곡점에서의 접선의 방정식은

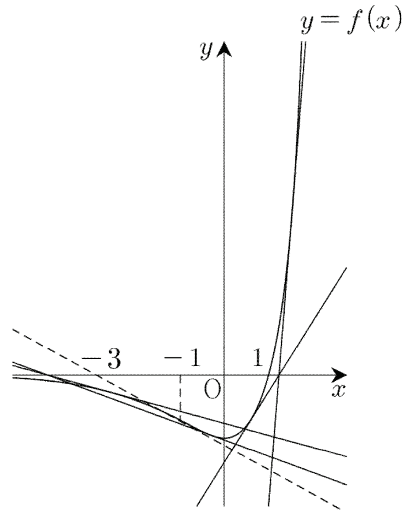
$y=-\dfrac{1}{e}(x+3)$

함수 $f(x)$의 그래프는



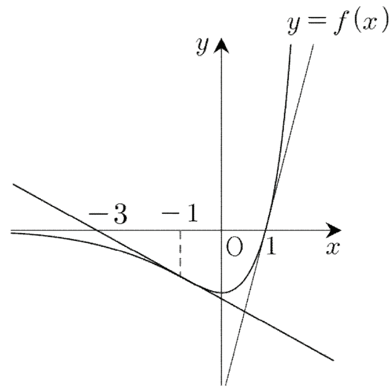
(단, 직선은 변곡점에서의 접선이다.)

k의 값을 변화시키면서 문제에서 주어진 점에서 곡선에 접선을 그어보자.



$k>1$ 또는 $k<-3$이면 위의 그림처럼

문제에서 주어진 점에서 곡선에 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다.



$k=1$ 또는 $k=-3$이면 위의 그림처럼

문제에서 주어진 점에서 곡선에 그을 수 있는 접선의 개수는 1이다.

$-3<k<1$이면 문제에서 주어진 점에서 곡선에 접선을 그을 수 없다.

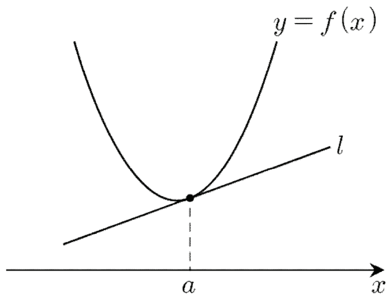
따라서 구하는 k의 범위는

$k<-3$ 또는 $k>1$

답 $k<-3$ 또는 $k>1$

함수 $f(x)$가 이계도함수를 갖는다고 하자.

어떤 구간 I에서 함수 $y=f(x)$가 아래로 볼록일 때, 아래의 부등식이 성립한다.
$f(x) \geq f'(a)(x-a)+f(a)$ (단, a는 구간 I에 속하는 상수이다.)

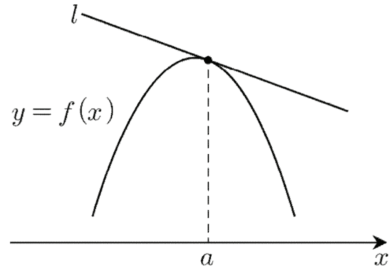


위의 그림을 보면 이 구간 I에서 (곡선)$\geq$(직선)인데,
이때, 직선은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$이다.

다음과 같이 대수적 증명도 가능하다.

증명
$g(x)=f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)$로 두면
$g'(x)=f'(x)-f'(a)$에서 $g'(a)=0$이고,
$g''(x)=f''(x)>0$(즉, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 이계도함수가 같다!)이므로
이 구간 I에서 함수 $g(x)$의 최솟값은 $0(=g(a))$이다.
$\therefore$ $g(x) \geq 0$ ■

어떤 구간 I에서 함수 $y=f(x)$가 위로 볼록일 때, 아래의 부등식이 성립한다.
$f(x) \leq f'(a)(x-a)+f(a)$ (단, a는 구간 I에 속하는 상수이다.)

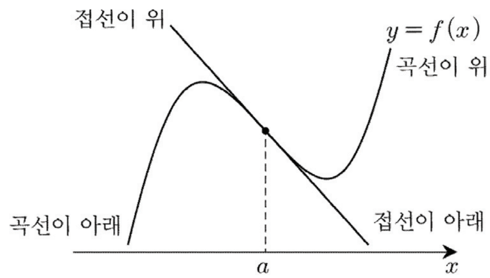


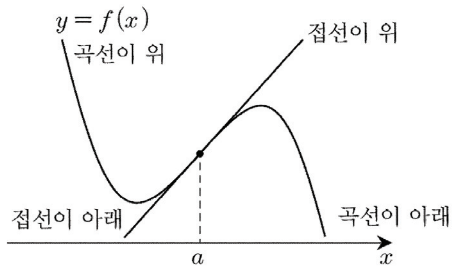
위의 그림을 보면 이 구간 I에서 (곡선)$\leq$(직선)인데,
이때, 직선은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$이다.

다음과 같이 대수적 증명도 가능하다.

증명
$g(x)=f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)$로 두면
$g'(x)=f'(x)-f'(a)$에서 $g'(a)=0$이고,
$g''(x)=f''(x)<0$(즉, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 이계도함수가 같다!)이므로
이 구간 I에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $0(=g(a))$이다.
$\therefore$ $g(x) \leq 0$ ■

어떤 구간 I에 속하는 상수 a에 대하여 점 $(a,\ f(a))$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라고 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선을 l이라고 할 때, 아래 그림처럼 $x=a$를 기준으로 곡선 $y=f(x)$와 직선 l의 위치가 바뀐다.





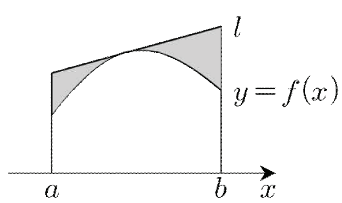
아래의 문제를 풀어보자.

예제 5

실수 전체의 집합에서 정의된 연속인 함수 $f(x)$는 열린구간 $(a,\ b)$에서 $f''(x)<0$이다.
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$ $(a<t<b)$에서의 접선을 l이라고 할 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 l 및 두 직선 $x=a,\ \ x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $g(t)$라고 하자. 함수 $g(t)$가 최솟값을 가질 때의 t의 값을 a와 b로 나타내시오. [4점]

풀이

문제에서 주어진 조건에 의하여
열린구간 $(a,\ b)$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록이다.



직선 l의 방정식은
$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$g(t)=\displaystyle\int_a^b \{f'(t)x+f(t)-tf'(t)-f(x)\}dx$

정적분의 정의에 의하여

$g(t)=\dfrac{b^2-a^2}{2}f'(t)+(b-a)f(t)$

$-(b-a)tf'(t)-\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

함수 $g(t)$의 도함수는

$g'(t)=\dfrac{b^2-a^2}{2}f''(t)-(b-a)tf''(t)$

$=(b-a)f''(t)\left(\dfrac{b+a}{2}-t\right)$

($\leftarrow b-a>0,\ f''(t)<0$임을 상기하자.)

방정식 $g'(t)=0$을 풀면 $t=\dfrac{a+b}{2}$

$t=\dfrac{a+b}{2}$의 좌우에서 $g'(t)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(t)$는 $t=\dfrac{a+b}{2}$에서 극솟값(최솟값)을 갖는다.

답 $t=\dfrac{a+b}{2}$

H. 초월함수의 미분가능성: 기하

▶ 기출 문제 p.151

• 초월함수의 미분가능성 - 기하적 접근

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 함수 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x) \geq g(x)) \\ g(x) & (f(x) < g(x)) \end{cases}$의 미분가능성을 따져보자.

$f(x)$, $g(x)$ 중에서 작지 않은 값을 $h(x)$라고 하면

$$h(x)=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$$

이때, $f(x) \geq g(x)$이면 $h(x)=f(x)$이고,

$f(x)<g(x)$이면 $h(x)=g(x)$이다.

함수 $h(x)$의 미분가능성은 함수 $\dfrac{|f(x)-g(x)|}{2}$의 미분가능성으로 판단할 수 있다.

($\because$ 함수 $\dfrac{f(x)+g(x)}{2}$는 미분가능하다.)

따라서 다음의 필요충분조건이 성립한다.

함수 $h(x)$가 미분가능하지 않다. $\Leftrightarrow$ 함수 $|f(x)-g(x)|$가 미분가능하지 않다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 함수 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x) \leq g(x)) \\ g(x) & (f(x) > g(x)) \end{cases}$의 미분가능성을 따져보자.

$f(x)$, $g(x)$ 중에서 크지 않은 값을 $h(x)$라고 하면

$$h(x)=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$

이때, $f(x) \geq g(x)$이면 $h(x)=g(x)$이고,

$f(x)<g(x)$이면 $h(x)=f(x)$이다.

함수 $h(x)$의 미분가능성은 함수 $\dfrac{|f(x)-g(x)|}{2}$의 미분가능성으로 판단할 수 있다.

($\because$ 함수 $\dfrac{f(x)+g(x)}{2}$는 미분가능하다.)

따라서 다음의 필요충분조건이 성립한다.

함수 $h(x)$가 미분가능하지 않다. $\Leftrightarrow$ 함수 $|f(x)-g(x)|$가 미분가능하지 않다.

예제 1

두 함수

$f(x)=x^2e^{-x}$, $g(x)=-x$

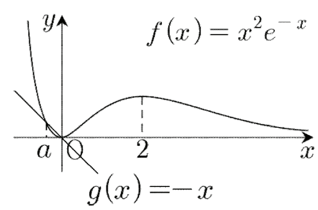
에 대하여 함수 $h(x)$가

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x) \geq g(x)) \\ g(x) & (f(x) < g(x)) \end{cases}$$

일 때, 함수 $h(x)$의 미분가능하지 않은 점의 개수를 구하시오.

풀이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는

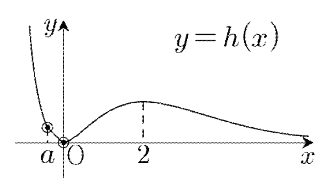


곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 두 교점 중에서 원점이 아닌 점의 x좌표를 a라고 하자.

$f'(a)<-1=g'(a)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

$f'(0)=0>-1=g'(a)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

함수 $h(x)$의 그래프는



(단, ◉는 미분가능하지 않은 점이다.)

위의 그림에서 함수 $h(x)$가 미분가능하지 않은 점이 개수가 2임을 '눈으로' 확인할 수 있다. 이처럼 기하적으로(눈으로) 미분가능성을 판단할 수 있다면 대수적으로(미분계수의 정의 또는 도함수의 극한으로) 증명할 필요는 없다.

답 2개

H. 초월함수의 미분가능성: 미분계수의 정의

▶ 기출 문제 p.152

함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그리기 힘들 때,
함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분가능성은 '미분계수의 정의'로 판단해야 한다.

• 초월함수의 미분가능성 - 대수적인 접근

예제 1

다음 명제가 참임을 증명하여라.

(1) 함수

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이지만, 미분가능하지 않다.

(2) 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 미분가능하다.

증명

(1) (참)

우선 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속임을 증명하자.

$x\neq 0$인 실수 x에 대하여

$$-1\le \sin\frac{1}{x}\le 1$$

이므로

$$-|x|\le x\sin\frac{1}{x}\le |x|$$

$\lim\limits_{x\to 0}|x|=\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=0$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$ 즉, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

그런데 $f(0)=0$이므로

함수의 연속의 정의에 의하여

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이제 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하지 않음을 증명하자.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

는 진동하면서 발산한다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(2) (참)

우선 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속임을 증명하자.

$x\neq 0$인 실수 x에 대하여

$$-1\le \sin\frac{1}{x}\le 1$$

이므로

$$-x^2\le x^2\sin\frac{1}{x}\le x^2$$

$\lim\limits_{x\to 0}x^2=\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=0$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$ 즉, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

그런데 $f(0)=0$이므로

함수의 연속의 정의에 의하여

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이제 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능함을 증명하자.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

($\because$ (1)에서 이를 증명한 바가 있다.)

즉, $f'(0)=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

그러므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이다.

답 풀이 참조

참고

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하게 되는 자연수 n의 최솟값은 2이다.

예제 2

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

일 때, $f'(0)$의 값을 구하여라.

풀이

미분계수의 정의에 의하여

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}\right)$$

$$=1+0=1$$

($\because$ 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여

$-|x|\le x\cos\dfrac{1}{x}\le|x|$이고,

$\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}=0$)

답 1

다음의 기출 문제는 함수의 그래프 개형을 그리는 것이 가능하므로

❶ 그래프의 개형

❷ 도함수의 좌극한, 우극한의 상등

❸ 미분계수의 정의

로 미분가능성에 대한 판단이 가능하다. 이에 대해서는 수학2에서 이미 배운 바 있다.

H. 초월함수의 미분가능성: 합성함수

▶ 기출 문제 p.152

• 합성함수의 미분가능성

〈합성함수의 미분가능성〉

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고,

함수 $g(x)$가 $x=f(a)$에서 미분가능하면

함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다.

증명

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a),$$

$$\lim_{x\to f(a)}\frac{g(x)-g(f(a))}{x-f(a)}=g'(f(a))$$

이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \cdots(*)$$

$$=\lim_{t\to f(a)}\frac{g(t)-g(f(a))}{t-f(a)}\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

($\because$ $t=f(x)$로 두면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이므로 $x\to a$일 때, $t\to f(a)$이다.)

$$=g'(f(a))\times f'(a)$$

미분계수의 정의에 의하여

함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다. ■

위의 명제와 이 명제의 역과 대우를 쓰면 다음과 같다.

❶ (참)

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고,

함수 $g(x)$가 $x=f(a)$에서 미분가능하면

함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다.

그런데 $f'(a)$ 또는 $g'(f(a))$가 존재하지 않아도 (*)의 극한값이 존재하면 함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다. (이에 대해서는 추후에 자세하게 설명한다.)

❷ (거짓) ⇦ ❶의 역명제
함수 $g(f(x))$가 $x=a$에서 미분가능하면
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고,
함수 $g(x)$는 $x=f(a)$에서 미분가능하다.

❸ (참) ⇦ ❶의 대우명제
함수 $g(f(x))$가 $x=a$에서 미분가능하지 않으면
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않거나,
함수 $g(x)$는 $x=f(a)$에서 미분가능하지 않다.

이상을 표로 정리하면 다음과 같다.

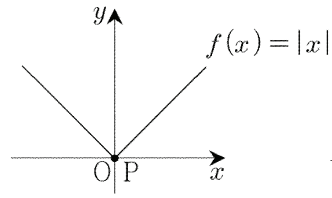
$f(x)$가 $x=a$에서	$g(x)$가 $x=f(a)$에서	$g(f(x))$가 $x=a$에서
미분○	미분○	미분○
미분○	미분×	?
미분×	미분○	?
미분×	미분×	?

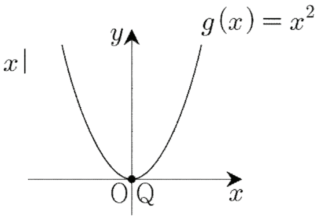
(?=미분가능할 수도 있고, 가능하지 않을 수도 있다.)

몇 가지의 예를 들어보자.

• 합성함수의 미분가능성을 기하적으로 판단할 수 있는 경우

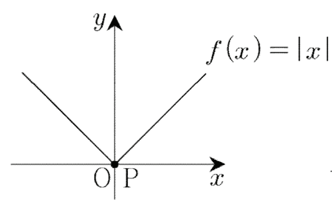
(1) $f(x)=|x|$, $g(x)=x^2$일 때, 합성함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분가능하다.

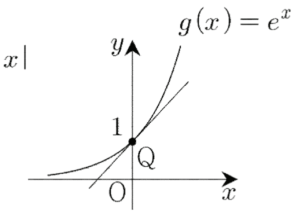




$x\to0-$일 때, $g'(f(x))\times f'(x)=0\times(-1)=0$,
$x\to0+$일 때, $g'(f(x))\times f'(x)=0\times1=0$
이므로 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(2) $f(x)=|x|$, $g(x)=e^x$일 때, 합성함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분불가능하다.

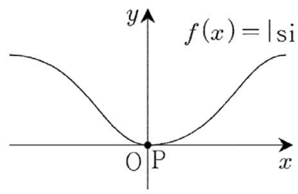


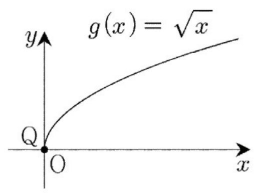


$x\to0-$일 때, $g'(f(x))\times f'(x)=1\times(-1)=-1$,
$x\to0+$일 때, $g'(f(x))\times f'(x)=1\times1=1$
이므로 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분불가능이다.

• 합성함수의 미분가능성을 기하적으로 판단할 수 없는 경우 (즉, 대수적으로 판단해야 하는 경우)

(1) $f(x)=|\sin^3 x|$, $g(x)=\sqrt{x}$ 일 때,
합성함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분가능하다.



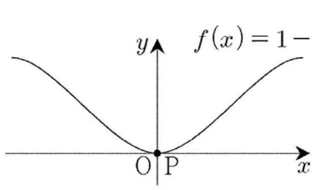


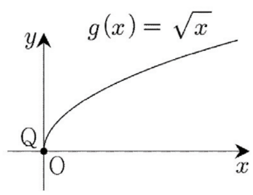
$x\to 0$일 때, $f'(x)\to 0$, $g'(f(x))\to\infty$이므로
$g'(f(x))\times f'(x)=\infty\times 0$이다.
이때, 극한값의 존재유무는 대수적으로 판단해야 한다.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(f(x))-g(f(0))}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{|\sin^3 x|}}{x}=\lim_{x\to 0+}\sqrt{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\sin x}$$
$$=\sqrt{1^2\times 0}=0$$
$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(f(x))-g(f(0))}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{|\sin^3 x|}}{x}=\lim_{x\to 0-}-\sqrt{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times(-\sin x)}$$
$$=-\sqrt{1^2\times 0}=0$$

미분계수의 정의에 의하여 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(2) $f(x)=1-\cos x$, $g(x)=\sqrt{x}$ 일 때,
합성함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분불가능하다.





$x\to 0$일 때, $f'(x)\to 0$, $g'(f(x))\to\infty$이므로
$g'(f(x))\times f'(x)=\infty\times 0$이다.
이때, 극한값의 존재유무는 대수적으로 판단해야 한다.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(f(x))-g(f(0))}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(f(x))-g(f(0))}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0-}-\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

미분계수의 정의에 의하여 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 미분불가능하다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 합성함수 $g(f(x))$가 정의된다고 하자.

$$\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\boxed{\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}\quad\cdots(*)$$

❶ 만약 $x\to a$일 때, 사각형 안의 함수의 극한값이 존재하면 함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다. 즉, $f'(a)$ 또는 $g'(f(a))$가 존재하지 않아도 (*)의 극한값이 존재하면 함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다. ($\because$ 미분계수의 정의)

❷ 만약 $f'(a)$, $g'(f(a))$의 값이 존재하면

$$(*)=\lim_{x\to a}\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{t\to f(a)}\frac{g(t)-g(f(a))}{t-f(a)}\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

($\because$ $t=f(x)$로 두면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이므로 $x\to a$일 때, $t\to f(a)$이다.)

$$=g'(f(a))f'(a)$$

이므로 함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 미분가능하다.

따라서 합성함수의 미분가능성을 판단할 때에는 ❶, ❷의 경우를 모두 생각해야 한다.

$\int e^x \cos x dx$에서

$f(x)=e^x,\ g'(x)=\cos x$ (✪ $f,\ g'$을 각각 지수함수, 삼각함수로 두었다.)

로 놓으면

$f'(x)=e^x,\ g(x)=\sin x$이므로

부분적분법에 의하여

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \qquad \cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \sin x dx\right)$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

이항하여 정리하면

$$2\int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\therefore \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

답 $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

✪ 부분적분법 - 어떤 함수를 f로, 어떤 함수를 g'로 둘 것인가?(3)

두 함수 $y=e^x,\ y=\sin x$ 모두 미분, 적분이 쉽기 때문에

❶ $f(x)=e^x,\ g'(x)=\sin x$으로 두고 부분적분법을 적용해도 좋고,

❷ $f(x)=\sin x,\ g'(x)=e^x$으로 두고 부분적분법을 적용해도 좋다.

❶의 경우:

두 번째 부분적분법 적용할 때, $f(x)=\cos x,\ g'(x)=e^x$으로 두면 처음의 등식으로 되돌아가므로 반드시 $f(x)=e^x,\ g'(x)=\cos x$로 두어야 한다.

즉, 처음에 $f,\ g'$을 각각 지수함수, 삼각함수로 두었다면 두 번째도 $f,\ g'$을 각각 지수함수, 삼각함수로 두어야 한다.

❷의 경우:

$f(x)=e^x,\ g'(x)=\cos x$로 두면 처음의 등식으로 되돌아가므로 반드시 $f(x)=\cos x,\ g'(x)=e^x$로 두어야 한다.

즉, 처음에 $f,\ g'$을 각각 삼각함수, 지수함수로 두었다면 두 번째도 $f,\ g'$을 각각 삼각함수, 지수함수로 두어야 한다.

I. 정적분: 부분적분법(난문)

▶ 기출 문제 p.172

예제 1

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여

$x>0$이면 $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3}{x}$이다.

$\int_1^3 \frac{f''(x)}{f(x)}dx$의 값을 구하시오. (단, 양의 실수 전체의 집합에서 $\frac{f''(x)}{f(x)}$는 연속이다.) [3점]

접근법

(1) 정적분 $\int_1^3 \frac{f''(x)}{f(x)}dx$에서 함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$가 주어졌으므로 문제에서 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하여 함수 $f''(x)$가 포함된 등식을 유도하자.

(2) $\frac{f''(x)}{f(x)}=f''(x)\times\frac{1}{f(x)}$에서 $\frac{1}{f(x)}$보다는 $f''(x)$의 부정적분을 찾기 쉬우므로 $f''(x)$를 도함수 $\frac{1}{f(x)}$를 함수로 두고 부분적분법을 적용한다. 즉, $f''(x)=g'(x)$, $\frac{1}{f(x)}=h(x)$로 두는 것이다.

풀이1

문제에서 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}=\frac{f''(x)}{f(x)}-\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}^2$$

정적분의 부분적분법에 의하여

$$\int_1^3 \frac{f''(x)}{f(x)}dx=\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]_1^3+\int_1^3\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}^2dx$$

$$=\frac{f'(3)}{f(3)}-\frac{f'(1)}{f(1)}+\int_1^3\frac{9}{x^2}dx=-2+\left[-\frac{9}{x}\right]_1^3=4$$

답 4

풀이2

문제에서 주어진 등식에서

$xf'(x)=3f(x)$
양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+xf''(x)=3f'(x)$에서 $f''(x)=\dfrac{2f'(x)}{x}$이므로

$$\int_1^3 \frac{f''(x)}{f(x)}dx=\int_1^3 \frac{2f'(x)}{xf(x)}dx=\int_1^3 \frac{6}{x^2}dx=\left[-\frac{6}{x}\right]_1^3$$
$=4$

답 4

풀이3

문제에서 주어진 등식에서
$\ln|f(x)|=3\ln|x|+C$ (단, C는 적분상수)
정리하면
$|f(x)|=|e^C x^3|$
그런데 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
$x>0$일 때, $f(x)=e^C x^3$ 또는 $f(x)=-e^C x^3$
$f(x)=e^C x^3$일 때,

$$\int_1^3 \frac{f''(x)}{f(x)}dx=\int_1^3 \frac{6}{x^2}dx=\left[-\frac{6}{x}\right]_1^3=4$$

$f(x)=-e^C x^3$일 때에도 마찬가지의 결과를 얻는다.

답 4

예제 2

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 다음을 만족시킨다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=a\displaystyle\int_0^x f(1-t)dt$이다.

$f(1)=1$일 때, $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$의 값을 a로 나타낸 것은? (단, $a\neq 0$이다.) [4점]

① $\dfrac{1}{a^2}$ ② $\dfrac{2}{a^2}$ ③ $\dfrac{3}{a^2}$
④ $\dfrac{4}{a^2}$ ⑤ $\dfrac{5}{a^2}$

풀이

문제에서 주어진 등식에 $x=0$을 대입하면
$f(0)=0$
미분과 적분의 관계에 의하여
$f'(x)=af(1-x)$
x의 자리에 $1-x$를 대입하면
$f(x)=\dfrac{1}{a}f'(1-x)$
정적분의 부분적분법에 의하여

$$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{a}\int_0^1 xf'(1-x)dx$$
$$=\frac{1}{a}[-xf(1-x)]_0^1+\frac{1}{a}\int_0^1 f(1-x)dx$$
$$=0+\frac{1}{a^2}\int_0^1 f'(x)dx=\frac{1}{a^2}[f(x)]_0^1=\frac{f(1)}{a^2}=\frac{1}{a^2}$$

답 ①

참고

$\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$의 값을 구할 때, 교과서의 정적분 서술 체계를 고려해야 한다.
❶ 공식을 적용한다.
❷ 주어진 식을 전개한다.
❸ 치환적분을 한다.
❹ 부분적분을 한다.
❶, ❷, ❸이 모두 가능하지 않으므로 ❹로 정적분의 값을 구해야 한다.
그런데 문제에서 주어진 항등식의 양변을 미분하면

$f'(x)=af(1-x)$, 즉 $f(x)=\frac{1}{a}f'(1-x)$

(함수 $f(x)$를 함수 $f'(x)$에 대한 식으로 표현할 수 있음을 본 것이다.)

이므로

$$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{a}\int_0^1 xf'(1-x)dx$$

우변에서 $g(x)=x$, $h'(x)=f'(1-x)$로 둘 수 있으므로 부분적분법을 적용하여 정적분의 값을 구하면 된다.

예제 3

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f'(x)=1$이다.

(나) 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고, 함수 $f^{-1}(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f(a)=b(b\neq1)$이면 $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{1-b}$이다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록이면, 곡선 $y=f(x)$는 제3사분면을 지난다.

ㄷ. $\int_0^\pi f(x)\cos x dx=\frac{f(0)+f(\pi)}{2}-1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

ㄱ. (참)

$f(a)=b$, $f^{-1}(b)=a$이고, 역함수의 미분법에 의하여

$f'(a)\times(f^{-1})'(b)=1$

$\therefore$ $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{1-f(a)}$ ($\because$ (가))

$=\frac{1}{1-b}$

ㄴ. (거짓)

조건 (가)에서 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)+f''(x)=0$

곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록이므로

$f''(x)=-f'(x)\geq 0$ 즉, $f'(x)\leq 0$

문제에서 주어진 등식에서

$f'(x)=1-f(x)\leq 0$ 즉, $f(x)\geq 1$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 제3사분면을 지날 수 없다.

ㄷ. (참)

정적분의 부분적분법에 의하여

$$\int_0^\pi f(x)\cos x dx$$

$$=\int_0^\pi (1-f'(x))\cos x dx$$

$$=\int_0^\pi \cos x dx-\int_0^\pi f'(x)\cos x dx$$

$$=0-\int_0^\pi f'(x)\cos x dx$$

$=-[f(x)\cos x]_0^\pi-\int_0^\pi f(x)\sin x dx$

$=f(0)+f(\pi)-\int_0^\pi f(x)\sin x dx$

$=f(0)+f(\pi)-\int_0^\pi (1-f'(x))\sin x dx$

$=f(0)+f(\pi)-\int_0^\pi \sin x dx+\int_0^\pi f'(x)\sin x dx$

$=f(0)+f(\pi)-2+\int_0^\pi f'(x)\sin x dx$

$=f(0)+f(\pi)-2+[f(x)\sin x]_0^\pi-\int_0^\pi f(x)\cos x dx$

$=f(0)+f(\pi)-2-\int_0^\pi f(x)\cos x dx$

정리하면

$\therefore \int_0^\pi f(x)\cos x dx=\frac{f(0)+f(\pi)}{2}-1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

참고

보기 ㄷ에서 $\int_0^\pi f(x)\cos x dx$의 값을 구할 때, 교과서의 정적분 서술 체계를 고려해야 한다.

❶ 공식을 적용한다.
❷ 주어진 식을 전개한다.
❸ 치환적분을 한다.
❹ 부분적분을 한다.

❶, ❷, ❸이 모두 가능하지 않으므로 ❹로 정적분의 값을 구해야 한다.

조건 (가)에서

$f(x)=1-f'(x)$

이므로 즉, 함수 $f(x)$를 함수 $f'(x)$에 대한 식으로 표현할 수 있으므로 $\int_0^\pi f(x)\cos x dx$를 $\int_0^\pi f'(x)\cos x dx$를 포함한 식으로 바꿀 수 있다. 이제 정적분의 부분적분법을 적용하여 보기 ㄷ이 참임을 증명하면 된다.

예제 4

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $xf'(x)=\sin^3 x$

(나) $f(\pi)=a$, $f(2\pi)=b$

$\int_\pi^{2\pi} f(x)dx$의 값을 a와 b로 나타낸 것은? (단, $a\neq 0$, $b\neq 0$이다.) [4점]

① $(b-a)\pi+\frac{4}{3}$
② $(b-2a)\pi+\frac{4}{3}$
③ $(2b-a)\pi+\frac{6}{5}$
④ $(2b-a)\pi+\frac{4}{3}$
⑤ $(2b-a)\pi+\frac{3}{2}$

풀이

정적분의 부분적분법에 의하여

$\int_\pi^{2\pi} f(x)dx=[xf(x)]_\pi^{2\pi}-\int_\pi^{2\pi} xf'(x)dx$

$=2\pi b-a\pi-\int_\pi^{2\pi}\sin^3 x\,dx$ ($\because$ (가), (나))

$=\pi(2b-a)-\int_\pi^{2\pi}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$

$=\pi(2b-a)+\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt$

($\because$ 정적분의 치환적분법)

$=\pi(2b-a)+\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1}=\pi(2b-a)+\frac{4}{3}$

답 ④

참고

$\int_\pi^{2\pi} f(x)dx$의 값을 구할 때, 교과서의 정적분 서술 체계를 고려해야 한다.

❶ 공식을 적용한다.
❷ 주어진 식을 전개한다.
❸ 치환적분을 한다.
❹ 부분적분을 한다.

❶, ❷, ❸이 모두 가능하지 않으므로 ❹로 정적분의 값을 구해야 한다.

조건 (가)에서

$xf'(x)=\sin^3 x$

가 주어졌으므로

$$\int 1 \cdot f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$$

를 떠올릴 수 있어야 한다.

이제 정적분의 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구하면 된다.

I. 정적분: 텔레스코핑

▶ 기출 문제 p.175

• 망원급수(telescoping series)란?

수학에서 망원급수란 급수에서 이웃한 항들이 서로 상쇄되면서 몇 개의 항만 남고 전부 사라지는 것을 말한다.

망원급수의 예는 다음과 같다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\left(\boxed{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} \boxed{- \frac{1}{n+1}}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$ ⇦ 머리와 꼬리만 남고 모두 소거된다.

$$= 1$$

수능에 출제되는 정적분 문제 중에는 ‘이웃한 항들이 서로 상쇄되면서 몇 개의 항만 남고 전부 사라지는 합’의 계산법을 묻는 문제가 적지 않다.

이 주제에 대한 예를 하나 풀어보자.

예제 1

함수 $f(x)$는 다음의 두 조건을 만족시킨다.

(가) $t \geq 1$일 때, $\dfrac{f(t)}{t} - \dfrac{f(t+1)}{t+1} = \dfrac{1}{t}$

(나) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(t)}{t}dt = a$ (단, a는 상수)

이때, $\displaystyle\int_1^5 \frac{f(t)}{t}dt$의 값을 구하시오.

풀이

조건 (가)에서

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt - \int_1^x \frac{f(t+1)}{t+1}dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt,$$

$$\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt - \int_2^{x+1} \frac{f(t)}{t}dt = \ln x,$$

$$\int_1^2 \frac{f(t)}{t}dt - \int_x^{x+1} \frac{f(t)}{t}dt = \ln x, \text{ 즉}$$

$$\int_x^{x+1} \frac{f(t)}{t}dt = a - \ln x \ (\because (\text{나})) \qquad \cdots(*)$$

(*)에 $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$를 대입하면

$$\int_1^2 \frac{f(t)}{t}dt = a,\quad \int_2^3 \frac{f(t)}{t}dt = a - \ln 2,$$

$$\int_3^4 \frac{f(t)}{t}dt = a - \ln 3,\quad \int_4^5 \frac{f(t)}{t}dt = a - \ln 4$$

위의 등식을 변변히 모두 합하면

$$\therefore \int_1^5 \frac{f(t)}{t}dt = 4a - \ln 24$$

답 $4a - \ln 24$

I. 정적분: 선대칭

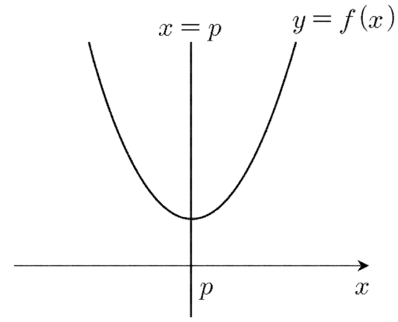
▶ 기출 문제 p.176

선대칭 함수와 점대칭 함수는 정적분의 치환적분법을 적용해 볼 수 있는 좋은 소재들이다.

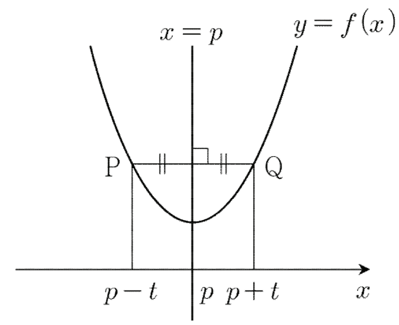
선대칭 함수 중에서 y축에 대칭인 함수는 우함수,
점대칭 함수 중에서 원점에 대칭인 함수는 기함수라고 한다.

- 선대칭 함수

함수 f의 정의역에 속하는 모든 x에 대해서
$f(p+x) = f(p-x)$ ($\Leftrightarrow f(x) = f(2p-x)$)
가 성립하면 함수 f의 그래프는 직선 $x=p$에 대칭이다.



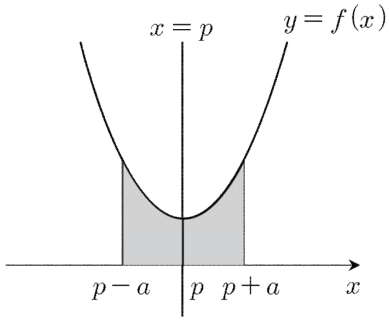
예를 들어 양수 t에 대하여
두 점 $\mathrm{P}(p-t,\ f(p-t))$, $\mathrm{Q}(p+t,\ f(p+t))$는
직선 $x=p$에 대하여 대칭임을 관찰할 수 있다.



$t=0$, $t<0$인 경우도 마찬가지이다.
함수 f의 정의역의 모든 실수 x에 대하여

$f(x) = f(2p-x)$이면 $\displaystyle\int_{p-a}^{p+a} f(x)dx = 2\int_p^{p+a} f(x)dx$

이다.
이 명제가 참임을 그래프를 이용하여 확인할 수도 있고, 정적분의 치환적분법을 이용하여 대수적으로 증명할 수도 있다.



위의 그림에서 색칠된 두 도형 와 는 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다. 즉,

$$\int_{p-a}^{p} f(x)dx=\int_{p}^{p+a} f(x)dx$$

이므로

$$\int_{p-a}^{p+a} f(x)dx=\int_{p-a}^{p} f(x)dx+\int_{p}^{p+a} f(x)dx$$

$$=2\int_{p}^{p+a} f(x)dx$$

이제 정적분의 치환적분법을 이용하여 대수적으로 증명하자.
$2p-x=t$로 두면 $-dx=dt$이고,
$x=p-a$일 때 $t=p+a$, $x=p$일 때 $t=p$이다.

$$\int_{p-a}^{p} f(x)dx$$

$$=\int_{p-a}^{p} f(2p-x)dx$$

(⇦ ❶ 문제에서 주어진 항등식 적용)

$$=-\int_{p+a}^{p} f(t)dt$$

(⇦ ❷ 정적분의 치환적분법 적용)

$$=\int_{p}^{p+a} f(t)dt$$

정적분의 성질에 의하여

$$\int_{p-a}^{p+a} f(x)dx=\int_{p-a}^{p} f(x)dx+\int_{p}^{p+a} f(x)dx$$

(⇦ ❸ 정적분의 성질 적용)

$$=\int_{p}^{p+a} f(t)dt+\int_{p}^{p+a} f(x)dx=2\int_{p}^{p+a} f(x)dx$$

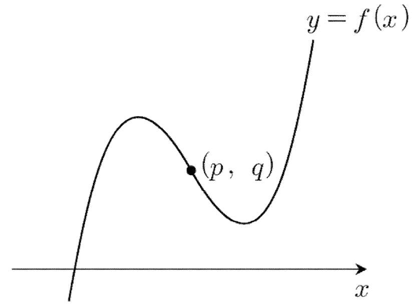
위의 증명과정은 ❶, ❷, ❸의 세 과정으로 나눌 수 있다. 수능에는 이 세 과정을 의식적으로 적용해서 풀어야 하는 문제가 자주 출제된다.

• 점대칭 함수

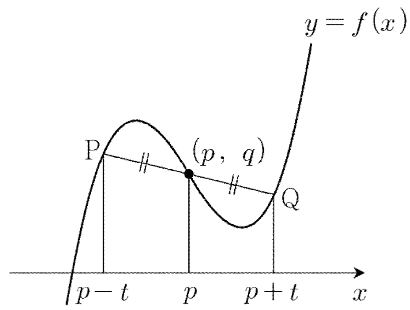
함수 f의 정의역에 속하는 모든 x에 대해서

$$\frac{f(p+x)+f(p-x)}{2}=q \ (\Leftrightarrow f(x)+f(2p-x)=2q)$$

가 성립하면 함수 f의 그래프는 점 $(p,\ q)$에 대칭이다.



예를 들어 양수 t에 대하여
두 점 $\mathrm{P}(p-t,\ f(p-t))$, $\mathrm{Q}(p+t,\ f(p+t))$이
점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭임을 관찰할 수 있다.

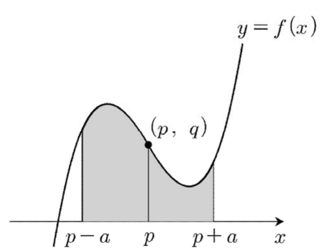


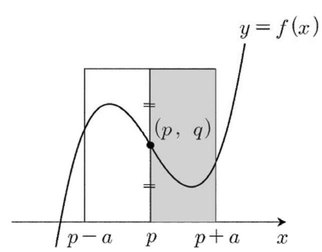
$t=0$, $t<0$인 경우도 마찬가지이다.

함수 f의 정의역의 모든 실수 x에 대하여

$f(x)+f(2p-x)=2q$이면 $\displaystyle\int_{p-a}^{p+a} f(x)dx=2aq$이다.

이 명제가 참임을 그래프를 이용하여 확인할 수도 있고, 정적분의 치환적분법을 이용하여 대수적으로 증명할 수도 있다.





위의 그림에서 색칠된 도형 을 점 $(p,\ q)$를 중심으로 180° 회전시켜서 색칠된 도형 의 위에 붙이면 직사각형이 만들어진다. 이때, 직사각형의 밑변과 높이는 각각 a, $2q$이다. (또는 '$2aq=2a\times q$=(밑변의 길이)×높이' 인 직사각형을 생각할 수도 있다.)

따라서

$$\int_{p-a}^{p+a} f(x)dx=2aq$$

이제 정적분의 치환적분법을 이용하여 대수적으로 증명하자.

$2p-x=t$로 두면 $-dx=dt$이고,

$x=p-a$일 때 $t=p+a$, $x=p$일 때 $t=p$이다.

$$\int_{p-a}^{p} f(x)dx$$

$$=\int_{p-a}^{p} \{2q-f(2p-x)\}dx$$

(⇦ ❶ 문제에서 주어진 항등식 적용)

$$=-\int_{p+a}^{p} \{2q-f(t)\}dt$$

(⇦ ❷ 정적분의 치환적분법 적용)

$$=\int_{p}^{p+a} \{2q-f(t)\}dt$$

정적분의 성질에 의하여

$$\int_{p-a}^{p+a} f(x)dx=\int_{p-a}^{p} f(x)dx+\int_{p}^{p+a} f(x)dx$$

(⇦ ❸ 정적분의 성질 적용)

$$=\int_{p}^{p+a} \{2q-f(t)\}dt+\int_{p}^{p+a} f(x)dx=\int_{p}^{p+a} 2qdx$$

$=2aq$

위의 증명과정은 ❶, ❷, ❸의 세 과정으로 나눌 수 있다. 수능에는 이 세 과정을 의식적으로 적용해서 풀어야 하는 문제가 자주 출제된다.

예제 1

다음 명제들이 참임을 그래프를 이용하여 확인하시오. (단, $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.)

(1) $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$이다.

(2) $f(x)$가 우함수이면 $\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{-b}^{-a} f(x)dx$이다.

(3) $f(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$이다.

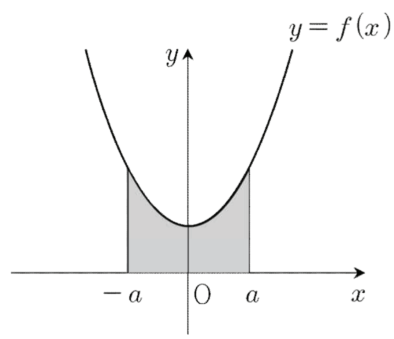
(4) $f(x)$가 기함수이면 $\int_{a}^{b} f(x)dx=-\int_{-b}^{-a} f(x)dx$이다.

(5) 함수 f의 정의역의 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(2p-x)$이면 $\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{2p-b}^{2p-a} f(x)dx$이다.

(6) 함수 f의 정의역의 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(2p-x)=2q$이면 $\int_{a}^{b} f(x)dx+\int_{2p-b}^{2p-a} f(x)dx=2(b-a)q$이다.

풀이

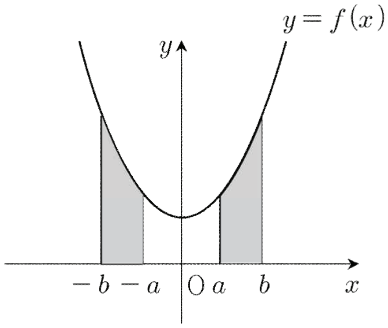
(1) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

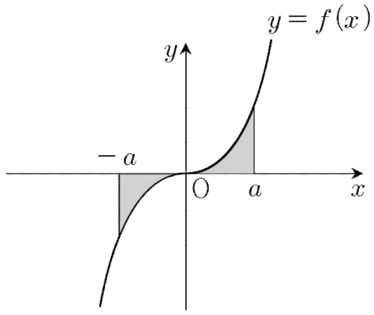
(2) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$$\therefore \int_a^b f(x)dx=\int_{-b}^{-a} f(x)dx$$

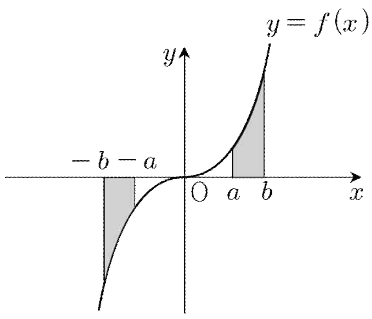
(3) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$$\therefore \int_{-a}^a f(x)dx=0$$

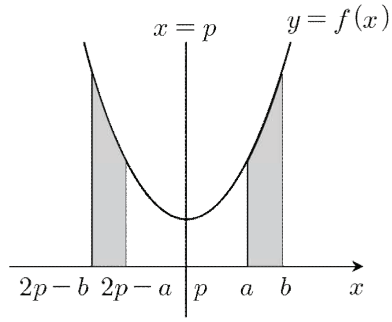
(4) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$$\therefore \int_a^b f(x)dx=-\int_{-b}^{-a} f(x)dx$$

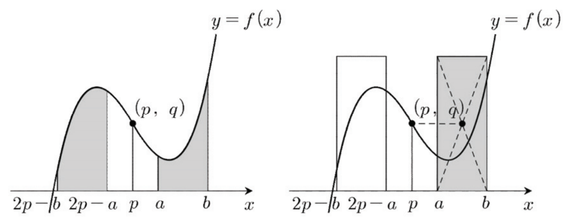
(5) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$$\therefore \int_a^b f(x)dx=\int_{2p-b}^{2p-a} f(x)dx$$

(6) (참)



위의 그림에서 색칠된 도형 을 점 $(p,\ q)$를 중심으로 180° 회전시켜서 색칠된 도형 의 위에 붙이면 직사각형이 만들어진다. 이때, 직사각형의 밑변과 높이는 각각 $b-a$, $2q$이다.

$$\therefore \int_a^b f(x)dx+\int_{2p-b}^{2p-a} f(x)dx=2(b-a)q$$

답 풀이 참조

참고

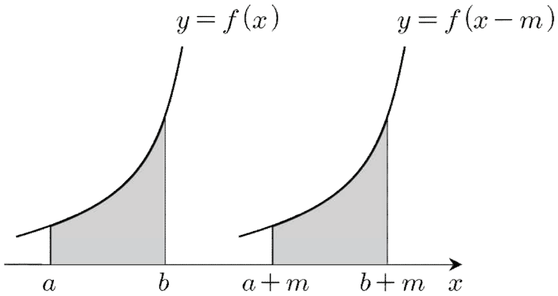
미분법과 관련된 기함수, 우함수의 명제들은 다음과 같다.
(단, 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$는 미분가능하다.)

1. $f(x)$가 기함수이면 $f'(x)$는 우함수이다. (참)
2. $f(x)$가 우함수이면 $f'(x)$는 기함수이다. (참)
3. $f(x)$가 기함수이면 $f'(0)=0$이다. (거짓)
(반례: $f(x)=x^3-3x$)
4. $f(x)$가 우함수이면 $f'(0)=0$이다. (참)

• 평행이동

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{a+m}^{b+m} f(x-m)dx = \int_a^b f(x)dx$$



정적분의 치환적분법을 이용하여 위의 등식을 증명하자.

$x-m=t$로 두면 $dx=dt$이고,

$x=a+m$일 때, $t=a$, $x=b+m$일 때, $t=b$이다.

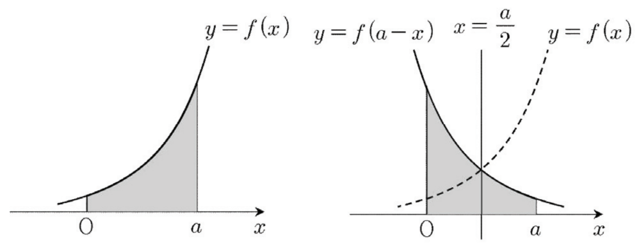
$$\int_{a+m}^{b+m} f(x-m)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

• 대칭이동

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^a f(a-x)dx = \int_0^a f(x)dx$$

이 명제가 참임을 그래프를 이용하여 확인할 수도 있고, 정적분의 치환적분법을 이용하여 대수적으로 증명할 수도 있다.



함수 $f(x)$의 그래프를 직선 $x=\dfrac{a}{2}$에 대하여 대칭이동시키면 함수 $f(a-x)$의 그래프와 일치하므로, 위의 그림에서 주어진 명제가 참임을 확인할 수 있다.

이제 정적분의 치환적분법을 이용하여 대수적으로 증명하자.

$a-x=t$로 두면 $-dx=dt$이고,

$x=0$일 때 $t=a$, $x=a$일 때 $t=0$이다.

$$\int_0^a f(a-x)dx = -\int_a^0 f(t)dt = \int_0^a f(x)dx$$

예제 2

다음 명제들이 참임을 그래프를 이용하여 확인하시오. (단, $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.)

(1) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_{-b}^{-a} f(-x)dx$

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=-\int_{-b}^{-a} -f(-x)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^a f(-x)dx$

$\displaystyle=\int_0^a \{f(x)+f(-x)\}dx=\int_{-a}^0 \{f(x)+f(-x)\}dx$

(4) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_{2p-b}^{2p-a} f(2p-x)dx$

(5) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$

$\displaystyle=\int_a^{\frac{a+b}{2}} \{f(x)+f(a+b-x)\}dx$

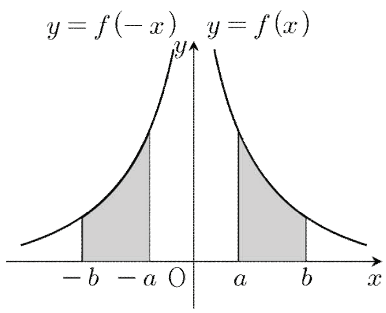
$\displaystyle=\int_{\frac{a+b}{2}}^b \{f(x)+f(a+b-x)\}dx$

(6) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx+\int_{2p-b}^{2p-a} \{2q-f(2p-x)\}dx$

$=2(b-a)q$

풀이

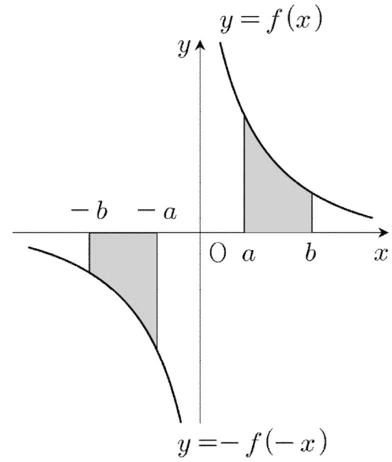
(1) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$\therefore \displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_{-b}^{-a} f(-x)dx$

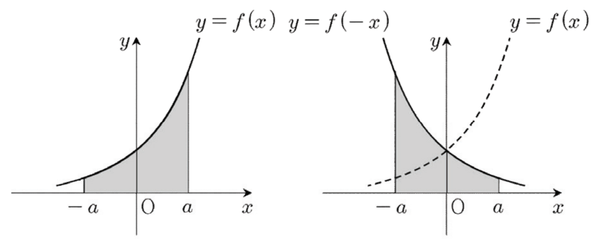
(2) (참)



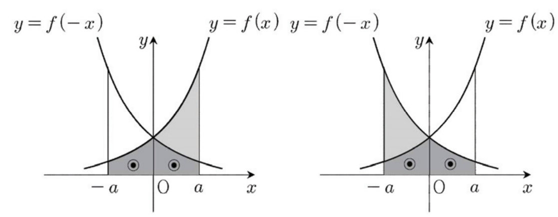
위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

$\therefore \displaystyle\int_a^b f(x)dx=-\int_{-b}^{-a} -f(-x)dx$

(3) (참)



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.



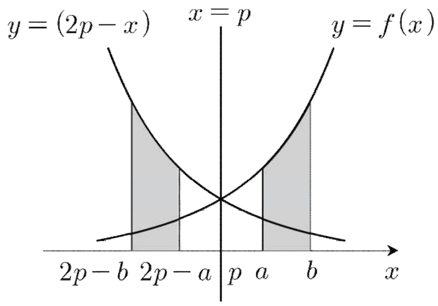
위의 그림에서 색칠된 네 도형(◉)은 모두 합동이므로 문제에서 주어진 등식이 성립함을 알 수 있다.

$\therefore \displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^a f(-x)dx$

$\displaystyle=\int_0^a \{f(x)+f(-x)\}dx$

$\displaystyle=\int_{-a}^0 \{f(x)+f(-x)\}dx$

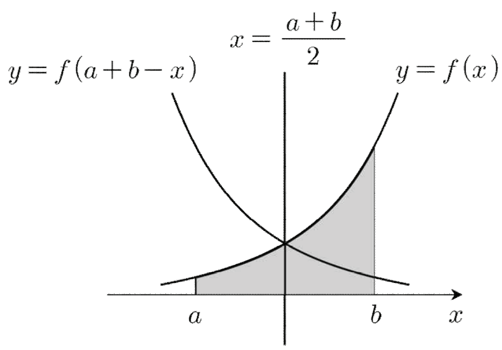
(4) (참)

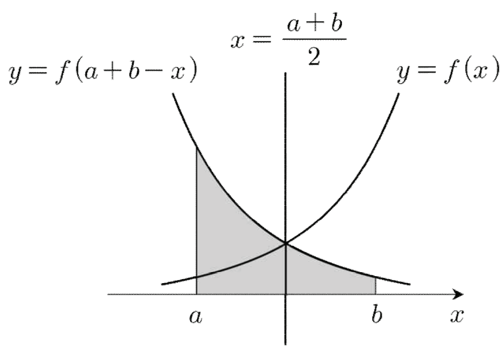


위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.

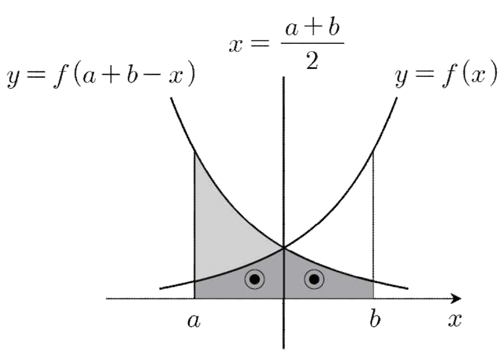
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{2p-b}^{2p-a} f(2p-x)dx$$

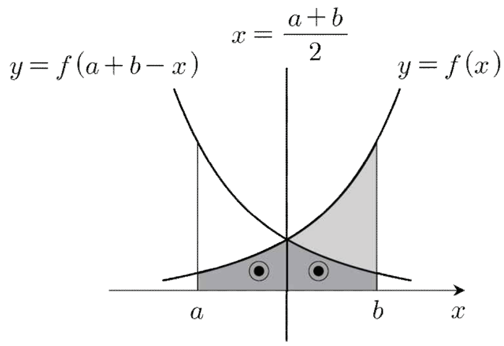
(5) (참)





위의 그림에서 색칠된 두 도형은 서로 합동이므로, 이 두 도형의 넓이는 같다.





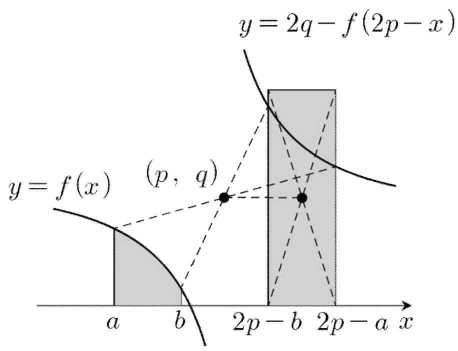
위의 그림에서 색칠된 네 도형(◉)은 모두 합동이므로 문제에서 주어진 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \{f(x)+f(a+b-x)\}dx$$

$$= \int_{\frac{a+b}{2}}^b \{f(x)+f(a+b-x)\}dx$$

(6) (참)



위의 그림에서 색칠된 도형 을 점 $(p,\ q)$를 중심으로 180° 회전시켜서 색칠된 도형 의 위에 붙이면 직사각형이 만들어진다. 이때, 직사각형의 밑변과 높이는 각각 $b-a$, $2q$이다.

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{2p-b}^{2p-a} \{2q-f(2p-x)\}dx = 2(b-a)q$$

답 풀이 참조

- **확대축소**

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(kx)dx=\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f(x)dx \text{ (단, } k\neq 0)$$

정적분의 치환적분법을 이용하여 위의 명제가 참임을 증명하자.

$kx=t$로 두면, $kdx=dt$이고,

$x=a$일 때 $t=ka$, $x=b$일 때 $t=kb$이다.

정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_a^b f(kx)dx=\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f(t)dt=\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f(x)dx$$

예제 3

다음 명제가 참임을 증명하시오. (단, $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.)

$$\int_a^b f(x)dx=\int_0^{b-a} f(x+a)dx$$

$$=(b-a)\int_0^1 f((b-a)x+a)dx$$

증명

$x+a=t$로 두면 $dx=dt$이고,

$x=0$일 때 $t=a$, $x=b-a$일 때 $t=b$이다.

정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_0^{b-a} f(x+a)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(x)dx$$

$(b-a)x+a=t$로 두면 $(b-a)dx=dt$이고,

$x=0$일 때 $t=a$, $x=1$일 때 $t=b$이다.

정적분의 치환적분법에 의하여

$$(b-a)\int_0^1 f((b-a)x+a)dx=\int_a^b f(t)dt$$

$$=\int_a^b f(x)dx$$

따라서 주어진 명제는 참이다.

답 풀이 참조

참고

ㄱ에서 적분구간 $[a,\ b]$: $\int_a^b f(x)dx$

ㄴ에서 적분구간 $[0,\ b-a]$: $\int_0^{b-a} f(x+a)dx$

ㄷ에서 적분구간 $[0,\ 1]$: $(b-a)\int_0^1 f((b-a)x+a)dx$

ㄱ을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 ㄴ이다.

ㄴ을 (원점을 기준으로) x축의 방향으로 $\frac{1}{b-a}$배 하면 ㄷ이다.

I. 정적분: 점대칭

▶ 기출 문제 p.177

예제 1

실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 다음의 조건이 성립한다. (단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.)

(가) 임의의 실수 x에 대하여
$f(x)=f(a-x)$
(나) 임의의 실수 x에 대하여
$g(x)+g(a-x)=b$

옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\int_0^a f(x)dx=2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx$

ㄴ. $\int_0^a f(x)g(x)dx=b\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx$

ㄷ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi x-2x^2)\dfrac{\cos 2x+1}{2}dx=\dfrac{\pi^3}{48}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

풀이

곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=\dfrac{a}{2}$에 대하여 대칭이고,

곡선 $y=g(x)$는 점 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.

ㄱ. (참)
정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx+\int_{\frac{a}{2}}^a f(a-x)dx(\because (가))\cdots(*)$$

$t=a-x$로 두면 $dt=-dx$,

$x=\dfrac{a}{2}$일 때 $t=\dfrac{a}{2}$이고, $x=a$일 때 $t=0$이다.

정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_{\frac{a}{2}}^a f(a-x)dx=-\int_{\frac{a}{2}}^0 f(t)dt=\int_0^{\frac{a}{2}} f(t)dt$$

이를 (*)에 대입하면

$$\therefore \int_0^a f(x)dx=\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx+\int_0^{\frac{a}{2}} f(t)dt$$

$$=2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx$$

ㄴ. (참)
정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^a f(x)g(x)dx=\int_0^a f(x)\{b-g(a-x)\}dx$$

$(\because$ (나))

$$=b\int_0^a f(x)dx-\int_0^a f(x)g(a-x)dx$$

$$=b\int_0^a f(x)dx+\int_a^0 f(a-t)g(t)dt$$

($\because$ 정적분의 치환적분법)

$$=b\int_0^a f(x)dx-\int_0^a f(x)g(x)dx(\because (가))$$

정리하면

$$\int_0^a f(x)g(x)dx=\frac{b}{2}\int_0^a f(x)dx$$

$$\therefore \int_0^a f(x)g(x)dx=\frac{b}{2}\times 2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx$$

$$=b\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx(\because ㄱ)$$

ㄷ. (참)

곡선 $y=\pi x-2x^2$은 직선 $x=\dfrac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=\dfrac{1}{2}\cos 2x$가 점 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 0\right)$에 대하여 대칭이므로,

곡선 $y=\dfrac{\cos 2x+1}{2}$은 점 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.

$f(x)=\pi x-2x^2,\ g(x)=\dfrac{\cos 2x+1}{2}$로 두면

$a=\dfrac{\pi}{2},\ b=1$

ㄴ의 결과에 의하여

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi x-2x^2)\frac{\cos 2x+1}{2}dx$$

$$=1\times\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\pi x-2x^2)dx=\left[\frac{\pi}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^3}{48}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

참고

ㄱ. (참)

곡선 $y=f(x)$가 직선 $x=\frac{a}{2}$에 대하여 대칭이므로 주어진 등식이 참임을 기하적으로 알 수 있다.

ㄴ. (참)

조건 (나)에서 주어진 등식에서

$g(x)=b-g(a-x)$

이므로 이를 보기 ㄴ에서 주어진 등식의 좌변에 대입한다.

$$\int_0^a f(x)g(x)dx=\int_0^a f(x)\{b-g(a-x)\}dx$$

이처럼 정적분 계산이 더 이상 진행되지 않을 때에는 피적분함수를 전개해야 한다. (그래서 조건 (나)에서 주어진 등식을 변형하여 대입한 것이다.)

$$=b\int_0^a f(x)dx-\int_0^a f(x)g(a-x)dx$$

$$=b\int_0^a f(x)dx+\int_a^0 f(a-t)g(t)dt$$

($a-x=t$로 치환하면 $f(x)$는 $f(a-t)$로 바뀌고 조건 (가)에 의하여 다시 $f(a-t)$를 $f(t)$로 바꿀 수 있다. 그리고 $g(a-x)$는 $g(t)$로 바뀐다. 보기 ㄴ의 좌변의 피적분함수가 $f(x)g(x)$이므로 이와 같은 식 변형을 하는 것이다.)

$$=b\int_0^a f(x)dx-\int_0^a f(x)g(x)dx(\because (가))$$

정리하면

$$\int_0^a f(x)g(x)dx=\frac{b}{2}\int_0^a f(x)dx$$

$$\therefore \int_0^a f(x)g(x)dx=\frac{b}{2}\times 2\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx$$

$$=b\int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx(\because ㄱ)$$

이처럼 수능에서 출제되는 참, 거짓 판단 문제의 경우 앞선 보기의 참인 결과로 뒤에 오는 보기의 참, 거짓을 판단해야 한다.

ㄷ. (참)

좌변에서 주어진 함수 $y=\pi x-2x^2$이 선대칭함수이므로 $f(x)=\pi x-2x^2$으로 두어야 한다는 생각을 할 수 있어야 한다. 이제 함수 $y=\frac{\cos 2x+1}{2}$이 점대칭함수임을 확인한 후 이를 $g(x)$로 두고 보기 ㄴ의 결과를 이용하여 정적분의 값을 구하면 된다.

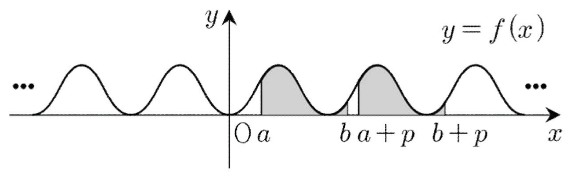
I. 정적분: 주기성

▶ 기출 문제 p.178

• 주기

연속함수 $f(x)$의 주기가 p일 때,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a+p}^{b+p} f(x)dx$$



정적분의 치환적분법을 이용하여 위의 명제가 참임을 증명하자.

$x+p=t$로 두면, $dx=dt$이고,

$x=a$일 때 $t=a+p$, $x=b$일 때 $t=b+p$이다.

정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x+p)dx=\int_{a+p}^{b+p} f(t)dt$$

$$=\int_{a+p}^{b+p} f(x)dx$$

그리고 함수 $f(x)$가 주기가 p이므로

모든 실수 x에 대하여 $f(x+np)=f(x)$이다. 이때, 아래의 등식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x+np)dx \text{ (단, } n\text{은 자연수)}$$

예제 1

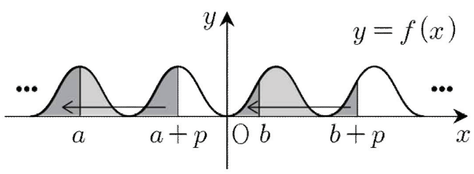
다음 명제들이 참임을 그래프를 이용하여 확인하시오. (단, 연속함수 $f(x)$의 주기는 p이고, n은 자연수이다.)

(1) $\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_b^{b+p} f(x)dx$

(2) $\displaystyle\int_a^{a+np} f(x)dx=n\int_0^{p} f(x)dx$

풀이

(1) (참)

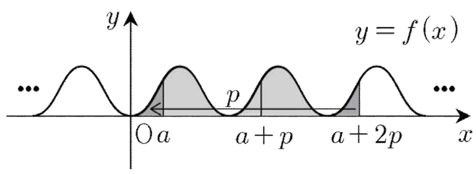


평행이동의 관점에서 문제에서 주어진 명제가 참임을 알 수 있다.

$\therefore \displaystyle\int_a^{a+p} f(x)dx=\int_b^{b+p} f(x)dx$

(2) (참)

예를 들어 $n=2$인 경우는 아래 그림과 같다.



평행이동의 관점에서 문제에서 주어진 명제가 참임을 알 수 있다.

$\therefore \displaystyle\int_a^{a+np} f(x)dx=n\int_0^{p} f(x)dx$

답 풀이 참조

예제 2

함수 $f(x)$는 다음을 만족시킨다.

(가) $0\le x\le 1$일 때, $f(x)=\sin\pi x$

(나) 모든 실수 x에 대하여

$f(x+1)=f(x)$

이때, $\displaystyle\int_1^3 xf(x)dx$의 값을 구하시오.

풀이

정적분의 치환적분법, 부분적분법을 적용하여 문제를 해결하자.

$\displaystyle\int_0^3 xf(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx+\int_1^2 xf(x)dx$

$\displaystyle+\int_2^3 xf(x)dx$

$\displaystyle=\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1 (x+1)f(x+1)dx$

$\displaystyle+\int_0^1 (x+2)f(x+2)dx$

$\displaystyle=\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1 (x+1)f(x)dx$

$\displaystyle+\int_0^1 (x+2)f(x)dx$

$\displaystyle=\int_0^1 (3x+3)f(x)dx$

$\displaystyle=\left[-(3x+3)\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1+\int_0^1 \frac{3}{\pi}\cos\pi x dx$

$\displaystyle=\frac{9}{\pi}$

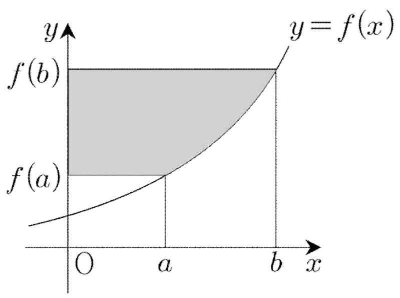
답 $\dfrac{9}{\pi}$

I. 정적분: 역함수

▶ 기출 문제 p.178

도함수가 연속인 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 일대일 함수일 때(즉, 단조증가 또는 단조감소일 때), 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 두 직선 $y=f(a)$, $y=f(b)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라고 하면

$$S=\int_a^b x|f'(x)|dx$$



증명

정적분의 치환적분법을 적용하자.

(1) $f(x)$가 단조증가인 경우 (즉, $f'(x)>0$)

$f(x)=y$로 두면 $x=f^{-1}(y)$, $f'(x)dx=dy$,

$x=a$일 때 $y=f(a)$, $x=b$일 때 $y=f(b)$

$$S=\int_a^b xf'(x)dx=\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy$$

(2) $f(x)$가 단조감소인 경우 (즉, $f'(x)<0$)

$f(x)=y$로 두면 $x=f^{-1}(y)$, $f'(x)dx=dy$,

$x=a$일 때 $y=f(a)$, $x=b$일 때 $y=f(b)$

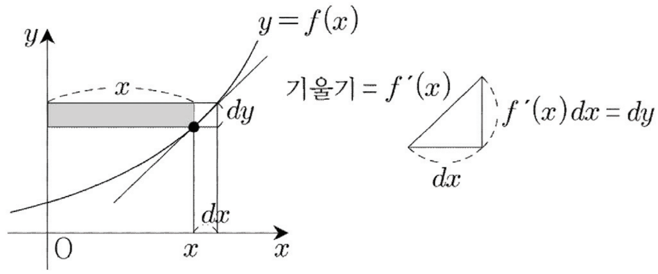
$$S=\int_a^b x\{-f'(x)\}dx=-\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy$$

$$=\int_{f(b)}^{f(a)} f^{-1}(y)dy$$

(1), (2)에서 증명 끝.

〈기하적 해석〉

구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$가 증가한다고 하자.



점 $(x, f(x))$에서의 접선은 $x=x$의 좌우에서 곡선 $y=f(x)$에 한없이 가까워지므로 위의 그림처럼 $f'(x)dx$는 직사각형의 한 변의 길이이다. 이때, $xf'(x)dx$는 직사각형의 넓이이고, x가 a에서 b까지 변할 때, 이 직사각형들의 넓이를 모두 합하면

$$S=\int_a^b xf'(x)dx$$

와 같아진다.

구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$가 감소하면

$S=\int_a^b x\{-f'(x)\}dx$ (이때, $-f'(x)$인 이유는 $dy>0$을 만들어주기 위함이다.)

이다. 따라서

$$S=\int_a^b x|f'(x)|dx$$

이다.

〈역함수와 관련된 미적분 문제에 대한 전형적인 풀이〉

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때,

(1) 함수 $f(x)$가 일대일대응임을 이용한다. ($\Leftrightarrow$ 함수 $f(x)$가 증가함수 또는 감소함수임을 이용한다.)

(2) 역함수의 성질 $f(g(x))=x$, $g(f(x))=x$를 이용한다.

(3) 역함수의 성질 $f(a)=b \Leftrightarrow g(b)=a$를 이용한다.

(4) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

예제 1

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 하자.
$f(a)=b$, $f(c)=d$일 때, 다음의 등식이 성립함을 증명하시오.

$$\int_a^c xf(x)dx=\frac{d\cdot c^2}{2}-\frac{b\cdot a^2}{2}-\frac{1}{2}\int_b^d\{g(t)\}^2dt$$

증명1

$x=g(t)$로 두면 $dx=g'(t)dt$이고,
$x=a$일 때 $t=f(a)=b$,
$x=c$일 때 $t=f(c)=d$이다.
정적분의 치환적분법과 부분적분법에 의하여

$$\therefore \int_a^c xf(x)dx=\int_b^d g(t)tg'(t)dt \ (\because f(x)=t)$$

$$=\left[t\times\frac{1}{2}\{g(t)\}^2\right]_b^d-\frac{1}{2}\int_b^d\{g(t)\}^2dt$$

$$=\frac{d(g(d))^2}{2}-\frac{b(g(b))^2}{2}-\frac{1}{2}\int_b^d\{g(t)\}^2dt$$

$$=\frac{d\cdot c^2}{2}-\frac{b\cdot a^2}{2}-\frac{1}{2}\int_b^d\{g(t)\}^2dt$$

답 풀이 참조

증명2

정적분의 부분적분법에 의하여

$$\int_a^c xf(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2f(x)\right]_a^c-\frac{1}{2}\int_a^c x^2f'(x)dx$$

$$=\frac{d\cdot c^2}{2}-\frac{b\cdot a^2}{2}-\frac{1}{2}\int_a^c x^2f'(x)dx \qquad \cdots ㉠$$

한편 $x=g(t)$로 두면 $dx=g'(t)dt$이고,
$x=a$일 때 $t=f(a)=b$,
$x=c$일 때 $t=f(c)=d$이다.
정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_a^c x^2f'(x)dx=\int_b^d\{g(t)\}^2f'(g(t))g'(t)dt$$

$$=\int_b^d\{g(t)\}^2dt$$

$(\because f(g(t))=t$에서 $f'(g(t))g'(t)=1)$
이를 ㉠에 대입하면

$$\therefore \int_a^c xf(x)dx=\frac{d\cdot c^2}{2}-\frac{b\cdot a^2}{2}-\frac{1}{2}\int_b^d\{g(t)\}^2dt$$

답 풀이 참조

예제 2

증가함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족한다.
(가) 함수 $y=f(x)$는 두 번 미분가능하고, 이계도함수 $y=f''(x)$는 연속함수이다.
(나) $f(0)=0$이고 $f(1)=f'(1)=2$이다.
(다) $\int_0^1 x^3f''(x)dx=1$이다.

함수 $y=f(x)$의 역함수를 $y=g(x)$라고 할 때,
$\int_0^2\{g(x)\}^2dx$의 값을 구하시오.

증명

정적분의 부분적분법에 의하여 (두 번 적용한다.)

$$\int_0^1 x^3f''(x)dx=\left[x^3f'(x)\right]_0^1-3\int_0^1 x^2f'(x)dx$$

$$=2-3\left[x^2f(x)\right]_0^1+6\int_0^1 xf(x)dx$$

$$=-4+6\int_0^1 xf(x)dx=1,\ \text{즉}$$

$$\int_0^1 xf(x)dx=\frac{5}{6}\cdots ㉠$$

한편 $x=g(t)$로 두면 $dx=g'(t)dt$이고,
$x=0$일 때 $t=f(0)=0$,
$x=1$일 때, $t=f(1)=2$이다.
정적분의 치환적분법과 부분적분법에 의하여

$$\int_0^1 xf(x)dx$$

$$=\int_0^2 g(t)tg'(t)dt$$

$$=\left[t\times\frac{1}{2}\{g(t)\}^2\right]_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2\{g(t)\}^2dt$$

$$=1-\frac{1}{2}\int_0^2\{g(t)\}^2dt \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\therefore \int_0^2\{g(t)\}^2dt=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

Ⅰ. 정적분으로 주어진 함수: 구간에 대한 연산

▶ 기출 문제 p.180

정적분의 성질 중에서

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

를 배웠다.

이 성질에 의하여

$$\int_0^a f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_x^a f(t)dt$$

이 성립한다. 이때,

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^a f(t)dt - \int_x^a f(t)dt$$

이다.

이를 이용한 기출 문제를 풀어보자.

Ⅰ. 정적분으로 주어진 함수: 그래프의 개형

▶ 기출 문제 p.181

교과서 본문의 미분과 적분의 관계를 다시 쓰면 다음과 같다.

〈미분과 적분의 관계〉

함수 $f(t)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $a \le x \le b$일 때,

$S(x) = \int_a^x f(t)dt$이면 $S'(x) = f(x)$

즉, $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

(1) 미분과 적분의 관계와 합성함수

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = [F(x)]_{h(x)}^{g(x)} = F(g(x)) - F(h(x))$$

이므로

(단, $F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분)

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = \{F(g(x)) - F(h(x))\}'$$

$$= f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

$$\int_a^{g(x)} f(t)dt = [F(x)]_a^{g(x)} = F(g(x)) - F(a)$$

이므로

(단, $F(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분)

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt = \{F(g(x)) - F(a)\}' = f(g(x))g'(x)$$

예를 들어

$$\frac{d}{dx}\int_a^{-x} f(t)dt = -f(-x),\quad \frac{d}{dx}\int_a^{2x} f(t)dt = 2f(2x),$$

…

이다.

(2) 함수 $\int_{x}^{x+a} f(t)dt$의 도함수

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(x)=\int_{x}^{x+a} f(t)dt$로 두자. 이때, $g(x)$는 x에 대한 함수이다.

$$g(x)=\int_{x}^{x+a} f(t)dt=\left[F(x)\right]_{x}^{x+a}=F(x+a)-F(x)$$

(단, $F'(x)=f(x)$이다.)

양변을 x에 대하여 미분하면

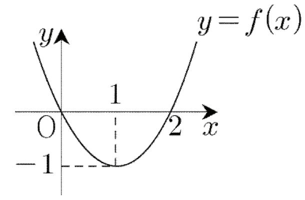
$g'(x)=f(x+a)-f(x)$

다시 쓰면

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+a} f(t)dt=f(x+a)-f(x)$$

예제 1

이차함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다.



함수 $g(x)$에 대하여

$$g(x)=\int_{1}^{x+1} f(t)dt$$

가 성립할 때, $g(x)$의 극댓값과 극솟값의 합을 구하여라.

풀이

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=f(x+1)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f(x+1)=0$

방정식을 풀면 $x+1=0$ 또는 $x+1=2$

즉, $x=-1$ 또는 $x=1$

$x=-1$의 좌우에서 $g'(x)(=f(x+1))$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다. 이때, 극댓값은

$$g(-1)=\int_{1}^{0} f(t)dt=\frac{2}{3}$$

($\because$ $f(x)=x(x-2)$)

$x=1$의 좌우에서 $g'(x)(=f(x+1))$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다. 이때, 극솟값은

$$g(1)=\int_{1}^{2} f(t)dt=-\frac{2}{3}$$

따라서 구하는 값은

$\therefore$ $g(-1)+g(1)=0$

답 0

예제 2

두 함수 $f(x)=e^{-x}$, $g(x)=\sin x$에 대하여
$0<a<2\pi$일 때,

$$\int_0^a f(x)dx+\int_a^{2\pi} g(x)dx$$

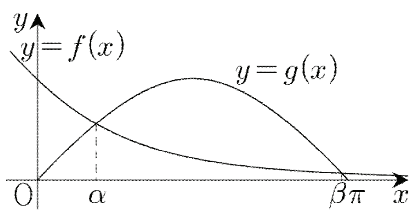
는 $x=\alpha$일 때, 극댓값을 갖고, $x=\beta$일 때 극솟값을 갖는다.
이때, $e^{\alpha}\sin\alpha=1$, $e^{\beta}\sin\beta=1$임을 보이시오.

풀이

$$h(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_a^{2\pi} g(x)dx$$

$$=\int_0^a f(x)dx-\int_{2\pi}^a g(x)dx$$

로 두자.



$h'(a)=f(a)-g(a)=e^{-a}-\sin a$
$h'(a)=0 \Leftrightarrow x=\alpha,\ \beta$ (위의 그림)
$x=\alpha$의 좌우에서 $h'(a)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖는다. 이때,
$e^{-\alpha}-\sin\alpha=0$ 즉, $e^{\alpha}\sin\alpha=1$
$x=\beta$의 좌우에서 $h'(a)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다. 이때,
$e^{-\beta}-\sin\beta=0$ 즉, $e^{\beta}\sin\beta=1$

답 풀이 참조

I. 불연속 함수의 정적분

▶ 기출 문제 p.184

• 불연속함수의 정적분

불연속함수의 정적분은 교육과정 외이다. 하지만 이 방법을 적용하면 빠르게 풀리는 문제가 수능 시험에 심심치 않게 출제되고 있다.

이 주제에 대한 실전이론은 아래의 예제로 대신한다.

예제 1

함수 $f_0(x)$의 방정식은

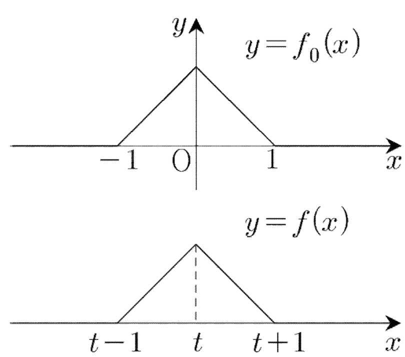
$$f_0(x)=\begin{cases}0 & (x\le -1,\ x\ge 1)\\ x+1 & (-1<x\le 0)\\ -x+1 & (0<x<1)\end{cases}$$

이고, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는
$f(x)=f_0(x-t)$,
$g(x)=\sin\pi x$
이다.

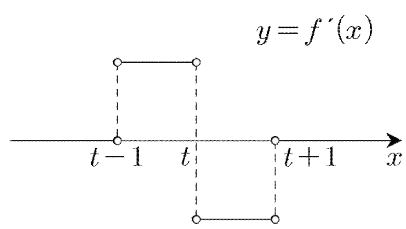
함수 $h(t)=\displaystyle\int_0^2 f(x)g'(x)dx$의 최솟값을 구하시오.

풀이

두 함수 $f_0(x)$, $f(x)$의 그래프는



함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프는



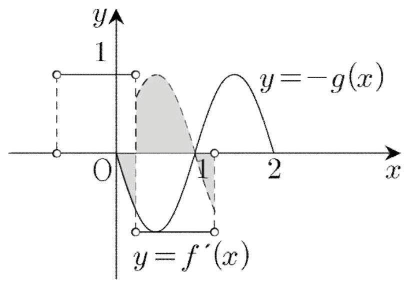
정적분의 부분적분법에 의하여

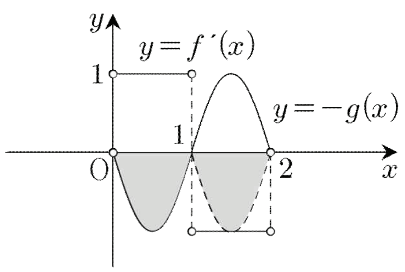
$h(t)=\int_0^2 f(x)g'(x)dx$

$=[f(x)g(x)]_0^2-\int_0^2 f'(x)g(x)dx$

$=\int_0^2 f'(x)(-\sin\pi x)dx \qquad \cdots(*)$

t의 값을 변화시키면서 (*)의 값을 구하면 다음과 같다. (아래의 그림에서 어둡게 칠한 정적분의 값)





이상에서 $t=1$일 때 (*)은 최솟값(극솟값)을 가진다.

따라서 최솟값은 $-\frac{\pi}{4}$이다.

답 $-\frac{\pi}{4}$

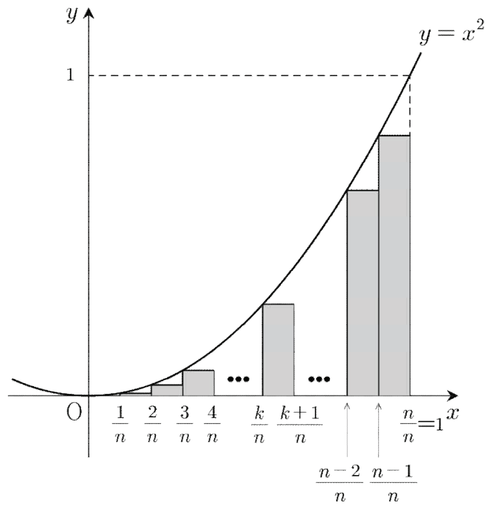
I. 구분구적법

▶ 기출 문제 p.184

• 구분구적법을 정적분으로 바꾸는 법

다음의 교과서 본문의 설명을 다시 읽어보자.

곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구분구적법으로 구해보자.



위의 그림과 같이 구간 $[0,\ 1]$을 n등분하면 양 끝 점과 각 분점의 x좌표는 차례로

$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n}(=1)$

이고, 이에 대응하는 곡선의 y좌표는 각각

$0,\ \left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{n}{n}\right)^2$

이다. 이때, 위의 그림에서 색칠한 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라고 하면

$S_n=\frac{1}{n}\cdot 0+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\ \cdots\ +\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$

$=\frac{1}{n^3}\{1^2+2^2+\ \cdots\ +(n-1)^2\}$

$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

G 수열의 극한

1	⑤	2	12	3	①	4	25	5	14
6	110	7	①	8	②	9	①	10	④
11	40	12	③	13	③	14	②	15	④
16	4	17	④	18	18	19	⑤	20	33
21	②	22	③	23	②	24	10	25	②
26	90	27	③	28	21	29	⑤	30	35
31	③	32	③	33	③	34	15	35	④
36	③	37	⑤	38	④	39	②	40	①
41	④	42	12	43	②	44	②	45	①
46	⑤	47	③	48	①	49	②	50	②
51	50	52	30	53	③	54	4	55	②
56	16	57	③	58	①	59	⑤	60	12
61	①	62	③	63	④	64	④	65	2
66	⑤	67	⑤	68	③	69	54	70	②
71	①	72	23	73	①	74	①	75	①
76	⑤	77	③	78	19	79	①	80	①
81	②	82	16	83	4	84	③	85	③
86	④	87	⑤	88	⑤	89	⑤	90	④
91	③	92	③	93	32	94	16	95	①
96	③	97	19	98	②	99	16	100	①
101	40	102	⑤	103	12	104	①	105	162
106	③	107	16	108	⑤	109	24	110	②
111	②	112	②	113	37	114	②	115	⑤
116	④	117	9	118	①	119	③	120	②
121	6	122	13	123	④	124	②	125	②
126	②	127	④	128	④	129	③	130	③
131	②	132	②	133	⑤	134	④	135	⑤
136	②	137	③	138	③	139	③	140	⑤
141	③	142	①	143	⑤	144	②	145	②
146	④	147	④	148	②	149	③	150	⑤
151	②	152	①	153	④	154	②	155	②
156	②	157	②	158	②	159	②	160	③
161	⑤	162	③	163	③	164	④	165	③
166	②	167	⑤	168	①	169	②	170	①
171	③	172	③	173	①	174	①	175	③

H 미분법

1	12	2	③	3	⑤	4	①	5	6
6	②	7	①	8	③	9	②	10	②
11	③	12	③	13	③	14	①	15	③
16	②	17	4	18	①	19	50	20	①
21	①	22	④	23	⑤	24	④	25	⑤
26	④	27	②	28	④	29	③	30	④
31	③	32	40	33	④	34	④	35	①
36	④	37	④	38	①	39	③	40	14
41	④	42	⑤	43	②	44	③	45	⑤
46	⑤	47	③	48	③	49	④	50	③
51	250	52	①	53	②	54	20	55	④
56	④	57	③	58	②	59	17	60	④
61	41	62	65	63	③	64	65	65	②
66	17	67	④	68	8	69	60	70	①
71	④	72	20	73	16	74	50	75	15
76	40	77	2	78	①	79	20	80	④
81	25	82	50	83	②	84	30	85	30
86	80	87	③	88	16	89	100	90	6
91	14	92	④	93	①	94	50	95	23
96	11	97	③	98	⑤	99	③	100	③
101	④	102	②	103	③	104	②	105	④
106	①	107	②	108	⑤	109	⑤	110	⑤
111	⑤	112	①	113	⑤	114	①	115	⑤
116	⑤	117	④	118	④	119	12	120	①
121	①	122	④	123	④	124	10	125	②
126	③	127	④	128	②	129	⑤	130	24
131	③	132	①	133	11	134	④	135	①
136	③	137	83	138	④	139	32	140	①
141	⑤	142	①	143	⑤	144	④	145	①
146	5	147	③	148	16	149	③	150	17
151	①	152	⑤	153	③	154	25	155	⑤
156	③	157	①	158	4	159	5	160	15
161	④	162	①	163	④	164	①	165	⑤
166	②	167	⑤	168	10	169	④	170	32
171	①	172	③	173	②	174	④	175	②
176	64	177	①	178	④	179	②	180	⑤
181	③	182	35	183	④	184	②	185	②
186	17	187	27	188	②	189	⑤	190	⑤
191	④	192	2	193	③	194	③	195	①
196	①	197	①	198	⑤	199	③	200	③

201	④	202	15	203	24	204	②	205	④
206	216	207	⑤	208	11	209	③	210	③
211	⑤	212	331	213	⑤	214	③	215	29
216	30	217	⑤	218	31	219	⑤	220	③
221	⑤	222	16	223	72	224	⑤	225	⑤
226	⑤	227	39	228	72	229	48	230	④
231	③	232	④	233	16	234	④	235	15
236	②	237	①	238	34	239	②	240	3
241	109	242	6	243	18	244	④	245	②
246	④	247	④	248	5	249	43	250	④
251	③	252	⑤	253	④	254	4	255	③
256	④	257	③	258	⑤	259	4	260	④

I 적분법

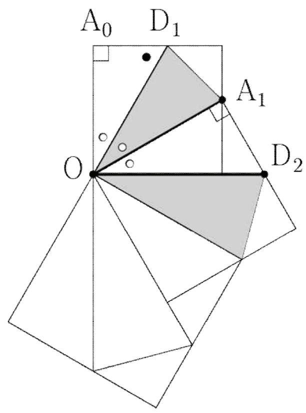
1	②	2	④	3	93	4	②	5	128
6	②	7	②	8	③	9	②	10	②
11	④	12	④	13	②	14	④	15	283
16	①	17	④	18	⑤	19	②	20	9
21	④	22	17	23	②	24	⑤	25	②
26	②	27	②	28	⑤	29	④	30	②
31	⑤	32	①	33	④	34	③	35	127
36	16	37	⑤	38	②	39	⑤	40	16
41	115	42	12	43	⑤	44	12	45	⑤
46	④	47	⑤	48	83	49	④	50	③
51	④	52	④	53	①	54	②	55	①
56	125	57	②	58	②	59	21	60	242
61	①	62	③	63	12	64	19	65	①
66	②	67	⑤	68	14	69	③	70	①
71	②	72	⑤	73	③	74	②	75	③
76	②	77	100	78	③	79	①	80	①
81	27	82	①	83	⑤	84	96	85	①
86	③	87	③	88	③	89	①	90	④
91	④	92	45	93	④	94	①	95	⑤
96	26	97	②	98	⑤	99	143	100	③
101	④	102	③	103	③	104	④	105	②
106	②	107	③	108	②	109	78	110	⑤
111	②	112	①	113	①	114	15		

해설 목차

미적분

G130 | 답 ③

[풀이1]



(단, $\bullet = 60^\circ$, $\circ = 30^\circ$)

직각삼각형 A_0OD_1에서

$\overline{OD_1} = \frac{2}{\sqrt{3}}a(=\overline{OA_1} = l_1)$

직각삼각형 A_1OD_2에서

$\overline{OA_1} : \overline{OD_2} = \sqrt{3} : 2$이므로

등비수열 $\{l_n\}$의 공비는 $\frac{2}{\sqrt{3}}$이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2a}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{a} = \sqrt{3}$$

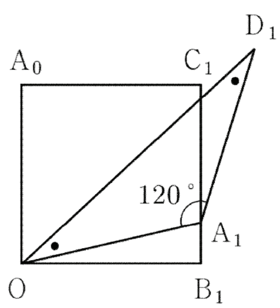
$\therefore\ a = 2+\sqrt{3}$

답 ③

[풀이2]

이등변삼각형 OA_1D_1에 대하여

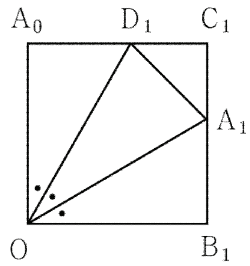
$\overline{OA_1} = \overline{A_1D_1}$이라고 가정하면 아래의 그림을 얻는다.



점 D_1은 선분 $\overline{A_0C_1}$ 위에 있을 수 없으므로 가정에 모순이다.

따라서 $\overline{OA_1} \neq \overline{A_1D_1}$이다.

마찬가지의 방법으로 $\overline{OD_1} \neq \overline{D_1A_1}$이다.



(단, $\bullet = 30^\circ$)

이등변삼각형 OA_1D_1에 대하여

$\overline{OA_1} = \overline{OD_1}$

정사각형 $A_0OB_1C_1$에 대하여

$\overline{OA_0} = \overline{OB_1}$

두 직각삼각형 D_1OA_0와 A_1OB_1은 RHS합동이다.

$\angle D_1OA_0 = \angle A_1OB_1 = \theta^\circ$로 두면

$\angle A_0OD_1 + \angle D_1OA_1 + \angle A_1OB_1$

$= 2\theta^\circ + 30^\circ = 90^\circ$에서 $\theta^\circ = 30^\circ$

직각삼각형 A_1OB_1에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\frac{\overline{OB_1}}{l_1} = \cos 30^\circ$에서 $\frac{1}{l_1} = \frac{\sqrt{3}}{2a}$

2 이상의 자연수 n에 대하여

직각삼각형 A_nOB_n에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\frac{\overline{OB_n}}{\overline{A_nO}} = \frac{l_{n-1}}{l_n} = \cos 30^\circ$에서 $\frac{1}{l_n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{l_{n-1}}$

수열 $\left\{\frac{1}{l_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{2a}$이고 공비가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$인

등비수열이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2a}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})a} = \frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{a}$$

$= \sqrt{3}$

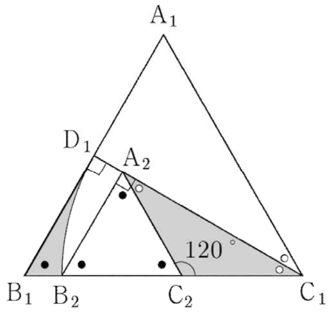
$\therefore\ a = 2+\sqrt{3}$

답 ③

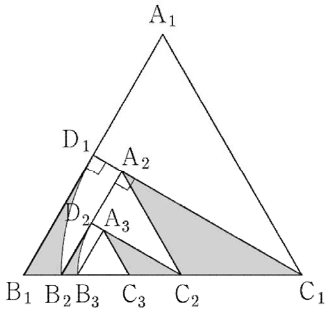
G131 | 답 ②

[풀이1]

정삼각형의 성질, 평행선의 성질(동위각, 엇각)을 이용하면 아래 그림과 같이 각(●, ○)을 결정할 수 있다.



R_1



R_2

(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$)

직각삼각형 $A_2B_2C_1$에서

$\overline{B_2C_1}=2\overline{A_2B_2}$

이고, $\overline{B_2C_2}=\overline{C_2C_1}$이므로

$\overline{A_2B_2}=\overline{B_2C_2}$

그런데 $\angle A_2B_2C_2=60^\circ$이므로

$\triangle A_2B_2C_2$는 정삼각형이다.

$S_1=(\triangle D_1B_1C_1$의 넓이$)-(\triangledown C_1D_1B_2$의 넓이$)$

$+(\triangle A_2C_2C_1$의 넓이$)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{8}-\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{3\sqrt{3}}{64}$

그림 R_2에서 두 삼각형 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$의 닮음비는

$\overline{B_1C_1}:\overline{B_2C_2}=1:\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

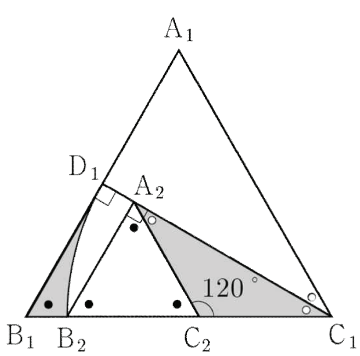
이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{8}-\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{3\sqrt{3}}{64}}{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$$

답 ②

[풀이2]

그림 R_n에서 새롭게 색칠된 두 영역의 넓이의 합을 a_n이라고 하자.



(단, •$=60^\circ$, ○$=30^\circ$이다.)

• 삼각형 $A_2B_2C_2$가 정삼각형임을 보이자.

이등변삼각형의 성질에 의하여

정삼각형 $A_1B_1C_1$의 $\angle C_1$의 이등분선은

밑변 A_1B_1을 수직이등분한다.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\angle C_1$의 이등분선은 C_1D_1이고,

$\angle C_1D_1B_1=90^\circ$, $\angle B_1C_1D_1=30^\circ$이다.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\angle C_1A_2B_2=90^\circ$

즉, $\angle C_1D_1B_1=\angle C_1A_2B_2$ (동위각)

이므로, 두 직선 D_1B_1, A_2B_2는 평행하다.

$\angle A_2B_2C_2=\angle A_1B_1C_1=60^\circ$ (동위각)

직각삼각형 $B_1C_1D_1$에서 특수각의 삼각비의 정의에 의하여

$\dfrac{\overline{C_1D_1}}{\overline{B_1C_1}}=\sin60^\circ\left(=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 즉, $\overline{C_1D_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(또는 직각삼각형 $B_1C_1D_1$에서 피타고라스의 정리를 이용해도 좋다.)

원의 정의에 의하여

$\overline{C_1B_2}=\overline{C_1D_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

직각삼각형 $C_1B_2A_2$에서 특수각의 삼각비의 정의에 의하여

$\dfrac{\overline{B_2A_2}}{\overline{C_1B_2}}=\sin30^\circ\left(=\dfrac{1}{2}\right)$ 즉, $\overline{B_2A_2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{B_2C_2}=\dfrac{1}{2}\overline{B_2C_1}=\dfrac{\sqrt{4}}{3}$

삼각형 $A_2B_2C_2$에 대하여

$\overline{A_2B_2}=\overline{B_2C_2}$, $\angle A_2B_2C_2=60^\circ$

이므로, 이등변삼각형의 성질과 '삼각형의 내각의 합은 180°이다'에 의하여

$\angle B_2C_2A_2=\angle C_2A_2B_2=60^\circ$

따라서 삼각형 $A_2B_2C_2$는 한 변의 길이가 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$인 정삼각형이다.

• 수열 $\{a_n\}$의 첫 번째 항과 공비를 구하자.

삼각형과 부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$a_1=(\triangle D_1B_1C_1$의 넓이$)-(\triangledown C_1D_1B_2$의 넓이$)$

$+(\triangle A_2C_2C_1$의 넓이$)$

$=\dfrac{1}{2}\overline{C_1D_1}\,\overline{D_1B_1}-\dfrac{1}{2}\times\overline{C_1D_1}^2\times\dfrac{\pi}{6}$

$+\dfrac{1}{2}\overline{A_2C_2}\,\overline{C_2C_1}\sin(180^\circ-120^\circ)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\dfrac{\pi}{12}$

$$+\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{16}+\frac{3\sqrt{3}}{64}$$

두 삼각형 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$의 닮음비가 $1:\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로, 넓이의 비는 $1:\frac{3}{16}$이다. 즉, 등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 $\frac{3}{16}$이다.

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{16}+\frac{3\sqrt{3}}{64}$, $a_{n+1}=\frac{3}{16}a_n$(단, $n\geq 1$)

등비급수의 합의 공식에 의하여

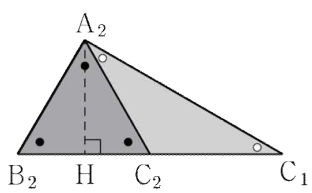
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{16}+\frac{3\sqrt{3}}{64}}{1-\frac{3}{16}}$$

$$=\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$$

답 ②

[참고] ★

점 A_2에서 선분 B_2C_1에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$ 이다.)

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$(\triangle A_2C_2C_1$의 넓이$)=\frac{1}{2}\overline{C_2C_1}\,\overline{A_2H}$

$=\frac{1}{2}\overline{B_2C_2}\,\overline{A_2H}=(\triangle A_2B_2C_2$의 넓이$)$

$(\because \overline{B_2C_2}=\overline{C_2C_1})$

따라서 삼각형 $A_2C_2C_1$의 넓이를 정삼각형 $A_2B_2C_2$의 넓이

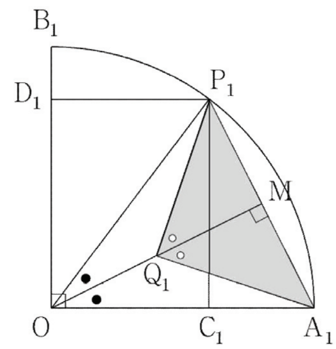
$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{64}$$

로 대신해도 좋다.

G132 | 답 ②

[풀이]

점 O에서 선분 P_1A_1에 내린 수선의 발을 M이라고 하자. 이때, 세 점 O, Q_1, M은 한 직선 위에 있다. 왜냐하면 $P_1Q_1A_1$은 이등변삼각형이기 때문이다.



(단, ○$=45^\circ$)

직각삼각형 P_1OC_1의 세 변의 길이의 비는

$5:3:4$

이므로 $\overline{OC_1}=\frac{3}{5}\left(\overline{C_1A_1}=\frac{2}{5}\right)$, $\overline{C_1P_1}=\frac{4}{5}$

직각삼각형 $P_1C_1A_1$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{P_1A_1}=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$S_1=(\triangle P_1Q_1A_1\text{의 넓이})=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{5}$$

한편

$(\triangle P_1OA_1$의 넓이$)$

$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{4}{5}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{5}}\times\overline{OM}$, $\overline{OM}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

이므로 $\overline{OQ_1}=\overline{Q_1M}$

두 사분원 OA_1B_1, OA_2B_2의 닮음비는

$1:\frac{1}{\sqrt{5}}(=\overline{OA_1}:\overline{OQ_1})$이므로

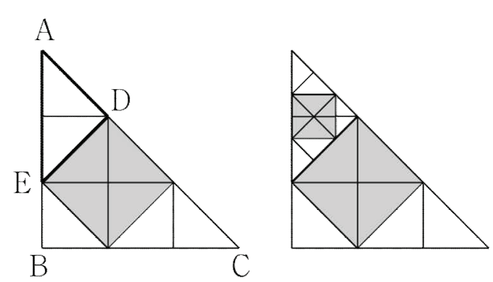
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{1}{4}$$

답 ②

G133 | 답 ⑤

[풀이1]

보조선을 이용하여 문제를 빠르게 해결하자.



R_1 R_2

그림 R_1에서 그려진 9개의 직각이등변삼각형은 모두 합동이므로 색칠된 정사각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot 4=\frac{2}{9}$$

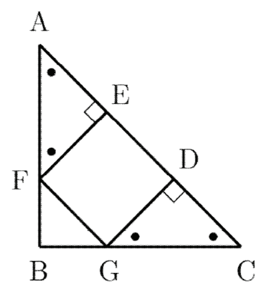
그리고 그림 R_1의 두 직각이등변삼각형 ABC, ADE의 넓이의 비는 $9:2$이고, 각 단계마다 새롭게 그려지는 정사각형의 개수는 2배가 되므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{9}\cdot 2}=\frac{2}{5}$$

답 ⑤

[풀이2]

그림 R_1에서 주어진 직각이등변삼각형과 정사각형의 꼭짓점이 아래 그림과 같다고 하자.



정사각형 DEFG의 한 변의 길이를 x라고 하자.

정사각형의 정의에 의하여

정사각형 DEFG에서

$\angle\,\mathrm{DEF}=90^\circ$ 이므로 $\angle\,\mathrm{FEA}=90^\circ$

이등변삼각형의 성질에 의하여

직각이등변삼각형 ABC에서

$\angle\,\mathrm{EAF}=\angle\,\mathrm{CAB}=\angle\,45^\circ$

삼각형의 세 내각의 합은 180° 이므로

삼각형 AFE에서

$\angle\,\mathrm{AFE}=180^\circ-\angle\,\mathrm{FEA}-\angle\,\mathrm{EAF}=45^\circ$

이등변삼각형의 성질에 의하여

직각삼각형 AFE는 이등변삼각형이다.

직각이등변삼각형 AFE에서

$\overline{\mathrm{FE}}=\overline{\mathrm{EA}}$

마찬가지의 방법으로

직각이등변삼각형 CDG에서

$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{DG}}$

정사각형의 정의에 의하여 정사각형 DEFG에서

$\overline{\mathrm{GD}}=\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{EF}}$

이상에서

$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{ED}}=\overline{\mathrm{DC}}$

직각삼각형 ABC에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}=3x$ 즉, $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

두 직각삼각형 ABC, AEF의 닮음비는

$1:\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

두 직각삼각형 ABC, AEF의 넓이의 비는

$1:\dfrac{2}{9}$

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$a_n=$(그림 R_n에서 새롭게 그려진 정사각형 한 개의 넓이)

$b_n=$(그림 R_n에서 새롭게 그려진 정사각형의 개수)

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$$a_1=\frac{2}{9},\ a_{n+1}=\frac{2}{9}a_n$$

일반항 a_n은

$$a_n=\left(\frac{2}{9}\right)^n(n\geq 1)$$

수열 $\{b_n\}$의 귀납적 정의는

$$b_1=1,\ b_{n+1}=2b_n$$

일반항 b_n은

$$b_n=2^{n-1}(n\geq 1)$$

일반항 a_nb_n은

$$a_nb_n=\frac{2}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}(n\geq 1)$$

등비수열의 합의 공식에 의하여

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}$$

$$=\frac{\frac{2}{9}\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{2}{5}\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

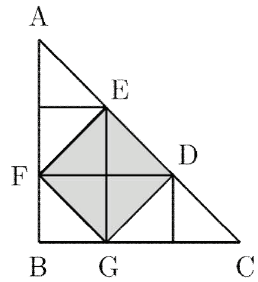
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{5}$$

※ $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$은 첫째항이 $\dfrac{2}{9}$이고 공비가 $\dfrac{4}{9}$인 등비급수이다.

답 ⑤

[참고]

다음과 같이 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의를 유도할 수도 있다.



위의 그림에서

$a_1=(\square\text{DEFG}$의 넓이$)$

$=($그림 R_1에서 주어진 직각이등변삼각형의 넓이$)\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{2}{9}$

두 직각삼각형 ABC, AEF의 넓이의 비가 $9:2$이므로

$$a_{n+1}=\frac{2}{9}a_n$$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$$a_1=\frac{2}{9},\ a_{n+1}=\frac{2}{9}a_n$$

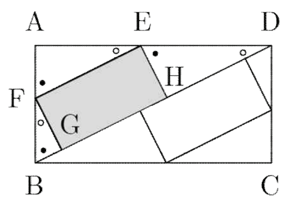
일반항 a_n은

$$a_n=\left(\frac{2}{9}\right)^n(n\geq 1)$$

G134 | 답 ④

[풀이1]

아래 그림처럼 그림 R_1의 어둡게 색칠된 직사각형의 네 꼭짓점을 E, F, G, H라고 하자. 그리고 이 직사각형의 이웃한 두 변의 길이를 각각 k, $2k$라고 하자.



직각삼각형 ABD의 세 변의 길이의 비는

$\overline{\text{AB}}:\overline{\text{BD}}:\overline{\text{DA}}=1:\sqrt{5}:2$

이고,

$\triangle\text{ABD}\sim\triangle\text{GBF}\sim\triangle\text{AFE}$

이므로

$$\overline{\text{AF}}=\frac{2}{\sqrt{5}}k,\ \overline{\text{FB}}=\frac{\sqrt{5}}{2}k$$

에서

$$\overline{\text{AB}}=\overline{\text{AF}}+\overline{\text{FB}}=\frac{2}{\sqrt{5}}k+\frac{\sqrt{5}}{2}k=1$$

풀면 $k=\dfrac{2\sqrt{5}}{9}$

등비급수의 합의 공식에 의하여

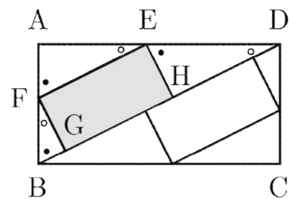
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2k^2}{1-k^2}=\frac{40}{61}$$

답 ④

[풀이2]

아래 그림과 같이 그림 R_1에서 새롭게 그려진 두 직사각형 중 한 직사각형의 꼭짓점을 각각 E, F, G, H라고 하자.

그리고 $\overline{\text{FG}}=x$로 두자.



직각삼각형 ABD에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\text{BD}}=\sqrt{\overline{\text{DA}}^2+\overline{\text{AB}}^2}=\sqrt{5}$$

두 삼각형 ABD, GBF는 두 쌍의 대응각의 크기가 같으므로 AA 닮음이다.

$\overline{\text{BF}}:\overline{\text{FG}}=\sqrt{5}:2=\overline{\text{BD}}:\overline{\text{DA}}$

정리하면

$$\overline{\text{BF}}=\frac{\sqrt{5}}{2}x \qquad \cdots ㉠$$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{\text{EF}}=2\overline{\text{FG}}=2x$

두 삼각형 ABD, AFE는 두 쌍의 대응각의 크기가 같으므로 AA 닮음이다.

$\overline{\text{AF}}:\overline{\text{FE}}=1:\sqrt{5}=\overline{\text{AB}}:\overline{\text{BD}}$

정리하면

$$\overline{\text{AF}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}x \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$\overline{\text{AB}}=\overline{\text{AF}}+\overline{\text{BF}}=\dfrac{9\sqrt{5}}{10}x=1$ 즉, $x=\dfrac{2\sqrt{5}}{9}$

음이 아닌 정수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$a_n=($그림 R_n에서 새롭게 그려지는 직사각형 한 개의 넓이$)$

(단, $a_0=2$)

서로 닮음인 두 직사각형 ABCD, EFGH의 닮음비는

$1:\dfrac{2\sqrt{5}}{9}$이므로

$$a_1=\left(\frac{2\sqrt{5}}{9}\right)^2a_0$$

자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$$a_{n+1}=\left(\frac{2\sqrt{5}}{9}\right)^2a_n(n\geq 1)$$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$$a_0 = 2,\ a_{n+1} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{9}\right)^2 a_n (n \geq 0)$$

등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여

일반항 a_n은

$$a_n = 2\left(\frac{20}{81}\right)^n (n \geq 0)$$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$이므로 일반항 S_n은 첫째항이 $\frac{40}{81}$이고 공비가 $\frac{20}{81}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

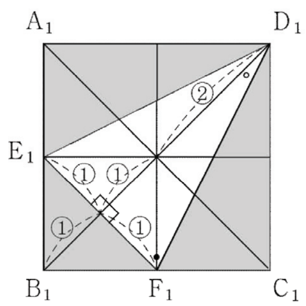
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{40}{81}}{1-\frac{20}{81}} = \frac{40}{61}$$

답 ④

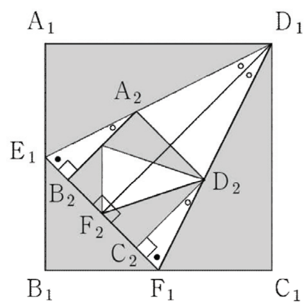
G135 | 답 ⑤

[풀이1]

아래 그림과 같이 보조선을 그으면 문제에서 주어진 기하학적 상황을 빠르게 이해할 수 있다.



R_1



R_2

$$S_1 = 1\times 2 + \frac{1}{2}\times 1\times 1 = \frac{5}{2}$$

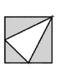
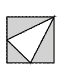
위의 그림에서 이등변삼각형 $D_1E_1F_1$의 세 변의 길이의 비는

$\sqrt{5} : \sqrt{2} : \sqrt{5}$

이다. 그림 R_2의 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 x라 고 하면

$\overline{E_1F_1} = \overline{E_1B_2} + \overline{B_2C_2} + \overline{C_2F_1}$

$= \frac{1}{3}x + x + \frac{1}{3}x = \frac{5}{3}x = \sqrt{2}$, 즉 $x = \frac{3\sqrt{2}}{5}$

그림 R_2의 큰  모양의 도형과 작은  모양의 도형의 닮음비는

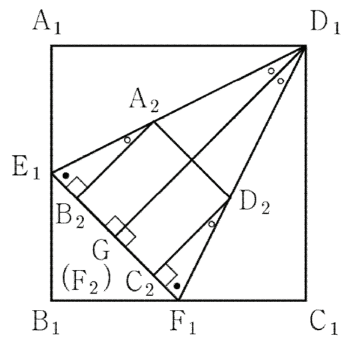
$2 : \frac{3\sqrt{2}}{5}$

이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{5}{2}}{1-\left(\frac{3\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \frac{125}{41}$$

답 ⑤

[풀이2]



직각삼각형 $D_1A_1E_1$, $D_1C_1F_1$에서

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{D_1E_1} = \overline{D_1F_1} = \sqrt{5}$

이등변삼각형 $D_1E_1F_1$에서 $\angle D_1$의 이등분선과 선분 E_1F_1의 교점을 G라고 하자.

이등변삼각형의 성질에 의하여

선분 D_1G는 선분 E_1F_1을 수직이등분하므로 점 G는 선분 E_1F_1의 중점이다.

즉, $\overline{E_1G} = \overline{F_1G}$ … ㉠

$\overline{A_2B_2} // \overline{D_1G}$이고 $\overline{D_2C_2} // \overline{D_1G}$이므로

평행선의 성질에 의하여

$\angle E_1A_2B_2 = \angle E_1D_1G$, $\angle F_1D_2C_2 = \angle F_1D_1G$

즉, $\angle E_1A_2B_2 = \angle F_1D_2C_2$ … ㉡

$\overline{A_2D_2} // \overline{E_1F_1}$이므로

$\overline{D_1A_2} : \overline{A_2E_1} = \overline{D_1D_2} : \overline{D_2F_1}$

이등변삼각형 $D_1A_2D_2$에서

$\overline{D_1A_2} = \overline{D_1D_2}$

이므로

$\overline{A_2E_1} = \overline{D_2F_1}$ … ㉢

㉡, ㉢에 의하여 두 직각삼각형 $A_2E_1B_2$, $D_2F_1C_2$는 RHA 합동이므로

$\overline{E_1B_2} = \overline{F_1C_2}$ … ㉣

㉠, ㉣에 의하여

$\overline{B_2G} = \overline{C_2G}$

점 G는 선분 $\overline{B_2C_2}$의 중점이므로 점 G는 점 F_2이다.

이제 $\overline{A_2B_2} = x$로 두자.(단, $0 < x < \sqrt{2}$)

$\overline{B_2F_2}=\dfrac{x}{2}$, $\overline{E_1F_2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$$\overline{E_1B_2}=\overline{E_1F_2}-\overline{B_2F_2}=\frac{\sqrt{2}-x}{2}$$

$$\overline{E_1B_2}:\overline{B_2A_2}=\overline{E_1F_2}:\overline{F_2D_1}$$

선분의 길이를 대입하면

$$\frac{\sqrt{2}-x}{2}:x=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

정리하면

$$x=\frac{3}{2}(\sqrt{2}-x)$$

풀면

$$x=\frac{3\sqrt{2}}{5}$$

수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

a_n=(그림 R_n에서 새롭게 그려진  모양의 도형에서 색칠된 부분의 넓이)

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$a_1=S_1=\frac{5}{2}$$

두 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비가 $2:\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$이므로

$$a_2=\left(\frac{3\sqrt{2}}{10}\right)^2a_1$$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$$a_{n+1}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{10}\right)^2a_n$$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$$a_1=\frac{5}{2},\ a_{n+1}=\frac{9}{50}a_n\,(n\geq 1)$$

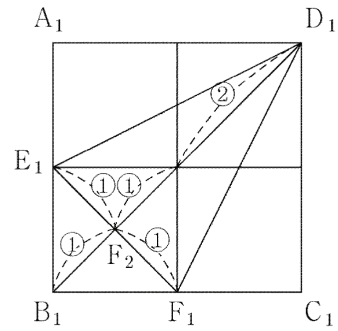
$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$은 첫째항이 $a_1(=S_1)$이고 공비가 $\dfrac{9}{50}$인 등비급수이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{9}{50}}=\frac{125}{41}$$

답 ⑤

[참고]



물론 위의 비례관계를 따르면

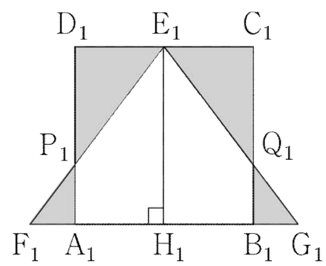
$$\overline{E_1F_2}:\overline{F_2D_1}=1:3$$

임을 빠르게 파악할 수 있다.

G136 | 답 ②

[풀이]

점 E_1에서 선분 A_1B_1에 내린 수선의 발을 H_1이라고 하자.



$\overline{E_1F_1}=5k$라고 하면

문제에서 주어진 비례식에 의하여

$\overline{F_1G_1}=6k$

이등변삼각형 $E_1F_1G_1$에서

이등변삼각형의 성질에 의하여

$\overline{F_1H_1}=\overline{H_1G_1}=3k$

직각삼각형 $E_1F_1H_1$에서

피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{E_1H_1}=\sqrt{\overline{E_1F_1}^2-\overline{F_1H_1}^2}=4k$$

이므로 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이는 $4k$이다.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$4k=4$, 즉 $k=1$

직사각형 $A_1H_1E_1D_1$에서 평행사변형의 성질에 의하여

$\overline{A_1H_1}=\overline{D_1E_1}=2$

이므로

$\overline{F_1A_1}=\overline{F_1H_1}-\overline{A_1H_1}=3-2=1$

두 직각삼각형 $E_1D_1P_1$, $F_1A_1P_1$의 닮음비는

$\overline{E_1D_1}:\overline{F_1A_1}=2:1$

이므로

$\overline{D_1P_1}:\overline{P_1A_1}=2:1$

그런데 $\overline{D_1P_1}+\overline{P_1A_1}=4$이므로

$\overline{D_1P_1}=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$, $\overline{P_1A_1}=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

이제 S_1의 값을 구하자.

$\frac{S_1}{2}=(\triangle E_1D_1P_1$의 넓이$)+(\triangle F_1A_1P_1$의 넓이$)$

$=\frac{1}{2}\times2\times\frac{8}{3}+\frac{1}{2}\times1\times\frac{4}{3}=\frac{10}{3}$

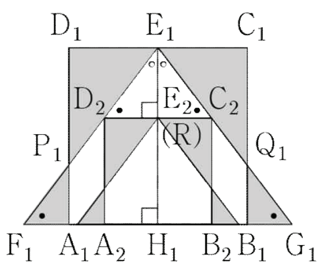
이므로

$S_1=\frac{20}{3}$

그림 R_n에서 새롭게 그려진 모양의 도형의 넓이를 a_n이라고 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

두 선분 E_1H_1, D_2C_2의 교점을 R이라고 하자.



(단, ●+○$=180^\circ$)

$\overline{D_2C_2}//\overline{A_1B_1}$이므로

$\angle E_1RD_2=90^\circ=\angle E_1H_1F_1$ (동위각)

$\angle E_1D_2R=$●$=\angle E_1F_1H_1$ (동위각)

$\angle E_1C_2R=$●$=\angle E_1G_1H_1$ (동위각)

삼각형의 세 내각의 합은 180°이므로

$\angle RE_1D_2=$○$=\angle RE_1C_2$

두 삼각형 E_1D_2R, E_1C_2R은 ASA 합동이므로

$\overline{D_2R}=\overline{RC_2}$

그러므로 점 R은 점 E_2와 일치한다. 이때, 세 점 E_1, E_2, H_1은 한 직선 위에 있다.

정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 x라고 하자.

(단, $0<x<4$)

서로 닮음인 두 직각삼각형 $E_1D_2E_2$, $E_1F_1H_1$에 대하여

$\overline{D_2E_2}:\overline{E_2E_1}=\overline{F_1H_1}:\overline{H_1E_1}=3:4$

그런데 $\overline{D_2E_2}=\frac{x}{2}$이므로 $\overline{E_2E_1}=\frac{x}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2x}{3}$

$\overline{D_1A_1}=\overline{E_1E_2}+\overline{E_2H_1}=\frac{2x}{3}+x=\frac{5x}{3}=4$

풀면 $x=\frac{12}{5}$

두 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비가 $4:\frac{12}{5}$이므로 이 두 사각형의 넓이의 비는 $4^2:\left(\frac{12}{5}\right)^2$, 즉 $1:\left(\frac{3}{5}\right)^2$이다.

$a_2=\left(\frac{3}{5}\right)^2a_1$

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=\left(\frac{3}{5}\right)^2a_n$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=\frac{20}{3}$, $a_{n+1}=\frac{9}{25}a_n$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{\frac{20}{3}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{125}{12}$$

답 ②

G137

| 답 ③

[풀이]

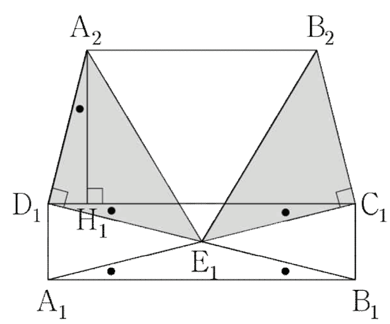
점 A_2에서 선분 D_1C_1에 내린 수선의 발을 H_1이라고 하자.

이등변삼각형의 성질, 평행선의 성질(엇각), '삼각형의 세 내각의 합은 180°이다.'를 이용하면 각의 크기(●)가 결정된다.

(아래 그림)

특히

$\angle D_1A_2H_1=90^\circ-\angle A_2D_1H_1=\angle C_1D_1B_1=($●$)$



$S_1=2\times\frac{1}{2}\overline{D_1E_1}^2=\frac{17}{4}$

$(\because\ \overline{D_1B_1}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}=2\overline{D_1E_1})$

서로 닮음인 두 직각삼각형 $A_2D_1H_1$, $D_1B_1C_1$에서

$\overline{A_2D_1}:\overline{D_1H_1}=\overline{D_1B_1}:\overline{B_1C_1}$, 즉

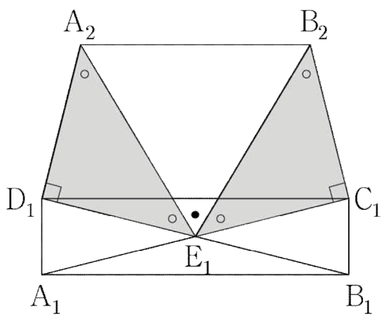
$\frac{\sqrt{17}}{2}:\overline{D_1H_1}=\sqrt{17}:1$, $\overline{D_1H_1}=\frac{1}{2}$

$\overline{A_2B_2}=3$이므로 R_1에서 그려진  모양의 도형과 R_2에서 새롭게 그려진  모양의 도형의 닮음비는 $\frac{3}{4}\left(=\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}}\right)$이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{17}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{68}{7}$$

답 ③

[참고]
다음과 같이 선분 A_2B_2의 길이를 구해도 좋다.



(단, ○$=45^\circ$)
삼각형 $E_1A_1B_1$에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle A_1E_1B_1)=\frac{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2-4^2}{2\times\frac{\sqrt{17}}{2}\times\frac{\sqrt{17}}{2}}$$

$$=-\frac{15}{17},\ \sin(\angle A_1E_1B_1)=\frac{8}{17}$$

$$\cos(\angle A_2E_1B_2)=\cos(\angle A_1E_1B_1-90^\circ)$$

$$=\sin(\angle A_1E_1B_1)=\frac{8}{17}$$

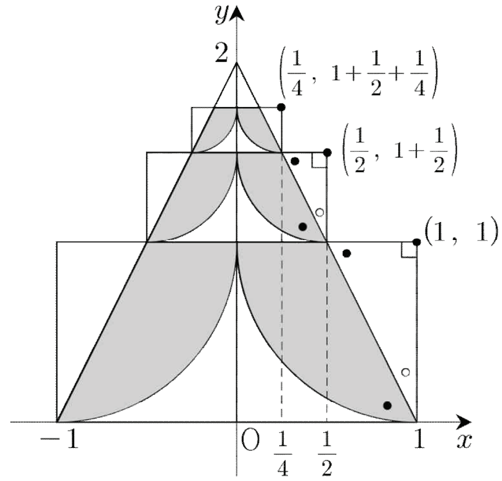
삼각형 $A_2E_1B_2$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{A_2B_2}^2=\left(\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\right)^2-2\times\left(\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\right)^2\times\frac{8}{17}$$

$$=9,\ \therefore\ \overline{A_2B_2}=3$$

G138 | 답 ③

[풀이1]
점 $(a_1,\ b_1)$, $(a_2,\ b_2)$, $(a_3,\ b_3)$, $\cdots$을 찍고, 평행선의 성질(엇각, 동위각)을 이용하여 각을 결정하면 아래 그림과 같다.



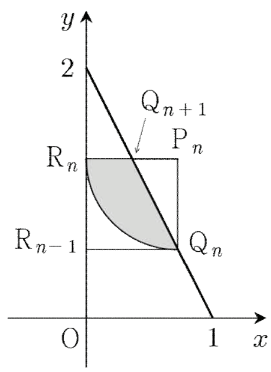
$$S_1=2\times\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi-1}{2}$$

두 도형 P_1, P_2의 닮음비는 $2:1$이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{\frac{\pi-1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2(\pi-1)}{3}$$

답 ③

[풀이2]
세 점 P_n, Q_n, R_n을 각각 다음과 같이 두자.
$P_n(a_n,\ b_n)$, $Q_n(a_n,\ b_{n-1})$, $R_n(0,\ b_n)$
(단, n은 자연수이고, $R_0(0,\ 0)$, $b_0=0$이다.)



등비수열의 합의 공식에 의하여

$$b_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (n\geq 1)$$

$b_0=0$이므로 일반항 b_n은

$$b_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ (n\geq 0)$$

모든 자연수 n에 대하여

$$2a_n+b_{n-1}-2=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-2=0$$

이므로 점 Q_n은 직선 $2x+y-2=0$ 위에 있다.

자연수 n에 대하여

$\angle Q_nP_nR_n = \angle P_nR_nR_{n-1} = \angle R_nR_{n-1}Q_n = 90°$

사각형의 네 내각의 합은 $360°$ 이므로

$\angle R_{n-1}Q_nP_n = 90°$

직사각형의 정의에 의하여

$\square P_nR_nR_{n-1}Q_n$은 직사각형이다.

자연수 n에 대하여

$\overline{P_nQ_n} = b_n - b_{n-1} = a_n = \overline{P_nR_n}$

즉, 직사각형 $P_nR_nR_{n-1}Q_n$의 이웃하는 두 변의 길이가 같으므로

정사각형의 정의에 의하여

$\square P_nR_nR_{n-1}Q_n$은 정사각형이다.

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$(\triangle P_nQ_{n+1}Q_n\text{의 넓이}) = \frac{1}{2} \times \overline{P_nQ_n} \times \overline{P_nQ_{n+1}}$

$= \frac{1}{2} \times (b_n - b_{n-1}) \times (a_n - a_{n+1})$

$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \ (n \geq 1)$

$\frac{S_n}{2} =$ (중심이 P_n이고 반지름의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 인 사분원의 넓이) $-$ ($\triangle P_nQ_{n+1}Q_n$의 넓이)

$= \pi\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{\pi - 1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \ (n \geq 1)$

일반항 S_n은

$S_n = \frac{\pi - 1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \ (n \geq 1)$

등비급수의 합을 구하는 공식에 의하여

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi - 1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2(\pi - 1)}{3}$$

답 ③

[참고]

닮음비를 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구할 수도 있다.

$\frac{S_1}{2} =$ (중심이 P_1이고 반지름의 길이가 1인 사분원의 넓이)

$-$ ($\triangle P_1Q_2Q_1$의 넓이) $= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$

이므로

$S_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

두 정사각형 $P_1R_1R_0Q_1$, $P_2R_2R_1Q_2$의 닮음비가 $2:1$이므로

$S_1 : S_2 = 4 : 1$

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

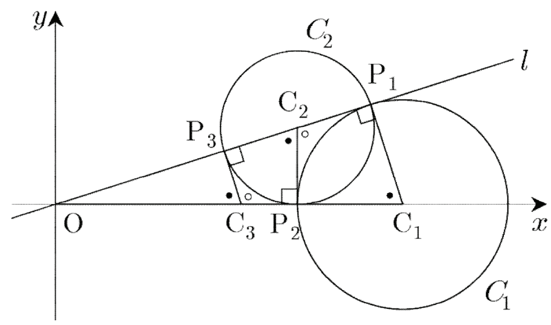
등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2(\pi - 1)}{3}$$

G139 | 답 ③

[풀이1]

원의 접선은 접점을 지나는 반지름에 수직이므로 아래 그림과 같이 보조선을 그어야 한다.



(단, ●$+$○$= 180°$)

위의 그림처럼 삼각형

OC_1P_1, OC_2P_2, $\cdots$, OC_nP_n, $\cdots$

은 모두 닮음이다.

삼각형 OC_1P_1의 각 변의 길이는

$\overline{OC_1} = 4$, $\overline{C_1P_1} = 1$, $\overline{OP_1} = \sqrt{15}$

이고, 삼각형 OC_2P_2에서 $\overline{OP_2} = 3$이므로

두 삼각형 OC_1P_1, OC_2P_2의 닮음비는

$\overline{OP_1} : \overline{OP_2} = \sqrt{15} : 3$

이는 두 원 C_1, C_2의 닮음비와 같다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi}{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{15}}\right)^2} = \frac{5}{2}\pi$$

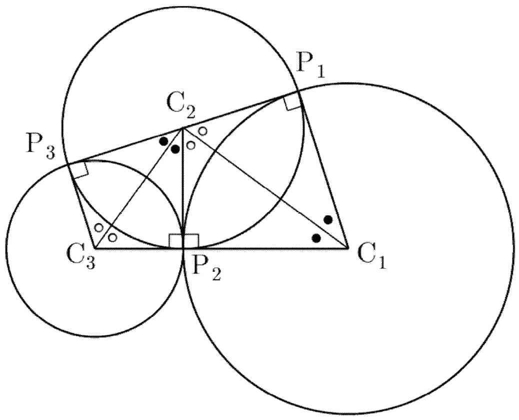
답 ③

[풀이2]

자연수 n에 대하여 원 C_n의 중심을 C_n, 반지름의 길이를 r_n이라고 하자.

직선 l이 점 P_1에서 원 C_1에 접하므로 점 C_1에서 직선 l에 내린 수선의 발은 P_1이다. 마찬가지의 이유로 점 C_2에서 x축

에 내린 수선의 발은 P_2, 점 C_3에서 직선 l에 내린 수선의 발은 P_3이다.



직각삼각형의 RHS합동에 의하여

$\triangle \mathrm{C}_1\mathrm{P}_1\mathrm{C}_2 \equiv \triangle \mathrm{C}_1\mathrm{P}_2\mathrm{C}_2$, $\triangle \mathrm{C}_2\mathrm{P}_3\mathrm{C}_3 \equiv \triangle \mathrm{C}_2\mathrm{P}_2\mathrm{C}_3$

(여기서 두 사각형 $\mathrm{C}_1\mathrm{P}_1\mathrm{C}_2\mathrm{P}_2$와 $\mathrm{C}_2\mathrm{P}_3\mathrm{C}_3\mathrm{P}_2$는 서로 닮음임을 알 수 있다.)

삼각형의 AA닮음에 의하여

$\triangle \mathrm{C}_1\mathrm{P}_2\mathrm{C}_2 \sim \triangle \mathrm{C}_2\mathrm{P}_2\mathrm{C}_3$

이므로

$\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{P}_2} : \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{C}_2} = \overline{\mathrm{C}_2\mathrm{P}_2} : \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{C}_3}$ 즉, $r_1 : r_2 = r_2 : r_3$

정리하면 $r_2^2 = r_1 r_3$

등비중항의 정의에 의하여

r_2는 r_1과 r_3의 등비중항이므로

세 수 r_1, r_2, r_3은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

세 수 r_n, r_{n+1}, r_{n+2}는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

다시 말하면 $\{r_n\}$은 등비수열이다.

원 C_1의 방정식에서

$r_1 = 1$ …㉠

직선 l의 방정식을

l: $y = kx$ (단, k는 양의 상수)

점 $(4, 0)$과 직선 l 사이의 거리가 1이므로

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$\dfrac{4k}{\sqrt{k^2+1}} = 1$ 풀면 $k = \dfrac{\sqrt{15}}{15}$

직선 l의 방정식은

l: $y = \dfrac{\sqrt{15}}{15}x$

점 P_2의 좌표는 $(3, 0)$이므로 직선 l의 방정식에 $x=3$을 대입하면

$y = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$ 즉, $r_2 = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$ …㉡

㉠, ㉡에 의하여 수열 $\{r_n\}$의 귀납적 정의는

$r_1 = 1$, $r_{n+1} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}r_n$

등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여

일반항 r_n은

$r_n = \left(\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)^{n-1}$ $(n \geq 1)$

일반항 S_n은

$S_n = \pi\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$ $(n \geq 1)$

등비급수의 합의 공식에 의하여

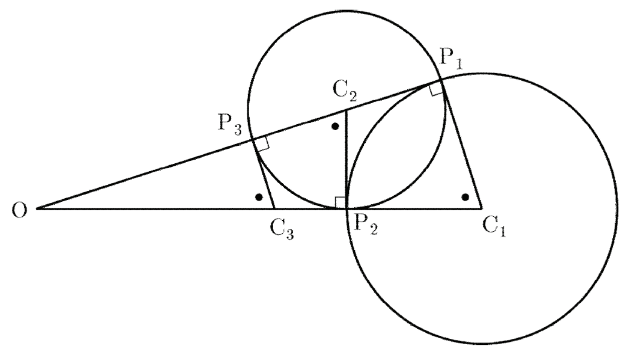
$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \dfrac{\pi}{1-\dfrac{3}{5}} = \dfrac{5}{2}\pi$

답 ③

[풀이3]

자연수 n에 대하여 원 C_n의 중심을 C_n, 반지름의 길이를 r_n이라고 하자.

직선 l이 점 P_1에서 원 C_1에 접하므로 점 C_1에서 직선 l에 내린 수선의 발은 P_1이다. 마찬가지의 이유로 점 C_2에서 x축에 내린 수선의 발은 P_2이다.



서로 닮음인 두 직각삼각형 $\mathrm{OC}_1\mathrm{P}_1$과 $\mathrm{OC}_2\mathrm{P}_2$에 대하여

$\overline{\mathrm{OC}_1} : \overline{\mathrm{C}_1\mathrm{P}_1} = \overline{\mathrm{OC}_2} : \overline{\mathrm{C}_2\mathrm{P}_2}$

대입하면

$4 : 1 = \sqrt{15} - r_2 : r_2$

풀면

$r_2 = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

마찬가지의 방법으로

서로 닮음인 두 직각삼각형 $\mathrm{OC}_2\mathrm{P}_2$과 $\mathrm{OC}_3\mathrm{P}_3$에서

$r_3 = \dfrac{3}{5}$

$\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{r_3}{r_2} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$이므로 등비수열의 정의에서

세 수 r_1, r_2, r_3은 이 순서대로 공비가 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$인 등비수열을

이룬다.

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

세 수 r_n, r_{n+1}, r_{n+2}는 이 순서대로 공비가 $\frac{\sqrt{15}}{5}$인 등비수열을 이룬다.

수열 $\{r_n\}$의 귀납적 정의는

$$r_1=1,\ r_{n+1}=\frac{\sqrt{15}}{5}r_n$$

등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여

일반항 r_n은

$$r_n=\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^{n-1}\ (n\ge 1)$$

일반항 S_n은

$$S_n=\pi\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\ (n\ge 1)$$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\pi}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{2}\pi$$

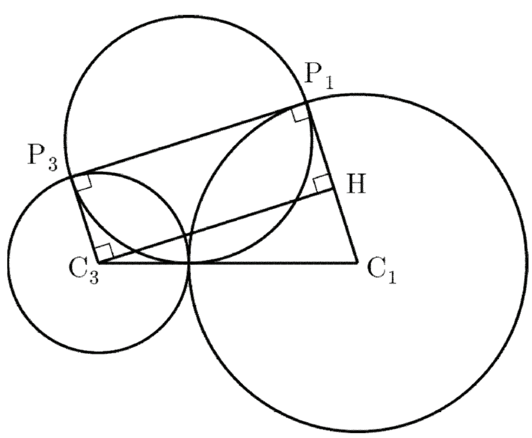
답 ③

[참고]

수열 $\{r_n\}$이 등비수열임을 다음과 같이 보여도 좋다.

자연수 n에 대하여 원 C_n의 중심을 C_n, 반지름의 길이를 r_n, 점 C_3에서 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{C}_1$에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

직선 l이 점 P_1에서 원 C_1에 접하므로 점 C_1에서 직선 l에 내린 수선의 발은 P_1이다. 마찬가지의 이유로 점 C_3에서 직선 l에 내린 수선의 발은 P_3이다.



직각삼각형 $\mathrm{C}_1\mathrm{HC}_3$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{C}_3\mathrm{C}_1}^2=\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{H}}^2+\overline{\mathrm{HC}_3}^2$$

$$(r_1+r_3)^2=(r_1-r_3)^2+(2r_2)^2$$

정리하면

$$r_2^2=r_1r_3$$

등비중항의 정의에 의하여

r_2는 r_1과 r_3의 등비중항이므로

세 수 r_1, r_2, r_3은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

세 수 r_n, r_{n+1}, r_{n+2}는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

다시 말하면 $\{r_n\}$은 등비수열이다.

G140 | 답 ⑤

[풀이1]

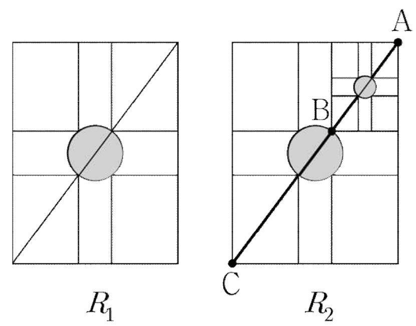


그림 R_1의 원의 지름의 길이는 2이므로, 넓이는 π이다.

그림 R_1의 원과 그림 R_2에서 새롭게 그려진 원의 닮음비는 $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{AB}}=10:\frac{10-2}{2}=5:2$이고, 각 단계마다 새롭게 그려지는 원의 개수는 4배가 되므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot 4}=\frac{25}{9}\pi$$

답 ⑤

[풀이2]

자연수 n에 대하여 두 수열 $\{r_n\}$, $\{t_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$r_n=$(그림 R_n에서 새롭게 그려진 원의 반지름의 길이)

$t_n=$(그림 R_n에서 새롭게 그려진 원의 개수)

문제에서 주어진 조건에 의하여

$$r_1=\frac{1}{2}\times\left(6\times\frac{1}{3}\right)=1$$

피타고라스의 정리에 의하여 그림 R_1의 직사각형의 대각선의 길이는

$$\sqrt{6^2+8^2}=10$$

그림 R_2에서 새롭게 그려진 직사각형의 대각선의 길이는

$$\frac{10-2r_1}{2}=4$$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$\dfrac{r_{n+1}}{r_n}=\dfrac{2}{5}$

수열 $\{r_n\}$의 귀납적 정의는

$r_1=1,\ r_{n+1}=\dfrac{2}{5}r_n$

등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여

일반항 r_n은

$r_n=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}\ (n\geq 1)$

수열 $\{t_n\}$의 귀납적 정의는

$t_1=1,\ t_{n+1}=4t_n$

등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여

일반항 t_n은

$t_n=4^{n-1}(n\geq 1)$

일반항 $\pi(r_n)^2t_n$은

$\pi(r_n)^2t_n=\pi\left(\dfrac{16}{25}\right)^{n-1}\ (n\geq 1)$

일반항 S_n은

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\pi(r_k)^2t_k=\sum_{k=1}^{n}\pi\left(\dfrac{16}{25}\right)^{k-1}$

등비급수의 합의 공식에 의하여

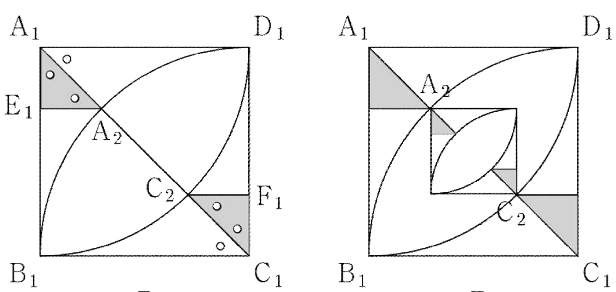
$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\pi}{1-\dfrac{16}{25}}=\dfrac{25}{9}\pi$

답 ⑤

G141 | 답 ③

[풀이1]

평행선의 성질을 이용하면 아래 그림과 같이 각(○)을 결정할 수 있다.



R_1　　　R_2

(단, ○$=45^\circ$)

$\overline{A_1A_2}=\overline{A_1C_1}-\overline{A_2C_1}=\sqrt{2}-1$

이므로

$\dfrac{S_1}{2}=(\triangle A_1E_1A_2$의 넓이$)$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4}$, 즉 $S_1=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$

그림 R_2에서 두 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는

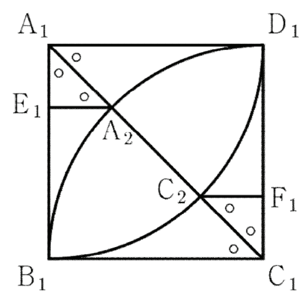
$\overline{A_1C_1}:\overline{A_2C_2}=\sqrt{2}:2-\sqrt{2}=1:\sqrt{2}-1$

이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=\dfrac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$

답 ③

[풀이2]



정사각형의 정의에 의하여

$\overline{A_1B_1}=\overline{B_1C_1},\ \angle A_1B_1C_1=90^\circ$

이므로 $\triangle A_1B_1C_1$은 직각이등변삼각형이다.

$\angle A_2A_1E_1=45^\circ=\angle C_1A_1B_1$　…㉠

주어진 조건에서 두 직선 A_1D_1, E_1A_2가 서로 평행하므로

평행선의 성질에 의하여

$\angle A_1A_2E_1=45^\circ=\angle D_1A_1A_2$(엇각)　…㉡

㉠, ㉡에서 $\triangle A_1E_1A_2$는 $\overline{A_1E_1}=\overline{E_1A_2}$인 직각이등변삼각형이다.

직각삼각형 $A_1B_1C_1$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{A_1C_1}=\sqrt{2}$

이고, 원의 정의에 의하여

$\overline{A_2C_1}=\overline{D_1C_1}=1$

이므로

$\overline{A_1A_2}=\overline{A_1C_1}-\overline{A_2C_1}=\sqrt{2}-1$

직각삼각형 $A_1E_1A_2$에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{A_1E_1}=\overline{E_1A_2}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$(\triangle A_1E_1A_2$의 넓이$)=\dfrac{1}{2}\overline{A_1E_1}\,\overline{E_1A_2}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$

마찬가지의 방법으로

$(\triangle C_1F_1C_2$의 넓이$)=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$

수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$a_n=$(그림 R_n에서 새롭게 그려진 두 개의 삼각형의 넓이의 합)

S_1의 값은

$S_1=a_1=(\triangle A_1E_1A_2$의 넓이$)+(\triangle C_1F_1C_2$의 넓이$)$

$=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$

한편

$\overline{A_2C_2}=\overline{A_1C_2}-\overline{A_1A_2}=1-(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$

에서 두 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는

$\sqrt{2}:2-\sqrt{2}$이므로

$\frac{a_2}{a_1}=\left(\frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{A_1C_1}}\right)^2=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3-2\sqrt{2}$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$, $a_{n+1}=(3-2\sqrt{2})a_n$

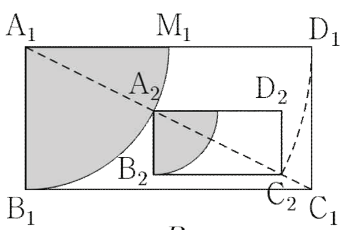
$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=$(첫째항이 $a_1(S_1)$이고 공비가 $3-2\sqrt{2}$인 등비급수의 합)

$=\frac{\frac{3-2\sqrt{2}}{2}}{1-(3-2\sqrt{2})}=\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$

답 ③

G142 | 답 ①

[풀이1]



R_2

직사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 이웃한 두 변의 길이를 각각 x, $2x$로 두면 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{A_2C_2}=\sqrt{5}x$

그런데

$\overline{A_2C_2}=\overline{A_1C_2}-\overline{A_1A_2}=2-1=1$

이므로

$\sqrt{5}x=1$, $x=\frac{1}{\sqrt{5}}$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{5}{16}\pi$$

답 ①

[풀이2]

수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$a_n=$(그림 R_n에서 새롭게 색칠된 부채꼴의 한 개의 넓이)

부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$a_1=\frac{1}{2}\times\overline{A_1B_1}^2\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$

$\square A_2B_2C_2D_2$의 서로 이웃한 두 변의 길이를 각각

$\overline{A_2B_2}=x$, $\overline{B_2C_2}=2x$

직각삼각형 $A_2B_2C_2$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{A_2C_2}=\sqrt{\overline{A_2B_2}^2+\overline{B_2C_2}^2}=\sqrt{5}x$ …㉠

원의 정의에 의하여

$\overline{A_2C_2}=\overline{A_1C_2}-\overline{A_1A_2}=\overline{A_1D_1}-\overline{A_1M_1}=1$ …㉡

㉠, ㉡에서 $\sqrt{5}x=1$ 즉, $x=\frac{\sqrt{5}}{5}$

선분 A_2D_2의 중점을 M_2라고 하자.

두 부채꼴 $A_1B_1M_1$, $A_2B_2M_2$의 반지름의 길이의 비가

$1:\frac{\sqrt{5}}{5}$이므로

$a_2=\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2a_1$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$a_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2a_n$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=\frac{\pi}{4}$, $a_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2a_n\,(n\ge1)$

등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여

일반항 a_n은 $a_n=\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\,(n\ge1)$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로 일반항 S_n은 첫째항이 $\frac{\pi}{4}$이고 공비가 $\frac{1}{5}$

인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.
등비급수의 합을 구하는 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{16}\pi$$

답 ①

G143 | 답 ⑤

[풀이]
부채꼴 A_1OB_1에서
$l_1 = \overline{OA_1}\times\theta = 8\theta$
두 직선 OA_1, A_2B_1은 서로 평행하므로
$\angle A_1OB_1$, $\angle A_2B_1O$는 엇각으로 같다.
즉, $\angle A_2B_1O = \theta$
직각삼각형 B_1OA_2에서
$\frac{\overline{OA_2}}{\overline{B_1O}} = \sin\theta$이므로 $\overline{OA_2} = 8\sin\theta$
부채꼴 A_2OB_2에서
$l_2 = \overline{OA_2}\times\theta = 8\theta\sin\theta$
마찬가지의 방법으로 l_3, l_4, $\cdots$을 구하면
$l_3 = 8\theta\sin^2\theta$, $l_4 = 8\theta\sin^3\theta$, $\cdots$
즉, 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 8θ이고, 공비가 $\sin\theta$인 등비수열이다.
$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$에서 $0 < \sin\theta < 1$이므로 등비수열 $\{l_n\}$의 무한급수는 수렴한다.
등비급수의 합의 공식을 적용하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{8\theta}{1-\sin\theta} = 12\theta$$

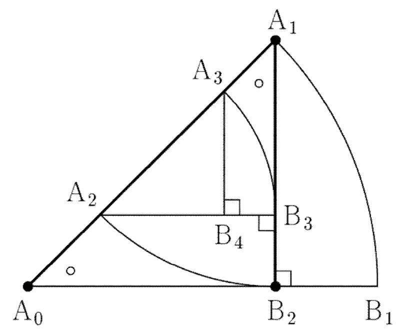
$$\frac{2}{1-\sin\theta} = 3,\ 1-\sin\theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{3}$$

답 ⑤

G144 | 답 ②

[풀이1]

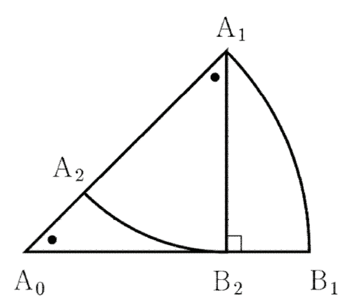


(단, ○$= 45°$)
$l_1 = 4\cdot\frac{\pi}{4} = \pi$
두 부채꼴 $A_0B_1A_1$, $A_1A_2B_2$의 닮음비는
$\overline{A_0A_1} : \overline{A_1B_2} = \sqrt{2} : 1$
이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\pi}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = (2+\sqrt{2})\pi$$

답 ②

[풀이2]
호의 길이를 구하는 공식에 의하여
$l_1 = 4\times\frac{\pi}{4} = \pi$



(단, ●$= 45°$)
$\frac{l_2}{l_1} = \frac{\overline{A_1B_2}}{\overline{A_0A_1}} = \sin 45°$ 즉, $l_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}l_1$
마찬가지의 방법으로
2 이상의 자연수 n에 대하여

$$l_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}l_n$$

수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 π이고 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 등비수열이다.
등비급수의 합의 공식에 의하여

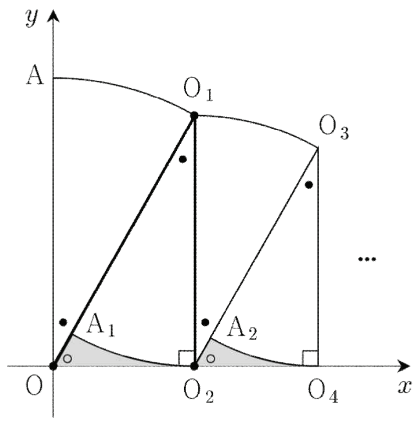
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\pi}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = (2+\sqrt{2})\pi$$

답 ②

G145 | 답 ②

[풀이1]

직선 l_1, l_2, l_3, $\cdots$의 기울기는 $\sqrt{3}$이므로 아래 그림과 같이 각을 결정할 수 있다.



(단, $\bullet = 30^\circ$, $\circ = 60^\circ$)

$S_1 = (\triangle \mathrm{O_1OO_2}$의 넓이$) - ($원 $\mathrm{O_1A_1O_2}$의 넓이$)$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} - \dfrac{1}{2} \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot \dfrac{\pi}{6}$

$= 2\sqrt{3} - \pi$

서로 닮음인 두 직각삼각형 $\mathrm{O_1OO_2}$, $\mathrm{O_3O_2O_4}$의 닮음비는

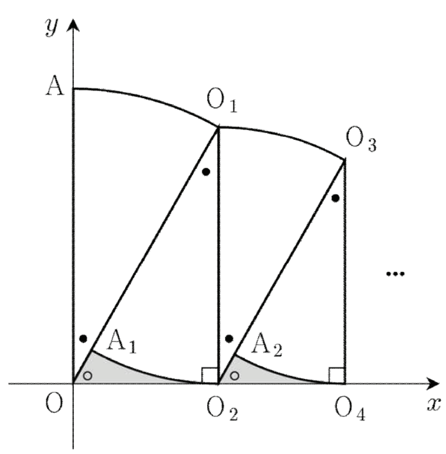
$\overline{\mathrm{O_1O}} : \overline{\mathrm{O_1O_2}} = 2 : \sqrt{3}$ $(\because \overline{\mathrm{O_3O_2}} = \overline{\mathrm{O_1O_2}})$

이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 8\sqrt{3} - 4\pi$$

답 ②

[풀이2]



(단, $\circ = 60^\circ$, $\bullet = 30^\circ$)

직선 l_1의 기울기가 $\sqrt{3}$이므로 직선 l_1이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 60°이다.

$\angle \mathrm{O_1OO_2} = 60^\circ$

삼각형의 세 내각의 합은 180°이므로

삼각형 $\mathrm{O_1OO_2}$에서

$\angle \mathrm{O_2O_1O} = 30^\circ$

원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OO_1}} = \overline{\mathrm{OA}} = 4$

직각삼각형 $\mathrm{O_1OO_2}$에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{OO_2}} = \overline{\mathrm{OO_1}} \cos 60^\circ = 2$

$\overline{\mathrm{O_1O_2}} = \overline{\mathrm{OO_1}} \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$

삼각형과 부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S_1 = ($삼각형 $\mathrm{O_1OO_2}$의 넓이$) - ($부채꼴 $\mathrm{O_1A_1O_2}$의 넓이$)$

$= \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} - \dfrac{1}{2}(2\sqrt{3})^2 \times \dfrac{\pi}{6} = 2\sqrt{3} - \pi$

서로 닮음인 두 직각삼각형 $\mathrm{O_1OO_2}$, $\mathrm{O_3O_2O_4}$에 대하여

$\overline{\mathrm{OO_1}} : \overline{\mathrm{O_2O_3}} = \overline{\mathrm{OO_1}} : \overline{\mathrm{O_1O_2}} = 2 : \sqrt{3}$

이므로 $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{3}{4}$이다.

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$

수열 $\{S_n\}$의 귀납적 정의는

$S_1 = 2\sqrt{3} - \pi$, $S_{n+1} = \dfrac{3}{4} S_n$

등비급수의 합의 공식에 의하여

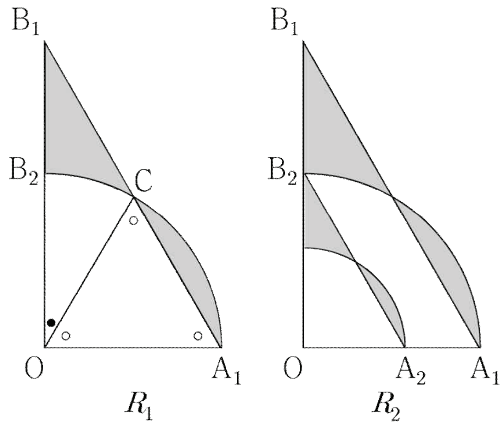
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{1 - \frac{3}{4}} = 8\sqrt{3} - 4\pi$$

답 ②

G146 | 답 ④

[풀이1]

선분 $\mathrm{B_1A_1}$과 호 $\mathrm{A_1B_2}$가 만나는 점을 C라고 하자.



(단, ●$=30^\circ$, ○$=60^\circ$)

이등변삼각형 OA_1C_1에서

$\angle A_1CO=60^\circ=\angle OA_1C$

이므로 $\angle COA_1=60^\circ$ 이다.

그러므로 $\triangle OA_1C$는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.

$S_1=$(▽COA_1의 넓이)$-$($\triangle COA_1$의 넓이)

$+$($\triangle B_1OC$의 넓이)$-$(▽B_2OC의 넓이)

$$=\frac{8\pi}{3}-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}$$

$$=\frac{4\pi}{3}$$

그림 R_2에서 두 직각삼각형 B_1OA_1, B_2OA_2의 닮음비는 $\sqrt{3}:1$이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

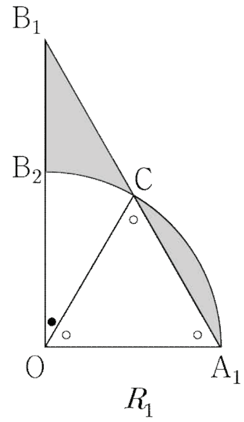
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4\pi}{3}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=2\pi$$

답 ④

[풀이2]

그림 R_n에서 새롭게 그려진  모양의 도형의 넓이를 a_n이라고 하자.

중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OA_1}$인 사분원이 선분 A_1B_1과 만나는 두 점 중에서 A_1이 아닌 점을 C라고 하자.



(단, ○$=60^\circ$, ●$=30^\circ$)

직각삼각형 OA_1B_1에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\angle OA_1B_1=60^\circ$

원의 정의에 의하여

$\overline{OA_1}=\overline{OC}$

이등변삼각형의 성질에 의하여

$\angle A_1CO=60^\circ$

삼각형 OA_1C의 세 내각의 합은 180° 이므로

$\angle COA_1=60^\circ$ (그리고 $\angle B_2OC=30^\circ$)

삼각형 OA_1C의 네 내각은 모두 60° 이므로 삼각형 OA_1C는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.

$a_1=$($\triangle B_1OC$의 넓이)$-$(▽B_2OC의 넓이)

$+$(▽COA_1의 넓이)$-$($\triangle COA_1$의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2-\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{\pi}{6}$$

$$+\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2$$

$$=\frac{4}{3}\pi$$

두 직각삼각형 OA_1B_1, OA_2B_2의 닮음비는

$4\sqrt{3}:4(=\overline{OB_1}:\overline{OB_2})$

이므로

$$a_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2a_1$$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$$a_1=\frac{4}{3}\pi,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n(\text{단, } n\ge1)$$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{3}}=2\pi$$

답 ④

[참고]
a_1의 값은 다음과 같이 구해도 좋다.
$a_1 = (\triangle \mathrm{OA_1B_1}$의 넓이$) + (\triangledown \mathrm{OA_1B_2}$의 넓이$)$
$- 2 \times (\triangledown \mathrm{B_2OC}$의 넓이$) - 2 \times (\triangle \mathrm{COA_1}$의 넓이$)$

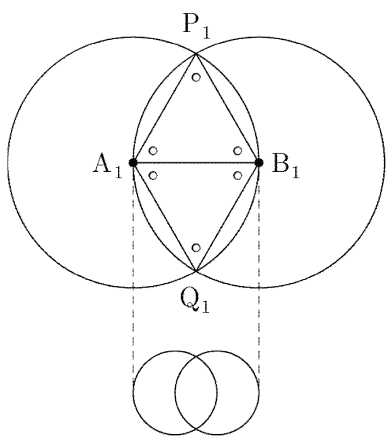
$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{2}$$

$$-2 \times \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{6} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2$$

$$= \frac{4}{3}\pi$$

G147 | 답 ④

[풀이1]



(단, ○$= 60^\circ$)
원의 정의에 의하여 두 삼각형 $\mathrm{P_1A_1B_1}$, $\mathrm{Q_1B_1A_1}$은 서로 합동인 정삼각형이다.

$$l_1 = \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{32}{9}\pi$$

위의 그림에서  모양의 두 도형의 닮음비는 $3:1$이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\frac{32}{9}\pi}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{16}{3}\pi$$

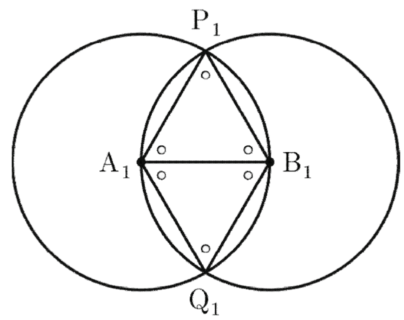
답 ④

[풀이2]
두 점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$이 선분 AB의 삼등분점이므로

$$\overline{\mathrm{AA_1}} = \overline{\mathrm{A_1B_1}} = \overline{\mathrm{B_1B}} = \frac{8}{3}$$

원의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{A_1B_1}} = \overline{\mathrm{B_1P_1}} = \overline{\mathrm{P_1A_1}}$이므로

$\triangle \mathrm{A_1B_1P_1}$은 한 변의 길이가 $\frac{8}{3}$인 정삼각형이다.
마찬가지의 방법으로
$\triangle \mathrm{A_1B_1Q_1}$은 한 변의 길이가 $\frac{8}{3}$인 정삼각형이다.



(단, ○$= 60^\circ$)
$\angle \mathrm{P_1B_1Q_1} = 120^\circ$, $\angle \mathrm{P_1A_1Q_1} = 120^\circ$
이므로 호의 길이를 구하는 공식에 의하여
두 호 $\mathrm{P_1A_1Q_1}$, $\mathrm{P_1B_1Q_1}$의 길이는
각각 $\frac{16}{9}\pi$이다. 즉, $l_1 = \frac{32}{9}\pi$
점 $\mathrm{A_1(B_1)}$을 중심으로 하고 반지름이 $\mathrm{A_1B_1}$인 원과 점 $\mathrm{A_2}$ $\mathrm{(B_2)}$를 중심으로 하고 반지름이 $\mathrm{A_2B_2}$인 원의 닮음비가 $3:1$이므로

$l_1 : l_2 = 3:1$ 즉, $\frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{3}$

2 이상의 자연수 n에 대하여
마찬가지의 방법으로

$$\frac{l_{n+1}}{l_n} = \frac{1}{3}$$

수열 $\{l_n\}$의 귀납적 정의는

$$l_1 = \frac{32}{9}\pi,\ l_{n+1} = \frac{1}{3}l_n$$

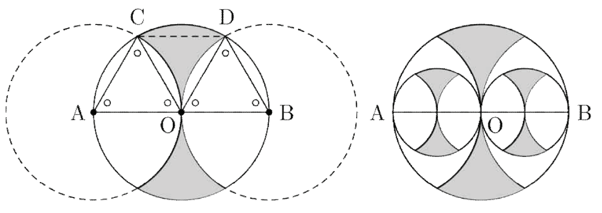
등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\frac{32}{9}\pi}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{16}{3}\pi$$

답 ④

G148 | 답 ②

[풀이1]



R_1 R_2

(단, ○$=60^\circ$ 이고, 두 점 C, D는 두 원의 교점이다.)
원의 정의에 의하여 두 삼각형 AOC, OBD는 서로 합동인 정삼각형이다.

$\frac{S_1}{2}=$(□AODC의 넓이)$-$(♡AOC의 넓이)

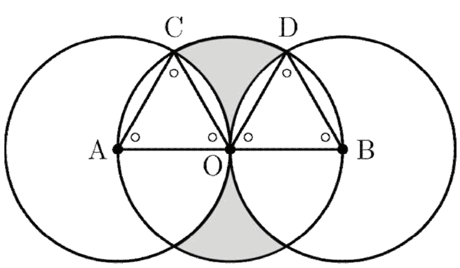
$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$, $S_1=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

그림 R_1의 모양의 도형과 그림 R_2에서 새롭게 그려진 모양의 도형의 닮음비는 $2:1$이고, 각 단계마다 새롭게 그려지는 모양의 도형의 개수는 2배가 되므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2}=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$$

답 ②

[풀이2]
아래 그림처럼 원 O의 중심을 O, 점 A를 중심으로 하고 원 O와 반지름의 길이가 같은 원이 원 O와 만나는 두 점 중에서 한 점을 C, 점 B를 중심으로 하고 원 O와 반지름의 길이가 같은 원이 원 O와 만나는 두 점 중에서 한 점을 D라고 하자.



(단, ○$=60^\circ$)
원의 정의에 의하여
$\overline{CA}=\overline{AO}=\overline{OC}$
이므로 △CAO는 정삼각형이다.
마찬가지의 방법으로 △DOB는 정삼각형이다.
정삼각형의 정리에 의하여
$\angle AOC=\angle DOB=60^\circ$
이므로
$\angle COD=180^\circ-\angle AOC-\angle DOB=60^\circ$
즉, 부채꼴 COD의 중심각의 크기는 60° 이다.
(호 OC와 현 OC로 둘러싸인 활꼴의 넓이)
$=$(부채꼴 AOC의 넓이)$-$(△AOC의 넓이)
$=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_1}{2}=$(부채꼴 COD의 넓이)
$-2\times$(호 OC와 현 OC로 둘러싸인 활꼴의 넓이)
$=\frac{\pi}{6}-2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$

이므로 $S_1=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자.
$a_n=$(그림 R_n에서 새롭게 그려진 모양의 도형 한 개의 넓이)
$b_n=$(그림 R_n에서 새롭게 그려진 모양의 도형의 개수)

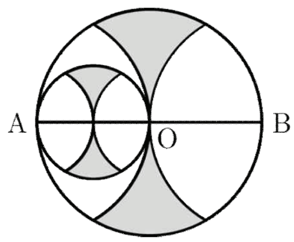


그림 R_2에서 큰 원과 작은 원의 지름의 길이의 비가 $2:1$이므로

$a_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 a_1$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$, $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n (n\geq 1)$

등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여
일반항 a_n은

$a_n=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (n\geq 1)$

수열 $\{b_n\}$의 귀납적 정의는
$b_1=1$, $b_{n+1}=2b_n (n\geq 1)$
등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여
일반항 b_n은
$b_n=2^{n-1} (n\geq 1)$
일반항 a_nb_n은

$a_nb_n=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n\geq 1)$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$이므로 일반항 S_n은 첫째항이 $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

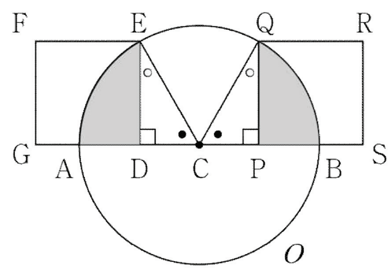
등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}}{1-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$$

답 ②

G149 | 답 ③

[풀이1]



R_1

(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$)

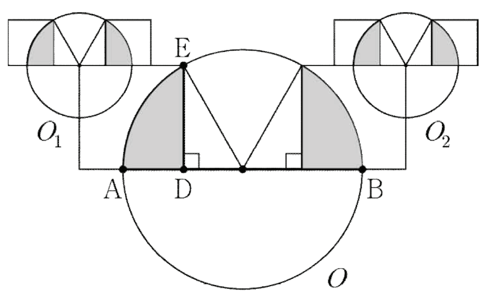
직각삼각형 EDC에서

$\overline{\mathrm{DC}} : \overline{\mathrm{CE}} = 1:2$

이므로 특수각의 삼각비에 의하여 위의 그림과 같이 각(●, ○)을 결정할 수 있다.

$\frac{S_1}{2}$=(▽CEA 의 넓이)−(△CED의 넓이)

$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 즉 $S_1 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$



R_2

두 원 $O_1(O_2)$, O의 닮음비는

$\overline{\mathrm{ED}} : \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{3} : 4$

이고, 각 단계마다 그려지는 새 원의 개수는 2배가 되므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 \times 2} = \frac{32\pi - 24\sqrt{3}}{15}$$

답 ③

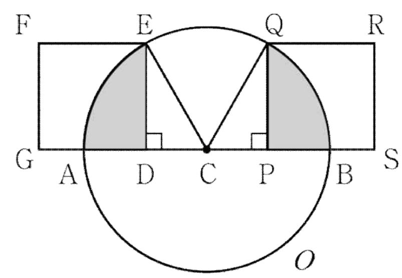
[풀이2]

자연수 n에 대하여 그림 R_n에서 새롭게 그려진 모양의 도형과 모양의 도형은 모두 합동이다.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음과 같다고 하자.

a_n=(그림 R_n에서 새롭게 그려진 () 모양의 도형 한 개의 넓이)

b_n=(그림 R_n에서 새롭게 그려진 모양의 도형의 개수와 모양의 도형의 개수의 합)



직각삼각형 QCP에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\overline{\mathrm{QC}}^2 - \overline{\mathrm{CP}}^2} = \sqrt{2^2-1^2} = \sqrt{3}$

이므로 특수각의 삼각비에 의하여

$\angle \mathrm{QCP} = 60^\circ$

부채꼴의 넓이를 구하는 공식과 삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

a_1 =(부채꼴 CBQ의 넓이)−(삼각형 QCP의 넓이)

$= \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{CB}}^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{CP}} \times \overline{\mathrm{PQ}} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$

두 원 O, $O_1(O_2)$의 지름의 길이의 비는

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{DE}} = 4 : \sqrt{3}$

이므로 그림 R_2에서 새롭게 그려진 () 모양의 도형 한 개의 넓이와 그림 R_1에서 새롭게 그려진 () 모양의 도형 한 개의 넓이의 비는 16 : 3이다.

즉, $a_2 = \frac{3}{16} a_1$

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_{n+1} = \frac{3}{16} a_n$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1 = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_{n+1} = \frac{3}{16} a_n (n=1, 2, 3, \cdots)$

수열 $\{b_n\}$의 귀납적 정의는

$b_1 = 2$, $b_{n+1} = 2b_n (n=1, 2, 3, \cdots)$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n$은 첫째항이

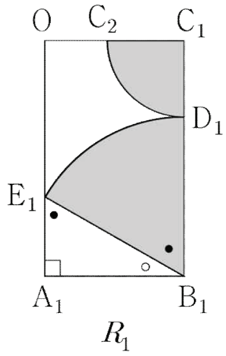
$\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\,(=a_1b_1)$이고 공비가 $\frac{3}{8}\left(=\frac{3}{16}\times 2\right)$인 등비급수이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}}{1-\frac{3}{8}} = \frac{32\pi - 24\sqrt{3}}{15}$$

답 ③

G150 | 답 ⑤

[풀이]



(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$)

직각삼각형 $E_1A_1B_1$에서

$\overline{E_1B_1} : \overline{B_1A_1} = \frac{2}{3}\sqrt{3} : 1 = 2 : \sqrt{3}$

$(\because \overline{E_1B_1} = \overline{D_1B_1})$

이므로 두 각 ○, ●이 위의 그림처럼 결정된다.

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{11}{36}\pi$$

두 직각삼각형 $OA_1B_1C_1$, $OA_2B_2C_2$의 닮음비는

$\overline{OC_1} : \overline{OC_2} = 1 : 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

이므로 수열 $\{S_n\}$의 공비는 $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{11}{36}\pi}{1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\frac{11}{36}\pi}{\frac{2\sqrt{3}-1}{3}}$$

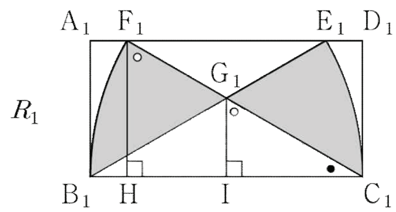
$$= \frac{1+2\sqrt{3}}{12}\pi$$

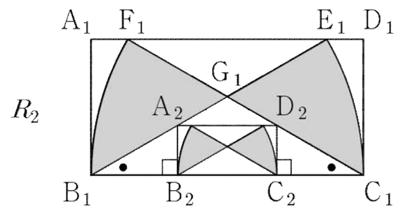
답 ⑤

G151 | 답 ②

[풀이1]

두 점 F_1, G_1에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 각각 H, I라고 하자.





(단, ●$=30^\circ$, ○$=60^\circ$)

그림 R_1에서

$\overline{C_1F_1} : \overline{F_1H} = \overline{C_1B_1} : \overline{B_1A_1} = 2:1$

이므로 각(●, ○)이 위의 그림과 같이 결정된다.

$\frac{S_1}{2} =$(▽$C_1F_1B_1$의 넓이)$-$(△$C_1G_1B_1$의 넓이)

$= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$, 즉 $S_1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$

그림 R_2의 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 짧은 변의 길이를 x라고 하자.

$\overline{B_1C_1} = \overline{B_1B_2} + \overline{B_2C_2} + \overline{C_2C_1}$

즉, $2 = \sqrt{3}x + 2x + \sqrt{3}x$, $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

그림 R_2에서 두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는

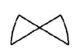
$1 : \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

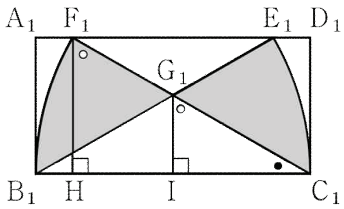
$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{2\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}\pi - 12}{9}$$

답 ②

[풀이2]

그림 R_n에서 새롭게 그려지는  모양의 도형의 넓이를 a_n이라고 하자.

두 점 F_1, G_1에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 각각 H, I라고 하자.



R_1

(단, ●$=30^\circ$, ○$=60^\circ$)

원의 정의에 의하여 $\overline{C_1F_1}=\overline{C_1B_1}=2$이므로

직각삼각형 C_1F_1H에서 삼각비의 정의에 의하여

$$\sin(\angle HC_1F_1)=\frac{\overline{F_1H}}{\overline{C_1F_1}}=\frac{1}{2}$$

이므로 $\angle HC_1F_1=30^\circ$이다.

직각삼각형 C_1G_1I에서 특수각의 삼각비의 정의에 의하여

$$\overline{G_1I}=\overline{C_1I}\times\tan30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

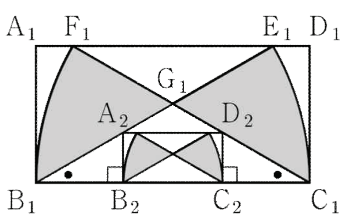
$$\frac{a_1}{2}=(\heartsuit C_1F_1B_1\text{의 넓이})-(\triangle C_1G_1B_1\text{의 넓이})$$

$$=\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\text{이므로}$$

$$a_1=\frac{2\pi}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\overline{A_2B_2}=x$로 두자.



R_2

(단, ●$=30^\circ$)

두 직각삼각형 $A_2B_1B_2$, $D_2C_2C_1$에서 특수각의 삼각비의 정의에 의하여

$$\overline{B_1B_2}=\overline{C_2C_1}=\sqrt{3}x$$

이므로

$$\overline{B_1C_1}=\overline{B_1B_2}+\overline{B_2C_2}+\overline{C_2C_1}$$

$$=2x+2\sqrt{3}x=2$$

정리하면

$$x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는 $1:x$이므로

넓이의 비는 $1:x^2$이다.

$$a_2=x^2a_1=\frac{2-\sqrt{3}}{2}a_1$$

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}a_n$$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$$a_1=\frac{2\pi}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3},\quad a_{n+1}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}a_n$$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{2\pi}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{2-\sqrt{3}}{2}}=\frac{4\sqrt{3}\pi-12}{9}$$

답 ②

G152

| 답 ①

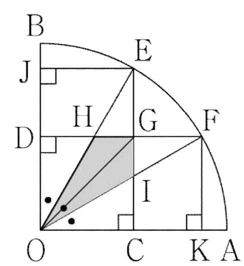
[풀이]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$a_n=$(그림 R_n에서 새롭게 그려진 모양의 도형 한 개의 넓이)

$b_n=$(그림 R_n에서 새롭게 그려진 모양의 도형의 개수)

점 E에서 선분 BO에 내린 수선의 발을 J, 점 F에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 K라고 하자.



(단, ●$=30^\circ$)

직각삼각형 FOK에서 특수각의 삼각비에 의하여

$$\sin(\angle FOK)=\frac{\overline{FK}}{\overline{OF}}=\frac{1}{2}\text{이므로 }\angle FOK=30^\circ$$

$$(\because \overline{OF}=2,\ \overline{FK}=\overline{DO}=\frac{1}{2}\overline{BO}=\frac{1}{2}\times2=1)$$

직각삼각형 JOE에서 마찬가지의 방법으로

$\angle JOE=30^\circ$

그리고

$\angle EOF=90^\circ-\angle JOE-\angle FOK=30^\circ$

직각삼각형 IOC에서 특수각의 삼각비에 의하여

$$\overline{IC}=\overline{OC}\times\tan30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

이므로

$$\overline{GI}=\overline{GC}-\overline{IC}=1-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$\frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{GI}}\,\overline{\mathrm{OC}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)1$$

$(\because \triangle \mathrm{OHG} \equiv \triangle \mathrm{OIG})$

이므로

$$a_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} (= S_1)$$

그림 R_1의  모양의 (큰) 도형과 그림 R_2에서 새롭게 그려진  모양의 (작은) 도형의 닮음비는 $2 : \frac{1}{\sqrt{3}} (= \overline{\mathrm{OA}} : \overline{\mathrm{DH}})$이므로

이 두 도형의 넓이의 비는

$$a_1 : a_2 = 2^2 : \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2, \text{ 즉 } \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{12}$$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$$a_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \ a_{n+1} = \frac{1}{12}a_n$$

수열 $\{b_n\}$의 귀납적 정의는

$$b_1 = 1, \ b_{n+1} = 2b_n$$

수열 $\{a_n b_n\}$의 귀납적 정의는

$$a_1 b_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \ a_{n+1}b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n b_n$$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$이므로

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

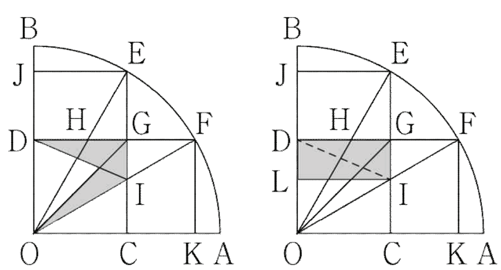
$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{2(3-\sqrt{3})}{5}$$

답 ①

[참고]

$S_1 (= a_1)$의 값을 다음과 같이 구해도 좋다.

점 I에서 선분 BO에 내린 수선의 발을 L이라고 하자.



두 삼각형 GOI, GOH의 넓이가 같고,

두 삼각형 GOI, GDI의 넓이가 같으므로

$S_1 = 2 \times (\triangle \mathrm{GDI}$의 넓이)

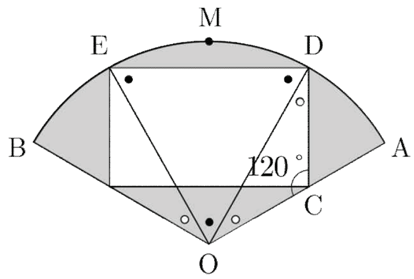
$= (\square \mathrm{GDLI}$의 넓이)

$$= 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

G153 ㅣ답 ④

[풀이1]

아래 그림에서 세 점 C, D, E는 직사각형의 꼭짓점이다.



(단, ●$= 60°$, ○$= 30°$)

$\overline{\mathrm{OE}} = \overline{\mathrm{OD}}$이고, $\angle \mathrm{EOD} = 60°$ 이므로

$\triangle \mathrm{ODE}$는 정삼각형이다.

$\angle \mathrm{OCD} = 120°$ 인 이등변삼각형 $\triangle \mathrm{OCD}$에서

코사인법칙에 의하여 $\overline{\mathrm{CD}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$이므로

$$S_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

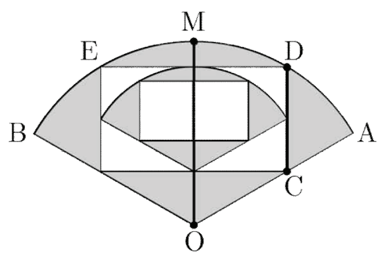
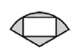
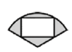


그림 R_1의  모양의 도형과 그림 R_2에서 새롭게 그려진  모양의 도형의 닮음비는

$$\overline{\mathrm{OM}} : \overline{\mathrm{CD}} = 1 : \frac{1}{\sqrt{3}}$$

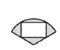
이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$$

답 ④

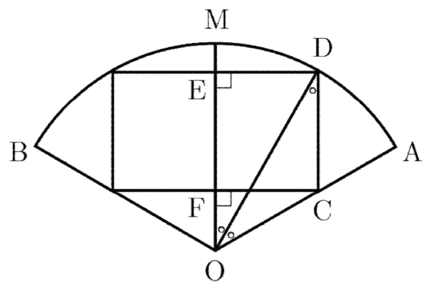
[풀이2]

자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$a_n =$(그림 R_n에서 새롭게 그려진  모양의 도형 한 개의 넓이)

아래 그림과 같이 그림 R_1에서 그려지는 직사각형의 네 꼭짓점

중에서 두 점을 각각 C, D, 선분 OM이 직사각형과 만나는 두 점을 각각 E, F라고 하자.
이때, $\angle \mathrm{CFO} = \angle \mathrm{DEO} = 90^\circ$ 이다.



부채꼴의 중심각의 크기와 호의 길이의 관계에 의하여

$\angle \mathrm{MOA} = \frac{1}{2} \angle \mathrm{BOA} = 60^\circ$

$\angle \mathrm{MOD} = \angle \mathrm{DOA} = \frac{1}{2} \angle \mathrm{MOA} = 30^\circ$ …㉠

평행사변형의 정의에 의하여 ▫CDEF에서
두 직선 OM(FE), CD가 서로 평행하므로
$\angle \mathrm{MOD} = \angle \mathrm{CDO}$(엇각) …㉡
㉠, ㉡에서
$\angle \mathrm{CDO} = \angle \mathrm{DOC}$
직각삼각형 ODE에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{OD}} \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

직각삼각형 OCF에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{OC}} = \frac{\overline{\mathrm{CF}}}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} (\because \overline{\mathrm{CF}} = \overline{\mathrm{DE}})$

이등변삼각형 OCD에서

$\overline{\mathrm{CD}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \overline{\mathrm{OC}}$

그림 R_1에서 그려지는 직사각형의 이웃하는 두 변의 길이는 각각 1, $\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.
부채꼴과 직사각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$a_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$

이제 수열 $\{a_n\}$의 공비를 구하자.
두 직각삼각형 OCF, ODE에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{OF}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $\overline{\mathrm{OE}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{EF}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

그림 R_2의 큰 부채꼴과 작은 부채꼴의 닮음비는 $1 : \frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$a_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 a_1$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$a_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 a_n$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$, $a_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 a_n (n \geq 1)$

등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여
일반항 a_n은

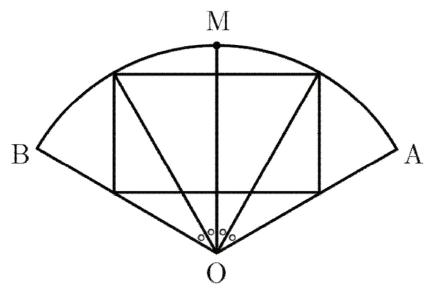
$a_n = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (n \geq 1)$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$이므로 일반항 S_n은 첫째항이 $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.
등비급수의 합의 공식에 의하여

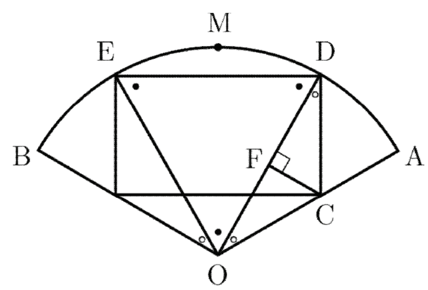
$$\therefore \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$$

답 ④

[참고]
그림 R_1에서 그려지는 직사각형의 세로의 길이를 다음과 같이 구할 수도 있다. 부채꼴의 중심각의 크기와 호의 길이의 관계에 의하여 아래 그림에서 4개의 부채꼴의 중심각의 크기는 30°로 모두 같다.



아래 그림과 같이 그림 R_1에서 그려지는 직사각형의 네 꼭짓점 중에서 세 점을 각각 C, D, E, 점 C에서 선분 OD에 내린 수선의 발을 F라고 하자.



원의 정의에서 $\overline{\mathrm{OD}} = \overline{\mathrm{OE}}$이고 $\angle \mathrm{EOD} = 60^\circ$ 이므로
△ODE는 정삼각형이다.
$\angle \mathrm{CDO} = \angle \mathrm{CDE} - \angle \mathrm{ODE} = 30^\circ$ 이므로
△OCD는 이등변삼각형이다.
두 직각삼각형 CFO, CFD는 서로 RHS합동이므로

$\overline{\mathrm{OF}} = \overline{\mathrm{DF}} = \dfrac{1}{2}$

직각삼각형 OCF에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{OC}} = \dfrac{\overline{\mathrm{OF}}}{\cos 30^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

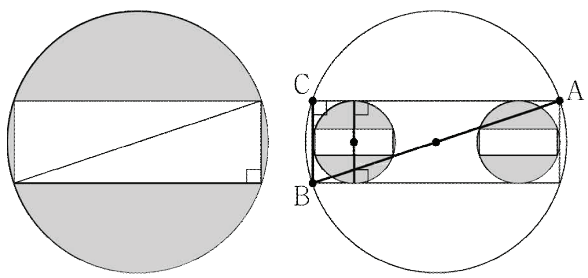
△OCD는 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{OC}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 그림 R_1에서 그려진 직사각형의 세로의 길이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.

G154 | 답 ②

[풀이1]



R_1 R_2

(단, 세 점 A, B, C는 직사각형의 세 꼭짓점이다.)

그림 R_1의 직사각형의 이웃한 두 변의 길이를 각각 k, $3k$라고 하면

$k^2 + (3k)^2 = 2^2$, $k = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$

$S_1 = \pi - 3k^2 = \pi - \dfrac{6}{5}$

그림 R_1의 원의 지름과 그림 R_2에서 새롭게 그려진 작은 원의 지름의 비는 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} = 2 : \dfrac{2}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} : 1$이고, 각 단계마다 새롭게 그려지는 모양의 도형의 개수는 2배가 되므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{\pi - \frac{6}{5}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 \cdot 2} = \frac{5}{4}\pi - \frac{3}{2}$$

답 ②

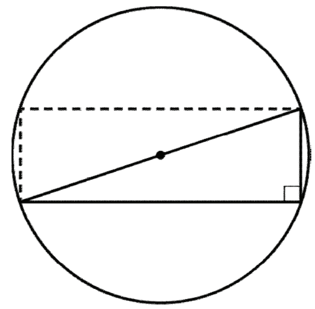
[풀이2]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

a_n=(그림 R_n에서 새롭게 그려지는 모양의 도형 한 개의 넓이)

b_n=(그림 R_n에서 새롭게 그려지는 모양의 도형의 개수)

그림 R_1에서 그려지는 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 $3x$, x로 두자. (단, $x > 0$)



직각삼각형에서 피타고라스의 정리에 의하여

$2^2 = (3x)^2 + x^2$ 풀면 $x = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$

그림 R_1에서 그려지는 직사각형의 가로와 세로의 길이는 각각 $\dfrac{6}{\sqrt{10}}$, $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$이므로 $a_1 = \pi - \dfrac{6}{5}$

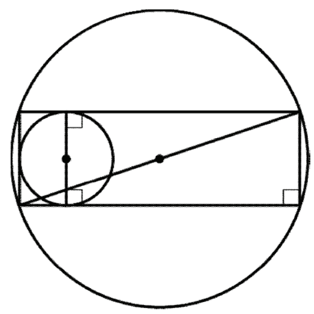


그림 R_2에서 새롭게 그려진 원의 지름의 길이는 그림 R_1에서 그려진 직사각형의 세로의 길이와 같으므로 그림 R_2에서 큰 원과 작은 원의 닮음비는 $1 : \dfrac{1}{\sqrt{10}}$이다.

$a_2 = \dfrac{1}{10}a_1$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$a_{n+1} = \dfrac{1}{10}a_n$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1 = \pi - \dfrac{6}{5}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{10}a_n \, (n \geq 1)$

등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여

일반항 a_n은

$a_n = \left(\pi - \dfrac{6}{5}\right)\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1} (n \geq 1)$

수열 $\{b_n\}$의 귀납적 정의는

$b_1 = 1$, $b_{n+1} = 2b_n \, (n \geq 1)$

등비수열의 일반항을 구하는 공식에 의하여

일반항 b_n은

$b_n = 2^{n-1} (n \geq 1)$

일반항 a_nb_n은

$$a_nb_n=\left(\pi-\frac{6}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\ (n\geq 1)$$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$이므로 일반항 S_n은 첫째항이 $\pi-\frac{6}{5}$이고 공비가 $\frac{1}{5}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

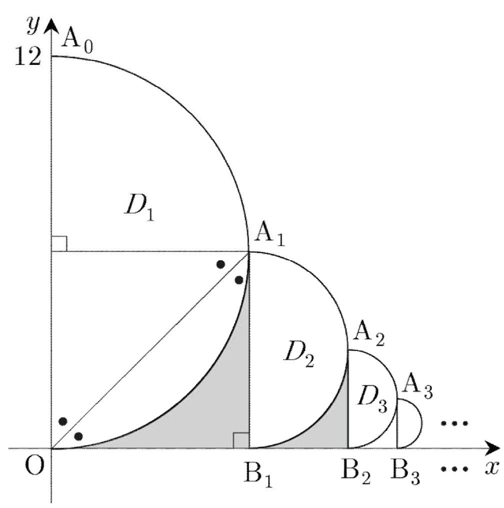
등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{\pi-\frac{6}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}\pi-\frac{3}{2}$$

답 ②

G155 | 답 ②

[풀이1]



(단, ● = 45°)

삼각형 A_1OB_1은 직각이등변삼각형이고, 점 A_1에서 y축에 내린 수선의 발은 반원 D_1의 중심과 일치하므로, 두 반원 D_1, D_2의 지름의 길이의 비율은 $2:1$이다.

위의 그림에서 색칠된 모양의 두 도형의 닮음비는 $2:1$이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

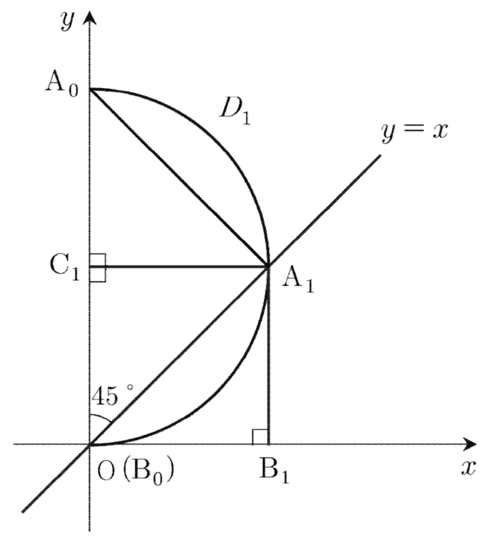
$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{6^2-\frac{\pi}{4}\cdot 6^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=12(4-\pi)$$

답 ②

[풀이2]

점 B_0을 원점 O, 반원 D_n의 중심을 C_n이라고 하자.

(단, n는 자연수이다.)



직선 $y=x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각이 45°이므로

$\angle C_1B_0A_1=90°-\angle A_1B_0B_1=45°$

호 A_0A_1의 원주각의 크기는 45°이므로

원주각과 중심각의 관계에 의하여

$\angle A_0C_1A_1=90°$

그러므로

$\angle A_1C_1B_0=90°$

점 A_1에서 x축에 내린 수선의 발이 B_1이므로

$\angle B_0B_1A_1=90°$

x축과 y축이 이루는 각의 크기는 90°이므로

$\angle C_1B_0B_1=90°$

사각형의 네 내각의 크기의 합은 360°이므로

$\angle B_1A_1C_1$

$=360°-\angle A_1C_1B_0-\angle C_1B_0B_1-\angle B_0B_1A_1$

$=90°$

$\square A_1C_1B_0B_1$의 네 내각의 크기가 모두 같으므로

직사각형의 정의에 의하여

$\square A_1C_1B_0B_1$은 직사각형이다.

평행사변형의 성질에 의하여

$\overline{C_1A_1}=\overline{B_0B_1}$, $\overline{C_1B_0}=\overline{A_1B_1}$

원의 정의에 의하여

$\overline{A_1C_1}=\overline{C_1B_0}$

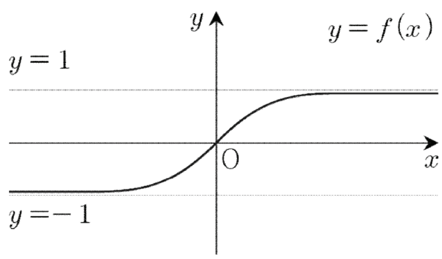
정사각형의 정의에 의하여

$\square A_1C_1B_0B_1$은 한 변의 길이가 6인 정사각형이다.

마찬가지 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$A_nC_nB_{n-1}B_n$은 한 변의 길이가 반원 D_n의 반지름의 길이와 같은 정사각형이다.

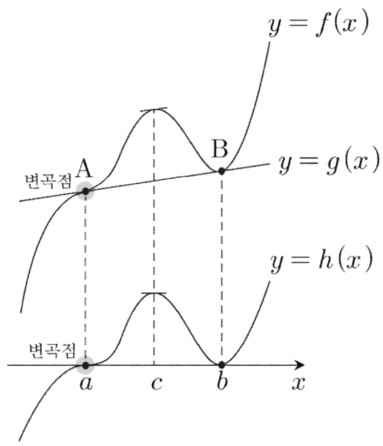
$\ln|1+f(x)|-\ln|1-f(x)|=2x+C$ $\cdots(*)$
(단, C는 적분상수)
(*)에 $x=0$을 대입하면
$\ln|1+f(0)|-\ln|1-f(0)|=C$ 풀면 $C=0$
이를 (*)에 대입하면
$\ln|1+f(x)|-\ln|1-f(x)|=2x$
정리하면
$$\ln\left|\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right|=2x$$
로그의 정의에 의하여
$$\left|\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right|=e^{2x}$$
그런데 $-1<f(x)<1$이므로
$$\frac{1+f(x)}{1-f(x)}=e^{2x}$$
정리하면
$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$
함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



[참고2]
점 $(0,\ f(0))$이 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 됨을 다음과 같이 보일 수도 있다.
함수 $f''(x)$의 도함수는
$f'''(x)=-2(f'(x))^2-2f(x)f''(x)$
$f''(0)=-2f(0)f'(0)=0$이고,
$f'''(0)=-2(f'(0))^2-2f(0)f''(0)=-2$
이므로 $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 변곡점을 갖는다.

H198 | 답 ⑤

[풀이1] 시험장
세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



▸ ㄱ. (참)
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(b,\ f(b))$에서의 접선이 $y=g(x)$이므로 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(b,\ 0)$에서의 접선은 x축이다.
$\therefore\ h'(b)=0$
▸ ㄴ. (참)
$h'(a)=h'(b)=0$이므로
롤의 정리에 의하여
$h'(c)=0$
인 c가 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 이상 존재한다.
따라서 방정식 $h'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3 이상이다.
▸ ㄷ. (참)
일차함수 $g(x)$의 이계도함수는 상수함수 $y=0$이므로
점 $(a,\ f(a))$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이면
점 $(a,\ h(a))$는 곡선 $y=h(x)$의 변곡점이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
답 ⑤

[풀이2] ★
두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 이계도함수를 가지므로
함수 $h(x)$는 이계도함수를 갖는다.
따라서 함수 $h(x)$는 미분가능하다.
▸ ㄱ. (참)
접선 $y=g(x)$의 방정식은
$g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$
함수 $h(x)$의 방정식은
$h(x)=f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)$
함수 $h(x)$의 도함수는
$h'(x)=f'(x)-f'(a)$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선이 $y=g(x)$이므로
$f'(b)=$(접선의 기울기)$=f'(a)$
$\therefore\ h'(b)=f'(b)-f'(a)=0$
▸ ㄴ. (참)

접선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 A와 B를 지나므로

$g(a)=f(a)$에서 $h(a)=f(a)-g(a)=0$

$g(b)=f(b)$에서 $h(b)=f(b)-g(b)=0$

즉, $h(a)=h(b)$

함수 $h(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하므로

롤의 정리에 의하여

$h'(c)=0$(단, $a<c<b$)

인 c가 적어도 하나 존재한다.

보기 ㄱ의 결과에서

$h'(a)=h'(b)=0$이므로

방정식 $h'(x)=0$의 실근의 개수는 3 이상이다.

▸ ㄷ. (참)

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x)=0$이므로

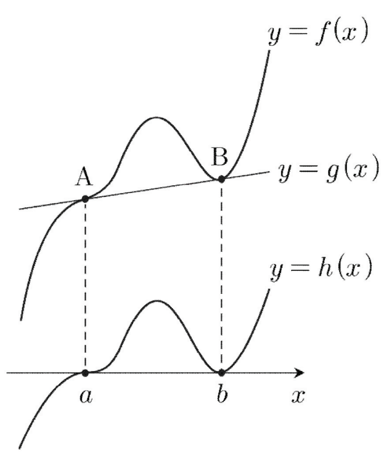
함수 $h(x)$의 이계도함수는

$h''(x)=f''(x)$

점 A가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호는 바뀐다.

$x=a$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 바뀌므로 점 $(a,\ h(a))$는 곡선 $y=h(x)$의 변곡점이다.

참고로 문제에서 주어진 조건을 모두 만족시키는 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$의 그래프 중에서 한 경우를 그리면 아래와 같다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

H199 | 답 ③

[풀이] ★

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=(n-x)x^{n-1}e^{-x}$

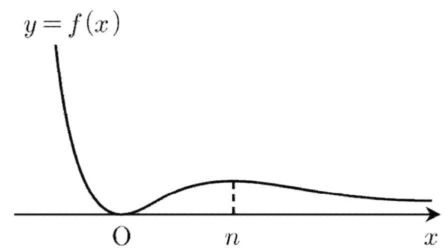
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=n$

• (1) n이 짝수인 경우

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. 이때, 극솟값은 $f(0)=0$이다.

$x=n$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다. 이때, 극댓값은 $f(n)=n^n e^{-n}$이다.

그리고 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는



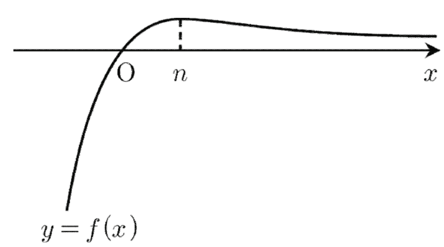
• (2) n이 홀수인 경우

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

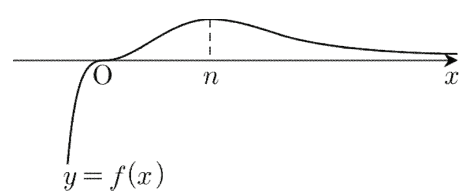
$x=n$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다. 이때, 극댓값은 $f(n)=n^n e^{-n}$이다.

그리고 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 x축이 점근선이다.

n이 1일 때, 함수 $f(x)$의 그래프는



n이 3 이상일 때, 함수 $f(x)$의 그래프는



▸ ㄱ. (참)

n이 짝수일 때, 모든 실수 x에 대하여

$x^n e^{-x}\geq 0$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립)

이므로, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 0을 갖는다.

▸ ㄴ. (참)

▸ ㄷ. (거짓)

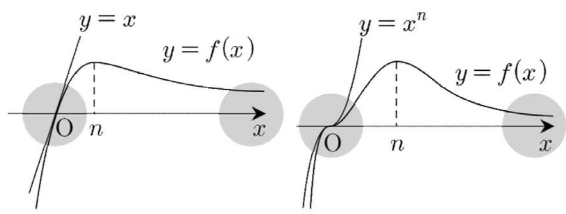
n이 홀수일 때, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 증가한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

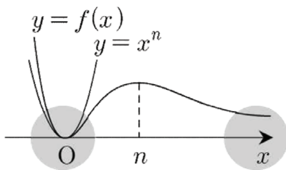
답 ③

[참고1]

함수 $f(x)$의 그래프를 빠르게 그릴 수 있다.



(왼쪽은 $n=1$인 경우, 오른쪽은 $n \geq 3$인 경우)



(위는 n이 짝수인 경우)

$x \to 0$일 때, $e^{-x} \to 1$이므로 $x^n e^{-x} \approx x^n$이다. 즉, 원점 부근에서 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=x^n$에 한없이 가까워진다.

$x \to \infty$일 때, $f(x)=\dfrac{x^n}{e^x} \to 0$이므로 x축은 점근선이다.

다만 함수 $f(x)$가 $x=n$에서 극댓값을 가짐을 보이기 위해서는 도함수를 이용해야 한다.

[참고2]

이계도함수를 이용하여 극대, 극소를 판단해보자.

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=(x-2)e^{-x}$ (단, $n=1$)

$f''(x)=(x^2-2nx+n^2-n)x^{n-2}e^{-x}$(단, $n \geq 2$)

$n=2$일 때, $f''(0)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

$n \geq 3$일 때, $f''(0)=0$이므로 이계도함수를 이용하여 $x=0$에서의 함수 $f(x)$의 극대, 극소를 판단할 수 없다.

- (1) n이 짝수인 경우

$f''(n)=-n^{n-1}e^{-n}<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.

- (2) n이 홀수인 경우

$n=1$일 때, $f''(n)=-e^{-1}<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.

$n \geq 2$일 때, $f''(n)=-n^{n-1}e^{-n}<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.

H200 ㅣ답 ③

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=(n-x)x^{n-1}e^{-x}$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=(x^2-2nx+n^2-n)x^{n-2}e^{-x}$

▸ ㄱ. (참)

지수법칙에 의하여

$$f\left(\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-\frac{n}{2}}=f'\left(\frac{n}{2}\right)$$

▸ ㄴ. (참)

$x=n$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.

($\because$ $x=n$의 좌우에서 x^{n-1}, e^{-x}의 부호는 항상 양이다.)

혹은 다음과 같이 이계도함수를 이용하여 참임을 보여도 좋다.

$f'(n)=0$, $f''(n)=-n^{n-1}e^{-n}<0$

함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.

▸ ㄷ. (거짓)

n이 3 이상의 자연수일 때,

충분히 작은 양수 h에 대하여

구간 $(-h,\ h)$에서

$x^2-2nx+n^2-n \approx n^2-n>0$

- (1) n이 3 이상의 홀수인 경우

$x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호는 음(−)에서 양(+)으로 변한다. 이때, 점 $(0,\ 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

- (2) n이 4 이상의 짝수인 경우

$x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호는 양(+)에서 양(+)으로 변하지 않는다. 이때, 점 $(0,\ 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 아니다.

(1), (2)에서 주어진 명제는 거짓이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

[참고]

보기 ㄷ이 거짓임을 다음과 같이 보일 수도 있다.

▸ ㄷ. (거짓)

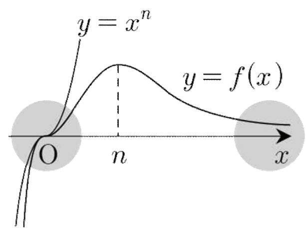
함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 다음과 같이 암기해두어야 한다.

(왜냐하면 수능에 자주 출제되는 함수이기 때문이다.)

$x \to 0$일 때, $e^{-x} \to 1$이므로 $x^n e^{-x} \approx x^n$이다. 즉, 원점 부근에서 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=x^n$에 한없이 가까워진다.

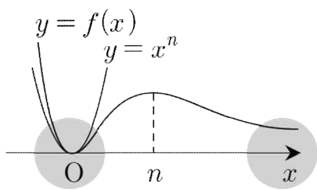
$x \to \infty$일 때, $f(x)=\dfrac{x^n}{e^x} \to 0$이므로 x축은 점근선이다.

다만 함수 $f(x)$가 $x=n$에서 극댓값을 가짐을 보이기 위해서는 도함수를 이용해야 한다.



(위는 n이 3 이상인 홀수인 경우)

위의 그림에서 원점이 곡선 $y=f(x)$의 변곡점임을 알 수 있다.



(위는 n이 짝수인 경우)

위의 그림에서 원점이 곡선 $y=f(x)$의 극소점이므로, 변곡점이 아님을 알 수 있다.

H201 |답 ④

[풀이]

함수 $f(x)$가 역함수를 가져야 하므로

함수 $f(x)$는 증가함수 혹은 감소함수이다.

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

$$=\lim_{x\to\infty} e^{x+1}x^2\left(1+\frac{n-2}{x}-\frac{n-3}{x^2}+\frac{a}{xe^{x+1}}\right)=\infty$$

이므로 함수 $f(x)$는 증가함수이다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)+a$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=e^{x+1}\{x^2+(n+2)x+n+1\}$

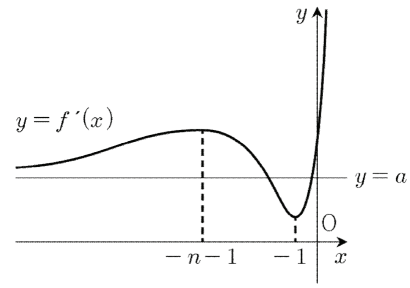
$=e^{x+1}(x+n+1)(x+1)$

$f''(x)=0$이면 $x=-n-1$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	$-n-1$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^2-nt+1}{e^{t-1}}+a\right)=a$$

함수 $f'(x)$의 그래프는



함수 $f(x)$가 증가함수이므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

(함수 $f'(x)$의 극솟값)

$=f'(-1)=2-n+a\geq 0$

즉, $a\geq n-2$이므로 $g(n)=n-2$이다.

주어진 부등식은

$1\leq n-2\leq 8$

풀면

$3\leq n\leq 10$

등차수열의 합의 공식에 의하여

구하는 값은

$\frac{3+10}{2}\times 8=52$

답 ④

H202 |답 15

[풀이1] 시험장

$f'(x)=$(이차식)$\times e^x$이고,

$f'(\sqrt{3})=f'(-\sqrt{3})=0$ ($\because$ (가))

이므로

$f'(x)=a(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})e^x$

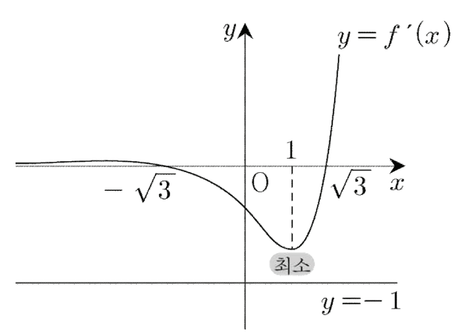
(이때, $f'(x)=\{ax^2+(2a+b)x+b+c\}e^x$

이므로 $-\frac{2a+b}{a}=0$, $\frac{b+c}{a}=-3$ 풀면

$b=-2a$, $c=-a$)

$\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f'(x)=0$

이므로 함수 $f'(x)$의 그래프는



(나): $g(x)=f(x)+x$로 두자.

$0 \le x_1 < x_2$이면 $g(x_2) \ge g(x_1)$이므로

구간 $(0,\ \infty)$에서 함수 $g(x)$는 증가한다.

즉, 구간 $(0,\ \infty)$에서 $g'(x) = f'(x) + 1 \ge 0$이어야 한다.

위의 그림처럼 함수 $f'(x)$의 최솟값은 -1 이상어어야 한다.

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x) = a(x+3)(x-1)e^x$

이고, $x = 1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $f'(x)$는 $x = 1$에서 극솟값을 갖는다.

$f'(1) = -2ae \ge -1$, 즉 $a \le \dfrac{1}{2e}$

이므로 $b = -2a \ge -\dfrac{1}{e}$, $c = -a \ge -\dfrac{1}{2e}$

따라서 abc의 최댓값은

$\dfrac{1}{2e}\left(-\dfrac{1}{e}\right)\left(-\dfrac{1}{2e}\right) = \dfrac{1}{4e^3}$, $k = \dfrac{1}{4}$

$\therefore\ 60k = 15$

답 15

[풀이2]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = \{ax^2 + (2a+b)x + b + c\}e^x$

모든 실수 x에 대하여 $e^x \ne 0$이므로

$f'(x) = 0$이면 $ax^2 + (2a+b)x + b + c = 0$

이 이차방정식은 조건 (가)에 의하여

$x = -\sqrt{3}$과 $x = \sqrt{3}$을 두 근으로 갖는다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$-\dfrac{2a+b}{a} = 0 = -\sqrt{3} + \sqrt{3}$

$\dfrac{b+c}{a} = -3 = -\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

연립하면

$b = -2a$, $c = -a$ $\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = a(x^2 - 3)e^x$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x) = a(x^2 + 2x - 3)e^x$

$f''(x) = a(x+3)(x-1)e^x = 0$에서

$x = -3$ 또는 $x = 1$

$h(x) = f(x) + x$로 두자.

조건 (나)에서

$0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$h(x_2) > h(x_1)$

($\because$ 함수 $h(x)$는 임의의 열린구간에서 상수함수일 수 없으므로 부등식에서 등호를 제외할 수 있다.)

증가함수의 정의에 의하여

구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $h(x)$는 증가함수이다.

이제 임의의 음이 아닌 실수 x에 대하여

$h'(x) = f'(x) + 1 \ge 0$

일 조건을 구하면 된다.

$g(x) = f'(x) + 1$로 두고

임의의 음이 아닌 실수 x에 대하여

$g(x) \ge 0$

일 조건을 구하자.

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x) = f''(x)$

$g'(x) = 0$에서 $x = -3$ 또는 $x = 1$

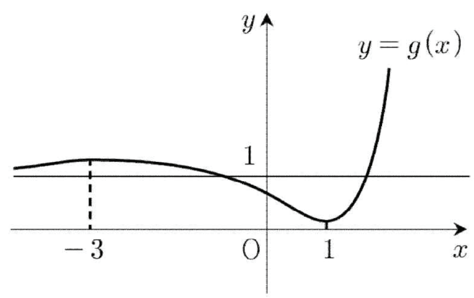
x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x = -3$에서 극댓값 $\dfrac{6}{e^3}a + 1$을 갖고,

$x = 1$에서 극솟값 $-2ea + 1$을 갖는다.

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1$이므로 함수 $g(x)$는 $y = 1$을 점근선으로 갖는다.

함수 $g(x)$의 그래프는



임의의 음이 아닌 실수 x에 대하여

$g(x) \ge 0$이기 위해서는

$g(1) = -2ea + 1 \ge 0$

부등식을 풀면

$a \le \dfrac{1}{2e}$

이를 ㉠에 대입하면

$b \ge -\dfrac{1}{e}$, $c \ge -\dfrac{1}{2e}$

abc의 범위는

$abc \le \dfrac{1}{4e^3}$이므로 $k = \dfrac{1}{4}$

$\therefore\ 60k = 15$

답 15

[참고]

$x_1 = \triangle$, $x_2 = \square$으로 두고

조건 (나)에서 주어진 부등식을 다시 쓰면

$f(\square)-f(\triangle)+\square-\triangle \geq 0$

정리하면

$f(\square)+\square-(f(\triangle)+\triangle) \geq 0$

위의 부등식에서 같은 꼴의 식이 보이므로

아래와 같이 정리할 수 있다.

$h(x)=f(x)+x$일 때, $h(\square)-h(\triangle) \geq 0$이다.

H203 | 답 24

[풀이]

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=f'(x)\{f(x)+3\}e^{f(x)}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0$ 또는 $f(x)=-3$ $\cdots(*)$

조건 (가)에 의하여

$f(a)=6$이면 $f'(a)=0$ ($\because f(a) \neq -3$)

이차함수 $f(x)$의 꼭짓점의 좌표가 $(a, 6)$이므로

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=k(x-a)^2+6$ (단, $k \neq 0$)

(*)에서

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=a$ 또는 $k(x-a)^2+9=0$

이차방정식 $k(x-a)^2+9=0$의 서로 다른 두 실근이 b, $b+6$이므로

$k(x-a)^2+9=k(x-b)(x-b-6)$

$kx^2-2kax+ka^2+9=kx^2-2k(b+3)x+kb(b+6)$

$-2ka=-2k(b+3)$, $ka^2+9=kb(b+6)$

$a=b+3$, $ka^2+9=k(a-3)(a+3)$

$9=-9k$, $k=-1$

마지막으로 방정식 $f(x)=0$을 생각하자.

$f(x)=0 \Leftrightarrow -(x-a)^2+6=0$,

$x^2+2ax+a^2-6=0 \Leftrightarrow x=\alpha$ 또는 $x=\beta$

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2a$, $\alpha\beta=a^2-6$

$\therefore$ $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=4a^2-4a^2+24=24$

답 24

H204 | 답 ②

[풀이]

주어진 함수의 도함수는

$y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$y'=0$에서 $x=e$

$x=e$의 좌우에서 y'의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 주어진 함수는 $x=e$에서 극댓값을 갖는다.

답 ②

H205 | 답 ④

[풀이1]

$y=\dfrac{f(x)}{x}$의 도함수는

$y'=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$

$y=\dfrac{f(x)}{x}$의 그래프가 $x=q(\neq 0)$에서 극솟값을 가지므로

$\dfrac{f'(q)q-f(q)}{q^2}=0$

정리하면

$f'(q)=\dfrac{f(q)}{q}$

곡선 $y=f'(x)$는 곡선 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 위의 점 $\left(q, \dfrac{f(q)}{q}\right)$를 지난다.

$x=q$의 좌우에서 y'의 부호는 음(−)에서 양(+)으로 바뀐다.

매우 작은 양수 h에 대하여 구간 $(q-h, q)$에서의 y'의 부호는 음이므로

$y'=\dfrac{f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}}{x}<0$

즉, $f'(x)<\dfrac{f(x)}{x}$

구간 $(q-h, q)$에서 함수 $f'(x)$의 그래프는 함수 $\dfrac{f(x)}{x}$의 그래프의 아래에 있다.

매우 작은 양수 h에 대하여 구간 $(q, q+h)$에서의 y'의 부호는 양이므로

$y'=\dfrac{f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}}{x}>0$

즉, $f'(x)>\dfrac{f(x)}{x}$

구간 $(q, q+h)$에서 함수 $f'(x)$의 그래프는 함수 $\dfrac{f(x)}{x}$의 그래프의 위에 있다.

이상에서 함수 $f'(x)$의 그래프는 ④와 같다.

답 ④

[풀이2]

$y=\dfrac{f(x)}{x}$의 도함수는

$y'=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$

$y=\dfrac{f(x)}{x}$의 그래프가 $x=q(\neq 0)$에서 극솟값을 가지므로

$\dfrac{f'(q)q-f(q)}{q^2}=0$

정리하면

$f'(q)=\dfrac{f(q)}{q}$ $\cdots$ ㉠

곡선 $y=f'(x)$는 곡선 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 위의 점 $\left(q,\ \dfrac{f(q)}{q}\right)$를 지난다.

$y=\dfrac{f(x)}{x}$의 이계도함수는

$y''=\dfrac{f''(x)}{x}-\dfrac{2}{x^2}\left(f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}\right)$

$y=\dfrac{f(x)}{x}$의 그래프가 $x=q(\neq 0)$에서 아래로 볼록이므로

$y''=\dfrac{f''(q)}{q}-\dfrac{2}{q^2}\left(f'(q)-\dfrac{f(q)}{q}\right)>0$

㉠에 의하여

$\dfrac{f''(q)}{q}>0$

q는 양수이므로

$f''(q)>0$

함수 $y=f'(x)$의 그래프는 $x=q$에서 증가한다.

이상에서 함수 $f'(x)$의 그래프는 ④와 같다.

답 ④

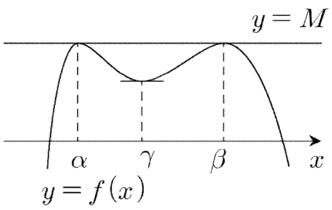
H206 | 답 216

[풀이1] 시험장

평행이동의 관점에서 $a=0$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다. 다시 말하면 a가 0이 아닌 실수라고 해도 아래와 동일한 결과를 얻는다.

(가) ⇒ $x>0$일 때, $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$

(나) ⇒ 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



롤의 정리에 의하여

$f'(\gamma)=0$ $(\alpha<\gamma<\beta)$

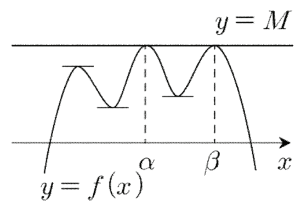
함수 $M-f(x)$의 방정식은

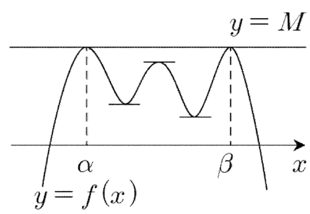
$M-f(x)=M-\dfrac{g(x)}{x}$

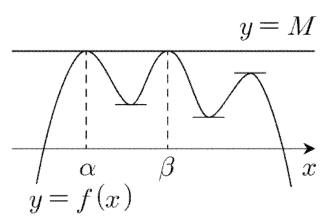
$=\dfrac{\underbrace{Mx-g(x)}_{4차식}}{x}=\dfrac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x}$ $\cdots(*)$

$(\because f(\alpha)=f(\beta)=M,\ f'(\alpha)=f'(\beta)=0)$

만약 함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다면 $Mx-g(x)$가 사차함수일 수 없다. 따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 처음에 그렸던 그림과 같다.







(다) ⇒ $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 3이므로 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 1이다.

(*)에서 함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=Mx-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

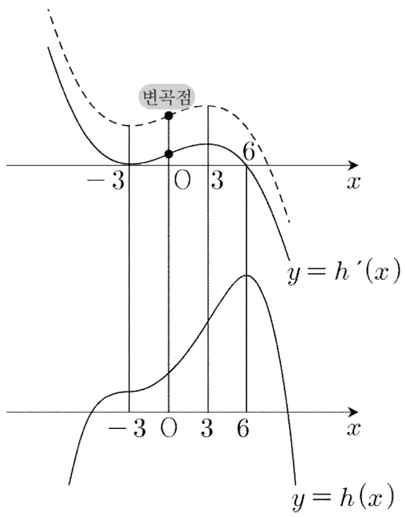
$g'(x)=\underbrace{-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}_{점\ \left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ 0\right)에\ 대칭}+M$

함수 $g(x)$를 x축의 방향으로 $-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$만큼 평행이동시킨 함수를 $h(x)$라고 하면

$h'(x)=-4x\left(x+\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)\left(x-\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)+M$

$=-4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})+M$

$(\because \beta-\alpha=6\sqrt{3})$



$h'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2 이하여야 하므로
$h(-3)=-216+M\geq 0$, 즉 $M\geq 216$
($\because$ 삼차함수의 비율관계)
따라서 M의 최솟값은 216이다.
답 216

[풀이2] ★
평행이동의 관점에서 $a=0$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다. 다시 말하면 a가 0이 아닌 실수라고 해도 아래와 동일한 결과를 얻는다.
문제에서 주어진 조건에서 $\beta-\alpha=6\sqrt{3}$ (양수)이고,
조건 (나)에서 α, β는 모두 양수이므로 $0<\alpha<\beta$이다.
조건 (가)에 의하여

$$f(x)=\frac{g(x)}{x}\text{(단, }x>0) \qquad \cdots(*1)$$

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 값 M을 가지므로
$f(\alpha)=f(\beta)=M$ 즉, $M-f(\alpha)=M-f(\beta)=0$
인수정리에 의하여
$M-f(x)$의 분자는 $x-\alpha$와 $x-\beta$를 인수로 가지므로

$$M-f(x)=\frac{Mx-g(x)}{x}=\frac{(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)}{x}$$

(단, $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이다.)
함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=-\frac{(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)}{x}+M\text{(단, }x>0)$$

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=-\frac{2x-\alpha-\beta}{x}Q(x)-\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x}Q'(x)$$
$$+\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x^2}Q(x) \qquad \cdots㉠$$

조건 (나)에 의하여 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 극값을 가지므로
$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$

이를 ㉠에 대입하면

$$f'(\alpha)=-\frac{\alpha-\beta}{\alpha}Q(\alpha)=0 \text{ 즉, } Q(\alpha)=0$$

$$f'(\beta)=-\frac{\beta-\alpha}{\beta}Q(\beta)=0 \text{ 즉, } Q(\beta)=0$$

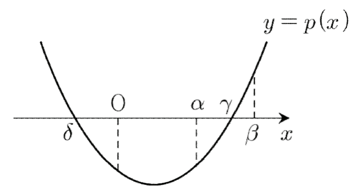
인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=-\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x}+M\text{(단, }x>0) \qquad \cdots(*2)$$

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=-\frac{(x-\alpha)(x-\beta)(3x^2-(\alpha+\beta)x-\alpha\beta)}{x^2}$$

(단, $x>0$)
$p(x)=3x^2-(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$로 두자.
$p(0)=-\alpha\beta<0$, $p(\alpha)=2\alpha(\alpha-\beta)<0$,
$p(\beta)=2\beta(\beta-\alpha)>0$이므로 이차함수 $p(x)$의 그래프는 다음과 같다.



사이값 정리에 의하여 $p(\gamma)=p(\delta)=0$인 γ, δ가 존재한다.
(단, $\alpha<\gamma<\beta$, $\delta<0$)
함수 $f'(x)$의 방정식은

$$f'(x)=-\frac{3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^2}\text{(단, }x>0)$$

$f'(\gamma)=0$, $f''(\gamma)>0$(←[참고2])
이므로 함수 $f(x)$는 $x=\gamma$에서 극솟값을 갖는다.
함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 3이므로
사차함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 1이다.
(*1), (*2)에 의하여

$$\frac{g(x)}{x}=-\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x}+M\text{(단, }x>0)$$

정리하면 $g(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+Mx$
함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$$

계산을 줄이기 위하여 함수 $g(x)$의 그래프를
x축의 방향으로 $-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$만큼 평행이동시켜서
함수 $h(x)$의 그래프와 일치한다고 하자.
함수 $g(x)$가 극대점만을 가지므로 함수 $h(x)$도 극대점만을 가지면 된다. 함수 $h(x)$의 도함수는

$$h'(x)=-4x\left(x+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)+M$$
$$=-4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})+M(\because \beta-\alpha=6\sqrt{3})$$

함수 $h(x)$의 이계도함수는

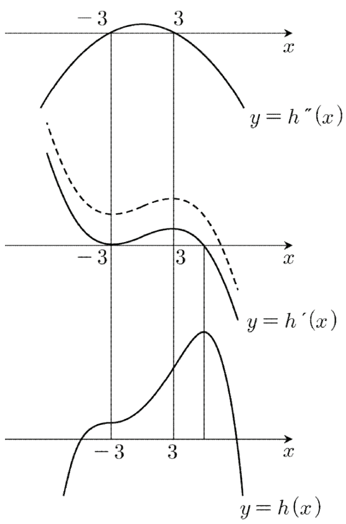
$h''(x) = -12(x+3)(x-3)$

$h''(x) = 0$이면 $x = -3$ 또는 $x = 3$

$x = -3$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $h'(x)$는 $x = -3$에서 극솟값을 갖는다.

$x = 3$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $h'(x)$는 $x = 3$에서 극댓값을 갖는다.

조건 (다)를 만족시키는 세 함수 $h(x)$, $h'(x)$, $h''(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $h(x)$가 극대점만을 가지기 위해서는

$h'(-3) = -216 + M \geq 0$

$\therefore\ M \geq 216$

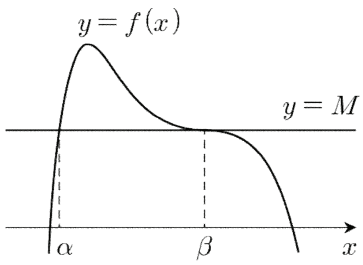
답 216

[참고1] ★

만약 $M - f(x) = \dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)^3}{x}$이면

함수 $f(x)$의 그래프는 $x = \alpha$에서

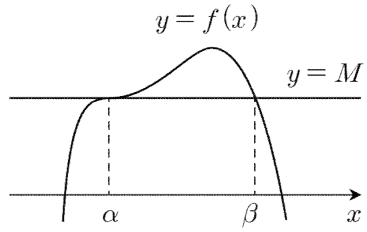
극댓값을 갖지 않는다. 이는 가정에 모순이다.



만약 $M - f(x) = \dfrac{(x-\alpha)^3(x-\beta)}{x}$이면

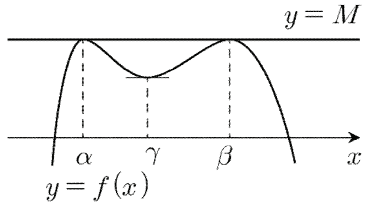
함수 $f(x)$의 그래프는 $x = \beta$에서

극댓값을 갖지 않는다. 이는 가정에 모순이다.



따라서 $M - f(x) = \dfrac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x}$이므로

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



한편 위의 그림처럼 함수 $f(x)$는

닫힌구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고

열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 미분가능하고

$f(\alpha) = f(\beta)(= M)$이므로

롤의 정리에 의하여

$f'(\gamma) = 0$ (단, $\alpha < \gamma < \beta$)

인 γ가 적어도 하나 이상 존재한다.

[참고2]

$f'(x) = \dfrac{-3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^2}$

(단, $0 < \alpha < \gamma < \beta$, $\delta < 0$)

$\ln|f'(x)| = \ln 3 + \ln|x-\alpha| + \ln|x-\beta| + \ln|x-\gamma|$
$+ \ln|x-\delta| - 2\ln|x|$

양변을 미분하면

$\dfrac{f''(x)}{f'(x)} = \dfrac{1}{x-\alpha} + \dfrac{1}{x-\beta} + \dfrac{1}{x-\gamma} + \dfrac{1}{x-\delta} - \dfrac{2}{x}$

정리하면

$f''(x) = \dfrac{-3(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^2} - \dfrac{3(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^2}$
$- \dfrac{3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)}{x^2} - \dfrac{3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}{x^2}$
$+ \dfrac{6(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^3}$

$f''(\gamma) = \dfrac{-3(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}{\gamma^2} > 0$

$f'(\gamma) = 0$, $f''(\gamma) > 0$이므로 함수 $f(x)$는 $x = \gamma$에서 극솟값을 갖는다. 혹은 $x = \gamma$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$가 $x = \gamma$에서 극솟값을 갖는다고 해도 좋다.

[참고3] ★

함수 $g(x)$의 극점의 개수가 1임을 다음과 같이 보여도 좋다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\dfrac{xg'(x)-g(x)}{x^2}$ (단, $x>0$)

방정식 $f'(x)=0$의 필요충분조건은

방정식 $xg'(x)-g(x)=0$이다.

이제 $k(x)=xg'(x)-g(x)$로 두자.(단, $x>0$)

함수 $k(x)$의 도함수는

$k'(x)=xg''(x)$

x는 양수이므로 방정식 $k'(x)=0$과 필요충분조건은

방정식 $g''(x)=0$이다.

이차방정식 $g''(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수의

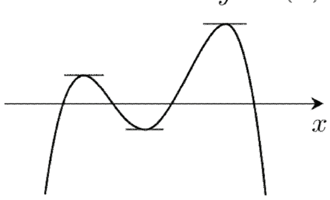
최댓값은 2이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow k(x)=0$

$k'(x)=0 \Leftrightarrow g''(x)=0$

사차방정식 $k(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4라고 가정하자.



함수 $k(x)$의 극점의 개수는 3이므로

방정식 $k'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

그런데 이차방정식 $g''(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을

가질 수 없으므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 방정식 $k(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3 이하이다.

필요충분조건에 의하여

방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3 이하이다.

함수 $f(x)$의 극점의 개수가 3 이하이므로

조건 (다)에 의하여 사차함수 $g(x)$의 극점의 개수는 1이다.

[참고4]

M의 범위를 다음과 같이 구해도 좋다.

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$

계산을 줄이기 위하여 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=k$로 두자.

문제에서 주어진 식 $\beta-\alpha=6\sqrt{3}$과 연립하면

$\alpha=k-3\sqrt{3}$, $\beta=k+3\sqrt{3}$

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=-4(x-k+3\sqrt{3})(x-k-3\sqrt{3})(x-k)+M$

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x)=-12(x-k-3)(x-k+3)$

$g''(x)=0$에서 $x=k+3$ 또는 $x=k-3$

$g'(k-3)=-216+M\geq 0$

$\therefore\ M\geq 216$

[참고5]

M의 범위를 다음과 같이 구해도 좋다.

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$

$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\alpha-6\sqrt{3})(x-\alpha-3\sqrt{3})+M$

$(\because \beta=\alpha+6\sqrt{3})$

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x)=-12(x-\alpha-3\sqrt{3}+3)(x-\alpha-3\sqrt{3}-3)$

$g''(x)=0$에서 $x=\alpha+3\sqrt{3}-3$ 또는 $x=\alpha+3\sqrt{3}+3$

$g'(\alpha+3\sqrt{3}-3)=-216+M\geq 0$

$\therefore\ M\geq 216$

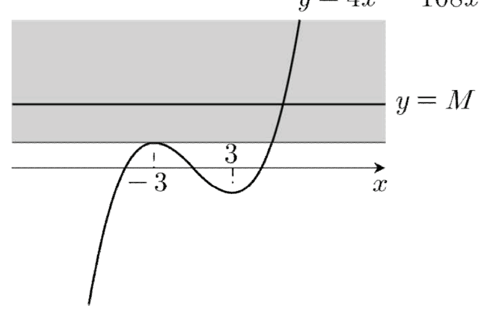
[참고6]

$h'(x)=-4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})+M$에 대하여

방정식 $h'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1이므로

곡선 $y=4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})$과 직선 $y=M$의

교점의 개수가 1 또는 2인 M의 범위를 구해도 좋다.



위의 그림에서 색칠된 부분에 직선 $y=M$이 포함되면 된다.

(단, 경계포함) $M\geq 216$

[풀이3]

평행이동의 관점에서 $a=0$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

다시 말하면 a가 0이 아닌 실수라고 해도 아래와 동일한 결과를 얻는다.

문제에서 주어진 조건에서 $\beta-\alpha=6\sqrt{3}$(양수)이고,

조건 (나)에서 α, β는 모두 양수이므로 $0<\alpha<\beta$이다.

조건 (가)에 의하여

$$f(x)=\frac{g(x)}{x}\text{(단, } x>0\text{)}$$

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}\text{(단, } x>0\text{)} \qquad \cdots(*)$$

조건 (나)에 의하여

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$x=\alpha$와 $x=\beta$에서 극값을 가지므로

$$f'(\alpha)=\frac{\alpha g'(\alpha)-g(\alpha)}{\alpha^2}=0,$$

$$f'(\beta)=\frac{\beta g'(\beta)-g(\beta)}{\beta^2}=0$$

위의 두 식을 정리하면

$$g'(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{\alpha},\ g'(\beta)=\frac{g(\beta)}{\beta} \qquad \cdots㉠$$

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서

동일한 값 M을 가지므로

$$f(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{\alpha}=M,\ f(\beta)=\frac{g(\beta)}{\beta}=M \qquad \cdots㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$g'(\alpha)=M,\ g'(\beta)=M$ $\cdots$㉢

㉠, ㉢에 의하여

$$g'(\alpha)=\frac{g(\alpha)-0}{\alpha-0}=M=\frac{g(\beta)-0}{\beta-0}=g'(\beta)$$

두 점 $(0,\ 0)$, $(\alpha,\ g(\alpha))$를 잇는 직선의 기울기와

두 점 $(0,\ 0)$, $(\beta,\ g(\beta))$를 잇는 직선의 기울기는

M으로 같으므로, 세 점

$(0,\ 0)$, $(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$

는 한 직선 위에 있다. 이 직선을 l이라고 하자.

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(\alpha,\ g(\alpha))$에서의 접선의 기울기와

두 점 $(0,\ 0)$, $(\alpha,\ g(\alpha))$를 잇는 직선의 기울기는

M으로 같으므로, 원점은 곡선 $y=g(x)$ 위의 점

$(\alpha,\ g(\alpha))$에서의 접선 위에 있다. 이때, 접선은 l이다.

마찬가지의 이유로 점 $(\beta,\ g(\beta))$에서의 접선은 l이다.

따라서 직선 l은 두 점 $(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$에서

곡선 $y=g(x)$에 각각 접한다.

한편 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고

함수 $f(x)$는 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 미분가능하고

$f(\alpha)=f(\beta)(=M)$이므로 롤의 정리에 의하여

$f'(\gamma)=0$ (단, $\alpha<\gamma<\beta$)

인 γ가 적어도 하나 이상 존재한다.

방정식 $f'(x)=0$과 필요충분조건은

사차방정식 $xg'(x)-g(x)=0$(즉, ((*)의 분자)$=0$)

이므로 인수정리에 의하여 (*)는

$$f'(x)=\frac{-3(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^2}\text{(단, } x>0\text{)}$$

(단, $0<\alpha<\gamma<\beta$, δ는 0이 아닌 실수이다.)

$f'(\gamma)=0$, $f'(\delta)=0$이므로 (*)에서

$$g'(\gamma)=\frac{g(\gamma)-0}{\gamma-0},\ g'(\delta)=\frac{g(\delta)-0}{\delta-0}$$

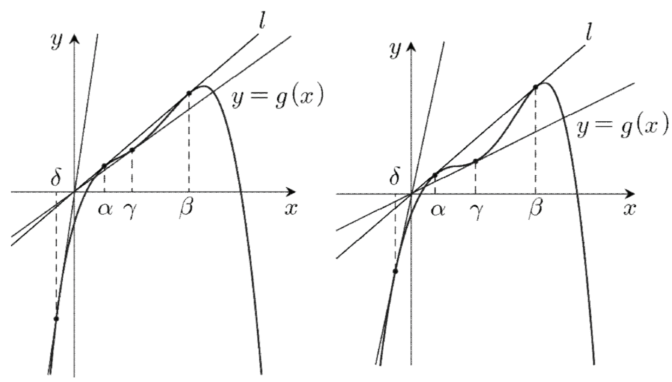
곡선 $y=g(x)$ 위의 두 점 $(\gamma,\ g(\gamma))$, $(\delta,\ g(\delta))$에서의

각각의 접선은 모두 원점을 지난다.

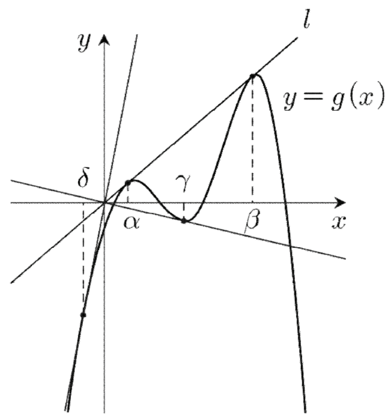
최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $g(x)$의 그래프의

개형으로 아래의 2가지의 경우가 가능하다.

▸ (경우1) 함수 $g(x)$가 극소점을 갖지 않는 경우



▸ (경우2) 함수 $g(x)$가 극소점을 갖는 경우



위의 두 경우 모두에 대해서 δ는 음수이다.

$f'(\gamma)=0$, $f''(\gamma)>0$(←[참고2])

이므로 함수 $f(x)$는 $x=\gamma$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 3이므로

사차함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 1이다.

따라서 (경우2)는 제외된다.

(경우1)에서 직선 l은 두 점 $(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$에서

곡선 $y=g(x)$에 각각 접하므로

$Mx-g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

정리하면

$g(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+Mx$

함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$$

계산을 줄이기 위하여 함수 $g(x)$의 그래프를

x축의 방향으로 $-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$만큼 평행이동시켜서

함수 $h(x)$의 그래프와 일치한다고 하자.

함수 $g(x)$가 극대점만을 가지므로

함수 $h(x)$도 극대점만을 가지면 된다.

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=-4x\left(x+\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)\left(x-\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)+M$

$=-4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})+M$ ($\because \beta-\alpha=6\sqrt{3}$)

함수 $h(x)$의 이계도함수는

$h''(x)=-12(x+3)(x-3)$

$h''(x)=0$이면 $x=-3$ 또는 $x=3$

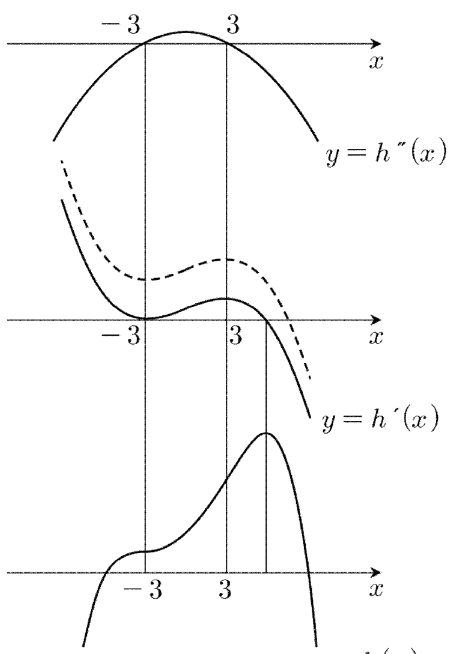
$x=-3$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $h'(x)$는 $x=-3$에서 극솟값을 갖는다.

$x=3$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $h'(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.

조건 (다)를 만족시키는 세 함수

$h(x)$, $h'(x)$, $h''(x)$

의 그래프는 다음과 같다.



함수 $h(x)$가 극대점만을 가지기 위해서는

$h'(-3)=-216+M\geq 0$

$\therefore\ M\geq 216$

답 216

[참고7]

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(\alpha,\ g(\alpha))$에서의 접선을 l_1이라고 하면

l_1: $y=g'(\alpha)(x-\alpha)+g(\alpha)$

조건 (나)에서 $g(\alpha)=M\alpha$, $g'(\alpha)=M$이므로

l_1: $y=M(x-\alpha)+M\alpha$

정리하면

l_1: $y=Mx$ (원점을 지난다.)

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(\beta,\ g(\beta))$에서의 접선을 l_2라고 하면 마찬가지의 방법으로

l_2: $y=Mx$ (원점을 지난다.)

두 직선 l_1, l_2가 일치하므로 세 점

$(0,\ 0)$, $(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$

는 한 직선 위에 있다.

그리고 직선 l_1(그리고 l_2)는 두 점

$(\alpha,\ g(\alpha))$, $(\beta,\ g(\beta))$

에서 곡선 $y=g(x)$에 각각 접한다.

[참고8]

a을 0으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는 이유는 다음과 같다.

▸ x축의 방향으로 $-a$만큼 모든 함수와 점을 평행이동하자.

(문제) $x>0$에서 정의된 함수 $f(x+a)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x+a)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

(가) $x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$xf(x+a)=g(x+a)$이다.

(나) 서로 다른 두 실수 $\alpha-a$, $\beta-a$에 대하여

함수 $f(x+a)$는 $x=\alpha-a$, $x=\beta-a$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$)

(다) 함수 $f(x+a)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x+a)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오.

($\because (\beta-a)-(\alpha-a)=\beta-\alpha=6\sqrt{3}$)

▸ $f(x+a)=f_0(x)$, $g(x+a)=g_0(x)$,

$\alpha-a=\alpha_0$, $\beta-a=\beta_0$로 두자.

(문제) $x>0$에서 정의된 함수 $f_0(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g_0(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

(가) $x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$xf_0(x)=g_0(x)$이다.

(나) 서로 다른 두 실수 α_0, β_0에 대하여

함수 $f_0(x)$는 $x=\alpha_0$, $x=\beta_0$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$)

(다) 함수 $f_0(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g_0(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta_0-\alpha_0=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오.

H207 | 답 ⑤

[풀이] ★

▶ ㄱ. (참)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2\cos x-2x\sin x$

$f'(a)=0$에서

$2\cos a-2a\sin a=0 \qquad \cdots(*)$

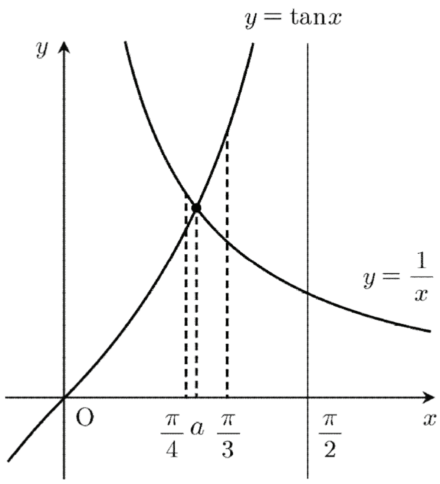
만약 $a=0$ 혹은 $a=\frac{\pi}{2}$이면 (*)이 성립하지 않으므로

$a\neq 0,\ a\neq \frac{\pi}{2}$

이제 (*)의 양변을 $a\cos a$로 나누어 정리하면

$\tan a=\frac{1}{a}$

▶ ㄴ. (참)



$g(x)=\tan x-\frac{1}{x}$로 두자.

함수 $g(x)$는 구간 $\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}\right]$에서 연속이고

$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{4}{\pi}<0,\ g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{3}{\pi}>0$

이므로, 사이값 정리에 의하여

$g(c)=0$을 만족시키는 c가 $\frac{\pi}{4}$와 $\frac{\pi}{3}$ 사이에 적어도 하나 존재한다.

이제 c를 a라고 하자.

$x=a$의 좌우에서

$f'(a)=2a\cos a\left(\frac{1}{a}-\tan a\right)$

의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 가진다. ($\because\ 2a>0,\ \cos a>0$)

혹은 아래와 같이 이계도함수를 이용하여 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가짐을 증명할 수 있다.

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=-4\sin x-2x\cos x$

$f''(a)=-4\sin a-2a\cos a$

$=-4\sin a-2\frac{\cos a}{\tan a}$ ($\because$ 보기ㄱ)

$=\frac{-4\sin^2 a-2\cos^2 a}{\sin a}<0$

($\because$ (분자)<0, (분모)>0)

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

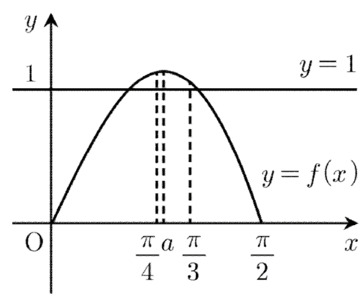
▶ ㄷ. (참)

$f(0)=0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi,\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$에서

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)>f\left(\frac{\pi}{3}\right)>1$이므로

구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고]

구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $g(x)$가 증가함수임을 증명하면 보기 ㄴ의 $c(a)$의 값이 유일함을 증명하는 것이다.

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=\sec^2 x+\frac{1}{x^2}$

구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $g'(x)>0$이므로

함수 $g(x)$는 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 증가한다.

따라서 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $c(a)$의 값은 유일하다.

H208 | 답 11

[풀이]

$g(x)=\dfrac{x}{x^2+36}$ 로 두고

함수 $g(x)$의 그래프를 그리자.

함수 $g(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

모든 실수 x에 대해서

$g(-x)=-g(x)$

이므로, 함수 $g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$g(0)=0$이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 원점을 지난다.

함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=\frac{-(x+6)(x-6)}{(x^2+36)^2}$$

$g'(x)=0$에서 $x=6$ 또는 $x=-6$

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$$g''(x)=\frac{2x(x+6\sqrt{3})(x-6\sqrt{3})}{(x^2+36)^3}$$

$g''(x)=0$에서

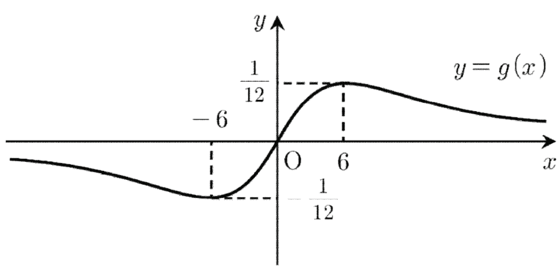
$x=0$ 또는 $x=6\sqrt{3}$ 또는 $x=-6\sqrt{3}$

x	0	$\cdots$	6	$\cdots$	$6\sqrt{3}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$g''(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{12}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{24}$	$\searrow$

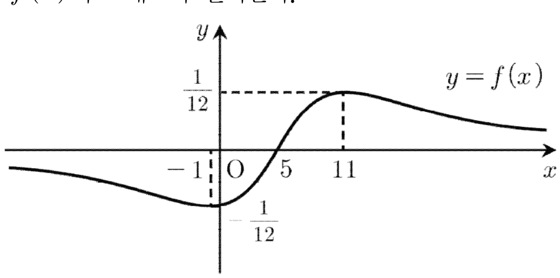
$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+36}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{36}{x^2}}=0$$

이므로, 함수 $g(x)$의 그래프는 x축을 점근선으로 갖는다.

이상에서 함수 $g(x)$의 그래프는



함수 $g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼 평행이동시키면 함수 $f(x)$의 그래프와 일치한다.



• (1) $0<a\le 5$인 경우

닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 $f(x)\le 0$이므로

$M+m<0$

• (2) $a>5$인 경우

닫힌구간 $[-a,\ a]$에서

함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최솟값 $-\dfrac{1}{12}$을 갖는다.

$M+m=0$이 되려면

함수 $f(x)$는 최댓값으로 $\dfrac{1}{12}$을 가져야 한다.

닫힌구간 $[-a,\ a]$에 실수 11이 포함되어야 하므로

$\therefore\ a\ge 11$

답 11

H209 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

진수의 조건에서

$0<x<10$

함수 $f(x)$의 정의역은

$\{x \mid 0<x<10\}$

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\frac{5(x-8)}{x(x-10)}$$

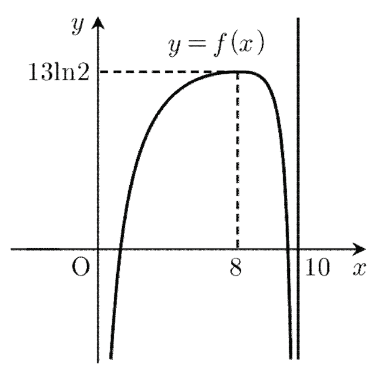
$f'(x)=0$에서 $x=8$

$x=8$의 좌우에서 함수 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=8$에서 극댓값(최댓값)을 갖는다. 이때, 극댓값(최댓값)은

$f(8)=13\ln 2$

$\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 10-} f(x)=-\infty$

함수 $f(x)$의 그래프는



▸ ㄴ. (참)

연속함수 $f(x)$에 대하여

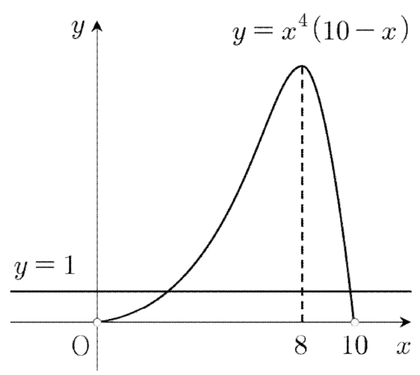
$\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$이고 $f(8)>0$이므로

사이값 정리에 의하여 구간 $(0,\ 8)$에서
방정식 $f(x)=0$은 적어도 하나의 실근을 갖는다.
그런데 구간 $(0,\ 8)$에서 함수 $f(x)$가 증가하므로 서로 다른 실근의 개수는 1이다.
연속함수 $f(x)$에 대하여
$f(8)>0$이고 $\lim\limits_{x\to 10-} f(x)=-\infty$이므로
사이값 정리에 의하여 구간 $(8,\ 10)$에서
방정식 $f(x)=0$은 적어도 하나의 실근을 갖는다.
그런데 구간 $(8,\ 10)$에서 함수 $f(x)$가 감소하므로 서로 다른 실근의 개수는 1이다.
이상에서 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0,\ 10)$에서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

▸ ㄷ. (거짓)
함수 $y=e^{f(x)}$의 도함수는
$y'=f'(x)e^{f(x)}=5(8-x)x^3$
함수 $y=e^{f(x)}$의 이계도함수는
$y''=20x^2(6-x)$
$0<x<6$일 때, $y''>0$이므로 함수 $y=e^{f(x)}$의 그래프는 아래로 볼록이다.
$6<x<10$일 때, $y''<0$이므로 함수 $y=e^{f(x)}$의 그래프는 위로 볼록이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

[참고]
보기 ㄴ이 참임을 다음과 같이 확인할 수도 있다.
로그의 성질에 의하여
$f(x)=4\ln x+\ln(10-x)=\ln x^4(10-x)$
방정식 $f(x)=0$은
$\ln x^4(10-x)=0$
로그의 정의에 의하여
$x^4(10-x)=1$



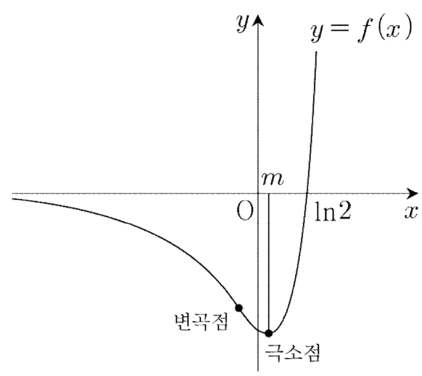
곡선 $y=x^4(10-x)$와 직선 $y=1$은 서로 다른 두 점에서 만나므로
주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

H210 | 답 ③

[풀이1] 시험장
(가) ⇒ 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표는 $\ln\dfrac{2}{3}$이다.

$f'(x)=3ae^{3x}+be^{x}=e^{x}(3ae^{2x}+b)$
$f''(x)=9ae^{3x}+be^{x}=e^{x}(9ae^{2x}+b)$
$f''\left(\ln\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{3}{2}\left(9a\times\dfrac{4}{9}+b\right)=0$에서 $b=-4a$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow ae^{x}(3e^{2x}-4)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=ae^{3x}-4ae^{x}$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$
함수 $f(x)$의 그래프는



(나) ⇒ $k\geq m=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$,

$f(2m)=f\left(\ln\dfrac{4}{3}\right)=a\dfrac{64}{27}-4a\dfrac{4}{3}$

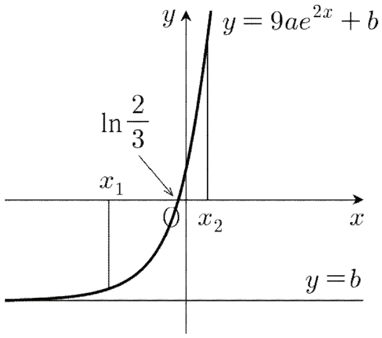
$=-\dfrac{80}{27}a=-\dfrac{80}{9},\ a=3$

$\therefore\ f(0)=a-4a=-3a=-9$

답 ③

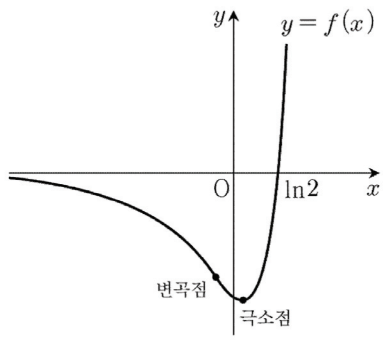
[풀이2]
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=3ae^{3x}+be^{x}$
함수 $f(x)$의 이계도함수는
$f''(x)=9ae^{3x}+be^{x}$
조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 변곡점을 찾자.
조건 (가)에서 주어진 서로 다른 두 수 $x_1,\ x_2$에 대하여
$f''(x_1)f''(x_2)=(9ae^{3x_1}+be^{x_1})(9ae^{3x_2}+be^{x_2})$
$=e^{x_1+x_2}(9ae^{2x_1}+b)(9ae^{2x_2}+b)<0$
$\Leftrightarrow (9ae^{2x_1}+b)(9ae^{2x_2}+b)<0\ (\because e^{x_1+x_2}>0)$

함수 $y=9ae^{2x}+b$의 그래프를 그리면

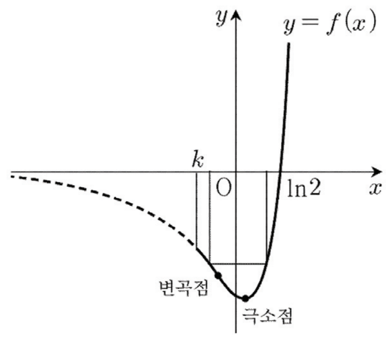


조건 (가)에서 주어진 부등식을 만족시키기 위해서는
$b<0$이어야 하고, 사이값 정리에 의하여
곡선 $y=9ae^{2x}+b$는 점 $\left(\ln\frac{2}{3},\ 0\right)$을 지나야 한다.

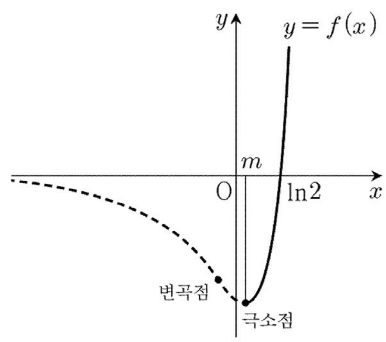
$0=9ae^{2\ln\frac{2}{3}}+b$
로그의 성질과 정의에 의하여
$0=9ae^{\ln\frac{4}{9}}+b,\ 0=9a\times\frac{4}{9}+b$
즉, $b=-4a(b<0)$ …㉠
이제 조건 (가)에서 주어진 부등식을 다시 쓰면
$x_1<\ln\frac{2}{3}<x_2$일 때, $f''(x_1)<0,\ f''(x_2)>0$이다.
$x=\ln\frac{2}{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로
변곡점의 정의에 의하여 점 $\left(\ln\frac{2}{3},\ f\left(\ln\frac{2}{3}\right)\right)$는
함수 $f(x)$의 변곡점이다.
이제 함수 $f(x)$의 그래프를 그리자.
㉠에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=ae^{3x}-4ae^{x}(a>0)$
$f(0)=-3a,\ f(\ln 2)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는
두 점 $(0,\ -3a)$, $(\ln 2,\ 0)$을 지난다.
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=3ae^{3x}-4ae^{x}=ae^{x}(3e^{2x}-4)$
$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$
$x=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로
함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$에서 극솟값을 갖는다.
$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{a}{e^{3t}}-\frac{4a}{e^{t}}\right)=0$이므로
x축$(y=0)$은 함수 $f(x)$의 점근선이다.
함수 $f(x)$의 그래프는



조건 (나)에 의하여
구간 $[k,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하기 위해서는
구간 $[k,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.



만약 $k<\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}=$(극소점의 x좌표)이면
구간 $[k,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니다.



$k\geq\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}=$(극소점의 x좌표)이어야 하므로
$m=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$
로그의 정의와 성질에 의하여
$f(2m)=f\left(\ln\frac{4}{3}\right)=ae^{3\ln\frac{4}{3}}-4ae^{\ln\frac{4}{3}}$
$=ae^{\ln\frac{64}{27}}-4ae^{\ln\frac{4}{3}}$
$=a\times\frac{64}{27}-4a\times\frac{4}{3}=-\frac{80a}{27}=-\frac{80}{9}$
풀면
$a=3$
이를 ㉠에 대입하면
$b=-12$
$\therefore\ a+b=-9$

답 ③

H211 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (거짓)

$g(3)=1$, $f(1)=5$이므로

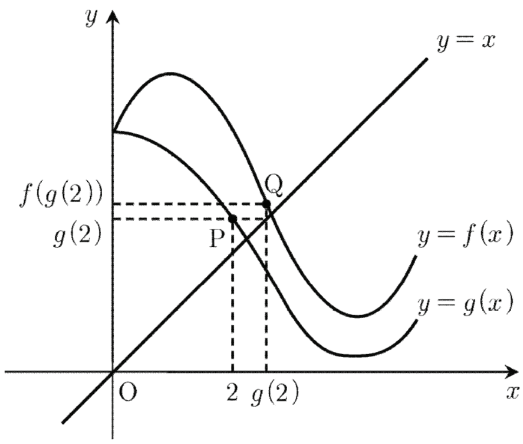
$h(3)=f(g(3))=f(1)=5$

▸ ㄴ. (참)

함수 $h'(x)$의 도함수는

$h'(x)=f'(g(x))\times g'(x)$

두 점 P, Q는 아래 그림과 같다고 하자.



점 P에서 함수 $g(x)$는 감소하므로

$g'(2)<0$

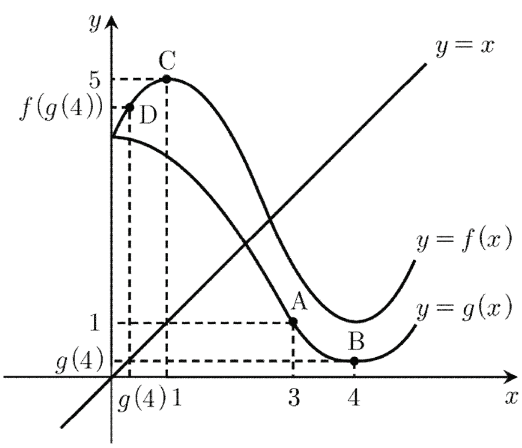
점 Q에서 함수 $f(x)$는 감소하므로

$f'(g(2))<0$

$\therefore\ h'(2)=f'(g(2))\times g'(2)\geq 0$

▸ ㄷ. (참)

네 점 A, B, C, D는 아래 그림과 같다고 하자.



곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ g(t))$가 점 A에서 점 B까지 움직일 때,

곡선 $y=f(g(x))$ 위의 점 $\mathrm{Q}(g(t),\ f(g(t)))$는 점 C에서 점 D까지 움직인다.

구간 $(3,\ 4)$에서 함수 $g(x)$는 감소하므로

$g'(t)<0$

구간 $(g(4),\ 1)$에서 함수 $f(x)$가 증가하므로

$f'(g(t))>0$

구간 $(3,\ 4)$에서 $h'(t)<0$이므로

구간 $(3,\ 4)$에서 함수 $h(x)$는 감소한다.

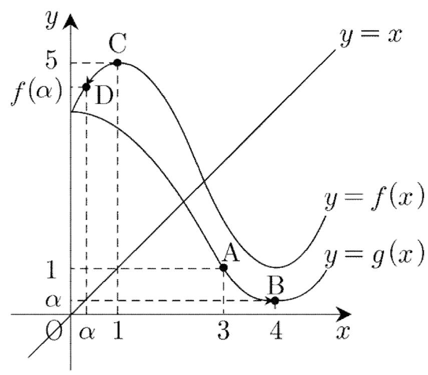
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고]

보기 ㄷ이 참임을 다음과 같이 보일 수 있다.

▸ ㄷ. (참)



(단, $g(4)=\alpha$이다.)

x가 3에서 4까지 증가할 때,

$g(x)$는 1에서 α까지 감소하고, $(\mathrm{A}\to\mathrm{B})$

$f(g(x))$는 5에서 $f(\alpha)$까지 감소한다. $(\mathrm{C}\to\mathrm{D})$

따라서 구간 $(3,\ 4)$에서 함수 $h(x)$는 감소한다.

H212 | 답 331

[풀이1] ★

함수 $g(x)$의 방정식을 변형하면

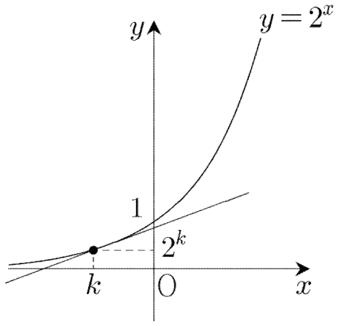
$$g(x)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{2^{x+h}-2^x}\times\frac{2^{x+h}-2^x}{h}\right|$$

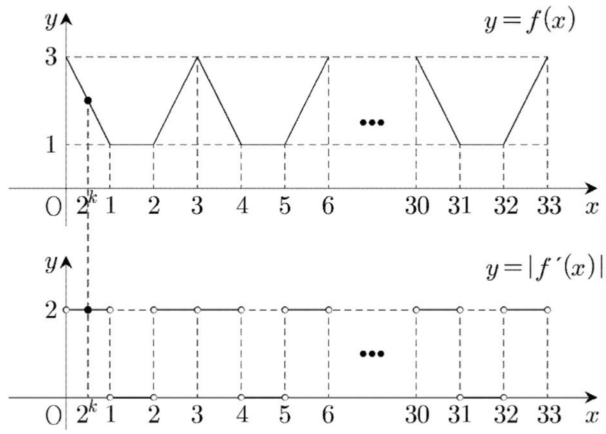
이때,

$\dfrac{2^{x+h}-2^x}{h}=$(함수 $y=2^x$의 $x=x$에서의 우미분계수),

$\dfrac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{2^{x+h}-2^x}=$(함수 $y=f(x)$의 $x=2^x$에서의 우미분계수)

세 함수 $y=2^x$, $y=f(x)$, $y=|f'(x)|$의 그래프는 다음과 같다.





$x=k$일 때의 함수 $g(x)$의 함숫값에 대하여 생각하자. 즉,

$$g(k)=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{f(2^{k+h})-f(2^k)}{2^{k+h}-2^k}\times\frac{2^{k+h}-2^k}{h}\right|$$

- $-5\le k<0\left(\frac{1}{32}\le 2^k<1\right)$일 때,

$h\to 0+$이면

$$\frac{2^{x+h}-2^x}{h}=2^k\ln 2,\ \frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{2^{x+h}-2^x}=-2$$

이므로

$g(k)=|-2\times 2^k\ln 2|=2^{k+1}\ln 2$

- $0\le k<1(1\le 2^k<2)$일 때,

$h\to 0+$이면

$$\frac{2^{x+h}-2^x}{h}=2^k\ln 2,\ \frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{2^{x+h}-2^x}=0$$

이므로

$g(k)=|0\times 2^k\ln 2|=0$

- $1\le k<\log_2 3(2\le 2^k<3)$일 때,

$h\to 0+$이면

$$\frac{2^{x+h}-2^x}{h}=2^k\ln 2,\ \frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{2^{x+h}-2^x}=2$$

이므로

$g(k)=|2\times 2^k\ln 2|=2^{k+1}\ln 2$

$\vdots$

마찬가지의 방법으로 다음의 결과를 얻는다.

x	2^x	$g(x)$
$[-5,\ 0)$	$\left[\frac{1}{32},\ 1\right)$	$2^{k+1}\ln 2$
$[0,\ 1)$	$[1,\ 2)$	0
$[1,\ \log_2 3)$	$[2,\ 3)$	$2^{k+1}\ln 2$
$[\log_2 3,\ 2)$	$[3,\ 4)$	$2^{k+1}\ln 2$
$[2,\ \log_2 5)$	$[4,\ 5)$	0
$[\log_2 5,\ \log_2 6)$	$[5,\ 6)$	$2^{k+1}\ln 2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

위의 표에서 어둡게 칠한 세 수가 반복해서 나타난다.

함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속일 때,

2^a, $g(a)$의 값을 모두 쓰면

$2^a=1,\ 4,\ 7,\ \cdots,\ 31$(11개): $g(a)=0$

$2^a=2,\ 5,\ 8,\ \cdots,\ 29$(10개): $g(a)=2^{a+1}\ln 2$

이때, $n=11+10=21$이므로

$$\therefore\ n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}$$

$$=21+\frac{(2\ln 2)(2+5+8+\ \cdots\ +29)}{\ln 2}$$

$$=21+2\times\frac{2+29}{2}\times 10=331$$

답 331

[풀이2] ★

$-5\le x<0$일 때, $\frac{1}{32}\le 2^x<1$이므로

$f(2^x)=-2\times 2^x+3=3-2^{x+1}$

(이때, 도함수는 $-2^{x+1}\ln 2$)

$0\le x<1$일 때, $1\le 2^x<2$이므로

$f(2^x)=0$

(이때, 도함수는 0)

$1\le x<\log_2 3$일 때, $2\le 2^x<3$이므로

$f(2^x)=2\times(2^x-2)+1=2^{x+1}-3$

(이때, 도함수는 $2^{x+1}\ln 2$)

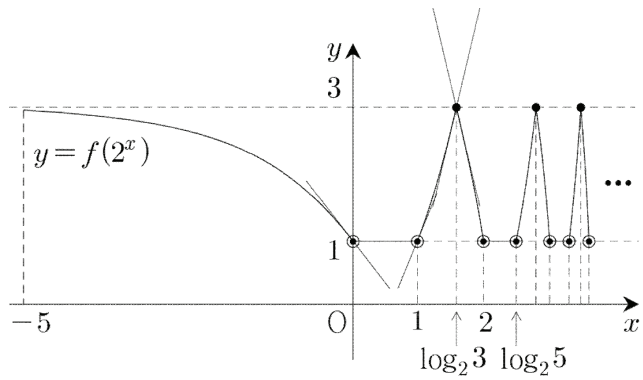
$\log_2 3\le x<2$일 때, $3\le 2^x<4$이므로

$f(2^x)=-2\times(2^x-4)+1=9-2^{x+1}$

(이때, 도함수는 $-2^{x+1}\ln 2$)

$\vdots$

함수 $f(2^x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



$g(x)=$|함수 $f(2^x)$의 $x=x$에서의 우미분계수|
이므로

$\lim_{x\to 0-} g(x)=2\ln 2 \neq 0=g(0)$ (불연속)

$\lim_{x\to 1-} g(x)=0 \neq 4\ln 2=g(1)$ (불연속)

$\lim_{x\to \log_2 3-} g(x)=6\ln 2=\lim_{x\to \log_2 3+} g(x)$ (연속)

(이때, $g(\log_2 3)=\lim_{x\to \log_2 3+} g(x)$)

위의 그림에서
•는 $g(x)$가 연속인 점이고,
◉는 $g(x)$가 불연속인 점이다.
함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속일 때,
2^a, $g(a)$의 값을 모두 쓰면
$2^a=1,\ 4,\ 7,\ \cdots,\ 31$(11개): $g(a)=0$
$2^a=2,\ 5,\ 8,\ \cdots,\ 29$(10개): $g(a)=2^{a+1}\ln 2$
이때, $n=11+10=21$이므로

$\therefore\ n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}$

$=21+\frac{(2\ln 2)(2+5+8+\cdots+29)}{\ln 2}$

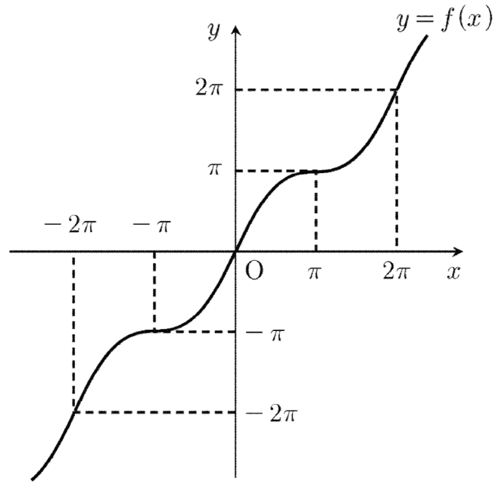
$=21+2\times\frac{2+29}{2}\times 10=331$

답 331

H213 | 답 ⑤

[풀이1]
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=1+\cos x$
모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$
함수 $f(x)$는 증가함수이다.
함수 $f(x)$의 이계도함수는
$f''(x)=-\sin x$
$f''(x)=0$에서 $x=n\pi$
(단, n은 정수)

$x=n\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $f(x)$의 그래프는 $x=n\pi$에서 변곡점을 갖는다.
▸ ㄱ. (참)
구간 $(0,\ \pi)$에서 $f''(x)<0$이므로
함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(0,\ \pi)$에서 위로 볼록이다.
구간 $(\pi,\ 2\pi)$에서 $f''(x)>0$이므로
함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(0,\ \pi)$에서 아래로 볼록이다.
함수 $y=f(x)$의 그래프는



▸ ㄴ. (참)
합성함수의 미분법에 의하여
$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$
$=\{1+\cos(x+\sin x)\}(1+\cos x)$
구간 $(0,\ \pi)$에서
$0\leq x+\sin x\leq \pi$
$0\leq 1+\cos(x+\sin x)\leq 2$
$0\leq 1+\cos x\leq 2$
이므로, 구간 $(0,\ \pi)$에서
$g'(x)\geq 0$
함수 $g(x)$는 구간 $(0,\ \pi)$에서 증가한다.
▸ ㄷ. (참)
함수 $g(x)$가 구간 $[0,\ \pi]$에서 연속이고
구간 $(0,\ \pi)$에서 미분가능하므로
평균값 정리에 의해서

$\frac{g(\pi)-g(0)}{\pi-0}=1=g'(c)$

를 만족하는 실수 c가 구간 $(0,\ \pi)$에 적어도 하나 존재한다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
답 ⑤

[참고]
사이값 정리를 이용하여 보기 ㄷ이 참임을 증명할 수도 있다.
▸ ㄷ. (참)
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=1+\cos x$

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x) = f'(f(x))f'(x)$

$= \{1 + \cos(x + \sin x)\}(1 + \cos x)$

함수 $g'(x)$는 닫힌구간 $[0,\ \pi]$에서 연속이고,

$g'(0) = 4 \neq 0 = g'(\pi)$이므로

사이값 정리에 의하여

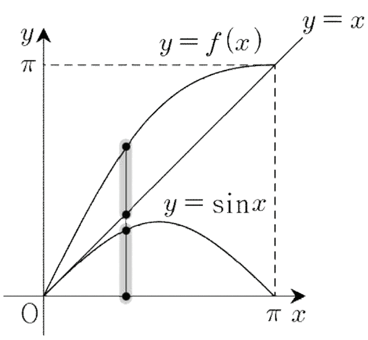
$g'(c) = 1$인 c가 열린구간 $(0,\ \pi)$에 적어도 하나 존재한다.

[풀이2] **시험장**

▸ ㄱ. (참)

$x = x$일 때, 두 함수 $y = x$, $y = \sin x$의 함숫값의 합은 함수 $y = f(x)$의 함숫값과 같다.

함수 $f(x)$의 그래프는



(단, 위의 그림에서 두 선분의 길이는 같다.)

위의 그림처럼 곡선 $y = f(x)$는 구간 $(0,\ \pi)$에서 위로 볼록이다.

그리고 구간 $(0,\ \pi)$에서 두 곡선 $y = \sin x$, $y = f(x)$의 볼록은 같을 수밖에 없다. 왜냐하면 직선 $y = x$의 이계도함수는 $y = 0$이기 때문이다.

▸ ㄴ. (참)

x: $0 \to \pi$ (증가)

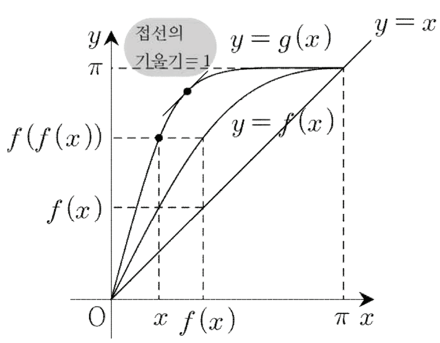
$f(x)$: $0 \to \pi$ (증가)

$g(x)$: $0 \to \pi$ (증가)

이므로 함수 $g(x)$는 구간 $(0,\ \pi)$에서 증가한다.

▸ ㄷ. (참)

함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다. (함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.)



위의 그림에서 $g'(x) = 1$인 실수 x가 구간 $(0,\ \pi)$에 존재함을 알 수 있다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

H214 | 답 ③

[풀이1] ★

우선 함수 $f(x)$의 그래프를 그리자.

함수 $f(x)$의 그래프는 아래의 두 점을 지난다.

$\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$, $(3,\ \pi)$

$x = 1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 변곡점을 갖지 않는다.

다항함수 $f''(x)$는 연속함수이므로 $f''(1)$의 부호가 음일 수 없다. 즉, $f''(1) \geq 0$이다.

$x = 1$에서 함수 $f(x)$가 아래로 볼록이고 $f'(1) = 0$이므로 함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 극솟값을 갖는다.

문제에서 주어진 표를 완성하면

x	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	1
$f''(x)$	$+$	0 또는 $+$	$+$	0
$f(x)$	↘	$\frac{\pi}{2}$	↗	π

아래를 만족시키는 적당한 상수 $p(< 1)$을 생각하자.

구간 $(p,\ 3)$에서 $f''(x) \geq 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(p,\ 3)$에서 아래로 볼록하다.

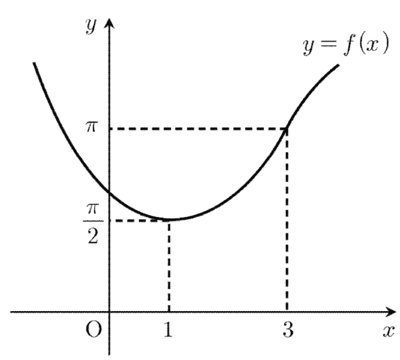
구간 $(p,\ 1)$에서 $f'(x) < 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(p,\ 1)$에서 감소한다.

구간 $(1,\ 3)$에서 $f'(x) > 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $(1,\ 3)$에서 증가한다.

점 $\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$는 함수 $f(x)$의 극소점이다.

$x > 3$일 때, $f''(x)$의 부호에 대한 정보가 없으므로 점 $(3,\ \pi)$가 함수 $f(x)$의 변곡점이라고 단정할 수 없다.

이제 함수 $f(x)$의 그래프 중에서 가장 간단한 것을 그리면



▸ ㄱ. (참)

함수 $g(x)$의 도함수는

합성함수의 미분법에 의하여

$g'(x)=f'(x)\times\cos(f(x))$

$\therefore\ g'(3)=f'(3)\times\cos(f(3))$

$=1\times cos\pi=-1$

▸ ㄴ. (참)

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

구간 $(1,\ 3)$에서

$0<f'(x)<1$

$\frac{\pi}{2}<f(x)<\pi$에서

$-1<\cos(f(x))<0$

보기 ㄱ에서

$g'(x)=f'(x)\times\cos(f(x))$이므로

$-1<g'(x)<0$

함수 $g(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고

구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

$\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)$

인 c가 구간 $(a,\ b)$에 존재한다.

구간 $(1,\ 3)$에서 $-1<g'(x)<0$이므로

$-1<g'(c)<0$

$\therefore\ -1<\frac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$

▸ ㄷ. (거짓)

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x)=-\{f'(x)\}^2\sin(f(x))+f''(x)\cos(f(x))$

충분히 작은 양수 h에 대하여

구간 $(1-h,\ 1+h)$에서

$|f'(x)|\geq 0,\ \sin(f(x))>0,$

$f''(x)\geq 0,\ \cos(f(x))\leq 0$이므로

구간 $(1-h,\ 1+h)$에서

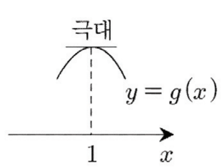
$g''(x)\leq 0$

(단, 등호는 $x=1$일 때 성립한다.)

구간 $(1-h,\ 1+h)$에서 함수 $g(x)$의 그래프는 위로 볼록이다.

따라서 함수 $g(x)$의 그래프는 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$을 변곡점으로 갖지 않는다.

물론 합성함수 $g(x)$의 그래프의 개형을 그리면 $x=1$에서 함수 $g(x)$가 극댓값을 가짐을 알 수 있다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

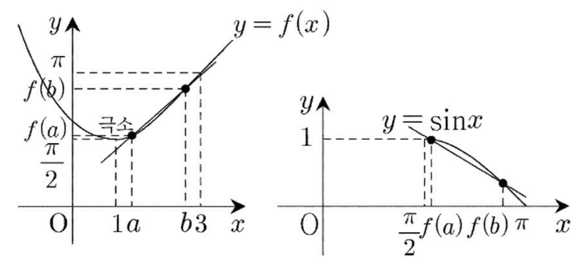
[풀이2] **시험장**

▸ ㄱ. (참)

미분계수 $g'(3)$의 부호는 두 함수 $y=f(x)$, $y=\sin x$의 그래프의 개형을 그려서 두 미분계수 $f'(3)$(접선의 기울기), $\cos(f(3))$(접선의 기울기)의 부호로 결정하면 되지만, 미분계수 $g'(3)$의 값은 함수 $g(x)$의 도함수에 $x=3$을 대입해서 구해야한다. 즉, 대수적인 방법을 따라야 한다.

▸ ㄴ. (참)

두 함수 $y=f(x)$, $y=\sin x(\frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그림에서

(곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기)

$<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$<$(곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ \pi)$에서의 접선의 기울기)

즉, $0<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$ $\cdots$㉠

위의 그림에서

(곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $(\pi,\ 0)$에서의 접선의 기울기)

$<\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}$

$<$(곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$에서의 접선의 기울기)

즉, $-1<\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}<0$ $\cdots$㉡

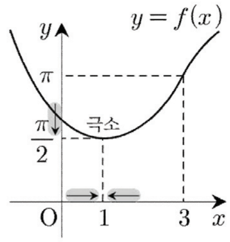
㉠, ㉡에 의하여

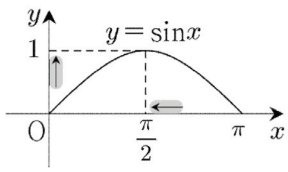
$-1<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}<0$

$\therefore\ -1<\frac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$

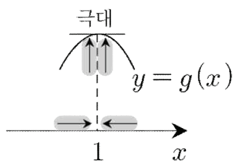
▸ ㄷ. (거짓)

두 함수 $y=f(x)$, $y=\sin x(0\leq x\leq\pi)$의 그래프는 다음과 같다.





$x=1$을 포함한 어떤 구간에서 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



점 $(1,\ 1)$은 곡선 $y=g(x)$의 극대점이므로 변곡점이 될 수 없다.

답 ③

H215 | 답 29

[풀이]

실수 전체의 집합에서 삼차함수 $f(x)$가 증가하면 조건 (가)는 성립하지 않는다.

왜냐하면

x : (0) ⇨ (1)

$\sin^2\pi x$: (0) ⇨ 1 ⇨ (0)

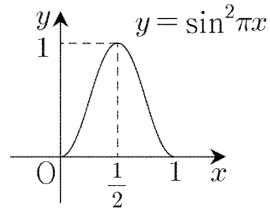
$g(x)$: $(f(0))$ ⇨ $f(1)$ ⇨ $(f(0))$

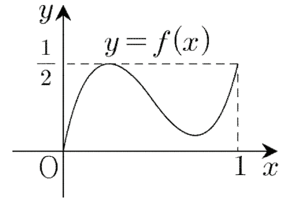
즉, 구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $g(x)$는 극댓값을 오직 하나만 가지기 때문이다.

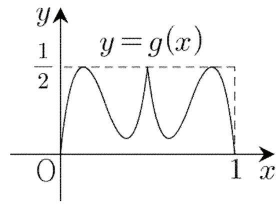
따라서 삼차함수 $f(x)$는 극값을 가져야 한다.

조건 (가)를 만족시키기 위해서 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 한다.

문제에서 주어진 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키도록 세 함수 $y=\sin^2\pi x$, $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형을 그리면 아래와 같다. (극대극소, 최대최소만을 판정하는 것이므로 함수 $g(x)$의 미분가능성은 고려하지 않아도 된다.)







위의 그림처럼 $f(0)=0$이고,

(함수 $f(x)$의 극댓값)$=f(1)=\dfrac{1}{2}$

이어야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖는다고 하자.

인수정리에 의하여

$f(x)-\dfrac{1}{2}=(x-a)^2(x-1)$

그런데 $f(0)=0$이므로

$f(0)-\dfrac{1}{2}=-a^2$, $a^2=\dfrac{1}{2}$, $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$f(2)=\left(2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}=5-2\sqrt{2}$

$\therefore\ a^2+b^2=29$

답 29

[참고1]

$f(0)=0$인 이유를 알아보자.

구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)\ge 0$이어야 한다. 만약 $f(x)<0$인 x가 존재하면 함수 $g(x)$의 최솟값은 음수이다. 즉, 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

이제 $f(0)=0$ 또는 함수 $f(x)$의 극솟값이 0이면 된다.

함수 $f(x)$의 극솟값이 0이라고 하자.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2(x-a)(x-1)+(x-a)^2$

$=(x-a)(3x-2-a)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=a$ 또는 $x=\dfrac{a+2}{3}$

극솟값: $f\left(\dfrac{a+2}{3}\right)=\dfrac{4(a-1)^3}{27}+\dfrac{1}{2}=0$

풀면 $a=-\dfrac{1}{2}$

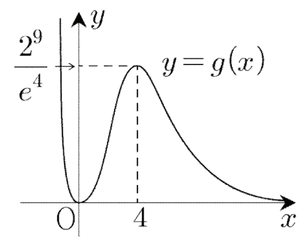
$0<a<1$임을 만족시키지 않으므로 귀류법에 의하여

$f(0)=0$이다.

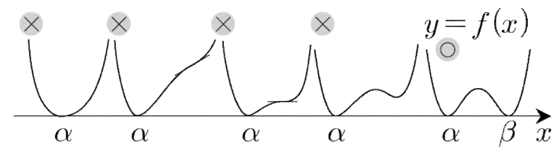
[참고2]
구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하는 이유를 산술적으로 보이면 다음과 같다.
함수 $g(x)$의 도함수는
$g'(x)=f'(\sin^2\pi x)\times 2\pi\sin\pi x\cos\pi x$
$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(\sin^2\pi x)=0$ 또는 $\cos\pi x=0$
$\Leftrightarrow f'(\sin^2\pi x)=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$
조건 (가)에 의하여 방정식
$f'(\sin^2\pi x)=0$ (이때, $\sin^2\pi x$: $(0) ⇨ 1 ⇨ (0)$)
은 서로 다른 두 개의 실근을 가져야 한다. 이 중에서 크기가 작은 실근을 $\alpha(0<\alpha<\frac{1}{2})$라고 하면 나머지 한 실근은 $1-\alpha$이다. 왜냐하면
$f'(\sin^2\pi\alpha)=0$이면
$f'(\sin^2\pi(1-\alpha))=f'(\sin^2\pi\alpha)=0$
이기 때문이다.
$x=\alpha$의 좌우에서 ($\sin^2\pi x$의 값은 증가하므로) $f'(\sin^2\pi x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 극댓값을 갖는다. ($\because$ 점 $(\sin^2\pi\alpha,\ f(\sin^2\pi\alpha))$는
곡선 $y=f(x)$의 극대점이다.)
$x=1-\alpha$의 좌우에서 ($\sin^2\pi x$의 값은 감소하므로)
$f'(\sin^2\pi x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로
함수 $g(x)$는 극댓값을 갖는다.
($\because$ 점 $(\sin^2\pi\alpha,\ f(\sin^2\pi\alpha))$는 곡선 $y=f(x)$의 극대점이다.)
$x=\frac{1}{2}$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 극댓값을 갖는다.

H216 | 답 30

[풀이1] **시험장**
우선 함수 $g(x)$의 그래프의 개형을 그리자.
$x\to 0$일 때, $g(x)\approx 2x^4$이므로 원점 부근에서
곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=2x^4$에 한없이 가까워진다.
그리고 $x\to\infty$일 때, $g(x)\to 0$이므로 x축은 점근선이고,
$x\to-\infty$일 때, $g(x)$는 무한대로 발산한다.
$g'(x)=2x^3(4-x)e^{-x}$
방정식 $g'(x)=0$을 풀면 $x=4$이다.
이상에서 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

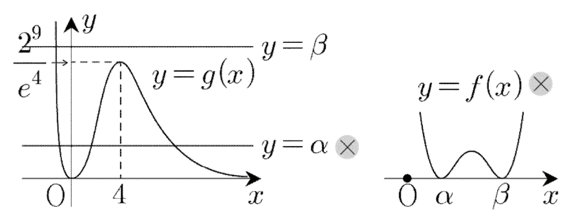


이제 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$의 최솟값이 0이 되도록 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 그리자. (큰 유형별로 나누어)



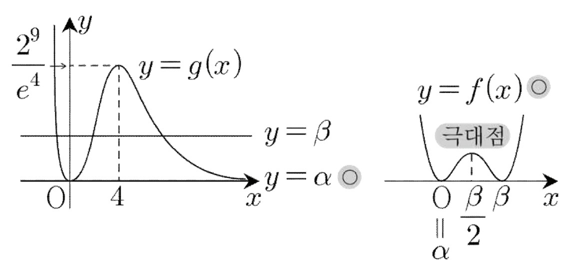
(단, $\alpha<\beta$, $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$)
왼쪽의 네 개의 경우 각각에 대하여 방정식 $h(x)=0$을 정리하면
$f(\alpha)=0$, $g(x)=\alpha$
그런데 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=\alpha$의 교점의 개수는 4일 수 없다.
따라서 맨 오른쪽의 경우만이 가능하다.
이제 다음의 두 경우를 생각하자.

- (1) $0<\alpha<\beta$인 경우



합성함수의 그래프의 개형의 관점에서
x: $0-$ ⇨ $0+$
$g(x)$: $0+$ ⇨ 0 ⇨ $0+$
$h(x)$: $f(0)-$ ⇨ $f(0)$ ⇨ $f(0)-$
이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극대이다.

- (2) $0=\alpha<\beta$인 경우



합성함수의 그래프의 개형의 관점에서
x: $0-$ ⇨ $0+$
$g(x)$: $0+$ ⇨ 0 ⇨ $0+$
$h(x)$: $f(0)+$ ⇨ $f(0)$ ⇨ $f(0)+$
이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2$$

이제 함수 $f(x)$의 극댓값만 알면 함수 $f(x)$의 방정식을 결정할 수 있다.

아직 사용하지 않은 조건은 (다) 뿐이므로,

이 조건이 함수 $f(x)$의 극댓값에 대한 힌트를 주고 있음은 자명하다. 함수 $f(x)$의 극댓값을 8로 두고 풀이를 계속하자.

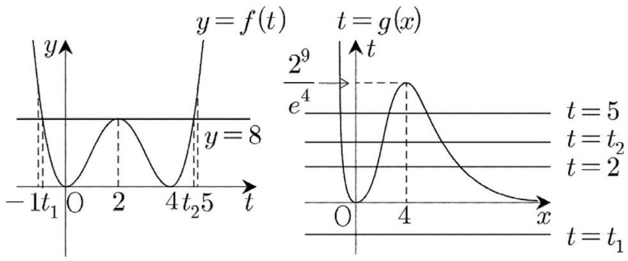
극대: $f\left(\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\beta^4}{32}=8$ 풀면 $\beta=4$

함수 $f(x)$의 방정식을 다시 쓰면

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-4)^2$$

위의 방정식이 옳음을 증명하자.

(시험장에서는 아래의 증명까지 할 필요는 없다.)



(단, $f(-1)=f(5)>f(2)$)

위의 그림처럼 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=8$이 만나는 세 점 중에서 $(2,\ 8)$이 아닌 두 점의 x좌표를 각각 t_1, t_2라고 하자. 이때,

$-1<t_1<0$, $4<t_2<5$

그런데 $2<e<3$이므로

$$5<\frac{2^9}{3^4}<\frac{2^9}{e^4}<\frac{2^9}{2^4}=g(4),\ \text{즉}\ 5<g(4)$$

따라서 조건 (다)는 성립한다.

$f'(x)=x(x-4)^2+x^2(x-4)$

$\therefore\ f'(5)=30$

답 30

[풀이2]

우선 함수 $g(x)$의 그래프를 그리자.

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=2x^3e^{-x}(4-x)=2x^2e^{-x}\times x(4-x)$

방정식 $g'(x)=0$을 풀면

$x=0$ 또는 $x=4$

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x)=2x^2e^{-x}(x-2)(x-6)$

(※ 이 문제를 해결하기 위하여 함수 $g(x)$의 변곡점을 반드시 찾아야 하는 것은 아니다. 하지만 정확한 그래프의 개형을 그리기 위하여 교과서의 전형적인 풀이를 적용하여 보자.)

방정식 $g''(x)=0$을 풀면

$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=6$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$	6	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$g''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗	변곡점	↗	극대	↘	변곡점	↘

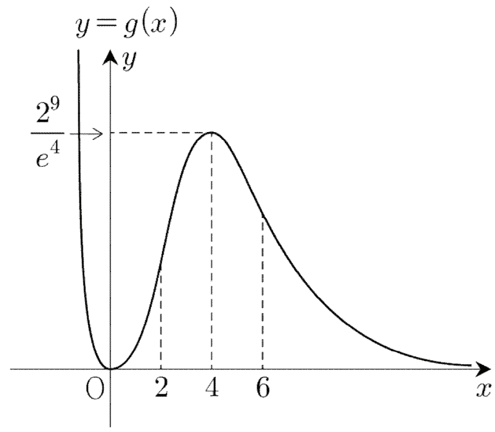
극솟값: $g(0)=0$, 극댓값: $g(4)=\frac{2^9}{e^4}$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=0$$

이므로 x축은 점근선이다.

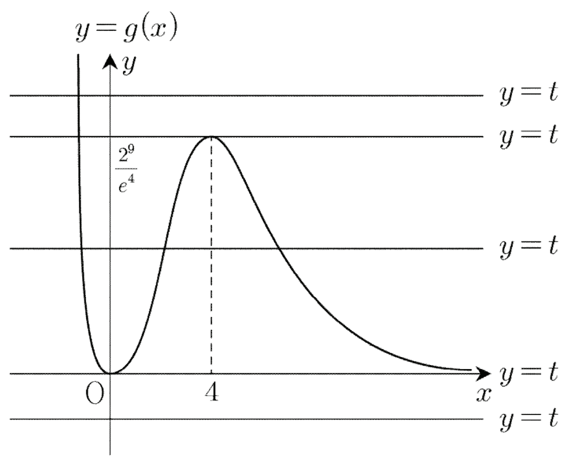
함수 $g(x)$의 그래프의 개형은



▸ 조건 (가)에 대하여 생각하자.

$$h(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)=t \\ f(t)=0 \end{cases}$$

실수 t의 값에 따른 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 조사하자.



위의 그림에서

방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는

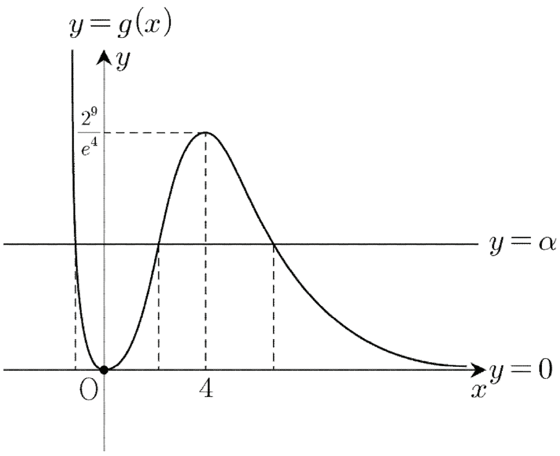
$t>\frac{2^9}{e^4}$이면 1개,

$t=\frac{2^9}{e^4}$이면 2개,

$0<t<\frac{2^9}{e^4}$이면 3개,

$t=0$이면 1개,
$t<0$이면 0개
이다. 이때, 각 경우에 대한 5개의 해집합 중에서 어느 두 집합도 교집합이 공집합이다. 그리고 각 경우에 대한 5개의 해집합의 합집합은 실수 전체의 집합이다.
방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되는 경우는 다음과 같이 두 가지이다.

- (경우1)



방정식 $f(t)=0$이 서로 다른 두 실근 0, α를 가져야 한다.
(단, $0<\alpha<\frac{2^9}{e^4}$)
$f(0)=f(\alpha)=0$이므로
인수 정리에 의하여
함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

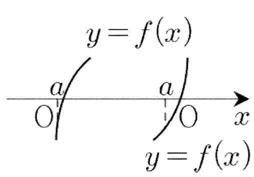
$f(x)=\frac{1}{2}x(x-\alpha)p(x)$

(단, $p(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)
함수 $f(x)$의 도함수는

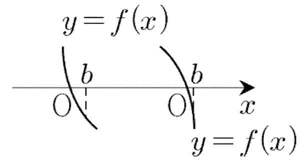
$f'(x)=\frac{1}{2}(x-\alpha)p(x)+\frac{1}{2}xp(x)$

$+\frac{1}{2}x(x-\alpha)p'(x)$

만약 $f'(0)>0$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 $x=0$에서 증가하므로 음수이면서 0에 아주 가까운 어떤 실수 a에 대하여 $f(a)<0$이다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 0일 수 없으므로 이는 가정에 모순이다. 따라서 $f'(0)\le 0$이다.



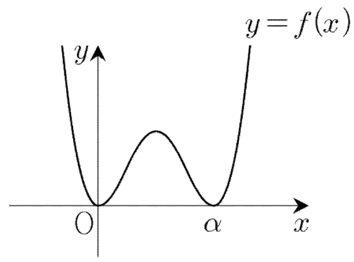
만약 $f'(0)<0$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 $x=0$에서 감소하므로 양수이면서 0에 아주 가까운 어떤 실수 b에 대하여 $f(b)<0$이다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 0일 수 없으므로 이는 가정에 모순이다. 따라서 $f'(0)=0$이다. (←귀류법)



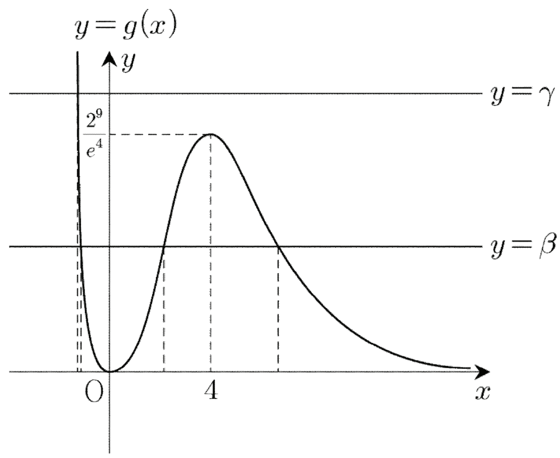
$f'(0)=-\frac{1}{2}\alpha p(0)=0$에서 $p(0)=0$
($\because \alpha\neq 0$)
마찬가지의 방법으로 귀류법에 의하여
$f'(\alpha)=0$, $p(\alpha)=0$이다.
인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-\alpha)^2$ (단, $0<\alpha<\frac{2^9}{e^4}$)

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은



- (경우2)



방정식 $f(t)=0$이

$0<\beta<\frac{2^9}{e^4}<\gamma$

인 서로 다른 두 실근 β, γ를 가져야 한다.
$f(\beta)=f(\gamma)=0$이므로
인수 정리에 의하여
함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

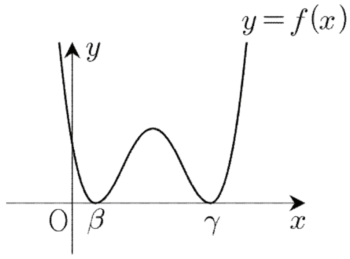
$f(x)=\frac{1}{2}(x-\beta)(x-\gamma)q(x)$

(단, $q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)

(경우1)과 마찬가지의 방법으로 귀류법에 의하여
$f'(\beta)=f'(\gamma)=0$, $q(\beta)=q(\gamma)=0$이므로
함수 $f(x)$의 방정식은

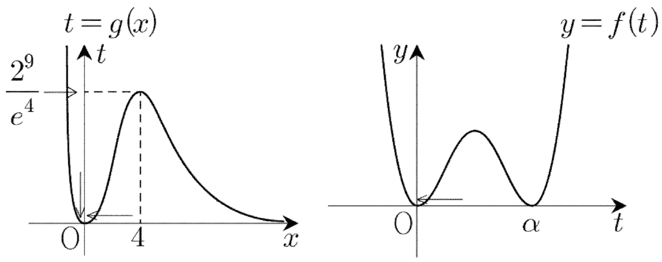
$$f(x)=\frac{1}{2}(x-\beta)^2(x-\gamma)^2 \text{ (단, } 0<\beta<\frac{2^9}{e^4}<\gamma)$$

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은

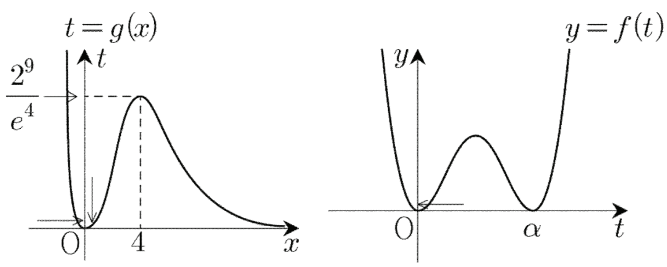


▸ 조건 (나)에 대하여 생각하자.
함수 $h(x)$의 도함수는
$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$
$h'(0)=f'(g(0))g'(0)=f'(0)\times 0=0$
이제 $\begin{cases} t=g(x) \\ y=f(t) \end{cases}$로 두고 $x=0$의 좌우에서 함수 $h'(x)$의 부호의 변화를 관찰하자.

• (경우1)

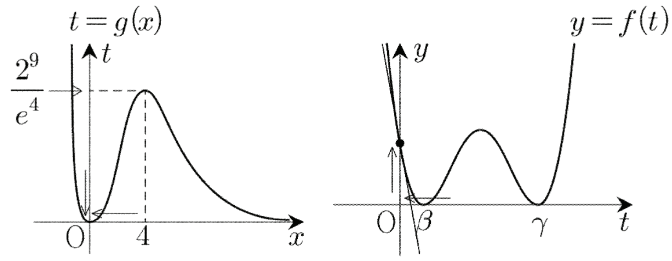


$x\to 0+$일 때 $t\to 0+$이고,
$t\to 0+$일 때 $f'(t)\to 0+$이다.
$x\to 0+$일 때 $g'(x)\to 0+$이다.
따라서 $x\to 0+$일 때, $h'(x)\to 0+$이다.

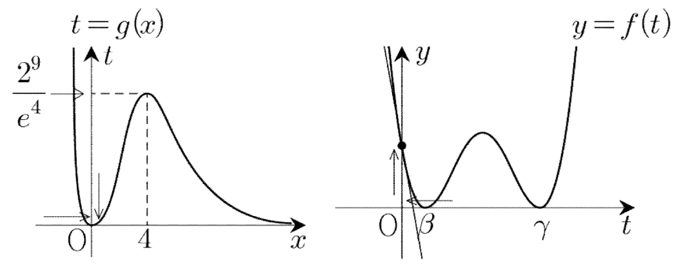


$x\to 0-$일 때 $t\to 0+$이고,
$t\to 0+$일 때 $f'(t)\to 0+$이다.
$x\to 0-$일 때 $g'(x)\to 0-$이다.
따라서 $x\to 0-$일 때, $h'(x)\to 0-$이다.
$x=0$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.
그러므로 (경우1)은 조건 (나)를 만족시킨다.

• (경우2)



$x\to 0+$일 때 $t\to 0+$이고,
$t\to 0+$일 때 $f'(t)\to f'(0)+$이다.
(이때, $f'(0)<0$)
$x\to 0+$일 때 $g'(x)\to 0+$이다.
따라서 $x\to 0+$일 때, $h'(x)\to 0-$이다.



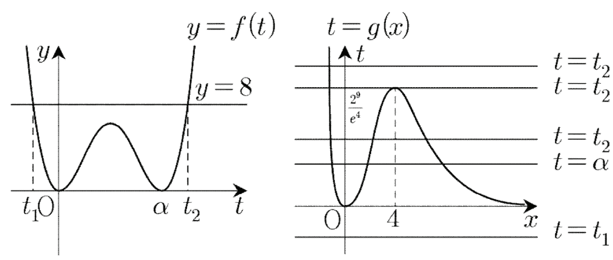
$x\to 0-$일 때 $t\to 0+$이고,
$t\to 0+$일 때 $f'(t)\to f'(0)+$이다.
(이때, $f'(0)<0$)
$x\to 0-$일 때 $g'(x)\to 0-$이다.
따라서 $x\to 0-$일 때, $h'(x)\to 0+$이다.
$x=0$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
그러므로 (경우2)는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

▸ 조건 (다)에 대하여 생각하자.

$h(x)=8 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)=t \\ f(t)=8 \end{cases}$

실수 t의 값에 따른 방정식 $g(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 조사하자.

• 함수 $f(x)$의 극댓값이 8보다 작은 경우



방정식 $f(t)=8$의 서로 다른 두 실근을 각각 t_1, t_2라고 하자.
(단, $t_1<t_2$)
방정식 $g(x)=t_1$의 서로 다른 실근의 개수는 0,
방정식 $g(x)=t_2$의 서로 다른 실근의 개수는 1 이상 3 이하이다.
따라서 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수가 6일 수

없다.

• 함수 $f(x)$의 극댓값이 8인 경우

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = 2x\left(x - \dfrac{\alpha}{2}\right)(x - \alpha)$

방정식 $f'(x) = 0$을 풀면

$x = 0$ 또는 $x = \dfrac{\alpha}{2}$ 또는 $x = \alpha$

$x = \dfrac{\alpha}{2}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x = \dfrac{\alpha}{2}$에서 극댓값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값은

$f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\alpha^4}{2^5} = 8$ 풀면 $\alpha = 4$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2(x-4)^2$

방정식 $f(x) = 8$을 정리하면

$\{x(x-4)\}^2 = 4^2$

$x(x-4) = 4$ 또는 $x(x-4) = -4$

$x^2 - 4x - 4 = 0$ 또는 $(x-2)^2 = 0$

전자를 풀면

$x = 2 - 2\sqrt{2}$ 또는 $x = 2 + 2\sqrt{2}$

후자를 풀면

$x = 2$

이제

$t_1 = 2 - 2\sqrt{2}$, $t_2 = 2$, $t_3 = 2 + 2\sqrt{2}$

로 두자.

방정식 $g(x) = t_3$의 서로 다른 실근의 개수를 결정하기 위하여 두 수 t_3, $\dfrac{2^9}{e^4}$의 대소 관계를 밝히자.

$\dfrac{2^9}{e^4} - t_3 = \dfrac{2^9}{e^4} - 2 - 2\sqrt{2}$

$= \dfrac{2(2^8 - e^4(1 + \sqrt{2}))}{e^4} > 0$

왜냐하면

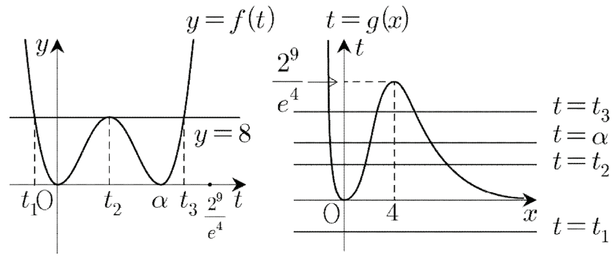
$2^8 = 256$이고,

$e^4 < (2.8)^4 = 61.4656$, $1 + \sqrt{2} < 3$에서

$e^4(1 + \sqrt{2}) < 184.3968$

이기 때문이다.

(※ $2 < e < 3$으로 두어도 동일한 결과를 얻는다.)



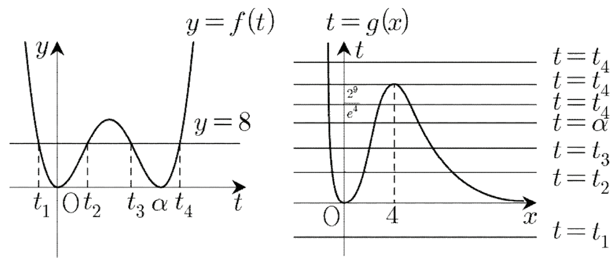
방정식 $g(x) = t_1$의 서로 다른 실근의 개수는 0,

방정식 $g(x) = t_2$의 서로 다른 실근의 개수는 3,

방정식 $g(x) = t_3$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

방정식 $h(x) = 8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

• 함수 $f(x)$의 극댓값이 8보다 큰 경우



방정식 $f(t) = 8$의 서로 다른 네 실근을 각각 t_1, t_2, t_3, t_4라고 하자.

(단, $t_1 < 0 < t_2 < t_3 < \alpha < t_4$)

방정식 $g(x) = t_1$의 서로 다른 실근의 개수는 0,

방정식 $g(x) = t_2$의 서로 다른 실근의 개수는 3,

방정식 $g(x) = t_3$의 서로 다른 실근의 개수는 3,

방정식 $g(x) = t_4$의 서로 다른 실근의 개수의 최솟값은 1이다.

따라서 방정식 $h(x) = 8$의 서로 다른 실근의 개수는 6일 수 없다.

문제에서 주어진 모든 조건을 만족시키는

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2(x-4)^2$

함수 $f(x)$의 도함수는

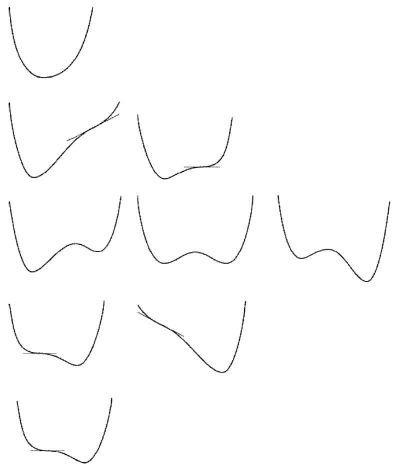
$f'(x) = 2x(x-2)(x-4)$

$\therefore$ $f'(5) = 30$

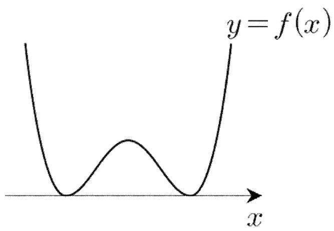
답 30

[참고1]

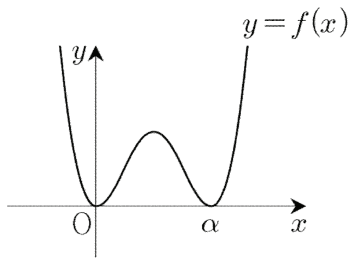
함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 다음과 같이 결정할 수도 있다. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수의 그래프의 개형을 모두 그리면 다음과 같다.



조건 (가)에 의하여 방정식
$f(x)=0=$(함수 $f(x)$의 최솟값이자 극솟값)
의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로
함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 아래와 같을 수밖에 없다.



[참고2]
함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.



방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 실근은 0, α 이외에는 없으므로

$$f(x)=\frac{1}{2}x^m(x-\alpha)^n$$

(단, m, n은 3 이하의 자연수이고, $m+n=4$)
만약 $m=1$, $n=3$이면

$$f(x)=\frac{1}{2}x(x-\alpha)^3$$

$x=0$의 좌우에서 x의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 변하고, $(x-\alpha)^3$의 부호는 음$(-)$으로 변함이 없으므로 $f(x)$의 부호는 양$(+)$에서 음$(-)$으로 변한다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0일 수 없다.
만약 $m=3$, $n=1$이면

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3(x-\alpha)$$

$x=0$의 좌우에서 x의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 변하고, $x-\alpha$의 부호는 음$(-)$으로 변함이 없으므로 $f(x)$의 부호는 양$(+)$에서 음$(-)$으로 변한다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0일 수 없다.
귀류법에 의하여 $m=n=2$이므로

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-\alpha)^2$$

[참고3]
방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 실근은 0, α 이외에는 없으므로

$$f(x)=\frac{1}{2}x(x-\alpha)k(x)$$

(단, $k(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.)
이차방정식
$k(x)=0$ $\cdots(*)$
의 판별식을 D라고 하자.
$D>0$인 경우: (*)의 두 근은 0, α이다. $\cdots$㉠
$D=0$인 경우: (*)의 중근은 0 또는 α이다. $\cdots$㉡
$D<0$인 경우: (*)는 실근을 갖지 않는다. $\cdots$㉢

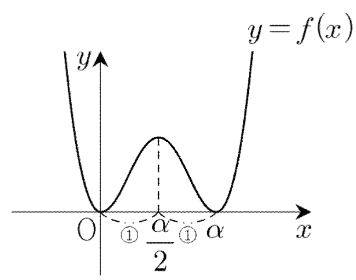
㉠: $f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-\alpha)^2$

㉡: $f(x)=\frac{1}{2}x^3(x-\alpha)$ 또는 $f(x)=\frac{1}{2}x(x-\alpha)^3$

㉢: $f(x)=\frac{1}{2}x(x-\alpha)k(x)$

(단, 모든 실수 x에 대하여 $k(x)>0$이다.)
[참고2]에서 ㉡이 가능하지 않음을 산술적으로 보였다.
[참고2]에서와 마찬가지의 방법으로 ㉢이 가능하지 않음을 산술적으로 보일 수 있다.
귀류법에 의하여 ㉠만이 가능하다.

[참고4]
사차함수의 그래프에서의 비율에 대하여 생각해보자.



위의 그림처럼 사차함수 $f(x)$가 $x=0$과 $x=\alpha$에서 극소이고, 두 극솟값이 같을 때,

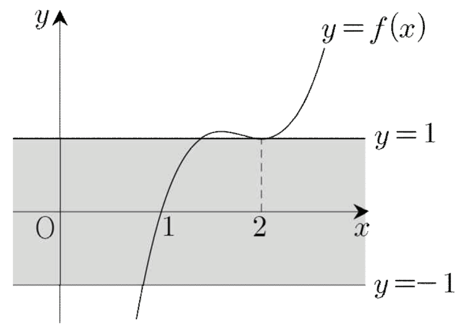
사차함수 $f(x)$는 $x=\frac{\alpha}{2}$에서 극대이다.

[참고5]

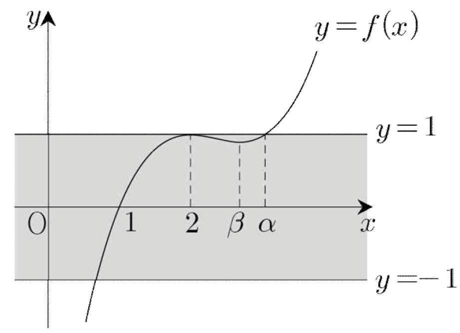
함수 $f(x)$가 (경우1)과 같을 때,
함수 $h(x)$의 이계도함수는
$h''(x)=f''(g(x))(g'(x))^2+f'(g(x))g''(x)$
$h''(0)=f''(g(0))(g'(0))^2+f'(g(0))g''(0)$
$=f''(0)\times 0+0\times g''(0)=0$
$(\because g'(0)=0,\ g(0)=0,\ f'(0)=0)$
이므로 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 극소임을 이계도함수의 부호로 결정할 수 없다.
반면 함수 $f(x)$가 (경우2)와 같을 때,
함수 $h(x)$의 이계도함수는
$h''(x)=f''(g(x))(g'(x))^2+f'(g(x))g''(x)$
$h''(0)=f''(g(0))(g'(0))^2+f'(g(0))g''(0)$
$=f''(0)\times 0+f'(0)\times g''(0)<0$
$(\because g'(0)=0,\ g(0)=0,$
$f'(0)<0,\ g''(0)>0)$
이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극대이다.

H217 | 답 ⑤

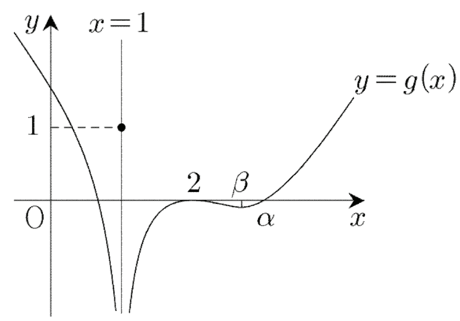
[풀이]
함수 $g(x)$에서 진수의 조건에 의하여
$f(x)\neq 0$
조건 (가)에서 $f(1)=0$ …㉠
(만약 $f(1)\neq 0$이면 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이기 때문이다.(귀류법))
이때, $f(x)=0$이 되는 x는 오직 1 뿐이다.
즉, 곡선 $y=f(x)$는 x축과 오직 점 $(1,\ 0)$에서만 만난다.
한편 함수 $g(x)$의 도함수는
$g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (단, $f(x)\neq 0$)
조건 (나)에서
함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대:
$g'(2)=\dfrac{f'(2)}{f(2)}=0$, 즉 $f'(2)=0$ …㉡
함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소
(& 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대):
$g(2)\leq 0 \Leftrightarrow -1\leq f(2)\leq 1\ (f(2)\neq 0))$ …㉢
조건 (다)에서
$g(x)=0 \Leftrightarrow \ln|f(x)|=0 \Leftrightarrow f(x)=\pm 1$
즉, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\pm 1$의
교점의 개수는 3이다. …㉣
(이때, 곡선 $y=f(x)$는 두 직선 $y=1$, $y=-1$ 중 오직 한 직선에 접해야 한다.)
㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 모두 만족시키는
함수 $f(x)$의 그래프를 그려보자.



위의 그림에서 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)(g'(x))$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다. 이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



(단, $2<\beta<\alpha$에 대하여 $f'(\beta)=0$, $f(\alpha)=0$)
이때, 함수 $g(x)$의 그래프는



함수 $f(x)$의 방정식을
$f(x)=\dfrac{1}{2}(x-2)^2(x-\alpha)+1$
$f(1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\alpha+1=0$에서 $\alpha=3$
즉, $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-2)^2(x-3)+1$
$f'(x)=(x-2)\left(\dfrac{3}{2}x-4\right)$
$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ 또는 $x=\dfrac{8}{3}(=\beta)$
따라서 함수 $g(x)$의 극솟값은
$g\left(\dfrac{8}{3}\right)=\ln\left|f\left(\dfrac{8}{3}\right)\right|=\ln\dfrac{25}{27}$
답 ⑤

H218 | 답 31

[풀이1]

(가):

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

$=e^{\sin\pi f(x)}\cos\pi f(x)\pi f'(x)$

$h'(0)=0$

$\Leftrightarrow \cos\pi f(0)=0$ 또는 $f'(0)=0$ $\cdots$ ㉠

$h(0)=g(f(0))=e^{\sin\pi f(0)}-1=0$

$\Leftrightarrow e^{\sin\pi f(0)}=1 \Leftrightarrow \sin\pi f(0)=0$

$\Leftrightarrow f(0)=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$ $\cdots$ ㉡

(이때, $\cos\pi f(0)\neq 0$)

㉠, ㉡에서 $f(0)=\pm n$ (n은 정수), $f'(0)=0$

그리고 $f(3)=\dfrac{1}{2}$, $f'(3)=0$이므로

삼차함수 $f(x)$의 극대점과 극소점은 각각

$(0,\ n)$, $\left(3,\ \dfrac{1}{2}\right)$

$f'(x)=3ax(x-3)$ (단, $a>0$)으로 두면

$f(x)=ax^3-\dfrac{9}{2}ax^2+C$ (단, C는 적분상수)

$f(3)=-\dfrac{27}{2}a+C=\dfrac{1}{2}$, $C=\dfrac{27}{2}a+\dfrac{1}{2}$

$f(x)=ax^3-\dfrac{9}{2}ax^2+\dfrac{27}{2}a+\dfrac{1}{2}$

(이때, $\dfrac{27}{2}a+\dfrac{1}{2}=n$, n은 자연수)

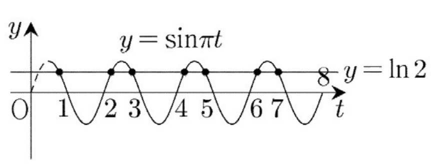
(나):

$h(x)=1 \Leftrightarrow e^{\sin\pi f(x)}=2 \Leftrightarrow \sin\pi f(x)=\ln 2$

$\Leftrightarrow \sin\pi t=\ln 2(<1)$ (단, $t=f(x)$)

구간 $(0,\ 3)$에서 함수 $f(x)(=t)$는 감소하고

$\dfrac{1}{2}<t<n$



위의 그림에서 $n=8$, $a=\dfrac{5}{9}$이므로

(만약 $n=7$(즉, $f(0)=7$)이면

$x=0$의 좌우에서

$h'(x)=\underbrace{e^{\sin\pi f(x)}}_{+}\underbrace{\cos\pi f(x)}_{-}\underbrace{\pi f'(x)}_{+\to-}$

의 부호가 음($-$)에서 양($+$)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.)

$f(x)=\dfrac{5}{9}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+8$

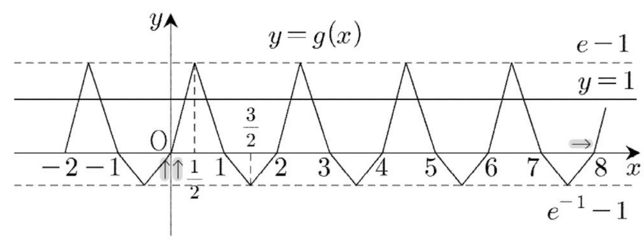
$f(2)=\dfrac{22}{9}$

$\therefore\ p+q=31$

답 31

[풀이2]

함수 $g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다. (증가, 감소만을 나타낸 것이다.)



조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가져야 한다. 그리고 $f(0)$은 2 이상의 짝수이다.

$f(0)$이 2 이상의 짝수이면

$x\to0+$일 때, $f(x)\to f(0)-$, $h(x)\to 0-$

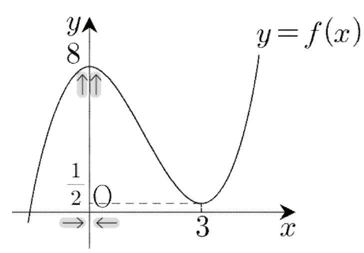
$x\to0-$일 때, $f(x)\to f(0)-$, $h(x)\to 0-$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극대이다.

(만약 $f(0)$이 양의 홀수이면 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다. 이때, 극솟값은 0이다. 그리고 $f(0)$이 자연수가 아니면 극값이 0일 수 없다.)

이상에서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

($f(0)=8$인 이유는 아래에서 밝힌다.)



조건 (나)에서

$h(x)=1$(단, $0<x<3$)

$\Leftrightarrow$

$g(f(x))=1$(단, $0<x<3$) $\cdots$ (*)

$f(0)=2$이면 (*)의 실근의 개수는 1,

$f(0)=4$이면 (*)의 실근의 개수는 3,

$f(0)=6$이면 (*)의 실근의 개수는 5,

$f(0)=8$이면 (*)의 실근의 개수는 7,

$\vdots$

따라서 $f(0)=8$이다.

함수 $f'(x)$의 방정식을

$f'(x)=3ax(x-3)$ (단, $a>0$)

으로 두자.

$f(x)=ax^3-\dfrac{9}{2}ax^2+8$ ($\because f(0)=8$)

$f(3)=27a-\dfrac{81}{2}a+8=\dfrac{1}{2}$, $a=\dfrac{5}{9}$

$f(x)=\dfrac{5}{9}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+8$, $f(2)=\dfrac{22}{9}$

$\therefore$ $p+q=31$

답 31

H219 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (거짓)

방정식 $f'(x)=0$의 4가 아닌 두 실근을 각각 α, β라고 하자.

(단, $\alpha<0<\beta$)

$x=\alpha$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖는다.

$x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호는 양(+)으로 일정하므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극값을 갖지 않는다.

$x=\beta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$는 서로 다른 두 점에서 극값을 갖는다.

▸ ㄴ. (참)

구간 $(4,\ 6)$에서 $f'(x)>0$이므로

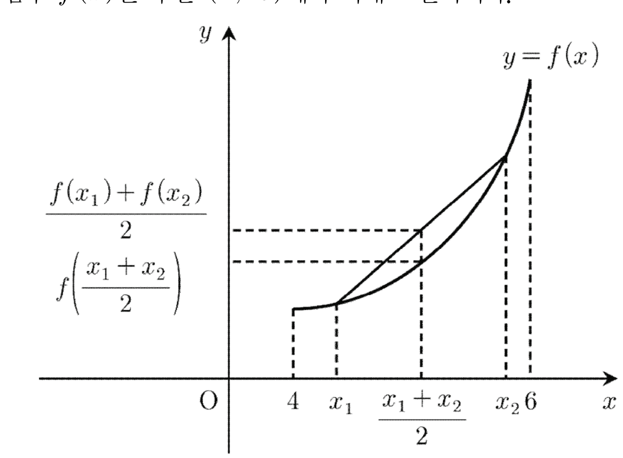
함수 $f(x)$는 구간 $(4,\ 6)$에서 증가한다.

구간 $(4,\ 6)$에서 함수 $f'(x)$가 증가하므로

구간 $(4,\ 6)$에서 $f''(x)>0$이다.

구간 $(4,\ 6)$에서 $f''(x)>0$이므로

함수 $f(x)$는 구간 $(4,\ 6)$에서 아래로 볼록이다.



위의 그림에서

$4<x_1<x_2<6$일 때,

$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

▸ ㄷ. (참)

보기 ㄱ에서 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖고, $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.

보기 ㄴ에서 함수 $f(x)$는 구간 $(4,\ 6)$에서 아래로 볼록이다.

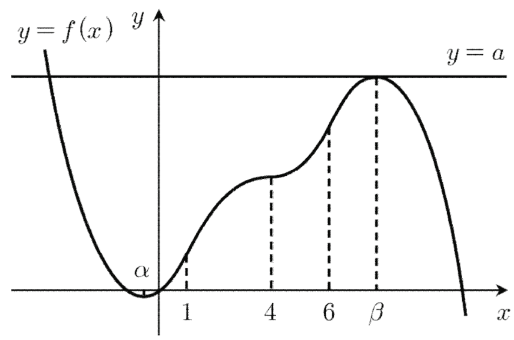
보기 ㄴ에서와 마찬가지의 방법에 의하여

함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ 1)$에서 아래로 볼록이다.

함수 $f(x)$는 구간 $(1,\ 4)$과 $(6,\ \infty)$에서 위로 볼록이다.

세 점 $(1,\ f(1))$, $(4,\ f(4))$, $(6,\ f(6))$은 변곡점이다.

함수 $f(x)$의 그래프는



직선 $y=a(a>0)$가 함수 $f(x)$의 극대점 $(\beta,\ f(\beta))$를 지날 때, 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수 $f(x)$의 극댓값은 $a(=f(\beta))$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

H220 | 답 ③

[풀이] ★

구간 $(0,\ 2\pi)$에서 함수 $f(x)$는 미분가능하므로

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 극값을 가지면

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\sin x+2x\cos x=\cos x(\tan x-(-2x))$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \tan x=-2x$

구간 $(0,\ 2\pi)$에서 곡선 $y=\tan x$와 직선 $y=-2x$가 만나는 두 교점을 각각 P, Q라고 하자. 이때, 두 점 P, Q의 x좌표는 각각 α, β이다.

$$\int_{-4}^{4}\{tf(t)\}'dt=[tf(t)]_{-4}^{4}$$

$$=4f(4)+4f(-4)$$

이므로

$$2\int_{-4}^{4}f(t)dt-4\{f(4)+f(-4)\}=-32$$

정리하면

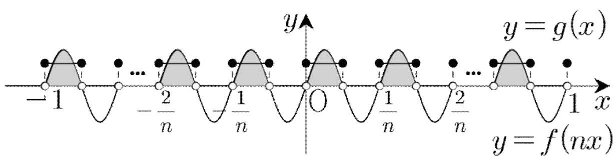
$$\therefore\ 2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4}f(x)dx=16$$

답 16

I037 | 답 ⑤

[풀이]

원점에 대하여 대칭이고, 주기가 $\frac{1}{n}\left(=\frac{2\pi}{2n\pi}\right)$인 함수 $f(nx)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



위의 그림처럼

$f(nx)\geq 0$인 x에 대하여 $g(x)=1$,

$f(nx)<0$인 x에 대하여 $g(x)=0$

이면 문제에서 주어진 첫 번째 등식이 성립한다.

(만약 그렇지 않으면 문제에서 주어진 첫 번째 등식의 우변은 2보다 작다.)

계산해 보면 다음과 같다.

$$\int_{-1}^{1}h(x)dx=2n\int_{0}^{\frac{1}{2n}}\pi\sin 2\pi nx dx$$

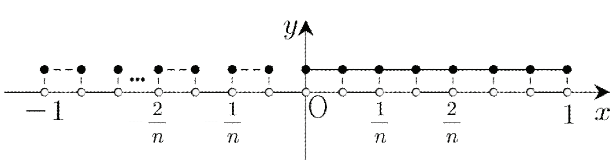
$$=2n\left[-\frac{1}{2n}\cos 2\pi nx\right]_{0}^{\frac{1}{2n}}=2$$

함수 $y=xh(x)=xf(nx)\times g(x)$에서

함수 $xf(nx)$는 y축에 대하여 대칭이고,

($\because$ (기함수)$\times$(기함수)$=$(우함수))

구간 $[-1,\ 0)$에서 그려지는 함수 $g(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 구간 $[0,\ 1]$에서 상수함수 $y=1$이 만들어지므로 (아래 그림)



(위의 그림처럼 함수 $y=xf(nx)$의 그래프의 개형은 그리지 않아도 좋다. 왜냐하면 정적분 값을 구할 때, 그래프의 개형이 반드시 필요한 것은 아니기 때문이다.)

정적분의 부분적분법에 의하여

$$\int_{-1}^{1}xh(x)dx=\int_{0}^{1}xh(x)dx$$

$$=\int_{0}^{1}\pi x\sin 2n\pi x dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2n}x\cos 2n\pi x\right]_{0}^{1}+\int_{0}^{1}\frac{1}{2n}\cos 2n\pi x dx$$

$$=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x\right]_{0}^{1}$$

$$=-\frac{1}{2n}=-\frac{1}{32}$$

$\therefore\ n=16$

답 ⑤

[참고]

함수 $y=xf(nx)$는 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-b}^{-a}xf(nx)dx=\int_{a}^{b}xf(nx)dx$$

그러므로

$$\int_{-1}^{1}xh(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}xf(nx)dx$$

$$=\int_{-\frac{2n}{2n}}^{-\frac{2n-1}{2n}}xf(nx)dx+\int_{-\frac{2n-2}{2n}}^{-\frac{2n-3}{2n}}xf(nx)dx$$

$$+\cdots+\int_{0}^{\frac{1}{2n}}xf(nx)dx+\int_{\frac{2}{2n}}^{\frac{3}{2n}}xf(nx)dx$$

$$+\cdots+\int_{\frac{2n-2}{2n}}^{\frac{2n-1}{2n}}xf(nx)dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{1}{2n}}xf(nx)dx+\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{2}{2n}}xf(nx)dx+\cdots+$$

$$\int_{\frac{2n-1}{2n}}^{\frac{2n}{2n}}xf(nx)dx$$

$$=\int_{0}^{1}xf(nx)dx$$

I038 | 답 ②

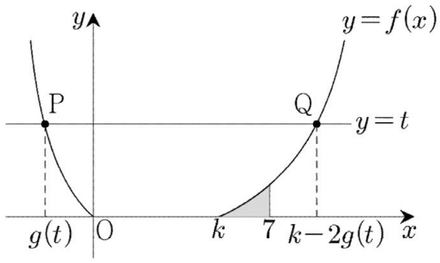
[풀이]

$h(t)=k-2g(t)$

이므로 아래 그림처럼 두 점 $\mathrm{P}(g(t),\ t)$, $\mathrm{Q}(h(t),\ t)$가 결

정된다.

$0 \le x \le k$일 때, $f(x)=0$이어야 방정식 $f(x)=t(t>0)$의 서로 다른 실근의 개수는 항상 2이다.



함수 $f(x)$(단, $x \le 0$)의 그래프를

y축에 대하여 대칭이동 ⇨ y축에 대하여 2배

⇨ x축의 방향으로 $k(\ge 0)$만큼 평행이동시키면

함수 $f(x)$(단, $x \ge k$)의 그래프와 일치한다.

즉, $x \ge k$일 때,

$$f(x)=-4\left(-\frac{x-k}{2}\right)e^{4\times\left(-\frac{x-k}{2}\right)^2}$$

$$=2(x-k)e^{(x-k)^2}$$

$$\int_0^7 f(x)dx=\int_k^7 f(x)dx$$

$$=\int_0^{7-k} 2xe^{x^2}dx$$

$$=\left[e^{x^2}\right]_0^{7-k}$$

$$=e^{(7-k)^2}-1$$

$$=e^4-1$$

$7-k=2$에서 $k=5$

$$\therefore \frac{f(9)}{f(8)}=\frac{2\times4\times e^{4^2}}{2\times3\times e^{3^2}}=\frac{4}{3}e^7$$

답 ②

I039 | 답 ⑤

[풀이1] ★

① (참)

주어진 등식에 $x=0$을 대입하여 정리하면

$\therefore f(0)+f(1)=1$

② (참)

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하자.

합성함수의 미분법에 의하여

$-f'(1-x)=-f'(x)$

정리하면

$f'(1-x)=f'(x)$

이 등식에 $x=1$을 대입하면

$\therefore f'(0)=f'(1)$

③ (참)

주어진 등식에서

$$\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1\{1-f(x)\}dx$$

정적분의 치환적분법에 의하여

$$(\text{좌변})=\int_0^1 f(1-x)dx$$

$$=-\int_1^0 f(t)dt=\int_0^1 f(x)dx$$

정적분의 성질에 의하여

$$(\text{우변})=\int_0^1\{1-f(x)\}dx$$

$$=[\,x\,]_0^1-\int_0^1 f(x)dx=1-\int_0^1 f(x)dx$$

$\int_0^1 f(x)dx=1-\int_0^1 f(x)dx$이므로

$$\therefore \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$$

④ (참)

주어진 등식에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=1-f\left(\frac{1}{2}\right)$$

정리하면

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

⑤ (거짓)

(반례)

주어진 등식을 만족하는 함수 $f(x)=1-x$에 대하여

$f(0)=1\ne0$

따라서 주어진 등식을 만족하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 항상 $f(0)=0$인 것은 아니다.

이상에서 항상 성립한다고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

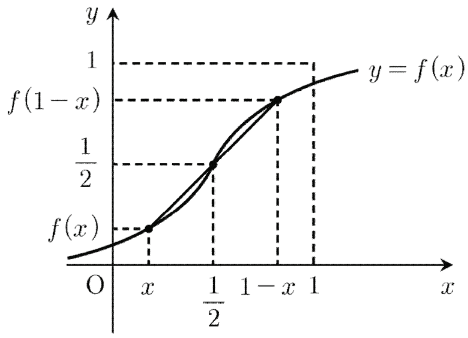
[풀이2] 시험장 ★

주어진 등식을 정리하면

$$\frac{f(x)+f(1-x)}{2}=\frac{1}{2}$$

내분점의 공식에 의하여 모든 실수 x에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(x,\ f(x))$, $(1-x,\ f(1-x))$의 중점은 항상 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이다.

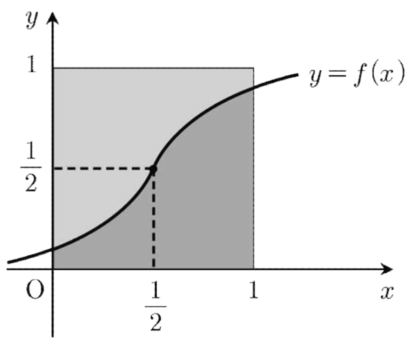
따라서 곡선 $y=f(x)$는 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.



위의 그림에서 ①, ④는 참이다.

하지만 곡선 $y=f(x)$가 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이라고 해서 이 곡선이 반드시 원점을 지나는 것은 아니므로 ⑤는 거짓이다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ f(0))$에서의 접선과 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선은 서로 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이므로 이 두 접선의 기울기는 같다. 따라서 ②는 참이다.



위의 그림에서 색칠된 두 도형은 합동이므로

$2\int_0^1 f(x)dx=1$에서 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$

즉, ③은 참이다.

이상에서 항상 성립한다고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

1040 |답 16

[풀이] ★

적분과 미분의 관계에 의하여

$g'(x)=f(x)$

조건 (가)에 의하여

미분가능한 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로

$g'(1)=f(1)=\ln 2-c=0$ 즉, $c=\ln 2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\ln(x^4+1)-\ln 2$

이제 함수 $f(x)$의 그래프를 그리자.

$f(-x)=f(x)$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$f(0)=-\ln 2$, $f(-1)=f(1)=0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 세 점

$(-1,\ 0)$, $(0,\ -\ln 2)$, $(1,\ 0)$을 지난다.

함수 $f(x)$의 도함수는

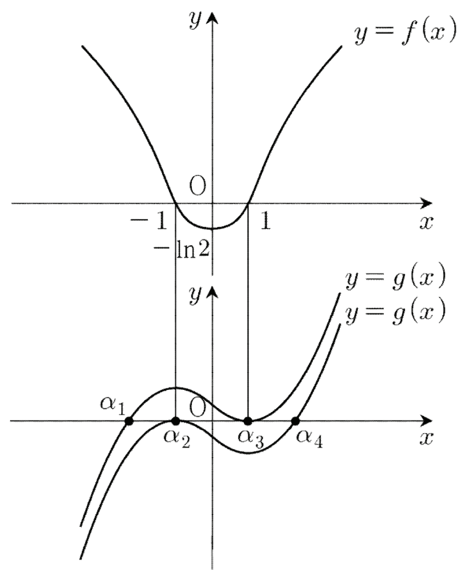
$f'(x)=\frac{4x^3}{x^4+1}$

$f'(x)=0$이면 $x=0$

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

$f(x)$는 $g(x)$의 도함수이므로 $f(x)$의 오목과 볼록, 변곡점에 대해서는 생각하지 않아도 좋다.

함수 $f(x)$의 그래프를 그리고, 그 아래에 'x축과 만나는 점의 개수가 2가 되도록' 함수 $g(x)$의 그래프를 그리자.



함수 $g(x)$의 그래프는 점 $(0,\ g(0))$에 대하여 대칭이다. (← [참고1])

문제에서 주어진 등식에서

$g(a)=\int_a^a f(t)dt=0$

이므로 함수 $g(x)$는 $(a,\ 0)$을 지난다.

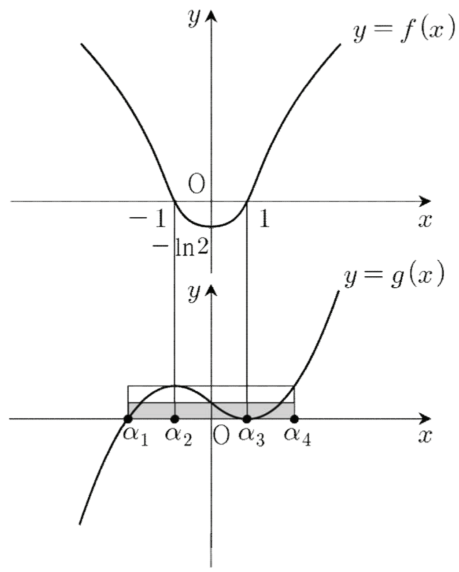
위의 그림에서 상수 a가 가질 수 있는 값은

α_1, $\alpha_2(=-1)$, $\alpha_3(=1)$, $\alpha_4(=-\alpha_1)$

이므로, $m=4$이다.

이제 문제에서 주어진 조건대로 α_1을 상수 a의 값으로 결정하자.

함수 $g(x)$의 그래프는



위의 그림에서 어두운 부분은 네 직선 $x=\alpha_1$, $x=\alpha_4$, $y=0$, $y=g(0)$으로 둘러싸인 직사각형이다.
함수 $g(x)$는 점 $(0,\ g(0))$에 대하여 대칭이므로

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx=\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx$$

=(어두운 직사각형의 넓이)

$=(\alpha_4-\alpha_1)g(0)=2\alpha_4 g(0)$ … ㉠

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$k\alpha_m\int_0^1 |f(x)|dx=k\alpha_4\int_0^1(-f(x))dx$$

$=k\alpha_4[-g(x)]_0^1=k\alpha_4(g(0)-g(1))$

$=k\alpha_4 g(0)$ $(\because g(1)=g(\alpha_3)=0)$ … ㉡

(이때, $\alpha_4 g(0)$은 이웃한 두 변의 길이가 각각 α_4, $g(0)$인 직사각형의 넓이이다.)
문제에서 주어진 조건에 의하여
㉠=㉡: $2\alpha_4 g(0)=k\alpha_4 g(0)$
$\alpha_4\neq 0$, $g(0)\neq 0$이므로 $k=2$이다.
로그의 정의에 의하여
$\therefore\ mk\times e^c=4\times 2\times e^{\ln 2}=16$

답 16

[참고1] ★
함수 $g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ g(0))$에 대칭임을 보이자.
정적분의 성질에 의하여

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_a^0 f(t)dt$$

함수 $h(x)=\int_0^x f(t)dt$의 그래프가 원점에 대하여 대칭임을 보이자.
$-X=t$로 두면 $-dX=dt$이고,
$t=0$일 때, $X=0$, $t=-x$일 때, $X=x$
정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_0^{-x} f(t)dt=\int_0^x(-f(-X))dX$$

$=-\int_0^x f(X)dX$($\because f(x)$는 y축에 대하여 대칭)

$=-\int_0^x f(t)dt$

즉, $h(-x)=-h(x)$이므로 함수 $h(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
함수 $h(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $\int_a^0 f(t)dt(=g(0))$ 만큼 평행이동시키면 함수 $g(x)$의 그래프와 일치하므로, 함수 $g(x)$의 그래프는 점 $(0,\ g(0))$에 대칭이다.

[참고2] ★
함수 $g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ g(0))$에 대칭임을 보이자.
함수 $f(x)$에 대하여
$f(-x)=f(x)$
부정적분을 하면
$\int f(-x)dx=\int f(x)dx+C$(단, C는 적분상수)
그런데 $g(x)$의 도함수가 $f(x)$이므로
$-g(-x)=g(x)+C$
$x=0$을 대입하여 정리하면 $C=-2g(0)$이므로
$-g(-x)=g(x)-2g(0)$
정리하면

$$\frac{g(x)+g(-x)}{2}=g(0)$$

함수 $g(x)$의 그래프는 점 $(0,\ g(0))$에 대하여 대칭이다.

[참고3]
$\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx=2\alpha_4 g(0)$임을 아래와 같이 보일 수도 있다.
함수 $g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ g(0))$에 대하여 대칭이므로
함수 $g(x)-g(0)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
정적분의 성질과 정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx=\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx$$

$=\int_{\alpha_1}^{\alpha_4}\{g(x)-g(0)+g(0)\}dx$

$=\int_{\alpha_1}^{\alpha_4}\{g(x)-g(0)\}dx+\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(0)dx$

$=0+(\alpha_4-\alpha_1)g(0)=2\alpha_4 g(0)(\because \alpha_1=-\alpha_4)$

[참고4]

$\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx = 2\alpha_4 g(0)$임을 아래와 같이 보일 수도 있다.

함수 $g(x)$의 그래프는 점 $(0,\ g(0))$에 대하여 대칭이므로

$\frac{g(x)+g(-x)}{2} = g(0)$(∵ [참고2])

이제 아래와 같은 등식을 생각하자.

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} \frac{g(x)+g(-x)}{2}dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(0)dx$$

정적분의 성질에 의하여

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx + \frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(-x)dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(0)dx$$

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx - \frac{1}{2}\int_{-\alpha_1}^{-\alpha_4} g(t)dt = (\alpha_4 - \alpha_1)g(0)$$

(∵ 정적분의 치환적분법)

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-\alpha_4}^{-\alpha_1} g(t)dt = 2\alpha_4 g(0)$$

$(\because -\alpha_1 = \alpha_4)$

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx + \frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(t)dt = 2\alpha_4 g(0)$$

$(\because -\alpha_1 = \alpha_4,\ -\alpha_4 = \alpha_1)$

$$\therefore \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx = 2\alpha_4 g(0)$$

I041 | 답 115

[풀이]

조건 (가)에서

$x \to 0$일 때, (분모)$\to 0$, (분수식)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\sin(\pi f(0)) = 0$

이때, $f(0)$이 가질 수 있는 값은 정수이다.

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi \times f(x))}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi \times f(x)) - \sin(\pi \times f(0))}{x-0}$$

$$= \pi f'(0)\cos(\pi \times f(0)) = 0$$

$f'(0) = 0$ $(\because\ \cos(\pi \times f(0)) \neq 0)$

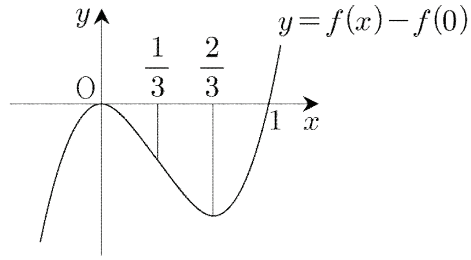
그런데 조건 (나)에 의하여

$f(1) = g(1) = g(0) = f(0)$이므로

(∵ 함수 $g(x)$의 주기는 1이다.)

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) - f(0) = 9x^2(x-1)$



삼차함수의 비율관계에 의하여

함수 $f(x)$는 $x = \frac{2}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

$(f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 또는 $x = \frac{2}{3})$

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은

$f(0) \times \left(f(0) - \frac{4}{3}\right) = 5$ (∵ (나))

풀면 $f(0) = 3$ (∵ $f(0)$은 정수)

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = 9x^2(x-1) + 3 = 9x^3 - 9x^2 + 3$

$(= g(x),\ 0 \le x \le 1)$

한편 정적분의 치환적분법에 의하여

모든 정수 n에 대하여

$$\int_n^{n+1} xg(x)dx = \int_n^{n+1} xg(x-n)dx$$

$$= \int_0^1 (t+n)g(t)dt$$

($x - n = t$로 두면 $dx = dt$이고,

$x = n$일 때 $t = 0$, $x = n+1$일 때 $t = 1$이다.)

이므로

$$\therefore \int_0^5 xg(x)dx$$

$$= \int_0^1 xg(x)dx + \int_1^2 xg(x)dx + \int_2^3 xg(x)dx$$

$$+ \int_3^4 xg(x)dx + \int_4^5 xg(x)dx$$

$$= \int_0^1 xg(x)dx + \int_0^1 (x+1)g(x)dx$$

$$+ \int_0^1 (x+2)g(x)dx + \int_0^1 (x+3)g(x)dx$$

$$+ \int_0^1 (x+4)g(x)dx$$

$$= \int_0^1 (5x+10)g(x)dx$$

$$= \int_0^1 (5x+10)(9x^3 - 9x^2 + 3)dx$$

$$= \int_0^1 (45x^4 + 45x^3 - 90x^2 + 15x + 30)dx$$

$$=\left[9x^5+\frac{45}{4}x^4-30x^3+\frac{15}{2}x^2+30x\right]_0^1$$

$$=\frac{111}{4}$$

$\therefore\ p+q=115$

답 115

I042

|답 12

[풀이] ★

문제에서 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=t-f(x)$

함수 $F(x)$가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가지므로

$F'(\alpha)=0$, 즉 $f(\alpha)=t$에서 $f(g(t))=t$ …㉠

정적분의 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구하자.

$g(t)=x$로 두면 $g'(t)dt=dx$이고, …㉡

$t=f(1)$일 때 $x=1$, $t=f(5)$일 때 $x=5$이다.

($\because$ ㉠에서 함수 f의 역함수는 g이므로,

㉡에서 $g(f(1))=1=x$, $g(f(5))=5=x$)

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(g(t))g'(t)=1$, 즉 $f'(x)g'(t)=1$에서

$f'(x)=\dfrac{1}{g'(t)}$, $f'(x)dx=dt$ ($\because$ ㉡) …㉢

$$\therefore\ \int_{f(1)}^{f(5)}\frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt$$

$$=\int_1^5\frac{x}{1+e^x}f'(x)dx\ (\because g(t)=x,\ ㉢)$$

$$=\int_1^5 xdx\ (\because f'(x)=e^x+1)$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^5=12$$

답 12

I043

|답 ⑤

[풀이] ★

우선 함수

$$y=\frac{(x^2-1)^2}{x^4+1} \quad \cdots(*)$$

의 그래프를 그리자.

모든 실수 x에 대하여

$$\frac{((-x)^2-1)^2}{(-x)^4+1}=\frac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$$

함수 (*)의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$y=0$이면 $x=1$ 또는 $x=-1$이므로

함수 (*)의 그래프는 두 점 $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$을 지난다.

$x=0$이면 $y=1$이므로

함수 (*)의 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

(*)의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|y|=2\ln|x^2-1|-\ln(x^4+1)$

양변을 x에 대하여 미분하여 정리하면

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{4x(x^2+1)}{(x^2-1)(x^4+1)}$, $y'=\dfrac{4x(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x^4+1)^2}$

$y'=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

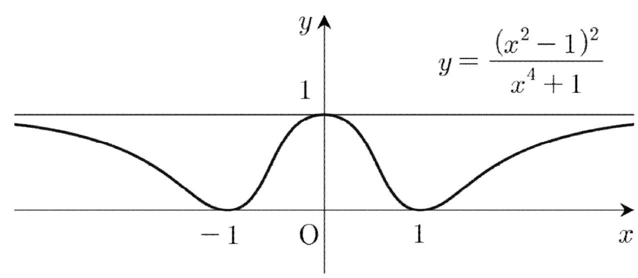
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	0	↗	1	↘	0	↗

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

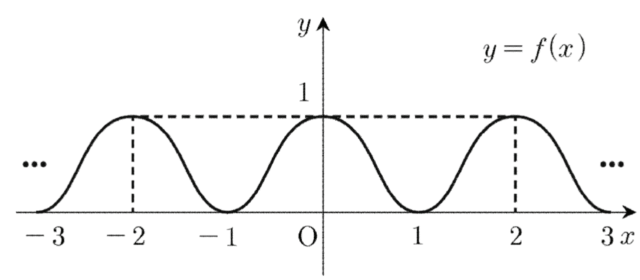
$\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}y=1$

직선 $y=1$은 함수 (*)의 그래프의 점근선이다.

함수 (*)의 그래프를 그리면 다음과 같다.



조건 (가), (나)에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는

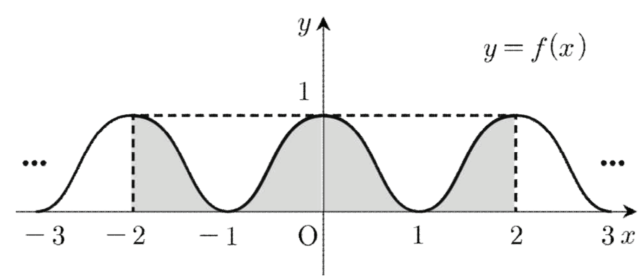


함수 $f(x)$의 그래프의 주기는 2이다.

함수 $f(x)$의 그래프는 $x=n$(n은 정수)에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이며 미분가능하다.

▸ ㄱ. (참)



정적분의 성질에 의하여

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_{0}^{2} f(x)dx$$

($\because$ 함수 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.)

$$= 2\int_{0}^{1} f(x)dx + 2\int_{1}^{2} f(x)dx$$

$$= 2\int_{0}^{1} f(x)dx + 2\int_{-2}^{-1} f(x)dx$$

($\because$ 함수 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.)

$$= 2\int_{0}^{1} f(x)dx + 2\int_{0}^{1} f(x)dx$$

($\because$ 함수 $f(x)$의 주기는 2이다.)

$$= 4\int_{0}^{1} f(x)dx$$

▸ ㄴ. (참)

조건 (나)에서 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x+2) = f'(x)$

도함수 $f'(x)$의 주기는 2이다.

$-1 < x < 0$일 때,

$$f'(x) = \frac{4x(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x^4+1)^2} > 0$$

이므로

$1 < x < 2$일 때 $f'(x) > 0$이다.

▸ ㄷ. (참)

$1 < x < 2$일 때 $f'(x) > 0$이고

$2 < x < 3$일 때 $f'(x) < 0$이다.

정적분의 부분적분법에 의하여

$$\int_{1}^{3} x|f'(x)|dx$$

$$= \int_{1}^{2} xf'(x)dx - \int_{2}^{3} xf'(x)dx$$

$$= [xf(x)]_1^2 - \int_{1}^{2} f(x)dx$$

$$- [xf(x)]_2^3 + \int_{2}^{3} f(x)dx$$

$$= 2f(2) - f(1) - \int_{1}^{2} f(x)dx$$

$$- 3f(3) + 2f(2) + \int_{1}^{2} f(x)dx$$

($\because$ 함수 $f(x)$의 그래프는 $x = n$(n은 정수)에 대하여 대칭이다.)

$= 4$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고1] ★

보기 ㄷ은 아래의 방법으로 참임을 증명해도 좋다.

▸ ㄷ. (참)

모든 실수 x에 대하여

$f(x) = f(-x)$

양변을 x에 대하여 미분하면

모든 실수 x에 대하여

$f'(x) = -f'(-x)$ ⋯㉠

모든 실수 x에 대하여

$f(x+2) = f(x)$

양변을 x에 대하여 미분하면

모든 실수 x에 대하여

$f'(x+2) = f'(x)$ ⋯㉡

정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_{1}^{3} x|f'(x)|dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (x+2)|f'(x+2)|dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (x+2)|f'(x)|dx \ (\because ㉡)$$

$$= \int_{-1}^{1} x|f'(x)|dx + 2\int_{-1}^{1} |f'(x)|dx$$

$$= 0 + 2\int_{-1}^{1} |f'(x)|dx$$

($\because$ ㉠에서 함수 $f'(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $x|f'(x)|$는 원점에 대하여 대칭이다.)

$$= 4\int_{0}^{1} |f'(x)|dx$$

($\because$ ㉠에서 함수 $f'(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $|f'(x)|$는 y축에 대하여 대칭이다.)

$$= -4\int_{0}^{1} f'(x)dx$$

$$= -4[f(x)]_0^1 = -4f(1) + 4f(0) = 4$$

[참고2]

보기 ㄷ이 참임을 다음과 같이 증명할 수 있다. (기하학적인 방법)

▸ ㄷ. (참)

$$\int_{1}^{3} x|f'(x)|dx$$

$$= \underbrace{\int_{1}^{2} xf'(x)dx}_{㉠} - \underbrace{\int_{2}^{3} xf'(x)dx}_{㉡}$$

• (1) ㉠의 값을 넓이로 하는 도형을 찾자.

구간 $[1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 역함수를 $g_1(x)$라고 하면

역함수의 성질에 의하여

$f(g_1(t))=t$이고,

$f(1)=0$, $f(2)=1$, $g_1(0)=1$, $g_1(1)=2$

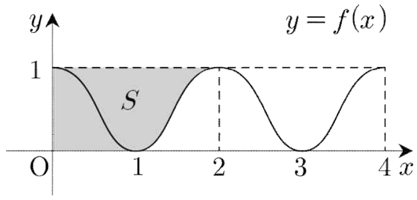
합성함수의 미분법에 의하여

$f'(g_1(t))g_1'(t)=1$

이때, $g_1(t)=x$로 두면 $g_1'(t)dt=dx$에서

$xf'(x)dx=g_1(t)dt$이므로

$$\int_1^2 xf'(x)dx=\int_0^1 g_1(t)dt(=S)$$



• (2) ㉡의 값을 넓이로 하는 도형의 찾자.

구간 $[2, 3]$에서 함수 $f(x)$의 역함수를 $g_2(x)$라고 하면

역함수의 성질에 의하여

$f(g_2(t))=t$이고,

$f(2)=1$, $f(3)=0$, $g_2(1)=2$, $g_2(0)=3$

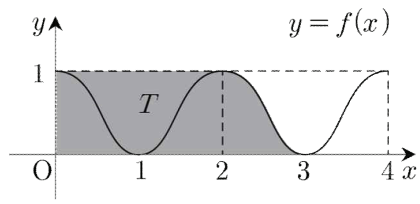
합성함수의 미분법에 의하여

$f'(g_2(t))g_2'(t)=1$

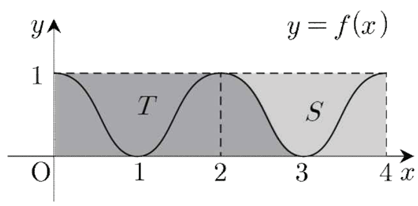
이때, $g_2(t)=x$로 두면 $g_2'(t)dt=dx$에서

$xf'(x)dx=g_2(t)dt$이므로

$$-\int_2^3 xf'(x)dx=\int_0^1 g_2(t)dt(=T)$$



(1), (2)에서 $S+T=1\times4=4$이다. (아래 그림)



I044

| 답 12

[풀이]

우선 a, b의 값을 결정하자.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=a\times\frac{\sqrt{2}}{4}+b\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{a+2b}{4}\sqrt{2}=3\sqrt{2},$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\times\frac{3\sqrt{3}}{8}+b\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3a+4b}{8}\sqrt{3}=5\sqrt{3}$$

이므로

$a+2b=12$, $3a+4b=40$

연립방정식을 풀면

$a=16$, $b=-2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=16\sin^3x-2\sin x$

모든 실수 x에 대하여

$f(x+2\pi)=f(x)$

이므로 함수 $f(x)$의 주기는 2π이다.

모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

모든 실수 x에 대하여

$f(x)=f\left(2\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)-x\right)$ (단, n은 정수)

이므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$에 대하여 대칭이다.

모든 실수 x에 대하여

$f(2n\pi-x)+f(x)=0$ (단, n은 정수)

이므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $(n\pi, 0)$에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=48\sin^2x\cos x-2\cos x$$

$$=48\cos x\left(\sin^2x-\frac{1}{24}\right)$$

$$=48\cos x\left(\sin x+\frac{\sqrt{6}}{12}\right)\left(\sin x-\frac{\sqrt{6}}{12}\right)$$

방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$\cos x=0$ 또는 $\sin x=\pm\frac{\sqrt{6}}{12}$

구간 $[0, 2\pi)$에서

$\cos x=0$: $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

$\sin x=\pm\frac{\sqrt{6}}{12}$: $x=\alpha_1$ 또는 $x=\alpha_2$

또는 $x=\alpha_3$ 또는 $x=\alpha_4$

(단, $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4$이고,

$\cos\alpha_1=\cos\alpha_4=\frac{\sqrt{138}}{12}$,

$\cos\alpha_2=\cos\alpha_3=-\frac{\sqrt{138}}{12}$이다.)

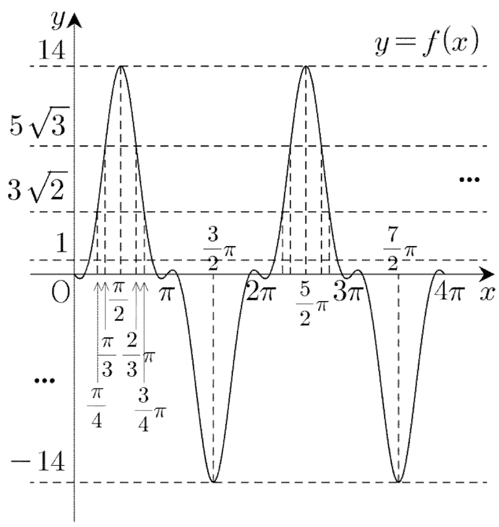
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 정리하면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	α_1	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	-2	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	0	↘	극소	↗	극대

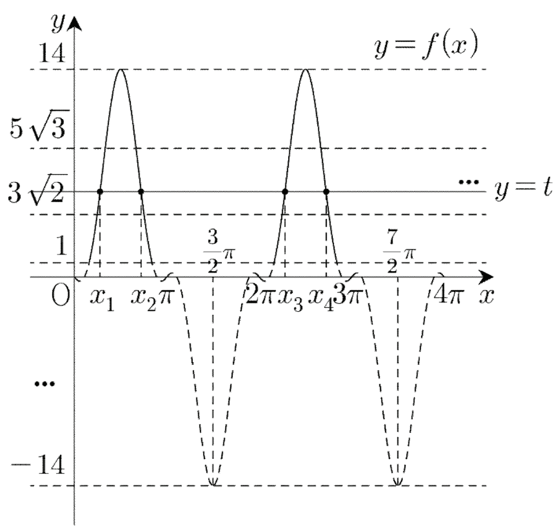
극소: $f(\alpha_1)=-\dfrac{\sqrt{6}}{9}(>-1)$

극대: $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=14$

주기성과 대칭성을 이용하여
함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$의 교점의 x좌표인
$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \cdots$
을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



c_1의 값을 구하자.
$f(x_1)=t$에서 $f'(x_1)dx_1=dt$이고,
(이때, x_1이 상수가 아닌 변수임을 기억하자.)

$x_1=\dfrac{\pi}{4}$일 때 $t=3\sqrt{2}$,

$x_1=\dfrac{\pi}{3}$일 때 $t=5\sqrt{3}$이다.

정적분의 치환적분법에 의하여

$$c_1=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_1)}dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(x_1)dx_1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx \qquad \cdots㉠$$

c_2의 값을 구하자.
$f(x_2)=t$에서 $f'(x_2)dx_2=dt$이고,
(이때, x_2가 상수가 아닌 변수임을 기억하자.)

$x_2=\dfrac{2}{3}\pi$일 때 $t=5\sqrt{3}$,

$x_2=\dfrac{3}{4}\pi$일 때 $t=3\sqrt{2}$이다.

정적분의 치환적분법에 의하여

$$c_2=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_2)}dt$$

$$=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{2}{3}\pi}f(x_2)dx_2$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(\pi-x_1)dx_1$$

($\because$ 정적분의 치환적분법을 적용한 것이다.
$x_2=\pi-x_1$에서 $dx_2=-dx_1$이고,

$x_2=\dfrac{2}{3}\pi$일 때 $x_1=\dfrac{\pi}{3}$,

$x_2=\dfrac{3}{4}\pi$일 때 $x_1=\dfrac{\pi}{4}$이다.)

$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(x_1)dx_1$$

($\because f(\pi-x_1)=f(x_1)$)

$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx \qquad \cdots㉡$$

㉠, ㉡에 의하여
$c_1+c_2=0$
이제 다음의 등식이 성립함을 보이자.
$c_1=c_3=c_5=\ \cdots\ =c_{2k-1}=\ \cdots$
$c_2=c_4=c_6=\ \cdots\ =c_{2k}=\ \cdots$
(단, k는 자연수)

- (1) n이 홀수인 경우

$n=2k-1$로 두자. (단, k는 자연수)
$x_n=x_{2k-1}=x_1+2\pi(k-1)$
이므로

$t=f(x_n)=f(x_1+2\pi(k-1))=f(x_1)$

$c_n=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_n)}dt$

$=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_1)}dt=c_1$

- (2) n이 짝수인 경우

$n=2k$로 두자. (단, k는 자연수)

$x_n=x_{2k}=x_2+2\pi(k-1)$

이므로

$t=f(x_n)=f(x_2+2\pi(k-1))=f(x_2)$

$c_n=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_n)}dt$

$=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_2)}dt=c_2$

그러므로 다음이 성립한다.

$c_3+c_4=0$,

$c_5+c_6=0$,

$\vdots$

$c_{99}+c_{100}=0$

$\therefore\ p+q\sqrt{2}=\sum_{n=1}^{101}c_n$

$=(c_1+c_2)+(c_3+c_4)+\cdots+(c_{99}+c_{100})+c_{101}$

$=\underbrace{0+0+\cdots+0}_{50\text{개}}+c_{101}$

$=c_{101}$

$=c_1$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(16\sin^3x-2\sin x)dx$

$=16\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^3x\,dx-2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx$

$=16\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos^2x)\sin x\,dx-2\left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$(\because \sin^3x=\sin^2x\sin x=(1-\cos^2x)\sin x)$

$=16\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}}(t^2-1)dt+1-\sqrt{2}$

($\because$ 정적분의 치환적분법을 적용한 것이다.

$\cos x=t$로 두면 $-\sin x\,dx=dt$이고,

$x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$x=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{1}{2}$이다.)

$=16\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}}+1-\sqrt{2}$

$=\frac{20}{3}\sqrt{2}-\frac{22}{3}+1-\sqrt{2}$

$=\frac{17}{3}\sqrt{2}-\frac{19}{3}$

$p=-\frac{19}{3},\ q=\frac{17}{3}$

$\therefore\ q-p=12$

답 12

[참고1]

실수 x_n이 갖는 값만을 모두 모은 집합을 I_n이라고 하자.

정의역 I_n에서 함수 $f(x)$는 일대일대응이므로 역함수를 갖는다.

이때, 역함수를 $g_n(x)$라고 하자.

$f(x_n)=t$에서 역함수의 성질에 의하여

$g_n(f(x_n))=g_n(t)$, 즉 $x_n=g_n(t)$

양변을 x_n에 대하여 미분하면

(즉, 역함수의 미분법에 의하여)

$1=g_n{}'(t)\frac{dt}{dx_n}$, $1=g_n{}'(t)f'(x_n)$

$\frac{t}{f'(x_n)}=tg_n{}'(t)$

정적분의 부분적분법에 의하여

$c_n=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_n)}dt=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}tg_n{}'(t)dt$

$=\left[tg_n(t)\right]_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}-\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}g_n(t)dt$

$=5\sqrt{3}g_n(5\sqrt{3})-3\sqrt{2}g_n(3\sqrt{2})$

$-\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}g_n(y)dy$

=(이웃한 두 변의 길이가 $5\sqrt{3}$, $g_n(5\sqrt{3})$인 직사각형의 넓이)

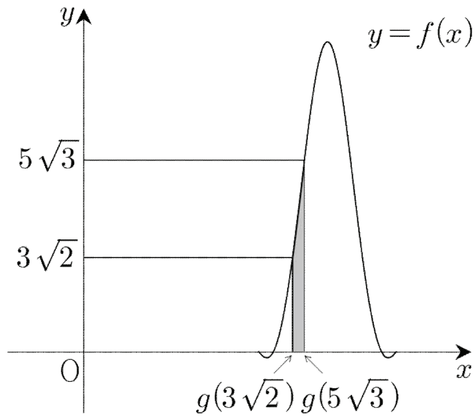
−(이웃한 두 변의 길이가 $3\sqrt{2}$, $g_n(3\sqrt{2})$인 직사각형의 넓이)

−(곡선 $x=g_n(y)$와 y축 및 두 직선

$y=3\sqrt{2}$, $y=5\sqrt{3}$으로 둘러싸인 도형의 넓이)

위의 식을 기하학적으로 해석하면 다음과 같다.

- (1) n이 홀수인 경우

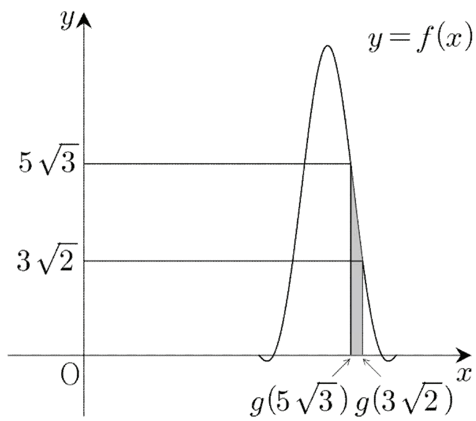


위의 그림에서 어둡게 색칠된 도형의 넓이는 c_n의 값과 같다.

$$c_n=\int_{g(3\sqrt{2})}^{g(5\sqrt{3})} f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$$

($\because$ 평행이동)

• (2) n이 짝수인 경우



위의 그림에서 어둡게 색칠된 도형의 넓이에 -1을 곱한 값은 c_n의 값과 같다.

$$c_n=-\int_{g(5\sqrt{3})}^{g(3\sqrt{2})} f(x)dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$$

($\because$ 평행이동, 대칭이동)

[참고2]

아래 등식이 성립함을 다음과 같이 보일 수도 있다.

$c_1=c_3=c_5=\cdots=c_{2k-1}=\cdots$ $\cdots$㉠

$c_2=c_4=c_6=\cdots=c_{2k}=\cdots$ $\cdots$㉡

$c_{2k-1}+c_{2k}=0$ $\cdots$㉢

(단, k는 자연수)

• (1) n이 홀수인 경우

$f'(x_n)=f'(x_1)$

이므로

$$c_n=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_n)}dt$$

$$=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_1)}dt=c_1$$

그러므로 ㉠이 성립한다.

• (2) n이 짝수인 경우

$f'(x_n)=f'(x_2)$

이므로

$$c_n=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_n)}dt$$

$$=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_2)}dt=c_2$$

그러므로 ㉡이 성립한다.

그런데 n이 짝수일 때,

$f'(x_n)=-f'(x_1)$이므로

$$c_n=-\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_1)}dt=-c_1$$

(1), (2)에서

$c_{2k-1}+c_{2k}=c_1+(-c_1)=0$

이므로 ㉢이 성립한다.

1045 | 답 ⑤

[풀이]

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$F'(x)=f(x)$

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_1^{x+1} f(t)dt=[F(t)]_1^{x+1}=F(x+1)-F(1)$$

함수의 극한에 대한 성질과 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2+1}{x}\int_1^{x+1} f(t)dt\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x^2+1)\times\frac{F(x+1)-F(1)}{x+1-1}$$

$=1\times F'(1)=f(1)=-a=3$이므로 $a=-3$

$\therefore\ f(a)=f(-3)=-3\cos(9\pi)$

$=-3\cos(2\pi\times 4+\pi)=-3\cos\pi=3$

답 ⑤

1046 | 답 ④

[풀이] ★

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)\le 0$이면

$\int_0^1 f(x)dx\le 0$이므로 문제에서 주어진 조건에 모순이다.

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)>0$이면

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

구성

▶ **'이동훈 기출문제집 교육청/사관/경찰 수학Ⅰ+수학Ⅱ'** 에는 교육청, 사관학교, 경찰대가 출제한 전체 문항 중에서 **2015개정 교육과정에 맞는 999개의 문항을 엄선**하여 수록하였습니다.

교육청 : 2002년 3월 ~ 2023년 11월 고3, 고2, 고1 (출제 년도 기준)
사관학교 : 2002학년도 ~ 2024학년도 (학년도 기준)
경찰대 : 1999학년도 ~ 2024학년도 (학년도 기준)

▶ 문항 선정의 기준은 다음과 같습니다.
단순 계산 문제는 제외
교과서의 기본문제 및 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
수능, 평가원 기출문제와 지나치게 중복되는 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
난문(어려운 4점)이지만 수능과 거리가 먼 문제는 제외

▶ 문항 정렬은 유형별, 난이도순을 따랐습니다.
유형별 문항 구성은 출제 의도를 뚜렷하게 보여줄 것이며,
난이도순은 학습의 효율성을 높일 것입니다.

▶ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
핵심적인 풀이와 참고만을 수록하여 문제가 가진 출제의도를 뚜렷이 하였으며, 학습의 효율을 꾀하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 - 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.

수능/평가원/교사경 기출문제에서 반복되는 '기본개념', '실전이론', '(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정' 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)

단원별 알파벳 구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

목 차

수학 I

수학 II

A 지수함수와 로그함수

- 2015개정 교육과정

○ 주기 함수 관련 문제 포함
○ 부등식의 영역 관련 문제 제외 또는 변형 수록

A. 거듭제곱근

A001

○○
(2009(6)고2-가형8)

집합 $X=\{-2,\ -1,\ 1,\ 2\}$에 대하여 두 집합 A, B를

$$A=\{\sqrt{x}\,|\,x\in X,\ \sqrt{x}\text{는 실수}\}$$
$$B=\{\sqrt[3]{x}\,|\,x\in X,\ \sqrt[3]{x}\text{는 실수}\}$$

라 하자. 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 곱은? [3점]

① $2^{\frac{1}{2}}$ ② $2^{\frac{2}{3}}$ ③ $2^{\frac{5}{6}}$
④ 2 ⑤ $2^{\frac{7}{6}}$

A002

○○
(2009(9)고2-나형5)

1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여, a^2은 b의 세제곱근이고 c^3은 b의 네제곱근이다.

$\log_a b+\log_b c=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

① 81 ② 82 ③ 83
④ 84 ⑤ 85

A003

○○
(2024경찰대(1차)-공통5)

두 실수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, a^3-2b의 값은? [4점]

(가) b는 $-\sqrt{8}a$의 제곱근이다.
(나) $\sqrt[3]{a^2}b$는 -16의 세제곱근이다.

① $-2-2\sqrt{2}$ ② -2 ③ $4-2\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $2+2\sqrt{2}$

A004

○○○
(2008(9)고2-가형28)

양의 실수 k에 대하여 k의 네제곱근 중 실수인 것을 a, b $(a>b)$라 하고, k의 세제곱근 중 실수인 것을 c, $-k$의 세제곱근 중 실수인 것을 d라 한다.

이때, $\log_2\frac{c}{a}=\log_2\frac{b}{d}+1$을 만족하는 k의 값을 구하시오.
[4점]

A005

○○
(2020(4)고3-나형18)

1이 아닌 세 양수 a, b, c와 1이 아닌 두 자연수 m, n이 다음 조건을 만족시킨다. 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는?
[4점]

(가) $\sqrt[3]{a}$는 b의 m제곱근이다.
(나) $\sqrt{b}$는 c의 n제곱근이다.
(다) c는 a^{12}의 네제곱근이다.

① 4 ② 7 ③ 10
④ 13 ⑤ 16

A. 거듭제곱근: 실근 개수

A006
○○ (2022(7)고3-확률과통계19/미적분19/기하19)

$n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 $2n^2-9n$의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때,
$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$의 값을 구하시오. [3점]

A007
○○ (2023(9)고2-공통14)

$4\leq n\leq 12$인 자연수 n에 대하여 $n^2-15n+50$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자.
$f(n)=f(n+1)$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 15 ② 17 ③ 19
④ 21 ⑤ 23

A008
○○ (2021(9)고2-공통15)

2 이상의 자연수 n에 대하여 $(2n-5)(2n-9)$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자. $\sum_{n=2}^{8}f(n)$의 값은? [4점]

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

▶ 이 문항은 수열에 속하지만 출제의도를 고려하여 이 단원에 두었습니다.

A009
○○ (2023(7)고3-확률과통계9/미적분9/기하9)

2 이상의 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식

$$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$$

의 모든 실근의 곱이 -4일 때, n의 값은? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

A010
○○○ (2017(6)고2-가형17)

두 집합 $A=\{3,\ 4\}$, $B=\{-9,\ -3,\ 3,\ 9\}$에 대하여 집합 X를
$X=\{x\,|\,x^a=b,\ a\in A,\ b\in B,\ x\text{는 실수}\}$
라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\sqrt[3]{-9}\in X$
ㄴ. 집합 X의 원소의 개수는 8이다.
ㄷ. 집합 X의 원소 중 양수인 모든 원소의 곱은 $\sqrt[4]{3^7}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

A011
○○○
(2021(11)고2-공통17)

2 이상의 자연수 n에 대하여 $2^{n-3}-8$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{m} f(n)=15$가 되도록 하는 자연수 m의 값은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

▶ 이 문항은 수열에 속하지만 출제의도를 고려하여 이 단원에 두었습니다.

A012
○○○
(2020(3)고3-가형18)

다음은 $1 \le |m| < n \le 10$을 만족시키는 두 정수 m, n에 대하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수를 구하는 과정이다.

〈과정〉

(ⅰ) $m>0$인 경우

n의 값의 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한다. 그러므로 $m>0$인 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 (가) 이다.

(ⅱ) $m<0$인 경우

n이 홀수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다. 한편, n이 짝수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다. 그러므로 $m<0$인 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 (나) 이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 (가) + (나) 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은? [4점]

① 70 ② 65 ③ 60
④ 55 ⑤ 50

A013
●●●
(2022(9)고2-공통28)

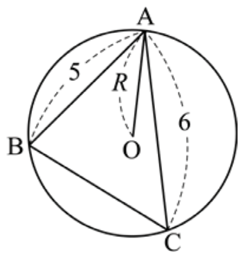
2 이상의 자연수 n과 상수 k에 대하여 $n^2-17n+19k$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자. $\sum_{n=2}^{19} f(n)=19$를 만족시키는 자연수 k의 값을 구하시오. [4점]

B. 코사인법칙: 사인법칙(원)

B118

○○
(2007(3)고2-공통27)

그림과 같이 반지름의 길이가 R인 원 O에 내접하는 삼각형 ABC가 있다.



$\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=6$, $\cos A=\frac{3}{5}$일 때, $16R$의 값을 구하시오. [4점]

B119

○○
(2021(4)고3-확률과통계20/미적분20/기하20)

$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=1:2:\sqrt{2}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π일 때, 선분 CA의 길이를 구하시오. [4점]

B120

○○
(2011(9)고2-나형8)

$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$일 때,

$$\log_2 \sin A-\log_2 \cos B-\log_2 \sin C$$

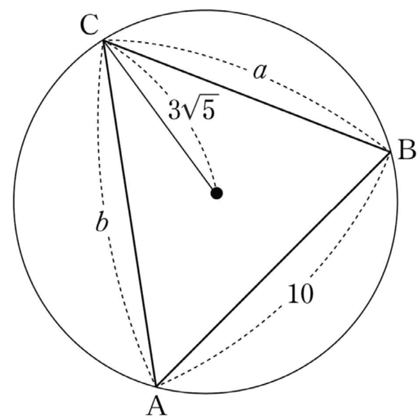
의 값은? [4점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

B121

○○
(2020(3)고3-나형19)

길이가 각각 10, a, b인 세 선분 AB, BC, CA를 각 변으로 하는 예각삼각형 ABC가 있다.
삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 지나는 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이고 $\frac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\frac{4}{3}$일 때, ab의 값은? [4점]



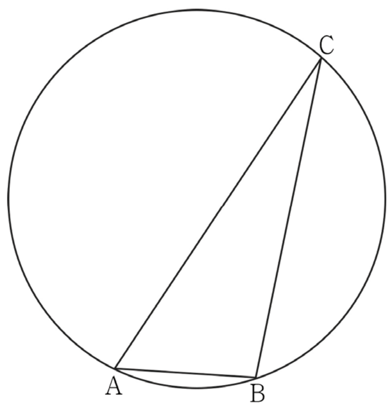
① 140 ② 150 ③ 160
④ 170 ⑤ 180

B122

○○○ (2020(4)고3-가형19)

그림과 같이 원 C에 내접하고 $\overline{AB}=3$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다.

원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$일 때, 원 C 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.) [4점]



① $\frac{32}{3}\sqrt{3}$ ② $\frac{34}{3}\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$

④ $\frac{38}{3}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{40}{3}\sqrt{3}$

B123

●●● (2021(11)고2-공통29)

삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\cos A=-\frac{1}{4}$
>
> (나) $\sin B+\sin C=\frac{9}{8}$

삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{15}$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

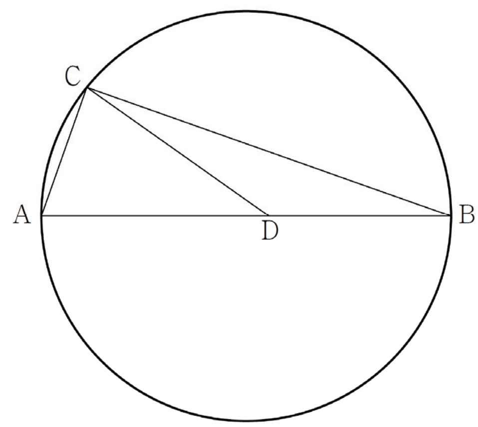
B124

○○ (2021(7)고3-확률과통계20/미적분20/기하20)

그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 C에 대하여

$$\overline{BC}=12\sqrt{2},\ \cos(\angle CAB)=\frac{1}{3}$$

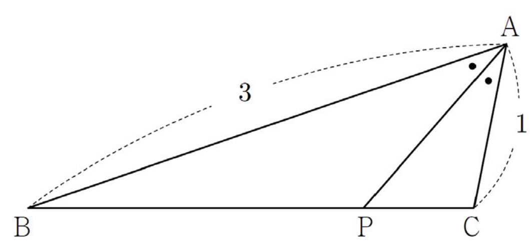
이다. 선분 AB를 $5:4$로 내분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 CAD의 외접원의 넓이는 S이다. $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오. [4점]



B125

○○ (2021(6)고2-공통15)

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=1$이고 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 APC의 외접원의 넓이는? [4점]



① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{5}{16}\pi$ ③ $\frac{3}{8}\pi$

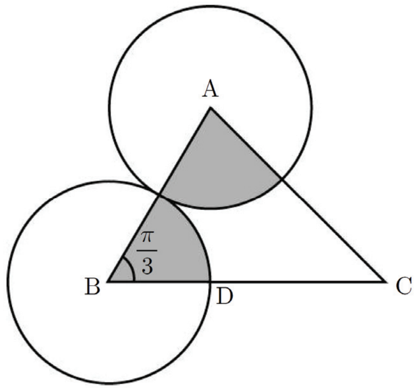
④ $\frac{7}{16}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

B126

○○○ (2010(6)고2-가형28)

그림과 같이 $\triangle$ABC의 두 꼭짓점 A, B를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 같은 두 원이 외접한다.

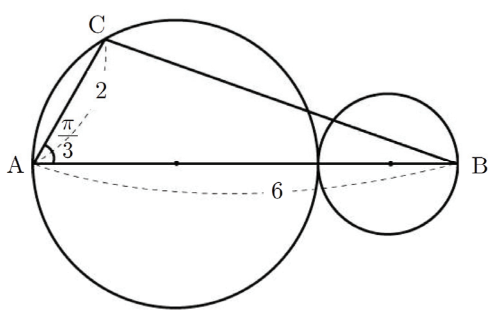
$\angle B=\frac{\pi}{3}$, $\overline{AC}=2\sqrt{6}$, $\overline{CD}=2\sqrt{3}$일 때, $\triangle$ABC의 내부의 두 부채꼴(어두운 부분) 넓이의 합은 $k\pi$이다. $100k$의 값을 구하시오. [4점]



B127

○○ (2010(6)고2-나형9)

그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=2$, $\angle A=\frac{\pi}{3}$인 $\triangle$ABC의 선분 AB 위에 중심이 있는 서로 외접하는 두 원을 각각 O_1, O_2라 하자. 점 A, C는 원 O_1 위에, 점 B는 원 O_2 위에 있다. $\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R, 원 O_1의 반지름의 길이를 r_1, 원 O_2의 반지름의 길이를 r_2라 할 때, $3R^2+r_1^2+r_2^2$의 값은? [4점]



① 21 ② 24 ③ 27
④ 30 ⑤ 33

B128

○○ (2020(9)고2-공통10)

삼각형 ABC에서

$$\frac{2}{\sin A}=\frac{3}{\sin B}=\frac{4}{\sin C}$$

일 때, $\cos C$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

B129

○○○ (2024경찰대(1차)-공통13)

삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=1$
(나) $2\sqrt{2}\cos A+2\cos B+\sqrt{2}\cos C=2\sqrt{3}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 3일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

① $4\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{2}$ ③ $6\sqrt{2}$
④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

B130

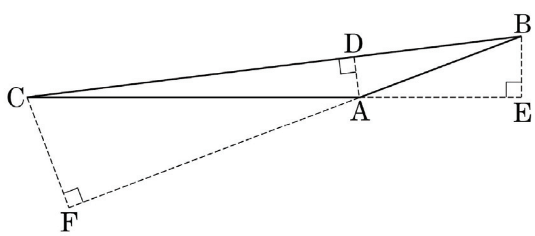
○○○
(2003(4)고3-예체능계30)

삼각형의 세 꼭짓점에서 각각의 대변 또는 그 연장선에 내린 수선의 길이의 비가 $2:3:4$이다. 이 삼각형의 세 내각 중 최대의 각을 θ라 할 때, $\cos\theta=-\frac{p}{q}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

B131

○○○
(2014(3)고2-B형19)

그림과 같이 $A>90^\circ$인 삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C에서 세 직선 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{CF}}=2:3:4$일 때, 삼각형 ABC에서 $\cos C$의 값은? [4점]



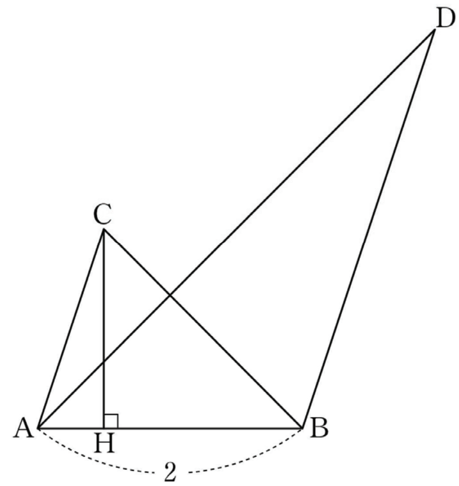
① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{41}{48}$ ③ $\frac{7}{8}$

④ $\frac{43}{48}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

B132

●●●
(2021(3)고3-확률과통계21/미적분21/기하21)

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}/\!/\overline{\mathrm{BD}}$, $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BD}}=1:2$인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다.



두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle\mathrm{CAB})=51$이다. $\overline{\mathrm{AC}}^2$의 값을 구하시오. (단, $\angle\mathrm{CAB}<\frac{\pi}{2}$) [4점]

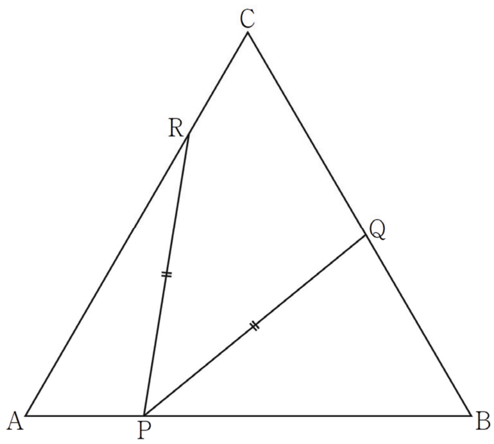
B133

(2020(11)고2-공통21)

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 P, 선분 BC 위의 점 Q, 선분 CA 위의 점 R에 대하여 세 점 P, Q, R가

$$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BQ}}+\overline{\mathrm{CR}}=1,\ \overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$$

를 만족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 세 점 P, Q, R는 각각 점 A, 점 B, 점 C가 아니다.) [4점]



ㄱ. $3\overline{\mathrm{AP}}+2\overline{\mathrm{BQ}}=2$

ㄴ. $\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{AP}}$

ㄷ. 삼각형 PBQ의 외접원의 넓이가 삼각형 CRQ의 외접원의 넓이의 2배일 때, $\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{\sqrt{21}-3}{6}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

B134

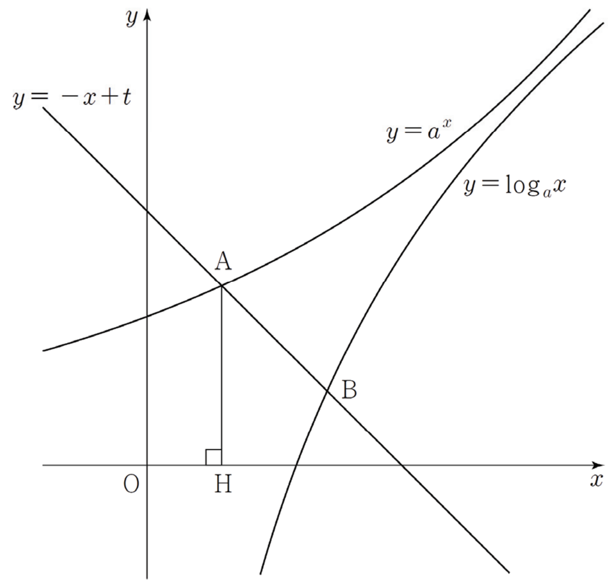
(2020(9)고2-공통29)

그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, t에 대하여 직선 $y=-x+t$가 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 세 점 A, B, H는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OH}}:\overline{\mathrm{AB}}=1:2$

(나) 삼각형 AOB의 외접원의 반지름의 길이는 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

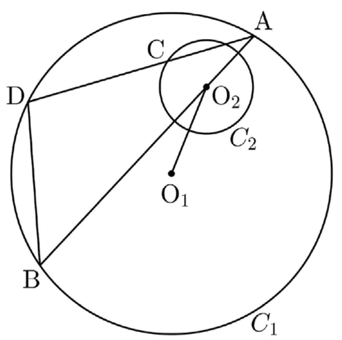
$200(t-a)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



B135

(2023사관(1차)-확률과통계13/미적분13/기하13)

그림과 같이 중심이 O_1이고 반지름의 길이가 $r(r>3)$인 원 C_1과 중심이 O_2이고 반지름의 길이가 1인 원 C_2에 대하여 $\overline{O_1O_2}=2$이다. 원 C_1 위를 움직이는 점 A에 대하여 직선 AO_2가 원 C_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 원 C_2 위를 움직이는 점 C에 대하여 직선 AC가 원 C_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자. 다음은 $\overline{BD}$가 최대가 되도록 네 점 A, B, C, D를 정할 때, $\overline{O_1C}^2$을 r에 대한 식으로 나타내는 과정이다.



삼각형 ADB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin A}=\boxed{(가)}$$

이므로 $\overline{BD}$가 최대이려면 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접해야 한다.

이때 직각삼각형 ACO_2에서 $\sin A=\frac{1}{\overline{AO_2}}$이므로

$$\overline{BD}=\frac{1}{\overline{AO_2}}\times\boxed{(가)}$$

이다.

그러므로 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접하고 $\overline{AO_2}$가 최소일 때 $\overline{BD}$는 최대이다.

$\overline{AO_2}$의 최솟값은

$\boxed{(나)}$

이므로 $\overline{BD}$가 최대일 때,

$\overline{O_1C}^2=\boxed{(다)}$

이다.

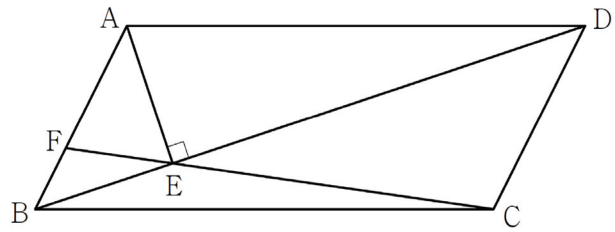
위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(r)$, $g(r)$, $h(r)$라 할 때, $f(4)\times g(5)\times h(6)$의 값은? [4점]

① 216 ② 192 ③ 168 ④ 144 ⑤ 120

B136

(2023(7)고3-확률과통계13/미적분13/기하13)

그림과 같이 평행사변형 ABCD가 있다. 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 하고, 직선 CE가 선분 AB와 만나는 점을 F라 하자. $\cos(\angle AFC)=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\overline{EC}=10$이고 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$일 때, 삼각형 AFE의 넓이는? [4점]



① $\frac{20}{3}$ ② 7 ③ $\frac{22}{3}$ ④ $\frac{23}{3}$ ⑤ 8

B. 코사인법칙: 원(원주각)

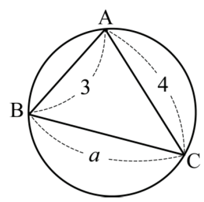
B137

○○
(2006(3)고2-공통19)

그림과 같이

$\overline{AB}=3,\ \overline{BC}=a,\ \overline{AC}=4$

인 삼각형 ABC가 원에 내접하고 있다.



이 원의 반지름의 길이를 R라 할 때, 옳은 내용을 보기에서 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $a=5$이면 $R=\frac{5}{2}$이다.
ㄴ. $R=4$이면 $a=8\sin A$이다.
ㄷ. $1<a\le\sqrt{13}$일 때, $\angle A$의 최댓값은 60°이다.

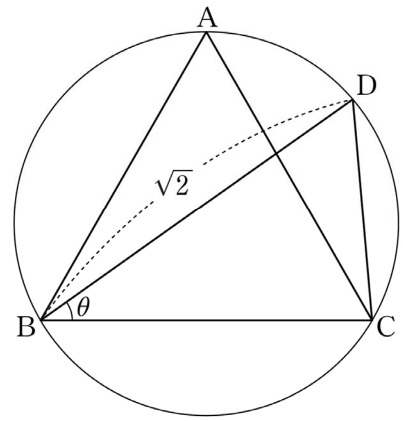
① ㄱ ② ㄷ ③ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

B138

○○
(2020(10)고3-나형19)

정삼각형 ABC가 반지름의 길이가 r인 원에 내접하고 있다. 선분 AC와 선분 BD가 만나고 $\overline{BD}=\sqrt{2}$가 되도록 원 위에서 점 D를 잡는다. $\angle DBC=\theta$라 할 때,

$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다. 반지름의 길이 r의 값은? [4점]

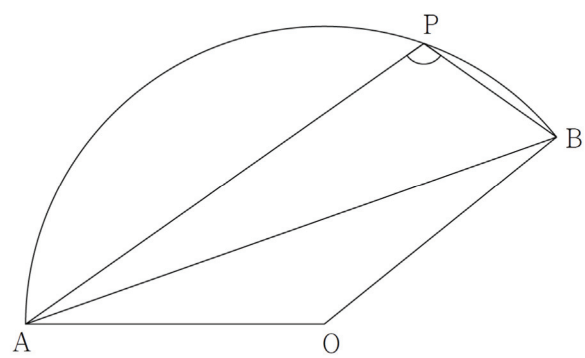


① $\frac{6-\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{6-\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$
④ $\frac{6-\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{6-\sqrt{2}}{5}$

B139

○○
(2022(9)고2-공통14)

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 6인 부채꼴 OAB가 있다. $\overline{AB}=8\sqrt{2}$이고 부채꼴 OAB의 호 AB 위의 한 점 P에 대하여 $\angle BPA>90^\circ$, $\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$일 때, 선분 BP의 길이는? [4점]



① $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ② $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ ③ $\sqrt{6}$
④ $\frac{7\sqrt{6}}{6}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

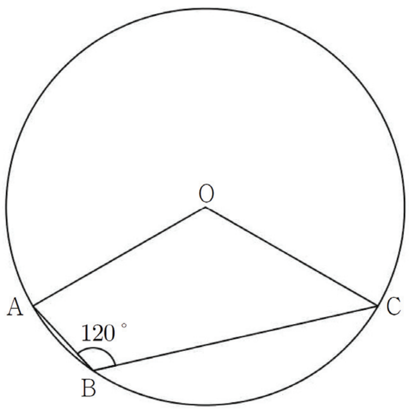
B140

○○○
(2021사관(1차)-가형15)

그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심이 O인 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여

$$\angle ABC = 120^\circ,\ \overline{AB} + \overline{BC} = 2\sqrt{15}$$

일 때, 사각형 OABC의 넓이는? [4점]



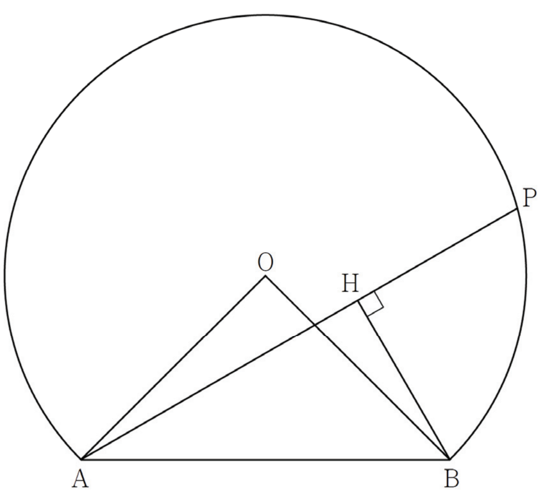
① $5\sqrt{3}$ ② $\dfrac{11\sqrt{3}}{2}$ ③ $6\sqrt{3}$

④ $\dfrac{13\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

B141

○○○
(2020(9)고2-공통27)

그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\dfrac{3}{2}\pi$인 부채꼴 OBA가 있다. 호 BA 위에 점 P를 $\angle BAP = \dfrac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 점 B에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{OH}^2$의 값은 $m + n\sqrt{3}$이다. $m^2 + n^2$의 값을 구하시오. (단, m, n은 유리수이다.) [4점]

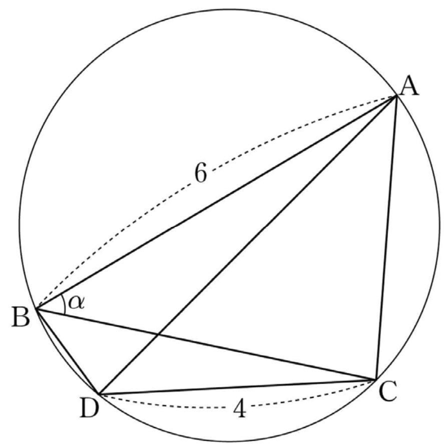


B142

○○○
(2020(3)고3-나형29)

그림과 같이 예각삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{AB} = 6$이고, $\angle ABC = \alpha$라 할 때 $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$이다.

점 A를 지나지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{CD} = 4$이다. 두 삼각형 ABD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1 : S_2 = 9 : 5$이다. 삼각형 ADC의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. [4점]



B143

(2022(11)고2-공통20)

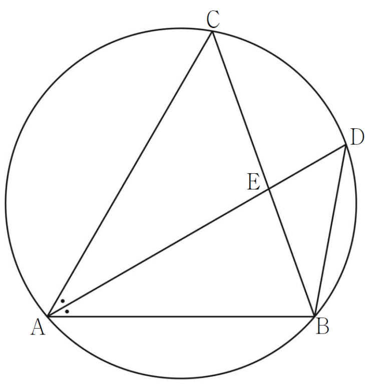
반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 원 C에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여 $\angle$BAC의 이등분선이 원 C와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하고, 두 선분 BC, AD의 교점을 E라 하자.

$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{3}$ 일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\sin(\angle \mathrm{DBE})=\dfrac{1}{2}$

ㄴ. $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}+9$

ㄷ. 삼각형 ABC의 넓이가 삼각형 BDE의 넓이의 4배가 되도록 하는 모든 $\overline{\mathrm{BE}}$의 값의 합은 $\dfrac{9}{4}$이다.



① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

B144

(2021경찰대(1차)-공통20)

$\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{BC}}=7$, $\overline{\mathrm{AC}}=6$인 삼각형 ABC가 있다. 두 선분 AB, AC 위에 삼각형 ADE의 외접원이 선분 BC에 접하도록 점 D, E를 각각 잡을 때, 선분 DE의 길이의 최솟값은? [5점]

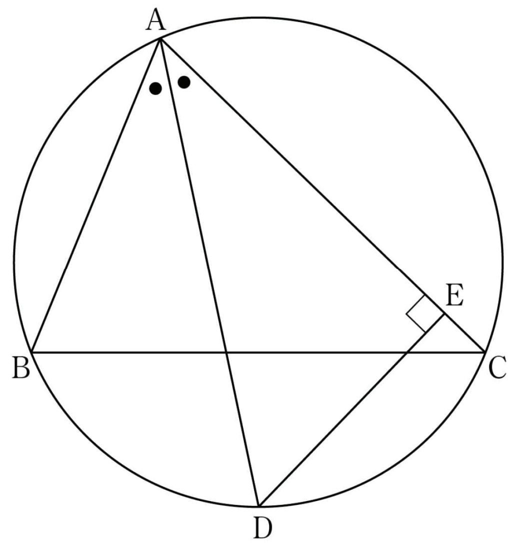
① $\dfrac{64}{15}$ ② $\dfrac{81}{20}$ ③ 4

④ $\dfrac{121}{30}$ ⑤ $\dfrac{144}{35}$

B145

(2021(10)고3-확률과통계21/미적분21/기하21)

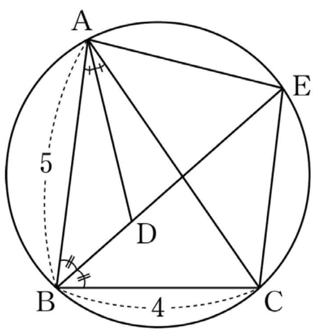
$\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=8$인 예각삼각형 ABC에서 $\angle$A의 이등분선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하자. 선분 AE의 길이를 k라 할 때, $12k$의 값을 구하시오. [4점]



B146

(2021(3)고3-확률과통계15/미적분15/기하15)

그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC$의 이등분선과 $\angle CAB$의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD의 연장선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 E라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



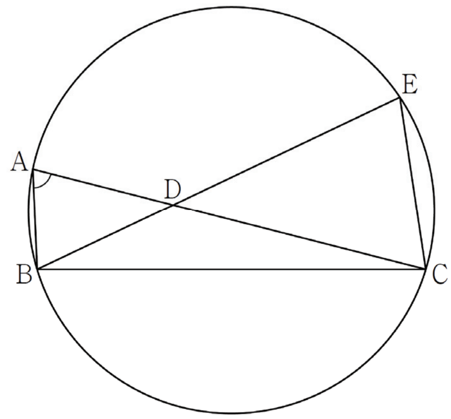
ㄱ. $\overline{AC}=6$
ㄴ. $\overline{EA}=\overline{EC}$
ㄷ. $\overline{ED}=\frac{31}{8}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

B147

(2023(9)고2-공통28)

그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\cos(\angle BAC)=\frac{\sqrt{3}}{6}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 한 점 D에 대하여 직선 BD가 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 E라 하자. $\overline{DE}=5$, $\overline{CD}+\overline{CE}=5\sqrt{3}$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



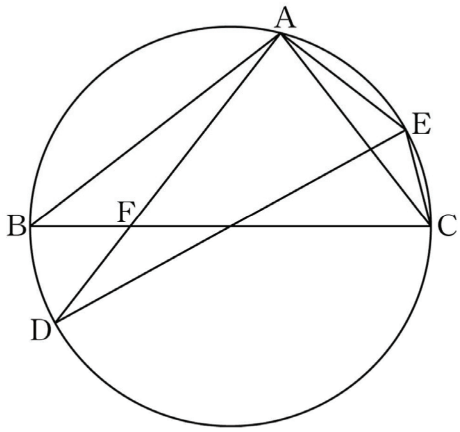
B148

●●● (2023(10)고3-확률과통계21/미적분21/기하21)

그림과 같이 선분 BC를 지름으로 하는 원에 두 삼각형 ABC와 ADE가 모두 내접한다. 두 선분 AD와 BC가 점 F에서 만나고

$\overline{BC}=\overline{DE}=4$, $\overline{BF}=\overline{CE}$, $\sin(\angle CAE)=\dfrac{1}{4}$

이다. $\overline{AF}=k$일 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]

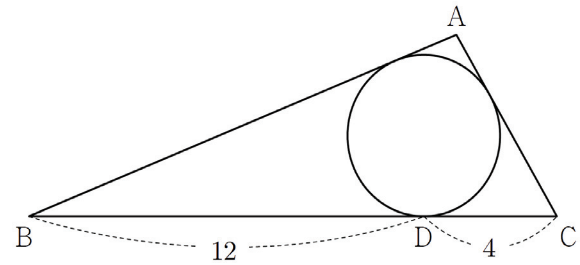


B. 코사인법칙: 원(외접삼각형)

B149

○○○ (2021(6)고2-공통18)

반지름의 길이가 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$인 원이 삼각형 ABC에 내접하고 있다. 원이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하고 $\overline{BD}=12$, $\overline{DC}=4$일 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이는? [4점]



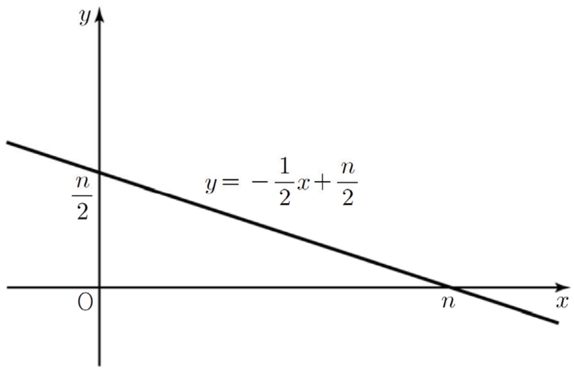
① $\dfrac{71}{2}$ ② 36 ③ $\dfrac{73}{2}$

④ 37 ⑤ $\dfrac{75}{2}$

C166

●●● (2017(6)고2-가형21)

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 직선 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{n}{2}$과 x축, y축으로 둘러싸인 영역(경계선 포함)에 속하고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값은? [4점]



① 945 ② 946 ③ 947
④ 948 ⑤ 949

C. 수열의 귀납적 정의: 수형도

C167

○○ (2022(3)고3-확률과통계20/미적분20/기하20)

수열 $\{a_n\}$은 $1<a_1<2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} -2a_n & (a_n<0) \\ a_n-2 & (a_n\geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_7=-1$일 때, $40\times a_1$의 값을 구하시오. [4점]

C168

○○ (2018(3)고3-나형26)

첫째항이 6인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2-a_n & (a_n\geq 0) \\ a_n+p & (a_n<0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_4=0$이 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 합을 구하시오. [4점]

C169

○○ (2019(10)고3-나형29)

첫째항이 짝수인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_5=5$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 될 수 있는 모든 수의 합을 구하시오. [4점]

C170

○○○
(2018(3)고2-나형26)

$a_3=3$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n+3}{2} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

이다. $a_1 \geq 10$일 때, $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값을 구하시오. [4점]

C171

○○○
(2021(4)고3-확률과통계21/미적분21/기하21)

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-2 & (a_n \geq 0) \\ a_n+5 & (a_n<0)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값을 구하시오. [4점]

C172

●●●
(2022사관(1차)-확률과통계15/미적분15/기하15)

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최솟값을 m이라 하자.

> (가) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $a_{2n}=a_3\times a_n+1$, $a_{2n+1}=2a_n-a_2$
> 이다.

$a_1=m$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은? [4점]

① -53 ② -51 ③ -49
④ -47 ⑤ -45

C173

●●●
(2022(7)고3-확률과통계21/미적분21/기하21)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\sum_{k=1}^{2n} a_k=17n$
> (나) $|a_{n+1}-a_n|=2n-1$

$a_2=9$일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$의 값을 구하시오. [4점]

C174 (2023(10)고3-확률과통계15/미적분15/기하15) ★★★

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n+2n & (a_n\text{이 4의 배수인 경우})\\ a_n+2n & (a_n\text{이 4의 배수가 아닌 경우})\end{cases}$$
> 이다.
> (나) $a_3>a_5$

$50<a_4+a_5<60$이 되도록 하는 a_1의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

① 224 ② 228 ③ 232 ④ 236 ⑤ 240

C175 (2023(3)고3-확률과통계15/미적분15/기하15) ★★★

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}+a_n\text{이 홀수인 경우})\\ \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) & (a_{n+1}+a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1=1$일 때, $a_6=34$가 되도록 하는 모든 a_2의 값의 합은? [4점]

① 60 ② 64 ③ 68 ④ 72 ⑤ 76

C176 (2023(4)고3-확률과통계15/미적분15/기하15) ★★★

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\log_2 \frac{M}{m}$의 값은? [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n & (a_n \geq 1) \end{cases}$$
> 이다.
> (나) $a_5 + a_6 = 1$

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

C177 (2023(7)고3-확률과통계15/미적분15/기하15) ★★★

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1 < 300$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{3}a_n & (\log_3 a_n\text{이 자연수인 경우}) \\ a_n + 6 & (\log_3 a_n\text{이 자연수가 아닌 경우}) \end{cases}$$
> 이다.

$\sum_{k=4}^{7} a_k = 40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 315 ② 321 ③ 327
④ 333 ⑤ 339

D. 함수의 연속: 곱으로 정의된 함수(곱이 0)

D059

○○
(2020사관(1차)-나형11)

함수

$$f(x)=\begin{cases} a & (x<1) \\ x+3 & (x\geq 1) \end{cases}$$

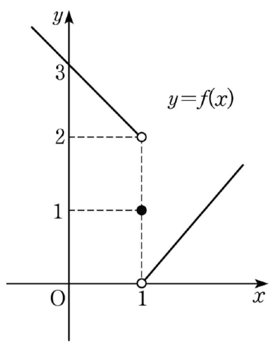
에 대하여 함수 $(x-a)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

D060

○○○
(2014(10)고3-A형14)

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



일차함수 $g(x)$에 대하여 $g(0)=\lim\limits_{x\to 1-}f(x)$이고, $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(-1)$의 값은? [4점]

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

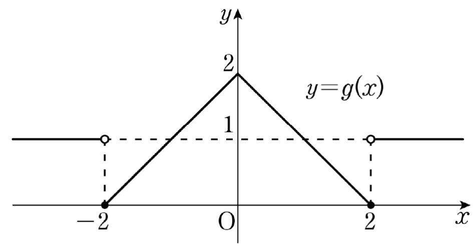
D061

○○
(2019(10)고3-나형14)

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases} -|x|+2 & (|x|\leq 2) \\ 1 & (|x|>2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $y=f(x-a)g(x)$의 그래프가 한 점에서만 불연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? [4점]



① -16 ② -12 ③ -8
④ -4 ⑤ -1

D062

○○
(2014(7)고3-A형18)

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1,\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=k$$

를 만족시키고, 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} x+1 & (x\leq 2) \\ 2-x & (x>2) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

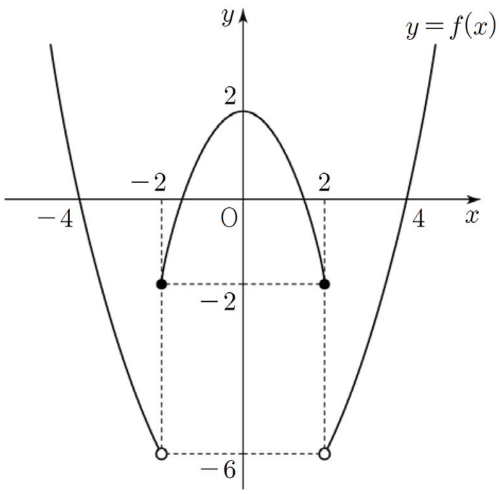
D063

○○
(2016(9)고2-가형17)

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-8 & (|x|>2) \\ -x^2+2 & (|x|\le 2) \end{cases}$$

의 그래프가 그림과 같다.



함수 $f(x)f(kx)$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 k의 값의 곱은? [4점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

D064

○○○
(2024경찰대(1차)-공통12)

함수

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+ax+b}{x-5} & (x\ne 5) \\ 7 & (x=5) \end{cases}$$

에 대하여 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \sqrt{4-f(x)} & (x<1) \\ f(x) & (x\ge 1) \end{cases},$$

$$h(x)=\left|\{f(x)\}^2+\alpha\right|-11$$

이라 하자. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 함수 $g(x)h(x)$도 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 α의 값의 곱은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① -34 ② -36 ③ -38
④ -40 ⑤ -42

D065

○○○
(2016(11)고2-가형21)

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x\le -1) \\ 1 & (-1<x\le 1) \\ x-1 & (x>1) \end{cases}$$

이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (나) 함수 $f(x)g(x+k)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 k가 존재한다. (단, $k\ne 0$)

$g(0)<0$일 때, $g(2)$의 값은? [4점]

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

D066
○○○ (2021(3)고3-확률과통계20/미적분20/기하20)

실수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수

$$f(x)=2x+3+|x-1|$$

의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(5)$의 값을 구하시오. [4점]

D067
★★★ (2017(9)고2-나형30)

세 정수 a, b, c에 대하여 이차함수 $f(x)=a(x-b)^2+c$라 하고, 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ f(-x) & (x<0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=g(x)$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(2)<h(-1)<h(0)$
(나) 함수 $(t^2-t)h(t)$는 모든 실수 t에서 연속이다.

$80f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

D068
●●● (2020(11)고2-공통29)

5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=x^2-2ax+a^2-a+1,$$

$$g(x)=\begin{cases} x+b & (1<x<3) \\ 7-b & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. [4점]

E097

★★★ (2023(7)고3-확률과통계14/미적분14/기하14)

최고차항의 계수가 1이고 $f(-3)=f(0)$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-3 \text{ 또는 } x\geq 0) \\ -f(x) & (-3\leq x<0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 값이 한 개일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $g(x)g(x-3)$은 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. $f(-6)\times f(3)=0$
ㄷ. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k가 음수일 때 집합 $\{x|f(x)=0,\ x\text{는 실수}\}$의 모든 원소의 합이 -1이면 $g(-1)=-48$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

E. 삼차함수의 그래프 개형: 삼차함수가 직선과 서로 다른 두 점에서 만난다.

E098

○○ (2011사관(1차)-이과7)

좌표평면에서 직선 $y=mx+8$이 곡선 $y=x^3+2x^2-3x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 m의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

E099

○○○ (2012사관(1차)-문과30)

두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2$이고, $g'(x)=2x$이다. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 두 점에서 만날 때, $f(0)-g(0)$의 값들의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

▶ 이 문항은 적분에 속하지만 출제의도를 고려하여 이 단원에 두었습니다.

E100

○○○ (2023(10)고3-확률과통계12/미적분12/기하12)

양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\left|x^3-12x+k\right|$$

라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a(a\geq 0)$이 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되도록 하는 실수 a의 값이 오직 하나일 때, k의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

E101

○○○ (2018(7)고3-나형17)

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)=f(5)$
(나) 방정식 $f(x)-p=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되게 하는 실수 p의 최댓값은 $f(2)$이다.

$\int_0^2 f(x)dx$의 값은? [4점]

① 25 ② 28 ③ 31
④ 34 ⑤ 37

▶ 이 문항은 적분에 속하지만 출제의도를 고려하여 이 단원에 두었습니다.

E102

○○○ (2021(3)고3-확률과통계14/미적분14/기하14)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f'(x)|$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=g(0)=0$
(나) 방정식 $f(x)=0$은 양의 실근을 갖는다.
(다) 방정식 $\|f(x)\|=4$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$g(3)$의 값은? [4점]

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

E103

○○○ (2022(7)고3-확률과통계13/미적분13/기하13)

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x)+8 & (x\geq -2) \end{cases}$$

라 하자. 방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

E104

○○○ (2017(10)고3-나형20)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'\left(\dfrac{11}{3}\right)<0$
> (나) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 35를 갖는다.
> (다) 방정식 $f(x)=f(4)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(0)$의 값은? [4점]

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

▶ 이 문항은 적분에 속하지만 출제의도를 고려하여 이 단원에 두었습니다.

E105

○○○ (2020(7)고3-나형20)

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(x)=x^2-4x$, $g'(x)=-2x$
> (나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서만 만난다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> ㄱ. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x=0$에서 극대이다.
> ㄴ. $\{f(0)-g(0)\}\times\{f(2)-g(2)\}=0$
> ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $\displaystyle\int_{-1}^{x}\{f(t)-g(t)\}dt\geq 0$ 이면 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=2$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▶ 이 문항은 적분에 속하지만 출제의도를 고려하여 이 단원에 두었습니다.

E106

●●● (2020(3)고3-나형21)

이차함수 $g(x)=x^2-6x+10$에 대하여 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
> (나) 함수 $(g\circ f)(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, 방정식 $g(f(x))=m$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (다) 방정식 $g(f(x))=17$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

E107

●●● (2020(4)고3-나형30)

양의 실수 t와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(t)=\frac{f(t)-f(0)}{t}$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(t)$의 최솟값은 0이다.
> (나) x에 대한 방정식 $f'(x)=g(a)$를 만족시키는 x의 값은 a와 $\dfrac{5}{3}$이다.
>
> (단, $a>\dfrac{5}{3}$인 상수이다.)

자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m=\{x\,|\,f'(x)=g(m),\ 0<x\leq m\}$$

이라 할 때, $n(A_m)=2$를 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

E108

●●● (2017(11)고2–가형30)

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 $t(t>1)$까지 변할 때 평균변화율을 $g(t)$라 정의할 때, 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 극댓값 0을 갖는다. 함수 $g(t)$의 최솟값이 존재할 때, 방정식 $f(x)=f(1)$의 서로 다른 실근의 합의 최솟값을 구하시오. [4점]

E109

★★★ (2021사관(1차)–나형30)

양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x(x+a)^2 & (x<0) \\ x(x-a)^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+t$의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 최댓값은 5이다.
(나) 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 α의 개수는 2이다.

$f'(0)$의 값을 구하시오. [4점]

E110 ★★★ (2022(7)고3-확률과통계22/미적분22/기하22)

삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$h(x)=|f(x)|+g(x)$

라 하자. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(k,\ 0)(k\neq 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=0$이다. (나) 방정식 $h(x)=0$의 실근 중에서 가장 큰 값은 12이다.

$h(3)=-\dfrac{9}{2}$일 때, $k\times\{h(6)-h(11)\}$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

E111 ★★★ (2023(10)고3-확률과통계22/미적분22/기하22)

삼차함수 $f(x)$에 대하여 구간 $(0,\ \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} x^3-8x^2+16x & (0<x\leq 4) \\ f(x) & (x>4) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 구간 $(0,\ \infty)$에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(10)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) $g\left(\dfrac{21}{2}\right)=0$ (나) 점 $(-2,\ 0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은, 기울기가 0이 아닌 접선이 오직 하나 존재한다.

F. 정적분 계산: 평행이동/대칭이동

F082

○○
(2023경찰대(1차)–공통5)

사차함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값 2를 갖고, $f(x)$가 x^3으로 나누어떨어질 때, $\int_0^2 f(x-1)dx$의 값은? [4점]

① $-\frac{12}{5}$ ② $-\frac{7}{5}$ ③ $-\frac{2}{5}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

F083

○○
(2021사관(1차)–나형28)

양수 a와 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 1$일 때, $f(x)=2x^2+ax$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)+a^2$이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때,
곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

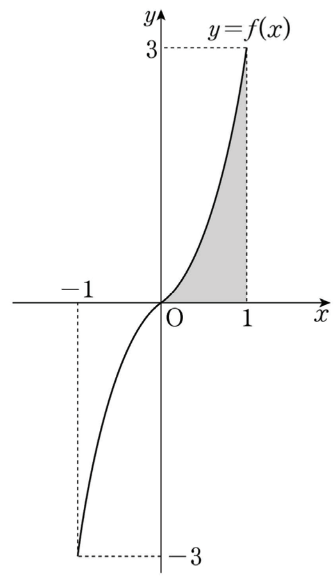
F084

○○○
(2020(3)고3–나형30)

닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$는 정의역에서 증가하고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$가 성립할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 $g(x)=f(x)$이다.
(나) 닫힌구간 $[2n-1,\ 2n+1]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $2n$만큼, y축의 방향으로 $6n$만큼 평행이동한 그래프이다. (단, n은 자연수이다.)

$f(1)=3$이고 $\int_0^1 f(x)dx=1$일 때, $\int_3^6 g(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]



F085
○○○ (2023(3)고3-확률과통계20/미적분20/기하20)

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$와 양의 실수 p에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(0)=0$
(나) $g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x<0) \\ f(x+p)-f(p) & (x \geq 0) \end{cases}$

$\displaystyle\int_0^p g(x)dx=20$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

F086
○○○ (2001(1차)경찰대-공통14)

함수 $f(x)$가 다음 두 식

$$f(x+2)=-f(x),\ \int_0^2 f(x)dx=1$$

을 만족할 때, $\displaystyle\int_{-2}^4 f(x)dx$의 값을 구하면? [3점]

F087
●●● (2016(7)고3-나형30)

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=1$
(나) $f(1)=f'(1)=1$

$-1 \leq n \leq 4$인 정수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x-n)+n(n \leq x < n+1)$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 열린구간 $(-1,\ 5)$에서 미분가능할 때, $\displaystyle\int_0^4 g(x)dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

F088

★★★ (2023(4)고3-확률과통계22/미적분22/기하22)

두 상수 a, $b(b \neq 1)$과 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 도함수 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) $\lvert x\rvert < 2$일 때, $g(x) = \int_0^x (-t+a)dt$이고 $\lvert x\rvert \geq 2$일 때, $\lvert g'(x)\rvert = f(x)$이다.
(다) 함수 $g(x)$는 $x=1$, $x=b$에서 극값을 갖는다.

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합이 $p+q\sqrt{3}$ 일 때, $p \times q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]

F. 정적분 계산: 주기성

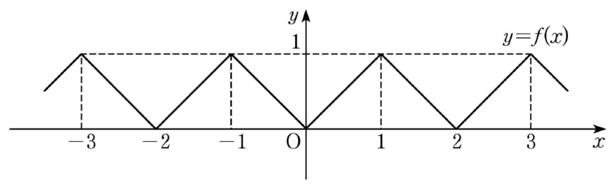
F089

○○ (2014(10)고3-A형19)

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x+2)=f(x)$
(나) $f(x)=\lvert x\rvert$ $(-1 \leq x < 1)$

함수 $g(x) = \int_{-2}^x f(t)dt$라 할 때, 실수 a에 대하여 $g(a+4)-g(a)$의 값은? [4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

F090

○○○ (2020(7)고3-나형28)

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$, $f(x+3)=f(x)$이고 $\int_{-1}^{2}\{f(x)+x^2-1\}^2dx$의 값이 최소가 되도록 하는 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{-1}^{26} f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

F. 정적분 계산: 대소비교

F091

●●● (2018(7)고3-나형20)

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(-x)=-f'(x)$$

를 만족시킨다. $f'(1)=0$, $f(1)=2$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f'(-1)=0$

ㄴ. 모든 실수 k에 대하여

$$\int_{-k}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{k} f(x)dx$$

ㄷ. $0<t<1$인 모든 실수 t에 대하여

$$\int_{-t}^{t} f(x)dx<6t$$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

F092

★★★ (2023(7)고3-확률과통계22/미적분22/기하22)

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)-x-f(t)+t$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$와 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t\to -1}\{h(t)-h(-1)\}=\lim_{t\to 1}\{h(t)-h(1)\}=2$

(나) $\int_{0}^{\alpha} f(x)dx=\int_{0}^{\alpha} |f(x)|dx$를 만족시키는

실수 α의 최솟값은 -1이다.

(다) 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\{f(u)-ku\}du\geq 0$$

이 되도록 하는 실수 k의 최댓값은 $f'(\sqrt{2})$이다.

$f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

A 지수함수와 로그함수

1	⑤	2	⑤	3	③	4	64	5	①
6	4	7	③	8	③	9	②	10	⑤
11	②	12	②	13	3	14	③	15	②
16	17	17	③	18	62	19	16	20	⑤
21	⑤	22	①	23	④	24	②	25	②
26	①	27	②	28	②	29	973	30	56
31	②	32	①	33	④	34	③	35	②
36	81	37	250	38	②	39	④	40	①
41	②	42	①	43	②	44	6	45	③
46	②	47	16	48	20	49	④	50	12
51	③	52	④	53	①	54	28	55	⑤
56	64	57	⑤	58	25	59	⑤	60	45
61	46	62	②	63	12	64	①	65	7
66	193	67	217	68	72	69	127	70	⑤
71	⑤	72	②	73	①	74	35	75	②
76	③	77	④	78	③	79	⑤	80	31
81	⑤	82	③	83	⑤	84	4	85	③
86	③	87	8	88	③	89	③	90	③
91	④	92	①	93	③	94	②	95	③
96	②	97	①	98	③	99	⑤	100	60
101	78	102	④	103	②	104	①	105	①
106	128	107	3	108	⑤	109	④	110	①
111	④	112	④	113	⑤	114	⑤	115	③
116	⑤	117	③	118	③	119	75	120	②
121	⑤	122	⑤	123	54	124	40	125	⑤
126	①	127	6	128	4	129	⑤	130	11
131	②	132	②	133	①	134	②	135	③
136	③	137	9	138	13	139	⑤	140	⑤
141	③	142	③	143	⑤	144	②	145	③
146	④	147	③	148	④	149	⑤	150	24
151	12	152	③	153	⑤	154	②	155	⑤
156	②	157	⑤	158	③	159	②	160	①
161	③	162	②	163	⑤	164	②	165	5
166	③	167	①	168	⑤	169	②	170	④
171	19	172	10	173	④	174	5	175	⑤
176	②	177	5	178	②	179	③	180	49
181	⑤	182	①	183	16	184	16	185	4
186	75	187	⑤	188	①	189	10	190	⑤
191	52	192	9	193	12	194	②	195	②
196	②	197	④	198	②	199	25	200	12
201	④	202	③	203	25	204	⑤	205	12
206	⑤	207	②	208	②	209	①	210	③
211	24	212	②	213	4	214	③	215	15
216	①	217	④	218	⑤	219	16	220	①

B 삼각함수

1	②	2	④	3	③	4	①	5	④
6	③	7	①	8	②	9	⑤	10	②
11	②	12	10	13	①	14	③	15	⑤
16	⑤	17	①	18	④	19	13	20	8
21	13	22	14	23	①	24	5	25	④
26	④	27	①	28	③	29	40	30	10
31	①	32	③	33	⑤	34	④	35	10
36	⑤	37	⑤	38	①	39	49	40	59
41	②	42	9	43	④	44	⑤	45	②
46	④	47	⑤	48	②	49	⑤	50	①
51	①	52	④	53	④	54	80	55	③
56	②	57	③	58	7	59	14	60	④
61	②	62	⑤	63	①	64	②	65	29
66	③	67	30	68	③	69	②	70	④
71	⑤	72	③	73	53	74	③	75	③
76	③	77	①	78	③	79	③	80	480
81	10	82	⑤	83	⑤	84	④	85	74
86	35	87	②	88	②	89	②	90	110
91	686	92	169	93	192	94	①	95	②
96	②	97	①	98	②	99	③	100	⑤
101	①	102	192	103	⑤	104	27	105	②
106	③	107	②	108	①	109	④	110	①
111	③	112	③	113	⑤	114	③	115	17
116	②	117	11	118	50	119	7	120	⑤
121	②	122	①	123	71	124	27	125	④
126	150	127	⑤	128	②	129	③	130	35
131	④	132	15	133	④	134	50	135	④
136	①	137	⑤	138	①	139	⑤	140	⑤
141	20	142	63	143	⑤	144	⑤	145	84
146	②	147	191	148	6	149	②	150	②
151	50	152	②	153	⑤	154	①	155	103
156	36	157	⑤	158	13	159	④	160	④
161	22								

C 수열

1	5	2	③	3	29	4	⑤	5	③
6	⑤	7	26	8	24	9	⑤	10	①
11	200	12	④	13	④	14	③	15	35
16	8	17	③	18	②	19	⑤	20	105
21	③	22	26	23	13	24	②	25	64
26	200	27	315	28	150	29	①	30	29
31	⑤	32	④	33	⑤	34	435	35	17
36	④	37	26	38	③	39	①	40	273
41	①	42	30	43	④	44	33	45	①
46	④	47	⑤	48	④	49	13	50	④
51	170	52	③	53	③	54	⑤	55	①
56	18	57	544	58	④	59	13	60	162
61	⑤	62	①	63	②	64	118	65	192
66	①	67	512	68	③	69	42	70	513
71	④	72	⑤	73	③	74	67	75	11
76	②	77	⑤	78	18	79	①	80	④
81	324	82	③	83	①	84	80	85	27
86	⑤	87	117	88	84	89	③	90	⑤
91	64	92	10	93	④	94	①	95	④
96	②	97	②	98	②	99	242	100	128
101	④	102	①	103	②	104	⑤	105	②
106	②	107	④	108	⑤	109	⑤	110	477
111	9	112	146	113	②	114	②	115	③
116	⑤	117	184	118	④	119	③	120	②
121	16	122	④	123	5	124	⑤	125	①
126	①	127	⑤	128	④	129	①	130	358
131	④	132	②	133	675	134	⑤	135	③
136	164	137	370	138	395	139	④	140	③
141	①	142	553	143	616	144	670	145	308
146	525	147	④	148	①	149	120	150	95
151	①	152	③	153	③	154	51	155	⑤
156	⑤	157	183	158	③	159	120	160	214
161	⑤	162	②	163	132	164	⑤	165	427
166	①	167	70	168	8	169	142	170	27
171	5	172	①	173	180	174	②	175	③
176	④	177	④	178	87	179	②	180	③
181	①	182	⑤	183	496	184	271	185	570
186	282	187	③	188	65	189	64	190	⑤
191	⑤	192	②	193	①	194	79	195	③
196	②	197	③	198	123	199	7	200	235
201	③	202	①	203	①	204	603	205	⑤
206	③	207	195	208	②	209	225	210	②
211	①	212	②	213	252	214	③	215	⑤
216	②	217	①	218	⑤	219	⑤	220	②
221	②	222	③	223	④	224	③	225	③
226	②	227	④	228	③	229	①	230	⑤
231	①	232	②	233	①	234	①	235	④
236	③	237	⑤	238	①	239	⑤	240	③
241	③	242	②	243	⑤	244	⑤	245	②
246	⑤	247	④	248	⑤	249	③		

D 함수의 극한과 연속

1	④	2	④	3	①	4	①	5	④
6	③	7	④	8	②	9	④	10	21
11	①	12	8	13	③	14	60	15	②
16	④	17	④	18	⑤	19	②	20	④
21	2	22	④	23	⑤	24	④	25	④
26	15	27	②	28	4	29	①	30	②
31	①	32	19	33	28	34	311	35	④
36	①	37	③	38	19	39	5	40	⑤
41	③	42	②	43	②	44	480	45	③
46	②	47	15	48	6	49	32	50	①
51	12	52	7	53	①	54	16	55	⑤
56	③	57	56	58	44	59	⑤	60	③
61	①	62	②	63	③	64	④	65	⑤
66	8	67	60	68	7	69	③	70	③
71	4	72	④	73	②	74	①		

E 미분

1	②	2	②	3	①	4	④	5	③
6	③	7	25	8	③	9	①	10	⑤
11	③	12	②	13	11	14	56	15	30
16	①	17	⑤	18	②	19	②	20	③
21	18	22	③	23	16	24	⑤	25	54
26	③	27	31	28	②	29	①	30	50
31	118	32	②	33	③	34	32	35	③
36	④	37	11	38	64	39	②	40	16
41	②	42	④	43	④	44	⑤	45	240
46	②	47	48	48	45	49	②	50	⑤
51	①	52	22	53	②	54	③	55	④
56	④	57	④	58	⑤	59	④	60	①
61	①	62	④	63	④	64	20	65	①
66	⑤	67	②	68	③	69	②	70	③
71	24	72	⑤	73	③	74	⑤	75	4
76	26	77	①	78	19	79	226	80	③
81	⑤	82	④	83	①	84	①	85	③
86	9	87	④	88	39	89	④	90	⑤
91	82	92	56	93	③	94	64	95	①
96	①	97	⑤	98	③	99	28	100	⑤
101	②	102	①	103	③	104	④	105	⑤
106	①	107	35	108	8	109	36	110	121
111	29	112	⑤	113	①	114	②	115	30
116	196	117	②	118	①	119	③	120	②
121	3	122	4	123	④	124	⑤	125	20
126	③	127	①	128	①	129	23	130	54
131	9	132	108	133	⑤	134	④	135	①
136	①	137	②	138	①	139	17	140	⑤
141	②	142	②	143	②	144	④	145	⑤
146	⑤	147	21	148	82	149	③	150	③
151	④	152	②	153	130	154	36	155	729
156	①	157	⑤	158	①	159	⑤	160	⑤
161	①	162	③	163	①	164	③	165	③
166	59	167	12	168	160	169	④	170	⑤
171	⑤	172	②	173	34	174	③	175	②
176	6	177	③	178	①	179	③		

F 적분

1	12	2	⑤	3	①	4	①	5	⑤
6	③	7	②	8	⑤	9	50	10	①
11	④	12	4	13	57	14	③	15	24
16	①	17	①	18	②	19	27	20	250
21	⑤	22	80	23	⑤	24	②	25	①
26	⑤	27	80	28	⑤	29	251	30	③
31	③	32	⑤	33	②	34	②	35	432
36	④	37	20	38	⑤	39	①	40	②
41	②	42	②	43	8	44	16	45	30
46	①	47	②	48	20	49	④	50	⑤
51	②	52	13	53	290	54	35	55	②
56	⑤	57	37	58	②	59	⑤	60	⑤
61	①	62	⑤	63	④	64	21	65	⑤
66	⑤	67	④	68	②	69	③	70	②
71	③	72	④	73	34	74	25	75	54
76	③	77	③	78	①	79	④	80	④
81	⑤	82	①	83	17	84	41	85	66
86	−1	87	137	88	32	89	②	90	12
91	⑤	92	182	93	200	94	54	95	17
96	④	97	36	98	③	99	2	100	27
101	340	102	11	103	②	104	32	105	②
106	64	107	18	108	②	109	③	110	②
111	⑤	112	①	113	11	114	8	115	16
116	14								

해설 목차

수학 I

수학 II

A 지수함수와 로그함수

1	⑤	2	⑤	3	③	4	64	5	①
6	4	7	③	8	③	9	②	10	⑤
11	②	12	②	13	3	14	③	15	②
16	17	17	③	18	62	19	16	20	⑤
21	⑤	22	①	23	④	24	②	25	②
26	①	27	②	28	②	29	973	30	56
31	②	32	①	33	④	34	③	35	②
36	81	37	250	38	②	39	④	40	①
41	②	42	①	43	②	44	6	45	③
46	②	47	16	48	20	49	④	50	12
51	③	52	④	53	①	54	28	55	⑤
56	64	57	⑤	58	25	59	⑤	60	45
61	46	62	②	63	12	64	①	65	7
66	193	67	217	68	72	69	127	70	⑤
71	⑤	72	②	73	①	74	35	75	②
76	③	77	④	78	③	79	⑤	80	31
81	⑤	82	③	83	⑤	84	4	85	③
86	③	87	8	88	③	89	③	90	③
91	④	92	①	93	③	94	②	95	③
96	②	97	①	98	③	99	⑤	100	60
101	78	102	④	103	②	104	①	105	①
106	128	107	3	108	⑤	109	④	110	①
111	④	112	④	113	⑤	114	⑤	115	③
116	⑤	117	③	118	③	119	75	120	②
121	⑤	122	⑤	123	54	124	40	125	⑤
126	①	127	6	128	4	129	⑤	130	11
131	②	132	②	133	①	134	②	135	③
136	③	137	9	138	13	139	⑤	140	⑤
141	③	142	③	143	⑤	144	②	145	③
146	④	147	③	148	④	149	⑤	150	24
151	12	152	③	153	⑤	154	②	155	⑤
156	②	157	⑤	158	③	159	②	160	①
161	③	162	②	163	⑤	164	②	165	5
166	③	167	①	168	⑤	169	②	170	④
171	19	172	10	173	④	174	5	175	⑤
176	②	177	5	178	②	179	③	180	49
181	⑤	182	①	183	16	184	16	185	4
186	75	187	⑤	188	①	189	10	190	⑤
191	52	192	9	193	12	194	②	195	②
196	②	197	④	198	②	199	25	200	12

201	④	202	③	203	25	204	⑤	205	12
206	⑤	207	②	208	②	209	①	210	③
211	24	212	②	213	4	214	③	215	15
216	①	217	④	218	⑤	219	16	220	①

A001 ㅣ답 ⑤

[풀이] ★

-2의 제곱근 중에서 실수는 없다.

-1의 제곱근 중에서 실수는 없다.

1의 제곱근 중에서 양의 실수는 1이다.

2의 제곱근 중에서 양의 실수는 $\sqrt{2}$이다.

집합 A는

$A=\{1,\ \sqrt{2}\}$

-2의 세제곱근 중에서 실수는 $-\sqrt[3]{2}$이다.

-1의 세제곱근 중에서 실수는 -1이다.

1의 세제곱근 중에서 실수는 1이다.

2의 세제곱근 중에서 실수는 $\sqrt[3]{2}$이다.

집합 B는

$B=\{-\sqrt[3]{2},\ -1,\ 1,\ \sqrt[3]{2}\}$

집합 $A\cup B$는

$A\cup B$

$=\{-\sqrt[3]{2},\ -1,\ 1,\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt{2}\}$

이므로 구하는 값은

$2^{2\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=2^{\frac{7}{6}}$

답 ⑤

A002 ㅣ답 ⑤

[풀이]

a^2은 $x^3=b$의 실근이므로

$(a^2)^3=b$

c^3은 $x^4=b$의 실근이므로

$(c^3)^4=b$

로그의 성질에 의하여

$\therefore\ \dfrac{q}{p}=\log_a(a^2)^3+\log_{(c^3)^4}c$

$=\log_a a^6+\log_{c^{12}}c$

$=6+\dfrac{1}{12}=\dfrac{73}{12}$

$\therefore\ p+q=85$

답 ⑤

A003 | 답 ③

[풀이]

(가): $b^2 = -\sqrt{8}a$, 즉 $b^4 = 8a^2$

(나): $(\sqrt[3]{a^2}b)^3 = -16$, 즉 $a^2b^3 = -16$

위의 두 등식을 연립하면

$\frac{b^4}{8}b^3 = -16$, $b^7 = -2^7$, $b = -2$, $a = -\sqrt{2}$

$\therefore\ a^3 - 2b = -2\sqrt{2} + 4$

답 ③

A004 | 답 64

[풀이] ★

방정식 $x^4 = k(>0)$의 네 근 중에서 실수인 두 근은 각각

$-\sqrt[4]{k}(=b)$, $\sqrt[4]{k}(=a)$

방정식 $x^3 = k(>0)$의 실근은

$\sqrt[3]{k}(=c)$

방정식 $x^3 = -k(<0)$의 실근은

$\sqrt[3]{-k}(= -\sqrt[3]{k} = d)$

정리하면

$a = \sqrt[4]{k}$, $b = -\sqrt[4]{k}$, $c = \sqrt[3]{k}$, $d = -\sqrt[3]{k}$

문제에서 주어진 등식에 대입하면

$$\log_2\frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[4]{k}} = \log_2\frac{-\sqrt[4]{k}}{-\sqrt[3]{k}} + 1$$

지수법칙에 의하여

$$\log_2 k^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = \log_2 k^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} + 1$$

로그의 성질에 의하여

$$\frac{1}{12}\log_2 k = -\frac{1}{12}\log_2 k + 1$$

정리하면

$\log_2 k = 6$

로그의 정의에 의하여

$\therefore\ k = 2^6 = 64$

답 64

A005 | 답 ①

[풀이]

문제에서 주어진 세 조건에 의하여

$\sqrt[3]{a} = \sqrt[m]{b}$, $\sqrt{b} = \sqrt[n]{c}$, $c = \sqrt[4]{a^{12}}$

즉,

$c = a^3$, $a = b^{\frac{3}{m}}$, $b = c^{\frac{2}{n}}$ 이므로

$c = a^3 = b^{\frac{9}{m}} = c^{\frac{18}{mn}}$ 에서

$\frac{18}{mn} = 1$, 즉 $mn = 18$

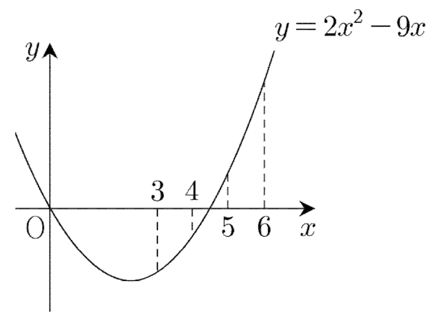
m이 가질 수 있는 값은 2, 3, 6, 9 뿐이므로

순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 4이다.

답 ①

A006 | 답 4

[풀이]



$x = 3,\ 4,\ 5,\ 6$일 때,

함수 $y = 2x^2 - 9x$의 부호가 각각 음(−), 음(−), 양(+), 양(+)이므로

$f(3) = 1$, (음수의 3제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.)

$f(4) = 0$, (음수의 4제곱근 중 실수인 것의 개수는 0이다.)

$f(5) = 1$, (양수의 5제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.)

$f(6) = 2$ (양수의 6제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.)

$\therefore\ f(3) + f(4) + f(5) + f(6)$

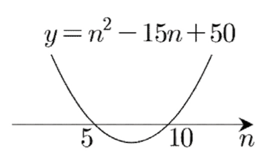
$= 1 + 0 + 1 + 2 = 4$

답 4

A007 | 답 ③

[풀이]

$n^2 - 15n + 50 = (n-5)(n-10)$ $\cdots(*)$



$f(4) = 2$ ($\because (*) > 0$)

$f(5) = 1$ ($\because (*) = 0$)

$f(6) = 0$ ($\because (*) < 0$)

$f(7) = 1$ ($\because (*) < 0$)

$f(8) = 0$ ($\because (*) < 0$)

$f(9)=1$ ($\because$ (*)<0)

$f(10)=1$ ($\because$ (*)$=0$)

$f(11)=1$ ($\because$ (*)>0)

$f(12)=2$ ($\because$ (*)>0)

$f(n)=f(n+1)$인 n은 9, 10 뿐이다.

따라서 구하는 값은 19이다.

답 ③

A008 ㅣ답 ③

[풀이]

2 이상의 자연수 n에 대하여

$(2n-5)(2n-9)\neq 0$

이제 다음의 두 경우를 생각하자.

- $(2n-5)(2n-9)>0 \Leftrightarrow n<\frac{5}{2}$ 또는 $n>\frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow n=2,\ 5,\ 6,\ \cdots$

이므로

$f(2)=2,\ f(6)=f(8)=2,\ f(5)=f(7)=1$

- $(2n-5)(2n-9)<0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}<n<\frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow n=3,\ 4$

이므로

$f(3)=1,\ f(4)=0$

$\therefore\ \sum_{n=2}^{8} f(n)=2+1+0+1+2+1+2=9$

답 ③

A009 ㅣ답 ②

[풀이]

문제에서 주어진 방정식을 풀면

$x^n=8,\ x^{2n}=8$

n이 홀수: $x=8^{\frac{1}{n}},\ x=\pm 8^{\frac{1}{2n}}$ (○)

모든 실근의 곱은 음수$(-)$이다.

n이 짝수: $x=\pm 8^{\frac{1}{n}},\ x=\pm 8^{\frac{1}{2n}}$ (×)

모든 실근의 곱은 양수$(+)$이다.

모든 실근의 곱은 -4이므로

$8^{\frac{1}{n}}\times 8^{\frac{1}{2n}}\times(-8^{\frac{1}{2n}})$

$=-8^{\frac{2}{n}}=-4,\ \frac{6}{n}=2,\ \therefore\ n=3$

답 ②

A010 ㅣ답 ⑤

[풀이]

집합 X의 원소는 b의 a제곱근 중에서 실수인 것이다.

$a=3$일 때, x의 값은

$\sqrt[3]{-9}\,(=-\sqrt[3]{9}),\ \sqrt[3]{-3}\,(=-\sqrt[3]{3}),\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{9}$

$a=4$일 때, x의 값은

$\pm\sqrt[4]{3},\ \pm\sqrt[4]{9}$

▸ ㄱ. (참)

$\sqrt[3]{-9}$는 집합 X의 원소이다.

▸ ㄴ. (참)

집합 X의 원소의 개수는 8이다.

▸ ㄷ. (참)

집합 X의 원소 중 양수인 모든 원소의 곱은

$\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}\times\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{9}$

$=3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}\times 3^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{2}{4}}=3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}}=3^{\frac{7}{4}}=\sqrt[4]{3^7}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

A011 ㅣ답 ②

[풀이]

$2^{n-3}-8=0(\cdots(*))$을 풀면 $n=6$

$n<6$이면 (*)<0

$n=6$이면 (*)$=0$

$n>6$이면 (*)>0

이므로

$f(2)=0,\ f(3)=1,\ f(4)=0,\ f(5)=1,$

$f(6)=1,$

$f(7)=f(9)=\ \cdots\ =1,\ f(8)=f(10)=\ \cdots\ =2$

$\sum_{n=2}^{m} f(n)$

$=0+1+0+1+1+1+2+1+2+1+2+1+2$

이때, 마지막 2는 $f(14)$이다.

$\therefore\ m=14$

답 ②

A012 ㅣ답 ②

[풀이]

〈과정〉

(ⅰ) $m>0$인 경우

n의 값 관계없이 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재한

다. 그러므로 $m>0$인 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $1\le m<n\le 10$에서 ${}_{10}C_2=\boxed{45}$이다. 즉, 10 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 개를 택하는 경우의 수이다.

(ii) $m<0$인 경우

n이 홀수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 항상 존재한다. 한편, n이 짝수이면 m의 n제곱근 중에서 실수인 것은 존재하지 않는다. 그러므로 $m<0$인 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $1\le -m<n\le 10$에서 $2+4+6+8=\boxed{20}$이다. 왜냐하면

$n=3$: $m=-1,\ -2$

$n=5$: $m=-1,\ -2,\ -3,\ -4$

$n=7$: $m=-1,\ -2,\ \cdots,\ -6$

$n=9$: $m=-1,\ -2,\ \cdots,\ -8$

(i), (ii)에 의하여 m의 n제곱근 중에서 실수인 것이 존재하도록 하는 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $\boxed{45}+\boxed{20}=65$이다.

(가): $p=45$

(나): $q=20$

$\therefore\ p+q=45+20=65$

답 ②

A013 | 답 3

[풀이]

n에 대한 이차방정식

$$n^2-17n+19k \qquad \cdots(*)$$

의 대칭축은 $n=\dfrac{17}{2}=8.5$이다.

$f(n)$이 가질 수 있는 값은 0, 1, 2뿐이다.

n이 홀수일 때, (*)의 부호와 관계없이 $f(n)=1$

n이 짝수일 때, (*)의 부호가 양(+)이면 $f(n)=2$, (*)의 부호가 음(−)이면 $f(n)=0$이다. (그리고 (*)의 부호가 0이면 $f(n)=1$이다.)

$n=8,\ 9$일 때, (*)의 부호가 양(+)이면

$f(2)+f(3)+f(4)+\ \cdots\ +f(18)+f(19)$

$=2+1+2+1+\ \cdots\ +1+2+1$

$=(2+1)\times 9=27(\ne 19)$

에서

$19=27-8=27-(2+2+2+2)$

이때, $f(6),\ f(8),\ f(10),\ f(12)$의 값이 모두 0이면 된다.

즉, $4^2-17\times 4+19k>0,\ 5^2-17\times 5+19k<0$

$\dfrac{52}{19}<k<\dfrac{60}{19}$

$\therefore\ k=3$

답 3

A014 | 답 ③

[풀이]

▶ ㄱ. (참)

거듭제곱근의 성질에 의하여

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt{a}}}=\sqrt{\frac{a}{\sqrt{a}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}}}=\sqrt{\sqrt{a}}=\sqrt[4]{a}$$

▶ ㄴ. (거짓)

$(\sqrt[3]{a})^4=\sqrt[3]{a^4}\ne\sqrt[12]{a}$

예를 들어 $a=8$일 때,

$(\sqrt[3]{a})^4=16\ne\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{a}$

($\because$ 유리수가 무리수일 수 없다. 이 역도 성립한다.)

▶ ㄷ. (참)

$$\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^4}\sqrt{a}}=\sqrt[3]{\sqrt{a^5}}=\sqrt[6]{a^5}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

A015 | 답 ②

[풀이]

지수법칙에 의하여

$$a^2b\times\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}=a^2b\times a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}=a^{2-\frac{1}{3}}b^{1+\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{5}{3}}$$

답 ②

A016 | 답 17

[풀이]

지수법칙에 의하여

$$\left\{\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}}\times\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^{-4}}\right\}^6$$

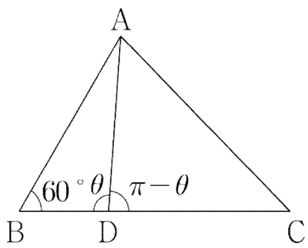
$$=\left(\sqrt{\frac{a^3}{a^{\frac{4}{3}}}}\times\sqrt{a^4}\right)^6$$

$$=\left(a^{\frac{1}{2}\left(3-\frac{4}{3}\right)}\times a^{\frac{4}{2}}\right)^6$$

$$=a^{6\left(\frac{5}{6}+2\right)}=a^{17}$$

$\therefore\ k=17$

답 17



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos 60^\circ = \dfrac{p^2+6^2-q^2}{2\times p\times 6}$,

$p^2-6p-q^2+36=0$ ⋯㉠

두 삼각형 ABD, ACD 각각에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{p}{\sin\theta}=2r_1$, $\dfrac{q}{\sin(\pi-\theta)}=2r_2$

$\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{q}{p}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$, 즉 $q=\dfrac{\sqrt{13}}{3}p$ ⋯㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$p^2-6p-\dfrac{13}{9}p^2+36=0$, $2p^2+27p-18\times 9=0$,

$(2p-9)(p+18)=0$, $p=\dfrac{9}{2}$

$\therefore\ p+q=11$

답 11

B118 | 답 50

[풀이]

코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=5^2+6^2-2\times 5\times 6\times\cos A$

$=25\left(\because \cos A=\dfrac{3}{5}\right)$, 즉 $\overline{\mathrm{BC}}=5$

사인법칙에 의하여

$\therefore\ 16R=\dfrac{8\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A}=\dfrac{8\times 5}{\frac{4}{5}}=50$

답 50

B119 | 답 7

[풀이]

이 삼각형의 세 변의 길이를 각각

$\overline{\mathrm{AB}}=k$, $\overline{\mathrm{BC}}=2k$, $\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{2}\,k$

로 두자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle\mathrm{ABC})=\dfrac{k^2+(2k)^2-(\sqrt{2}\,k)^2}{2\times k\times 2k}=\dfrac{3}{4}$

$\sin(\angle\mathrm{ABC})=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

외접원의 반지름의 길이를 R이라고 하면

$R^2\pi=28\pi$이므로 $R=2\sqrt{7}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{b}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=4\sqrt{7}$, $b=7$

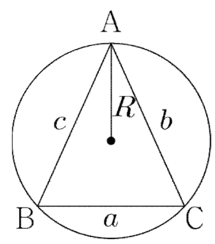
$\therefore\ \overline{\mathrm{CA}}=7$

답 7

B120 | 답 ⑤

[풀이]

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라고 하자. 그리고 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 아래 그림과 같다고 하자. 이때, $b=c$이다.



사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a}{2c}$

$\therefore\ \log_2\sin A-\log_2\cos B-\log_2\sin C$

$=\log_2\dfrac{A}{BC}=\log_2\dfrac{\frac{a}{2R}}{\frac{a}{2c}\times\frac{c}{2R}}$

$=\log_2 2=1$

답 ⑤

B121 | 답 ②

[풀이]

사인법칙에 의하여

$\dfrac{10}{\sin C}=6\sqrt{5}$, 즉 $\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos C=\dfrac{2}{3}$

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-10^2}{2ab} = \frac{2}{3} \quad \cdots ㉠$$

$\cos C = \frac{2}{3}$를 문제에서 주어진 등식에 대입하면

$$\frac{a^2+b^2-ab\times\frac{2}{3}}{ab} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{a^2+b^2}{ab} = 2,\ 즉\ a^2+b^2 = 2ab \quad \cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\frac{2ab-10^2}{2ab} = \frac{2}{3}$$

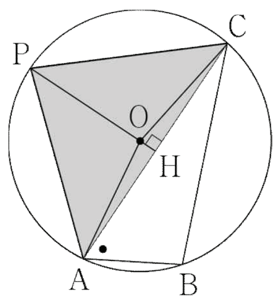
$\therefore\ ab = 150$

답 ②

B122 | 답 ①

[풀이]

원 C의 반지름의 길이를 R, 점 P에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라고 하자. (아래 그림처럼 삼각형 PAC의 넓이가 최대일 때, 세 점 P, O, H는 한 직선 위에 있다.)



(단, ●$=60^\circ$)

원의 넓이의 공식에 의하여

$$\pi R^2 = \frac{49}{3}\pi,\quad R = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin 60^\circ} = 2R,\quad \overline{\mathrm{BC}} = 7$$

$\overline{\mathrm{AC}} = x$로 두자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos 60^\circ = \frac{3^2+x^2-7^2}{2\times3\times x},\quad x^2-3x-40=0,$$

$(x+5)(x-8)=0,\ x=8$

이제 삼각형 PAC의 넓이가 최대일 때를 생각하자.

삼각형 OHC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{OH}} = \sqrt{\frac{49}{3}-16} = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \overline{\mathrm{PH}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

따라서 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은

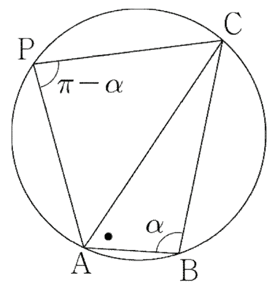
$$\frac{1}{2}\frac{8}{\sqrt{3}}8 = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

답 ①

[참고]

삼각형 PAC의 넓이의 최댓값을 다음과 같이 구할 수도 있다.

$\angle \mathrm{ABC} = \alpha$로 두자. 이때, 사각형 ABCP는 원에 내접하므로 $\angle \mathrm{CPA} = \pi - \alpha$이다.



(단, •$=60^\circ$)

삼각형 PAC의 넓이가 최대이므로

$\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PC}}(=k)$

이다. 왜냐하면 점 P에서의 접선은 직선 AC와 평행하기 때문이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\alpha = \frac{3^2+7^2-8^2}{2\times3\times7} = -\frac{1}{7},\quad \sin\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

삼각형 PAC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\pi-\alpha) = \frac{2k^2-8^2}{2k^2} = \frac{1}{7},\quad k^2 = \frac{112}{3}$$

따라서 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}k^2\sin(\pi-\alpha) = \frac{56}{3}\sin\alpha = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

B123 | 답 71

[풀이]

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 a, b, c, 외접원의 반지름의 길이를 R이라고 하자.

조건 (가)에서

$$\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = -\frac{1}{4} \quad \cdots ㉠$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$a=\dfrac{\sqrt{15}}{2}R$, $\cdots$㉡

$\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

조건 (나)에서

$\sin B+\sin C=\dfrac{b+c}{2R}=\dfrac{9}{8}$, 즉 $b+c=\dfrac{9}{4}R$ $\cdots$㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$$\frac{(b+c)^2-2bc-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{\left(\frac{9}{4}R\right)^2-2bc-\left(\frac{\sqrt{15}}{2}R\right)^2}{2bc}=-\frac{1}{4}$$

즉, $bc=\dfrac{7}{8}R^2$

($\triangle$ABC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{7}{8}R^2\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{15}$, $R^2=\dfrac{64}{7}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi R^2=\dfrac{64}{7}\pi$

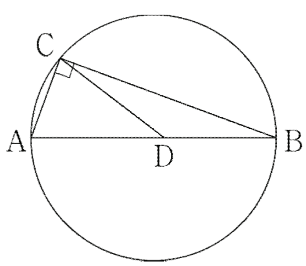
$\therefore$ $p+q=71$

답 71

B124 | 답 27

[풀이]

선분 AB는 원의 지름이므로 $\angle$ACB$=90^\circ$이다.



직각삼각형 ABC의 세 변의 길이의 비는

$3:1:2\sqrt{2}$이므로

$\overline{\text{AB}}=18$, $\overline{\text{AD}}=18\times\dfrac{5}{9}=10$, $\overline{\text{AC}}=6$

삼각형 CAD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\text{CD}}^2=6^2+10^2-2\times6\times10\times\cos(\angle\text{CAB})$

$=136-120\times\dfrac{1}{3}=96$, $\overline{\text{CD}}=4\sqrt{6}$

삼각형 CAD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{4\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=2R,\ R=3\sqrt{3}$$

$\therefore$ $\dfrac{S}{\pi}=(3\sqrt{3})^2=27$

답 27

B125 | 답 ④

[풀이]

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\text{BC}}^2=3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos\dfrac{\pi}{3}=7$

즉, $\overline{\text{BC}}=\sqrt{7}$

$\overline{\text{BP}}:\overline{\text{PC}}=3:1$이므로 $\overline{\text{PC}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\angle$PAC$=30^\circ$이므로

삼각형 APC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\sin30^\circ}=2R,\ R=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

따라서 구하는 넓이를 S라고 하면

$\therefore$ $S=\dfrac{7}{16}\pi$

답 ④

[참고]

선분 PC의 길이를 다음과 같이 구해도 좋다.

$\overline{\text{AP}}=x$로 두자.

($\triangle$ABC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times3\times1\times\sin60^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times3\times x\times\sin30^\circ+\dfrac{1}{2}\times x\times1\times\sin30^\circ$

즉, $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3x}{4}+\dfrac{x}{4}$, $x=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

삼각형 APC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\text{PC}}^2=\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2+1^2-2\times\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\times1\times\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7}{16}$

즉, $\overline{\text{PC}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

B126 | 답 150

[풀이1]

사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결하자.

서로 합동인 두 원의 반지름의 길이를 r이라고 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\,\overline{BC}\cos\frac{\pi}{3}$

$=(2r)^2+(r+2\sqrt{3})^2-2(2r)(r+2\sqrt{3})\frac{1}{2}$

즉, $24=3r^2+12$, $r=2(r>0)$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin C}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}$, 즉 $\frac{4}{\sin C}=\frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$,

$\sin C=\frac{\pi}{4}$, $\angle \mathrm{CAB}=\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{12}\pi$

따라서 두 부채꼴의 넓이의 합은

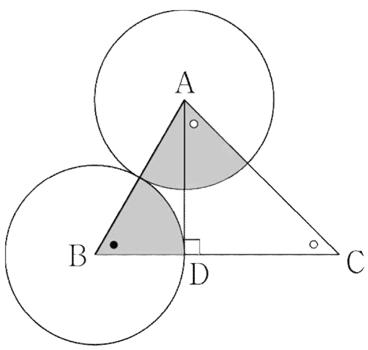
$\frac{1}{2}\times 2^2\times\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5}{12}\pi\right)=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore\ 100k=150$

답 150

[풀이2]

사인법칙과 코사인법칙을 이용하지 않고 문제를 해결하자.



(단, ●$=60^\circ$, ○$=45^\circ$)

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발은 D이다.

왜냐하면 $\overline{AB}:\overline{BD}=2:1$이고, $\angle \mathrm{ABD}=60^\circ$이기 때문이다.

이때, 삼각형 ABD는 직각삼각형이고, 삼각형 ADC는 직각이등변삼각형이다.

따라서 두 부채꼴의 넓이의 합은

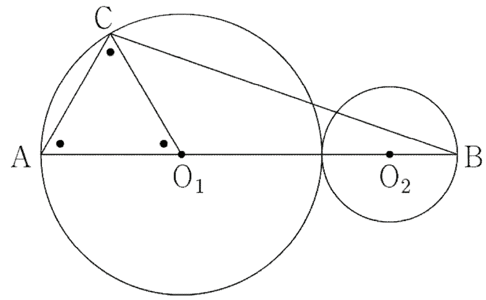
$\frac{1}{2}\times 2^2\times\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore\ 100k=150$

답 150

B127 | 답 ⑤

[풀이]



(단, ●$=60^\circ$)

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=6^2+2^2-2\times 6\times 2\times\cos\frac{\pi}{3}=28$

즉, $\overline{BC}=2\sqrt{7}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R$, $R=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

위의 그림에서 삼각형 AO_1C는 정삼각형이므로

원 O_1의 반지름의 길이는 2이고, 원 O_2의 반지름의 길이는 1이다.

$\therefore\ 3R^2+r_1^2+r_2^2=28+4+1=33$

답 ⑤

B128 | 답 ②

[풀이]

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 a, b, c라고 하면

사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

이므로 $a:b:c=2:3:4$이다.

$a=2k$, $b=3k$, $c=4k$로 두면

코사인법칙에 의하여

$\therefore\ \cos C=\frac{(2k)^2+(3k)^2-(4k)^2}{2\times 2k\times 3k}=-\frac{1}{4}$

답 ②

B129 | 답 ③

[풀이]

$\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라고 하자.

사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=6$

$\sin A=\dfrac{a}{6},\ \sin B=\dfrac{b}{6},\ \sin C=\dfrac{c}{6}$

(가): $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$

$(\because 1-\cos^2\theta=\sin^2\theta)$

$a^2+b^2=c^2$ …㉠

즉, 삼각형 ABC는 $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

이때, 선분 $\overline{AB}$는 외접원의 지름이므로

$\overline{AB}=6(=c)$

(나): $2\sqrt{2}\times\dfrac{b}{6}+2\times\dfrac{a}{6}+\sqrt{2}\times 0=2\sqrt{3}$

$\sqrt{2}b+a=6\sqrt{3}$ …㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(6\sqrt{3}-\sqrt{2}b)^2+b^2=36$,

$b^2-4\sqrt{6}b+24=0$, $(b-2\sqrt{6})^2=0$,

$b=2\sqrt{6}$, $a=2\sqrt{3}$

$\therefore$ (△ABC의 넓이)

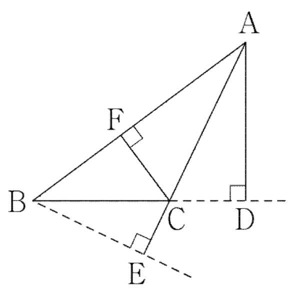
$=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{6}=6\sqrt{2}$

답 ③

B130 | 답 35

[풀이] ★

세 점 A, B, C에서 세 대변 (또는 그 연장선)에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라고 하자.



삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$S=\dfrac{1}{2}\overline{AD}\,\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\overline{BE}\,\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\overline{CF}\,\overline{AB}$

즉, $\overline{AD}=\dfrac{2S}{\overline{BC}}$, $\overline{BE}=\dfrac{2S}{\overline{AC}}$, $\overline{CF}=\dfrac{2S}{\overline{AB}}$

주어진 조건에 의하여

$\dfrac{2S}{\overline{AB}}:\dfrac{2S}{\overline{AC}}:\dfrac{2S}{\overline{BC}}=2:3:4$

즉, $\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{4}=6k:4k:3k$

$\angle BCA=\theta$이므로 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{(4k)^2+(3k)^2-(6k)^2}{2\times 4k\times 3k}=-\dfrac{11}{24}$

$\therefore\ p+q=35$

답 35

B131 | 답 ④

[풀이]

$\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$,

$\triangle ABC$의 넓이를 S라고 하자.

$S=\dfrac{1}{2}a\overline{AD}=\dfrac{1}{2}b\overline{BE}=\dfrac{1}{2}c\overline{CF}$

$\overline{AD}:\overline{BE}:\overline{CF}=\dfrac{2S}{a}:\dfrac{2S}{b}:\dfrac{2S}{c}=2:3:4$

이므로

$a:b:c=6:4:3$

이제 $a=6k$, $b=4k$, $c=3k$로 두자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\therefore\ \cos C=\dfrac{(6k)^2+(4k)^2-(3k)^2}{2\times 6k\times 4k}=\dfrac{43}{48}$

답 ④

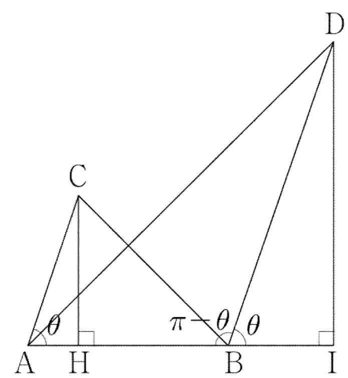
B132 | 답 15

[풀이]

점 D에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 I라 하자. 이때, 두 삼각형 CAH, DBI는 서로 닮음이고, 그 닮음비는 1:2이다.

$\angle CAH=\theta$로 두면 $\angle DBI=\theta$, $\angle ABD=\pi-\theta$이다.

그리고 $\overline{AC}=p$로 두면 $\overline{BD}=2p$이다.



문제에서 주어진 조건에 의하여

$\overline{AH}=\dfrac{1}{2}\left(=\dfrac{1}{4}\overline{AB}\right)$, $\overline{HB}=\dfrac{3}{2}$

두 삼각형 ABC, ABD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2r$, $\dfrac{\overline{AD}}{\sin(\pi-\theta)}=2R$

$4(R^2-r^2)\sin^2\theta=\overline{AD}^2-\overline{BC}^2=51$

즉, $\overline{AD}^2-\overline{BC}^2=51$

한편 두 삼각형 ABC, ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=p^2+2^2-2\times p\times 2\times\cos\theta$,

$=p^2+2$

$(\because \cos\theta=\dfrac{1}{2p})$

$\overline{AD}^2=(2p)^2+2^2-2\times 2p\times 2\times\cos(\pi-\theta)$

$=4p^2+8$

$(\because \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta)$

이므로

$3p^2+6=51$, $p^2=15$

$\therefore$ $\overline{AC}^2=15$

답 15

B133 | 답 ④

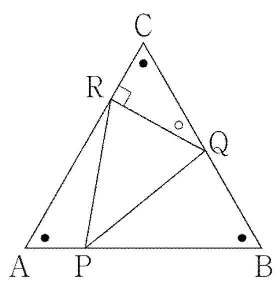
[풀이]

$\overline{AP}=p$, $\overline{BQ}=q$, $\overline{CR}=r$로 두자.

이때,

$\overline{PB}=1-p$, $\overline{QC}=1-q$, $\overline{RA}=1-r$

이고, $p+q+r=1$ $\cdots(*)$



(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$)

▸ ㄱ. (거짓)

두 삼각형 APR, PBQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PR}^2=p^2+(1-r)^2-2p(1-r)\cos 60^\circ$

$=p^2+(p+q)^2-p(p+q)$ $(\because (*))$

$\overline{PQ}^2=(1-p)^2+q^2-2(1-p)q\cos 60^\circ$

$=(1-p)^2+q^2-(1-p)q$

$\overline{PQ}=\overline{PR}$이므로

$p^2+(p+q)^2-p(p+q)$

$=(1-p)^2+q^2-(1-p)q$

정리하면

$2p+q=1$, 즉 $2\overline{AP}+\overline{BQ}=1$ $\cdots$ ㉠

그런데

$3\overline{AP}+2\overline{BQ}$

$=3p+2q=3p+2(1-2p)=2-p<2$

이므로

$\therefore$ $3\overline{AP}+2\overline{BQ}\neq 2$

▸ ㄴ. (참)

(*), ㉠을 연립하면

$\overline{CQ}=1-q=2p$,

$\overline{CR}=r=1-p-q=1-p-(1-2p)=p$

그리고 $\angle QCR=60^\circ$ 이므로

삼각형 CRQ는 직각삼각형이고,

$\overline{QR}=\sqrt{3}p$

$\therefore$ $\overline{QR}=\sqrt{3}\times\overline{AP}(=\sqrt{3}p)$

▸ ㄷ. (참)

두 삼각형 PBQ, CRQ의 외접원의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2라고 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{PQ}}{\sin 60^\circ}=2R_1$, $R_2=\dfrac{1}{2}\overline{CQ}=p$

즉, $R_1=\dfrac{\overline{PQ}}{\sqrt{3}}$, $R_2=p$

그런데 $R_1=\sqrt{2}R_2$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{6}p$

보기 ㄱ에서 유도된 등식에서

$\overline{PQ}^2=(1-p)^2+q^2-(1-p)q$

$=(1-p)^2+(1-2p)^2-(1-p)(1-2p)$

$=6p^2$ $(\because q=1-2p)$

정리하면

$3p^2+3p-1=0$

$\therefore$ $p=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}$

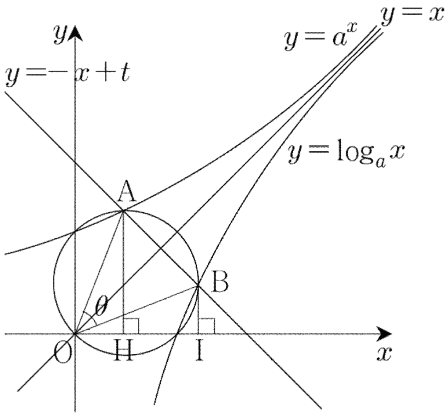
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

B134 | 답 50

[풀이]

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 I라고 하자.



조건 (가)에서

$\overline{OH}=k$로 두면 $\overline{AB}=2k$이므로

$\overline{OI}=k+\sqrt{2}k$, $\overline{BI}=k$

($\because$ 점 A의 x좌표와 점 B의 y좌표는 같다.)

직각삼각형 BOI에서

$\overline{OB}^2=\{(1+\sqrt{2})^2+1^2\}k^2=(4+2\sqrt{2})k^2$

두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로

$\overline{OA}^2=(4+2\sqrt{2})k^2$

삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{2(4+2\sqrt{2})k^2-(2k)^2}{2\times(4+2\sqrt{2})k^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 즉

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

삼각형 AOB에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{2k}{\sin\theta}=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $k=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$

점 A는 직선 $y=-x+t$ 위에 있으므로

$t=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

점 A는 곡선 $y=a^x$ 위에 있으므로

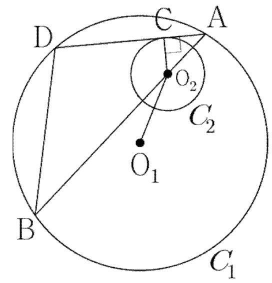
$a^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$, $a=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{4}$

$\therefore$ $200(t-a)=200\times\dfrac{1}{4}=50$

답 50

B135 | 답 ④

[풀이]



삼각형 ADB에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BD}}{\sin A}=\boxed{2r}$

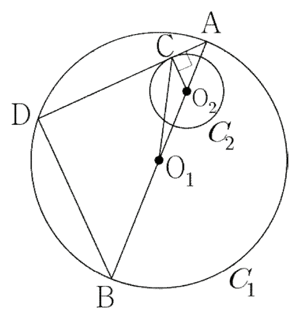
이므로 $\overline{BD}$가 최대이려면 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접해야 한다.

($\because$ 직선 AD가 점 C에서 원 C_2에 접한다. $\Leftrightarrow$ $\angle$BAD의 크기가 최대이다.)

이때 직각삼각형 $\mathrm{ACO_2}$에서 $\sin A=\dfrac{1}{\overline{AO_2}}$이므로

$\overline{BD}=\dfrac{1}{\overline{AO_2}}\times\boxed{2r}$

이다.



그러므로 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접하고 $\overline{AO_2}$가 최소일 때 $\overline{BD}$는 최대이다.

$\overline{AO_2}$의 최솟값은

$\boxed{r-2}$ $(=\overline{AO_1}-\overline{O_2O_1})$

(위의 그림처럼 세 점 A, O_2, O_1이 한 직선 위에 있을 때이다.)

이므로 $\overline{BD}$가 최대일 때, 코사인법칙에 의하여

$\overline{O_1C}^2=r^2+(r-2)^2-1^2$

$-2\times r\times\sqrt{(r-2)^2-1^2}\times\dfrac{\sqrt{(r-2)^2-1^2}}{r-2}$

$=\boxed{r^2+(r-2)^2-1-2\times\dfrac{r}{r-2}\times\{(r-2)^2-1\}}$

이다.

(가): $f(r)=2r$

(나): $g(r)=r-2$

(다): $h(r)$

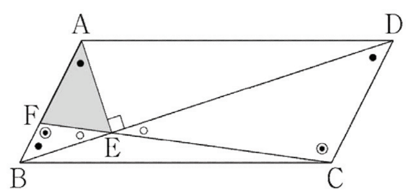
$=r^2+(r-2)^2-1-2\times\dfrac{r}{r-2}\times\{(r-2)^2-1\}$

$\therefore\ f(4)\times g(5)\times h(6)=8\times3\times6=144$

답 ④

B136 | 답 ①

[풀이]



(단, ●$=45^\circ$)

삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{10}{\sin(\angle \mathrm{CDE})}=10\sqrt{2}$, $\sin(\angle \mathrm{CDE})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\angle \mathrm{CDE}=45^\circ$ (=●)

평행선의 성질에 의하여

$\angle \mathrm{ABD}=45^\circ$ (=●)$=\angle \mathrm{CDE}$ (엇각)

직각삼각형 ABE에서

$\angle \mathrm{EAB}=45^\circ$ (=●)

평행선의 성질에 의하여

$\angle \mathrm{ECD}=\angle \mathrm{EFB}$(=◉)

$\cos(\angle \mathrm{ECD})=\cos(\pi-\angle \mathrm{AFC})$

$=-\cos(\angle \mathrm{AFC})=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$에서

$\sin(\angle \mathrm{ECD})=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{DE}}}{\frac{3}{\sqrt{10}}}=10\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{DE}}=6\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{CD}}=x$로 두자.

삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의하여

$10^2=(6\sqrt{5})^2+x^2-2\times6\sqrt{5}\times x\times\cos45^\circ$

$x^2-6\sqrt{10}x+80=0$,

$(x-2\sqrt{10})(x-4\sqrt{10})=0$,

$x=2\sqrt{10}\ (\because x<10)$

$\overline{\mathrm{AE}}=k$로 두자.

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}k=2\sqrt{10}$, $k=2\sqrt{5}$

서로 닮음인 두 삼각형 DEC, BEF의 닮음비는

$3:1(=\overline{\mathrm{DE}}:\overline{\mathrm{EB}})$이므로

$\overline{\mathrm{AF}}=\dfrac{2}{3}\times2\sqrt{10}=\dfrac{4}{3}\sqrt{10}$

$\therefore$ ($\triangle$AFE의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\sqrt{10}\times2\sqrt{5}\times\sin45^\circ$

$=\dfrac{20}{3}$

답 ①

B137 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$a=5$이면 삼각형 ABC는 $\angle \mathrm{A}=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

이때, 선분 BC가 원의 지름이므로

$R=\dfrac{a}{2}=\dfrac{5}{2}$

▸ ㄴ. (참)

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin A}=2R$, 즉 $a=8\sin A$

▸ ㄷ. (참)

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle \mathrm{A})=\dfrac{3^2+4^2-a^2}{2\times3\times4}=\dfrac{25-a^2}{24}$

$\dfrac{1}{2}\le\dfrac{25-a^2}{24}<1$이므로 $\angle$A의 최댓값은 60° 이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

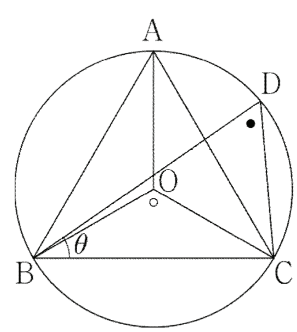
B138 | 답 ①

[풀이]

한 변의 길이가 r인 정삼각형의 외접원의 반지름의 길이는

$\sqrt{3}r$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{3}r$



(단, ●$=60^\circ$, ○$=120^\circ$)

원주각과 중심각의 관계에 의하여

$\bullet=60^\circ$

삼각형 DBC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\sqrt{3}r}{\sin60^\circ}=\dfrac{\overline{CD}}{\sin\theta}$, $\overline{DC}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$

삼각형 DBC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DC}^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}r)^2-2\sqrt{2}\sqrt{3}r\times\cos\theta$

즉, $\dfrac{4}{3}r^2=2+3r^2-4r$ $\left(\because \cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$5r^2-12r+6=0$

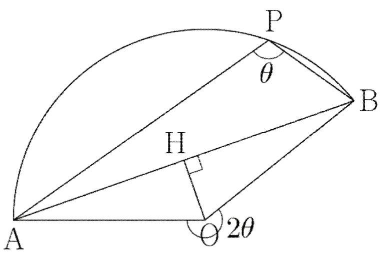
$\therefore\ r=\dfrac{6-\sqrt{6}}{5}$

답 ①

B139 | 답 ⑤

[풀이]

점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H, $\overline{AP}=3k$, $\overline{BP}=k$로 두자. 이때, 점 H는 선분 AB의 중점이다.



원주각과 중심각의 관계에 의하여

$\angle AOB=2\times\angle APB=2\theta$ (위의 그림)

$\angle AOH=\pi-\theta$

직각삼각형 AOH에서

$\overline{AH}=6\sin(\pi-\theta)=6\sin\theta$

$\overline{AB}=2\overline{AH}=12\sin\theta=8\sqrt{2}$,

$\sin\theta=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$, $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$

삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=-\dfrac{1}{3}=\dfrac{k^2+(3k)^2-(8\sqrt{2})^2}{2\times k\times 3k}$, $k^2=\dfrac{32}{3}$

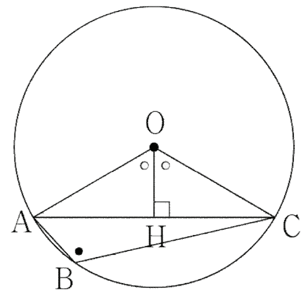
$\therefore\ \overline{BP}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

답 ⑤

B140 | 답 ⑤

[풀이]

점 O에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 그리고 두 선분 AB, BC의 길이를 각각 p, q라고 하자.



(단, $\circ=60^\circ$, $\bullet=120^\circ$)

중심각과 원주각의 관계에 의하여

호 AC의 중심각의 크기가 240° 이므로

$\angle COA=120^\circ$ $(=360^\circ-240^\circ)$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{AH}=2\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{AC}=4\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{3})^2=p^2+q^2-2pq\cos120^\circ$

$48=(p+q)^2-pq$

즉, $pq=12$ $(\because p+q=2\sqrt{15})$

$\therefore$ (□OABC의 넓이)

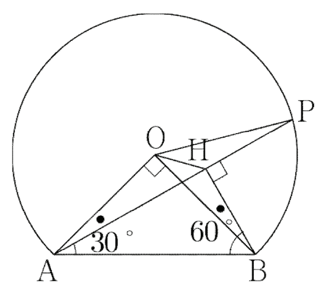
$=\dfrac{1}{2}\times4^2\times\sin120^\circ+\dfrac{1}{2}\times pq\times\sin120^\circ$

$=4\sqrt{3}+3\sqrt{3}=7\sqrt{3}$

답 ⑤

B141 | 답 20

[풀이]



(단, $\bullet=15^\circ$)

위의 그림과 같이

$\angle OAH=\angle OBH=15^\circ$

두 삼각형 OAH, OBH에서 코사인법칙에 의하여

$\cos15^\circ$

$=\dfrac{2^2+(\sqrt{6})^2-\overline{OH}^2}{2\times2\times\sqrt{6}}=\dfrac{2^2+(\sqrt{2})^2-\overline{OH}^2}{2\times2\times\sqrt{2}}$

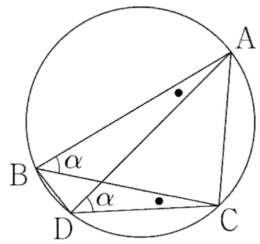
$\therefore\ \overline{OH}^2=4-2\sqrt{3}$

$\therefore\ m^2+n^2=20$

답 20

B142 | 답 63

[풀이]



원주각의 성질에 의하여

$\angle \mathrm{ADC} = \alpha = \angle \mathrm{ABC}$,

$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{BCD} = \bullet$

$\overline{\mathrm{AD}} = p$, $\overline{\mathrm{BC}} = q$라고 하면

$S_1 : S_2 = 6p : 4q = 9 : 5$, 즉

$\dfrac{p}{q} = \dfrac{6}{5}$ $\left(= \dfrac{6k}{5k}\right.$로 두자.)

코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2 = 6^2 + q^2 - 2 \times 6 \times q \times \cos\alpha$

$= 36 + 25k^2 - 45k$

$\overline{\mathrm{AC}}^2 = 4^2 + p^2 - 2 \times 4 \times p \times \cos\alpha$

$= 16 + 36k^2 - 36k$

$\left(\because\ p = 6k,\ q = 5k,\ \cos\alpha = \dfrac{3}{4}\right)$

두 등식을 변변히 빼서 정리하면

$11k^2 + 9k - 20 = 0$, $(11k + 20)(k - 1) = 0$

풀면 $k = 1$, $p = 6$

$S = \dfrac{1}{2} \times p \times 4 \times \sin\alpha$

$= \dfrac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \dfrac{\sqrt{7}}{4} = 3\sqrt{7}$

$\therefore\ S^2 = 63$

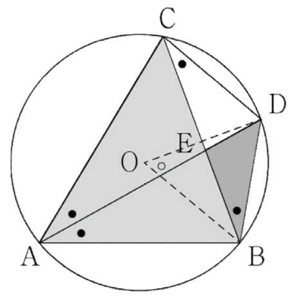
답 63

B143 | 답 ⑤

[풀이]

원 C의 중심을 O라고 하자.

ㄱ. (참)



(단, $\bullet = 30^\circ$, $\circ = 60^\circ$)

원주각과 중심각의 관계에 의하여

$\angle \mathrm{DOB} = 2\angle \mathrm{DAB} = 60^\circ$

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle \mathrm{DAB})} = 2R$, 즉 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin(\angle \mathrm{DAB})} = 2 \times \sqrt{3}$

$\sin(\angle \mathrm{DAB}) = \dfrac{1}{2} = \sin(\angle \mathrm{DBE})$

$(\because\ \overparen{\mathrm{CD}} = \overparen{\mathrm{DB}})$

ㄴ. (참)

이등변삼각형 DCB에서 $\overline{\mathrm{BC}} = 3 (= \sqrt{3} \times \sqrt{3})$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$3^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AC}}\cos 60^\circ$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AC}} + 9$

ㄷ. (참)

네 선분 AE, BE, DE, CE의 길이를 각각 a, b, c, d라고 하자.

그리고 $\angle \mathrm{AEB} = \theta$로 두자.

$ac = bd$ $\cdots$ ㉠

$(\triangle \mathrm{ABC}$의 넓이$) = \dfrac{1}{2}a(b + d)\sin\theta$

$= 4 \times \dfrac{1}{2}bc\sin\theta = 4 \times (\triangle \mathrm{BDE}$의 넓이$)$

$3a = 4bc$ $(\because\ b + d = 3)$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$3\dfrac{bd}{c} = 4bc$, $3d = 4c^2$, $3(3 - b) = 4c^2$ $\cdots$ ㉢

삼각형 BDE에서 코사인법칙에 의하여

$c^2 = b^2 + 3 - 2\sqrt{3}\,b\cos 30^\circ$, 즉

$c^2 = b^2 + 3 - 3b$ $\cdots$ ㉣

㉢, ㉣을 연립하면

$3(3 - b) = 4b^2 + 12 - 12b$, $4b^2 - 9b + 3 = 0$

따라서 구하는 값은 $\dfrac{9}{4}$이다.

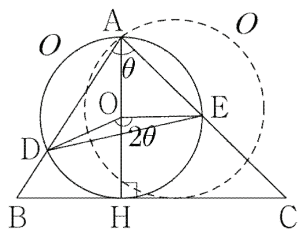
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

B144 | 답 ⑤

[풀이] ★

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 원의 중심을 O라고 하자.



$\angle CAB = \theta$로 두면

중심각과 원주각의 관계에 의하여

$\angle EOD = 2\theta$(상수)

선분 DE의 길이는 원 O의 반지름의 길이가 최소일 때 최소가 된다.

따라서 원 O의 지름이 AH일 때 선분 DE의 길이는 최소가 된다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \frac{5^2+6^2-7^2}{2\times5\times6} = \frac{1}{5},\ \sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$(\triangle ABC\text{의 넓이}) = \frac{1}{2}\times\overline{AH}\times7 = \frac{1}{2}\times5\times6\times\sin\theta$$

즉, $\overline{AH} = \dfrac{12\sqrt{6}}{7}$

삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여

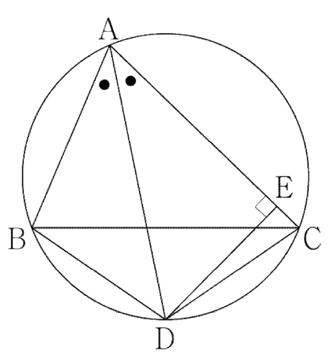
$\dfrac{\overline{DE}}{\sin\theta} = \overline{AH}$, 즉

$$\therefore\ \overline{DE} = \frac{12\sqrt{6}}{7}\times\frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{144}{35}$$

답 ⑤

B145 | 답 84

[풀이]



●$=\theta$, $\overline{AD}=a$로 두자.

두 호 BD, DC에 대한 원주각이 같으므로

$\overline{BD}=\overline{DC}(=b$로 두자.)

두 삼각형 ABD, ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \frac{6^2+a^2-b^2}{2\times6\times a} = \frac{8^2+a^2-b^2}{2\times8\times a}$$

정리하면

$$a^2-b^2=48,\ \cos\theta=\frac{7}{a},\ a\cos\theta=7$$

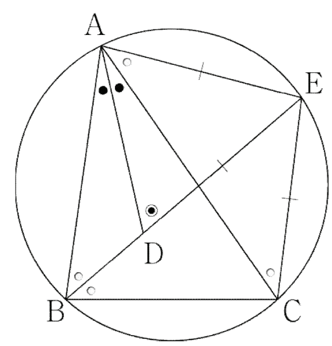
$\therefore\ 12k = 12a\cos\theta = 12\times7 = 84$

답 84

B146 | 답 ②

[풀이]

원주각의 성질, 삼각형의 외각의 정의, 이등변삼각형의 성질을 이용하면 다음과 같이 각의 크기(○, ◉)를 결정할 수 있다.



(단, ◉= ○+ ●)

▸ ㄱ. (참)

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2 = 5^2+4^2-2\times5\times4\times\cos(\angle ABC)$

$=36$

$\therefore\ \overline{AC}=6$

▸ ㄴ. (참)

원의 중심을 O라고 하자.

$\angle ABE = \angle EBC$이므로

$\angle AOE = \angle EOC$

$\therefore\ \overline{EA}=\overline{EC}$

▸ ㄷ. (거짓)

$\overline{ED}=x$로 두면 $\overline{EA}=\overline{EC}=x$이다.

삼각형 AEC에서 코사인법칙에 의하여

$6^2 = x^2+x^2-2x^2\cos(\angle AEC)$

$36 = 2x^2+\dfrac{x^2}{4}(\because\ \angle AEC = 180^\circ - \angle ABC)$

$x=4$

$\therefore\ \overline{ED}=4$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

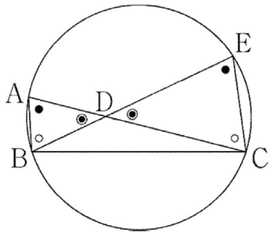
답 ②

B147 | 답 191

[풀이]

원주각의 성질과 맞꼭지각의 성질에 의하여 아래 그림과 같이 각의 크기(●, ○, ◉)가 결정된다.

$\overline{\mathrm{CD}}=a$, $\overline{\mathrm{CE}}=b$로 두자.



삼각형 DCE에서 코사인법칙에 의하여

$a^2=5^2+b^2-2\times5\times b\times\dfrac{\sqrt3}{6}$

위의 등식에 $a=5\sqrt3-b$를 대입하면

$(5\sqrt3-b)^2=5^2+b^2-2\times5\times b\times\dfrac{\sqrt3}{6}$

풀면

$b=2\sqrt3$, $a=3\sqrt3$

서로 닮음인 두 삼각형 ABD, ECD의 닮음비는

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{EC}}=1:\sqrt3$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{5}{\sqrt3}$,

$\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{14}{3}\sqrt3$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=2^2+\left(\dfrac{14}{\sqrt3}\right)^2-2\times2\times\dfrac{14}{\sqrt3}\times\dfrac{\sqrt3}{6}$

$=60$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{15}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{2\sqrt{15}}{\dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt3}}=2R$, $R=\dfrac{6\sqrt5}{\sqrt{11}}$

구하는 원의 넓이는

$\pi R^2=\dfrac{180}{11}$

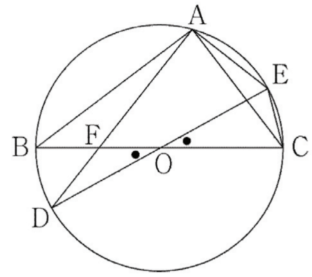
$\therefore\ p+q=191$

답 191

B148 | 답 6

[풀이]

원의 중심을 O라고 하자.



삼각형 ACE에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{CE}}}{\frac14}=4$, $\overline{\mathrm{CE}}=1(=\overline{\mathrm{BF}})$, $\overline{\mathrm{FC}}=3$

삼각형 OCE에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle\mathrm{EOC})=\dfrac{2^2+2^2-1^2}{2\times2\times2}=\dfrac78$

이제 $\overline{\mathrm{FD}}=x$로 두자.

삼각형 FDO에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle\mathrm{DOF})=\dfrac{1^2+2^2-x^2}{2\times1\times2}=\dfrac78$

($\because\ \angle\mathrm{EOC}=\angle\mathrm{DOF}$ (맞꼭지각의 성질))

$x=\dfrac{\sqrt3}{\sqrt2}$

$\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{BF}}\times\overline{\mathrm{FC}}$, 즉

$\overline{\mathrm{AF}}\times\dfrac{\sqrt3}{\sqrt2}=1\times3$, $\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt6$

$\therefore\ k^2=6$

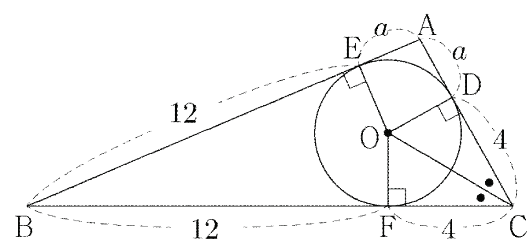
답 6

B149 | 답 ②

[풀이]

내접원의 중심을 O, 점 O에서 삼각형의 세 변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라고 하자. (아래 그림)

그리고 $\overline{\mathrm{AD}}=a$로 두자.



(단, ● $=30^\circ$)

직각삼각형 OCF에서 삼각비의 정의에 의하여

$\tan(\angle\mathrm{OCF})=\dfrac{\sqrt3}{3}$, 즉 $\angle\mathrm{OCF}=30^\circ$ (= ●)

내접원의 정의에 의하여

$\angle\mathrm{OCD}=30^\circ$ (= ●)이므로 $\angle\mathrm{ACB}=60^\circ$

$=2\times\frac{10\times11\times21}{6}+3\times\frac{10\times11}{2}+10$

$=945$

답 ①

C167 | 답 70

[풀이]

$a_1\ge 0$이므로 $a_2=a_1-2$

$a_2<0$이므로 $a_3=-2(a_1-2)$

$a_3\ge 0$이므로 $a_4=2-2a_1$

$a_4<0$이므로 $a_5=-2(2-2a_1)$

$a_5\ge 0$이므로 $a_6=4a_1-6$

$a_6\ge 0(a_1\ge\frac{3}{2})$인 경우: $a_7=4a_1-8=-1$,

$a_1=\frac{7}{4}(\ge\frac{3}{2})$

$a_6<0(a_1<\frac{3}{2})$인 경우: $a_7=-2(4a_1-6)=-1$,

$a_1=\frac{13}{8}(>\frac{3}{2})$

$\therefore\ 40a_1=70$

답 70

C168 | 답 8

[풀이]

문제에서 주어진 수열의 귀납적 정의에 의하여

$a_1=6>0$이므로 $a_2=2-a_1=-4$

$a_2=-4<0$이므로 $a_3=a_2+p=p-4$

- (1) $p\ge 4$인 경우

$a_4=2-a_3=6-p=0$에서 $p=6(>4)$

- (2) $p<4$인 경우

$a_4=a_3+p=2p-4=0$에서 $p=2(<4)$

(1), (2)에서 p는 2 또는 6이다.

따라서 구하는 값은 8이다.

답 8

C169 | 답 142

[풀이]

문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$a_5=5$ ⇨ $a_4=10$ $(a_4\ne 2)$

⇨ $a_3=7$ 또는 $a_3=20$

⇨ $a_2=14$ $(a_2\ne 4)$ 또는 $a_2=17$ 또는 $a_2=40$

⇨ $a_1=28$ 또는 $a_1=34$ 또는 $a_1=80$

따라서 구하는 값은

$28+34+80=142$

답 142

C170 | 답 27

[풀이]

a_2가 홀수이면

$a_3=\frac{a_2+3}{2}=3$에서 $a_2=3$

a_2가 짝수이면

$a_3=\frac{a_2}{2}=3$에서 $a_2=6$

즉, $a_2=3$ 또는 $a_2=6$

$a_2=3$이고, a_1이 홀수이면

$a_2=\frac{a_1+3}{2}=3$에서 $a_1=3$ (×)

$a_2=3$이고, a_1이 짝수이면

$a_2=\frac{a_1}{2}=3$에서 $a_1=6$ (×)

$a_2=6$이고, a_1이 홀수이면

$a_2=\frac{a_1+3}{2}=6$에서 $a_1=9$ (×)

$a_2=6$이고, a_1이 짝수이면

$a_2=\frac{a_1}{2}=6$에서 $a_1=12$ (◯)

수열 $\{a_n\}$은

$a_1=12$, $a_2=6$, $a_3=3$, $a_4=3$, $\cdots$

이므로 3 이상인 자연수 n에 대하여

$a_n=3$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{5}a_k=12+6+3+3+3=27$

답 27

C171 | 답 5

[풀이]

$a_1=1$일 때 수열 $\{a_n\}$은

$1,\ -1,\ 4,\ 2,\ 0,\ -2,\ 3,\ 1(=a_1),\ \cdots$

$a_{15}=a_8=a_1=1$

$a_1=2$일 때 수열 $\{a_n\}$은

$2,\ 0,\ -2,\ 3,\ 1,\ -1,\ 4,\ 2(=a_1),\ \cdots$

$a_{15}=a_8=a_1=2$

$a_1=3$일 때 수열 $\{a_n\}$은

$3,\ 1,\ -1,\ 4,\ 2,\ 0,\ -2,\ 3(=a_1),\ \cdots$

$a_{15}=a_8=a_1=3$

$a_1=4$일 때 수열 $\{a_n\}$은

$4,\ 2,\ 0,\ -2,\ 3,\ 1,\ -1,\ 4(=a_1),\ \cdots$

$a_{15}=a_8=a_1=4$

$a_1=5$일 때 수열 $\{a_n\}$은

$5,\ 3,\ 1,\ -1,\ 4,\ 2,\ 0,\ -2,\ 3(=a_2),\ \cdots$

$a_{15}=a_8=-2<0$

$a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값은 5이다.

답 5

C172 | 답 ①

[풀이]

문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$a_2=a_3\times a_1+1,\ a_3=2a_1-a_2$ $\cdots$㉠

연립하면

$2a_1-a_3=a_3a_1+1,$

$$a_3=\frac{2a_1-1}{a_1+1}=2-\frac{3}{a_1+1}$$

a_3은 정수이므로

$a_1+1=-3,\ -1,\ 1,\ 3$

$a_1=-4,\ -2,\ 0,\ 2$에서 $m=-4(=a_1)$

$a_1=-4$를 ㉠에 대입하면

$a_2=-4a_3+1,\ a_3=-8-a_2$

연립하면

$a_2=-11,\ a_3=3$

$\therefore\ a_9=2a_4-a_2=2(a_3a_2+1)-a_2$

$=2(-33+1)+11=-53$

답 ①

C173 | 답 180

[풀이]

문제에서 주어진 두 조건 (가), (나)를 이용하여 수열 $\{a_n\}$을 나열하자.

(가), (나)에 $n=1$을 대입하면

$a_1+a_2=17,\ |a_2-a_1|=1\ \ (\&a_2=9)$

$a_1=8,\ |9-8|=1(\bigcirc)$

$\therefore\ a_1=8$

(가)에 $n=2$, (나)에 $n=2,\ 3$을 대입하면

$a_1+a_2+a_3+a_4=34,\ |a_3-a_2|=3,\ |a_4-a_3|=5$

$(\&a_1=8,\ a_2=9)$

$a_3+a_4=17,\ |a_3-9|=3,\ |a_4-a_3|=5$

연립하면

$a_3=6,\ a_4=11\ \ (|11-6|=5(\bigcirc))$

$a_3=12,\ a_4=5\ \ (|12-5|=7\neq 5(\times))$

$\therefore\ a_3=6,\ a_4=11$

(가)에 $n=3$, (나)에 $n=4,\ 5$를 대입하면

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=51,$

$|a_5-a_4|=7,\ |a_6-a_5|=9$

$(\&a_1=8,\ a_2=9,\ a_3=6,\ a_4=11)$

$a_5+a_6=17,\ |a_5-11|=7,\ |a_6-a_5|=9$

$a_5=4,\ a_6=13\ \ (|13-4|=9(\bigcirc))$

$a_5=18,\ a_6=-1\ \ (|-1-18|=19\neq 9(\times))$

$\therefore\ a_5=4,\ a_6=13$

두 수열 $\{a_{2n-1}\},\ \{a_{2n}\}$을 쓰면

$8,\ 6,\ 4,\ \cdots$ (공차가 -2인 등차수열)

$9,\ 11,\ 13,\ \cdots$ (공차가 2인 등차수열)

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{10}a_{2n}=\frac{2\times 9+9\times 2}{2}\times 10=180$$

답 180

C174 | 답 ②

[풀이]

a_4가 4의 배수○: $a_5=\dfrac{1}{2}a_4+8$에서

$$50<a_4+a_5=\frac{3}{2}a_4+8<60$$

$28<a_4<34.\dot{6},\ a_4=32$

a_4가 4의 배수×: $a_5=a_4+8$에서

$50<a_4+a_5=2a_4+8<60$

$21<a_4<26,\ a_4=22,\ 23,\ 25$

이제 문제에서 주어진 귀납적 정의를 이용하여 수열 $\{a_n\}$을 나열하자.

<table>
<tr><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>a_4</th><th>a_5</th></tr>
<tr><td>188</td><td rowspan="2">96</td><td rowspan="3">52</td><td rowspan="7">32</td><td rowspan="7">24</td></tr>
<tr><td>94</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td></tr>
<tr><td>84</td><td rowspan="2">44</td><td rowspan="4">26</td></tr>
<tr><td>42</td></tr>
<tr><td>40</td><td rowspan="2">22</td></tr>
<tr><td>×</td></tr>
<tr><td>108</td><td rowspan="2">56</td><td rowspan="3">32</td><td rowspan="3">22</td><td rowspan="3">30</td></tr>
<tr><td>54</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>23</td><td>31</td></tr>
<tr><td>×</td><td>×</td><td>×</td><td>25</td><td>33</td></tr>
</table>

$\therefore\ M+m=188+40=228$

답 ②

C175 | 답 ③

[풀이]

a_6이 짝수이므로 a_4+a_5는 짝수이다.

즉, a_4, a_5는 모두 홀수이거나 모두 짝수이다.

a_1이 홀수이고, a_4, a_5가 모두 짝수인 경우는 불가능하다. (아래 표)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
홀	홀	홀	짝	홀		×
홀	홀	짝	홀			×
홀	짝	홀	홀			×

가능한 경우를 표로 정리하면 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
홀	홀	홀	홀	홀	짝	○
홀	홀	짝	홀	홀	짝	○
홀	짝	홀	홀	홀	짝	○
홀	짝	짝	홀	홀	짝	×

맨 위에서부터 (경우1), (경우2), (경우3) 이라고 하자.

(경우1)

$$1,\ 2p-1,\ p,\ \frac{3p-1}{2},\ \frac{5p-1}{4},\ \frac{11p-3}{8}(=34)$$

$\therefore\ p=25$

(경우2)

$$1,\ 2p-1,\ p,\ 3p-1,\ 4p-1,\ \frac{7p-2}{2}(=34)$$

$\therefore\ p=10$

(경우3)

$$1,\ 2p,\ 2p+1,\ 4p+1,\ 3p+1,\ \frac{7p+2}{2}(=34)$$

만족시키는 자연수 p는 존재하지 않는다.

이상에서 구하는 값은

$49+19=68$

답 ③

C176 | 답 ④

[풀이]

$a_1<1$이라고 가정하자.

$a_2=2^{1-2}=\frac{1}{2}(<1)$,

$a_3=2^{2-2}=1$,

$a_4=\log_2 1=0$,

$a_5=2^{4-2}=4$,

$a_6=\log_2 4=2$,

$\vdots$

$a_5+a_6=6\neq 1$이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $a_1\geq 1$이다.

$a_1=1$이라고 가정하자.

$a_2=\log_2 1=0$,

$a_3=2^{2-2}=1$,

$a_4=\log_2 1=0$,

$a_5=2^{4-2}=4$,

$a_6=\log_2 4=2$,

$\vdots$

$a_5+a_6=6\neq 1$이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $a_1>1$이다.

(나): $a_6=1-a_5$

만약 $a_5<1$이면 $a_6=2^{5-2}=8=1-a_5$,

$a_5=-7$ $\cdots$(경우1)

만약 $a_5\geq 1$이면 $a_6=\log_2 a_5=1-a_5$,

$a_5=1$ $\cdots$(경우2)

($\because$ 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 $y=1-x$의 교점은 유일하고, 이 점의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.)

- (경우1)

$a_5=-7$, $a_6=8$

$a_4<1$: $a_5=2^{4-2}=4\neq -7$ (×)

$a_4\geq 1$: $a_5=\log_2 a_4=-7$, $a_4=2^{-7}<1$ (×)

이 경우에 해당하는 수열 $\{a_n\}$은 존재하지 않는다.

- (경우2)

$a_5=1$, $a_6=0$

$a_4 < 1$: $a_5 = 2^{4-2} = 4 \neq 1$ (×)

$a_4 \geq 1$: $a_5 = \log_2 a_4 = 1$, $a_4 = 2$

$a_3 < 1$: $a_4 = 2^{3-2} = 2$ (○) $\cdots$㉠

$a_3 \geq 1$: $a_4 = \log_2 a_3 = 2$, $a_3 = 4$ (○) $\cdots$㉡

㉠: $a_2 < 1$이면 $a_3 = 2^{2-2} = 1$ (×)

$a_2 \geq 1$이면 $a_3 = \log_2 a_2 < 1$, $a_2 < 2$, 즉 $1 \leq a_2 < 2$

$a_1 > 1$에서 $a_2 = \log_2 a_1$, $2 \leq a_1 < 4$

㉡: $a_2 < 1$이면 $a_3 = 2^{2-2} = 1$ (×)

$a_2 \geq 1$이면 $a_3 = \log_2 a_2 = 4$, $a_2 = 16$

$a_1 > 1$에서 $a_2 = \log_2 a_1 = 16$, $a_1 = 2^{16}$

이상에서 a_1의 범위는

$2 \leq a_1 < 4$ 또는 $a_1 = 2^{16}$

$\therefore \log_2 \dfrac{M}{m} = \log_2 2^{15} = 15$

답 ④

C177 | 답 ④

[풀이]

$\log_3 a_1$이 자연수 p라고 하자.

수열 $\{a_n\}$을 나열하면

3^p, 3^{p-1}, 3^{p-2}, $\cdots$, 27, 9, 3, 1, 7, 13, 19, 25, $\cdots$

연이은 네 개의 수의 합이 40인 경우를 모두 쓰면

$27+9+3+1=40$ $\cdots$(경우1)

$1+7+13+19=40$ $\cdots$(경우2)

• (경우1)

만약 $a_1 = 3^6$이면

$\{a_n\}$: 3^6, 3^5, 3^4, $3^3(=a_4)$, 3^2, 3, $1(=a_7)$, $\cdots$

이때, 조건 (나)는 성립하지만 $a_1 > 300$이므로 조건 (가)는 성립하지 않는다.

따라서 a_1은 3의 거듭제곱이 아니다.

이제 가능한 경우를 모두 쓰면

$\{a_n\}$: 3^5-6, 3^5, 3^4, $3^3(=a_4)$, 3^2, 3, $1(=a_7)$, $\cdots$

이때, $a_1 = 237$

$\{a_n\}$: 3^4-12, 3^4-6, 3^4, $3^3(=a_4)$, 3^2, 3, $1(=a_7)$, $\cdots$

이때, $a_1 = 69$

• (경우2)

$\{a_n\}$: 27, 9, 3, $1(=a_4)$, 7, 13, $19(=a_7)$, $\cdots$

에서 $a_1 = 27$

따라서 구하는 값은 $237+69+27=333$

답 ④

C178 | 답 87

[풀이]

문제에서 주어진 수열을 다시 쓰면

1, 2,	(2개)
1, 2, 2,	(3개)
1, 2, 2, 2,	(4개)
1, 2, 2, 2, 2,	(5개)
⋮	
1, 2, 2, $\cdots$, 2(제90항)	(13개)
1, 2, $\cdots$, 2(제100항), $\cdots$, 2	(14개)

곱을 S라고 하면

$S = 2^{1+2+3+\cdots+12+9} = 2^{87}$

$\therefore p = 87$

답 87

C179 | 답 ②

[풀이]

문제에서 주어진 수열은 자연수 k가 k번 나오므로

1, 2, 2, 3, $\cdots$, 2006, 2007, $\cdots$

2006이 마지막에 오는 항은

$1+2+3+\cdots+2006 = \dfrac{2006 \times 2007}{2}$

$= 1003 \times 2007$번째이다.

1003×2007을 5로 나눈 나머지는 21을 5로 나눈 나머지 1과 같으므로 2007은 반직선 b에서 처음으로 나타난다.

답 ②

C180 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$a_{2n-1} = 2n-1$, $a_{2n} = 2n-1$이므로

$a_{100} = 99$

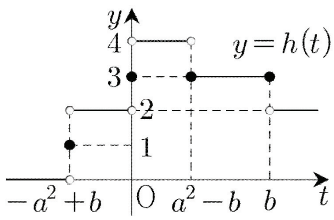
▸ ㄴ. (거짓)

$S_{100} - a_{100}$

$= 2(1+3+5+\cdots+99) - 99$

$= 2 \times \dfrac{1+99}{2} \times 50 - 99$

$= 4901$



$t>b$일 때, $h(t)-2=0$이고,

$t<-a^2+b+k$일 때, $h(t-k)=0$이므로

$k>a^2$일 때, 함수

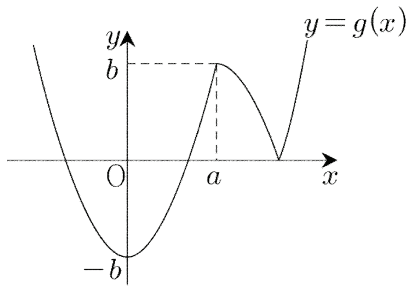
$\{h(t)-2\}h(t-k)$

는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

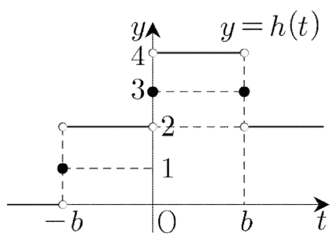
이는 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

• (3) $b<a^2$, $a^2-b=b$인 경우

함수 $g(x)$의 그래프는



함수 $h(t)$의 그래프는



$t>b$일 때, $h(t)-2=0$이고,

$t<-b+k$일 때, $h(t-k)=0$이므로

$k>2b$일 때, 함수

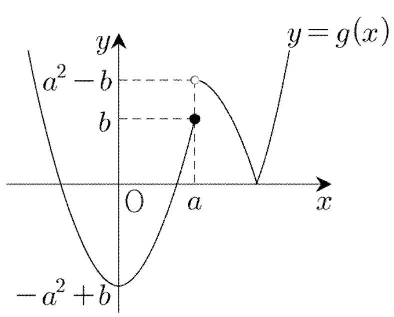
$\{h(t)-2\}h(t-k)$

는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

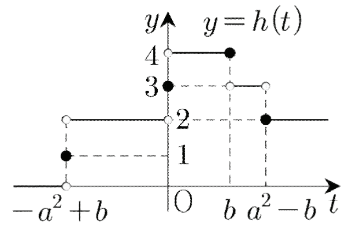
이는 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

• (4) $b<a^2$, $a^2-b>b$인 경우

함수 $g(x)$의 그래프는



함수 $h(t)$의 그래프는



$t>a^2-b$일 때, $h(t)-2=0$이고,

$t<-a^2+b+k$일 때, $h(t-k)=0$이므로

$k\ge 2(a^2-b)$일 때, 함수

$\{h(t)-2\}h(t-k)$

는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$2(a^2-b)=24$이면 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

(1)~(4)에서

$2(a^2-b)=24$, $a^2-b=12$, $a^2-12=b>0$,

$a^2>12$

그리고 $a^2-b>b$, $a^2>2b=2a^2-24$, $a^2<24$

$12<a^2<24$

a는 자연수이므로 $a=4$, $b=4$

$\therefore$ $10a+b=44$

답 44

D059 | 답 ⑤

[풀이]

• (1) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속인 경우

$f(1)=\lim_{x\to 1-} f(x)$, $4=a$

함수 $(x-a)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

• (2) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 불연속인 경우 $(a\neq 4)$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 좌극한, 우극한, 함숫값을 갖지만 불연속이므로 함수 $(x-a)f(x)$가 $x=1$에서 연속일 필요충분조건은 $a=1$이다. 왜냐하면 $a=1$일 때, 함수 $y=x-a$의 $x=1$에서의 극한값과 함숫값은 모두 0이기 때문이다.

(1), (2)에서 구하는 값은

$4+1=5$

답 ⑤

D060 | 답 ③

[풀이1]

다항함수는 연속함수이므로 일차함수 $g(x)$는 연속함수이다.

함수 $f(x)$가 두 구간 $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$에서 연속이므로,

함수 $f(x)g(x)$는 두 구간 $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$에서 연속이다.

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이어야 한다.
함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 우극한은
$\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=0\times g(1)=0$
함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 좌극한은
$\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=2\times g(1)=2g(1)$
함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 함숫값은
$f(1)g(1)=g(1)$
함수의 연속의 정의에 의하여
$0=2g(1)=g(1)$ 즉, $g(1)=0$ …㉠
$g(0)=\lim_{x\to 1-} f(x)=2$ …㉡
함수 $g(x)$의 방정식을
$g(x)=ax+b(a\neq 0)$
㉠, ㉡에 의하여
$g(1)=a+b=0$, $g(0)=b=2$
연립방정식을 풀면
$a=-2$, $b=2$
함수 $g(x)$의 방정식은
$g(x)=-2x+2$
$\therefore\ g(-1)=4$
답 ③

[풀이2] 시험장
$g(0)=2$ …㉠
$g(x)$: 연속
$f(x)$: $x=1$에서만 불연속
(단, $x=1$에서의 좌극한, 함숫값, 우극한 존재함)
$f(x)g(x)$: 연속
$\Rightarrow g(1)=0$ …㉡
㉠, ㉡에서
$g(0)=2$, $g(1)=0$
$g(x)=-2x+2$
$\therefore\ g(-1)=4$
답 ③

D061 | 답 ①

[풀이]
함수 $g(x)$는 $x=\pm 2$에서 좌극한, 우극한, 함숫값이 모두 존재하지만 연속이 아니므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=\pm 2$에서 연속일 필요충분조건은 $f(-2)=0$, $f(2)=0$이다.
인수정리에 의하여
$f(x)=(x+2)(x-2)$
함수 $f(x)$의 그래프는 x축의 방향으로 a만큼 평행이동시키면 함수 $f(x-a)$의 그래프와 일치하므로 다음이 성립한다.
$a=4$이면 함수 $f(x-a)g(x)$는 $x=2$에서 연속이지만, $x=-2$에서 불연속이다.
$a=-4$이면 함수 $f(x-a)g(x)$는 $x=-2$에서 연속이지만, $x=2$에서 불연속이다.
따라서 구하는 값은
$4\times(-4)=-16$
답 ①

D062 | 답 ②

[풀이1] 시험장
문제에서 주어진 두 등식에서 다음을 빠르게 유도할 수 있다.
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1 \Rightarrow f(x)=x^2+\cdots$
$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=k \Rightarrow f(1)=0$, $f'(1)=k$
이제 $f(2)=0$임을 보이자.
$f(x)$: 연속
$g(x)$: $x=2$에서만 불연속
(단, $x=2$에서의 좌극한, 우극한, 함숫값은 모두 존재)
$h(x)$: 연속
$\Rightarrow f(2)=0$
이상을 정리하면
$f(x)=x^2+\cdots$, $f(1)=0$, $f(2)=0$, $f'(1)=k$
인수정리에 의하여
$f(x)=(x-1)(x-2)$
$f'(x)=2x-3$, $f'(1)=-1=k$
$\therefore\ k=-1$
답 ②

D063 | 답 ③

[풀이]
함수 $f(x)$가 $x=2$에서 좌극한, 우극한, 함숫값이 모두 존재하지만 연속이 아니므로
함수 $f(x)f(kx)$가 $x=2$에서 연속일 필요충분조건은
$f(2k)=0$이다. (이때, 함수 $f(x)$는 $x=2k$에서 연속이다.)
방정식 $f(x)=0$을 풀면
$x=\pm 4$, $x=\pm\sqrt{2}$
$2k=\pm 4$, $\pm\sqrt{2}$에서 $k=\pm 2$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
따라서 구하는 값은

$2(-2)\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2$

답 ③

D064 | 답 ④

[풀이]

함수 $f(x)$는 $x=5$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to5}f(x)=f(5)$, 즉

$\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2+ax+b}{x-5}$

(이때, (분자)$=25+5a+b=0$에서 $b=-25-5a$)

$=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x-5)(x+a+5)}{x-5}$

$=\lim\limits_{x\to5}(x+a+5)=a+10=7$, $a=-3$, $b=-10$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x+2$

이므로 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(x)=\begin{cases}\sqrt{2-x} & (x<1)\\ x+2 & (x\geq1)\end{cases}$

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 불연속이므로

함수 $g(x)h(x)$가 $x=1$에서 연속일 필요충분조건은

$h(1)=0$, 즉 $|9+\alpha|-11=0$

$\alpha=-9\pm11$, 즉 $\alpha=2$ 또는 $\alpha=-20$

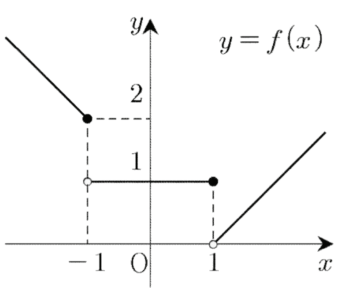
따라서 구하는 값은 -40이다.

답 ④

D065 | 답 ⑤

[풀이]

함수 $f(x)$의 그래프는



조건 (가)에서 다음과 같은 결과를 얻는다.

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이고

함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 연속이므로

$g(-1)=g(1)=0$

이어야 한다.

조건 (나)에서 다음과 같은 결과를 얻는다.

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이고

함수 $f(x)g(x+k)$는 $x=-1$, $x=1$에서 연속이므로

$g(-1+k)=g(1+k)=0$

이어야 한다.

함수 $g(x)$는 삼차함수이므로 네 수

$-1,\ 1,\ -1+k,\ 1+k$ $\cdots$㉠

가 모두 다를 수 없다. 다시 말하면 어떤 두 수는 서로 같아야 한다.

$-1+k=1$이면 $k=2$ (←경우1)

$1+k=-1$이면 $k=-2$ (←경우2)

• (경우1) $k=2$인 경우

㉠을 다시 쓰면

$-1,\ 1,\ 1,\ 3$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=(x+1)(x-1)(x-3)$

그런데 $g(0)=3>0$이므로

문제에서 주어진 조건이 성립하지 않는다.

• (경우2) $k=-2$인 경우

㉠을 다시 쓰면

$-1,\ 1,\ -3,\ -1$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=(x+1)(x-1)(x+3)$

$g(0)=-3<0$이므로

문제에서 주어진 조건이 성립한다.

따라서 함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=(x+1)(x-1)(x+3)$

$\therefore\ g(2)=15$

답 ⑤

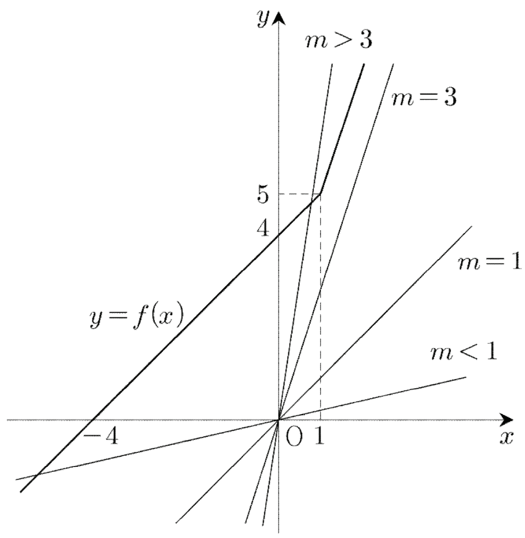
D066 | 답 8

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\begin{cases}3x+2 & (x\geq1)\\ x+4 & (x<1)\end{cases}$

함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=mx$를 한 평면 위에 나타내면 다음과 같다.



함수 $g(m)$의 방정식은

$$g(m)=\begin{cases}1 & (m<1,\ m>3)\\ 0 & (1\le m\le 3)\end{cases}$$

함수 $g(m)$은 $m=1$, $m=3$에서 불연속이므로

$h(x)=(x-1)(x-3)$

이면 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때, $h(1)=h(3)=0$이다.

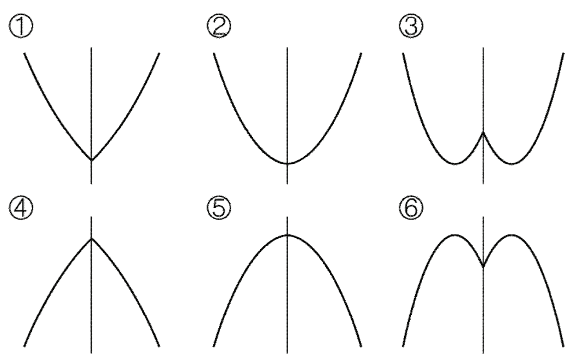
$\therefore\ h(5)=8$

답 8

D067 | 답 60

[풀이] ★

a의 부호와 함수 $f(x)$의 대칭축의 위치에 따라서 함수 $g(x)$의 그래프의 개형을 다음과 같이 여섯 개의 서로 다른 경우로 나누어 생각할 수 있다. (아래 그림에서 대칭축은 모두 y축이다.)



①: $a>0$, $b<0$ ②: $a>0$, $b=0$

③: $a>0$, $b>0$ ④: $a<0$, $b<0$

⑤: $a<0$, $b=0$ ⑥: $a<0$, $b>0$

①과 ②의 경우: 함수 $h(t)$는 증가함수이다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

④와 ⑤의 경우: 함수 $h(t)$는 감소함수이다. 이는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

③의 경우: $h(t)$가 가질 수 있는 서로 다른 값들을 모두 쓰면 0, 2, 3, 4이다.

$h(2)$	$h(-1)$	$h(0)$
2	3	4
0	3	4
0	2	4
0	2	3

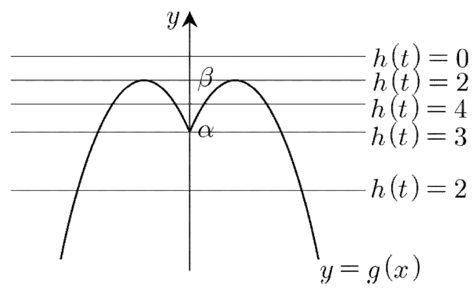
위의 네 가지 경우가 모두 불가능하다.

⑥의 경우: $h(t)$가 가질 수 있는 서로 다른 값들을 모두 쓰면 0, 2, 3, 4이다.

$h(2)$	$h(-1)$	$h(0)$
2	3	4
0	3	4
0	2	4
0	2	3

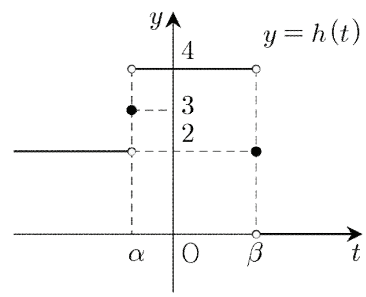
위의 네 가지의 경우가 모두 가능하다.

따라서 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 ⑥과 같아야 한다.



(단, $g(0)=\alpha$이고, β는 함수 $g(x)$의 최댓값이다.)

함수 $h(t)$의 그래프의 개형은



(단, $-1\le\alpha\le 0$, $0<\beta\le 2$)

조건 (나)에서 함수 $(t^2-t)h(t)$는 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{t\to\alpha+}(t^2-t)h(t)=4(\alpha^2-\alpha)$

$(\alpha^2-\alpha)h(\alpha)=3(\alpha^2-\alpha)$

함수의 연속의 정의에 의하여

$4(\alpha^2-\alpha)=3(\alpha^2-\alpha)$ 즉, $\alpha^2-\alpha=0$

풀면 $\alpha=0$

마찬가지의 방법으로 $\beta=1$이다.

함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 지나고, 꼭짓점의 y좌표는 1이

다.

$f(0)=ab^2+c=0$

$f(b)=c=1$

정리하면

$c=1,\ ab^2=-1(a<0,\ b>0)$

그런데 $a,\ b$는 정수이므로 $a=-1,\ b=1$이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=-(x-1)^2+1$

$\therefore\ 80f\left(\frac{1}{2}\right)=60$

답 60

D068 |답 7

[풀이]

함수 $g(x)$가

$x=1$에서 연속: $1+b=7-b,\ b=3$

$x=3$에서 연속: $3+b=7-b,\ b=2$

• (1) 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속인 경우

함수 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이므로

$f(3)=0$, 즉 $f(3)=a^2-7a+10=0$

$(a-2)(a-5)=0,\ a=2$ 또는 $a=5$

순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 3),\ (5,\ 3)$

• (2) 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속인 경우

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이므로

$f(1)=0$, 즉 $f(1)=a^2-3a+2=0$

$(a-1)(a-2)=0,\ a=1$ 또는 $a=2$

순서쌍 $(a,\ b)$는 $(1,\ 2),\ (2,\ 2)$

• (3) 함수 $g(x)$가 $x=1,\ x=3$에서 모두 불연속인 경우

함수 $f(x)$의 대칭축은 $x=\frac{1+3}{2}=2=a$이고,

$f(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$에서

$f(1)=f(3)=0$

이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 1),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5)$

(1), (2), (3)에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 7이다.

답 7

D069 |답 ③

[풀이]

함수 $g(x)$의 방정식을

$g(x)=x^2+ax+b$

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$의 방정식은

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4x+5} & (x\le 2)\\[2mm] \dfrac{x^2+ax+b}{x-2} & (x>2)\end{cases}$$

(이때,

$x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$

임을 상기하자.)

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x=2$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to 2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 2+}\frac{x^2+ax+b}{x-2}$,

$\frac{g(2)}{f(2)}=4+2a+b$

에서

$\lim\limits_{x\to 2+}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=4+2a+b$ …㉠

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim\limits_{x\to 2+}(x^2+ax+b)$

$=\lim\limits_{x\to 2+}\frac{x^2+ax+b}{x-2}\times(x-2)$

$=\lim\limits_{x\to 2+}\frac{x^2+ax+b}{x-2}\times\lim\limits_{x\to 2+}(x-2)$

$=(4+2a+b)\times 0=0$

즉,

$\lim\limits_{x\to 2+}(x^2+ax+b)=4+2a+b=0$

에서 $b=-2a-4$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$\lim\limits_{x\to 2+}\frac{x^2+ax+b}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2+}\frac{(x-2)(x+2+a)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2+}(x+2+a)$

$=4+a=0$ 즉, $a=-4,\ b=4$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=x^2-4x+4$

$\therefore\ g(5)=9$

답 ③

$\lim_{x\to 3+} g(x)g(x-3) = \lim_{x\to 3-} g(x)g(x-3)$
$= g(3)g(0)$, 즉
$f(3)f(0) = -f(3)f(0)$, $f(0)=0$ 또는 $f(3)=0$
$\lim_{x\to -3+} g(x)g(x-3) = -f(-3)f(-6)$
$\lim_{x\to -3-} g(x)g(x-3) = f(-3)f(-6)$
$g(-3)g(-6) = -f(-3)f(-6)$
$-f(-3)f(-6) \neq f(-3)f(-6)$,
$f(-3)\neq 0$, $f(-6)\neq 0$
그런데 $f(-3)=f(0)\neq 0$이므로
$f(3)=0$
(2) 함수 $g(x)g(x-3)$가 $x=3$에서만 불연속
$x=-3$에서 연속이므로
$f(-3)=0$ 또는 $f(-6)=0$
($\because$ (1)과 마찬가지의 방법)
$x=3$에서 불연속이므로
$f(0)\neq 0$, $f(3)\neq 0$
그런데 $f(-3)=f(0)\neq 0$이므로
$f(-6)=0$
(1), (2)에서
$f(3)=0$ 또는 $f(-6)=0$
$\therefore$ $f(-6)\times f(3)=0$
▸ ㄷ. (참)
$k=-3$이므로 $f(3)=0$ ($\because$ ㄴ)
함수 $f(x)$의 방정식을
$f(x)=(x+3)x(x-\alpha)+f(0)$
$f(x)=0(\cdots(*))$
$\Leftrightarrow$ $x^3+(3-\alpha)x^2-3\alpha x+f(0)=0$
만약 위의 삼차방정식이 1개의 실근(3)과 2개의 허근을 가지면 모든 실근의 합은 3이다. 이는 가정에 모순이다.
(1) 방정식 (*)이 서로 다른 세 실근을 갖는 경우
$\alpha-3=-1$, $\alpha=2$
$f(3)=6\times 3\times 1+f(0)=0$, $f(0)=-18$
$f(x)=(x-3)(x^2+4x+6)=0$
그런데 $x^2+4x+6=(x+2)^2+2\geq 2$이므로
이는 가정에 모순이다.
(2) 방정식 (*)이 중근을 갖는 경우
방정식 (*)이 3, $\beta(\neq 3)$을 근으로 갖는다고 하자.
$3+\beta=-1$, $\beta=-4$
$f(x)=(x-3)^2(x+4)$ (○)
($\because$ $f(0)=36=f(-3)$)
$f(x)=(x-3)(x+4)^2$ (×)
($\because$ $f(0)=-48\neq -6=f(-3)$)
$\therefore$ $g(-1)=-f(-1)=-16\times 3=-48$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
답 ⑤

E098 | 답 ③

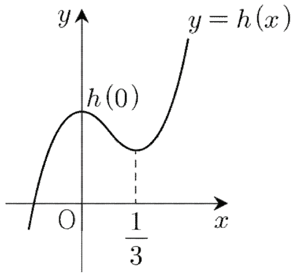
[풀이]
다음의 필요충분조건을 생각하자.
'직선 $y=mx+8$과 곡선 $y=x^3+2x^2-3x$는 서로 다른 두 점에서 만난다.'
$\Leftrightarrow$
'직선 $y=mx+8$과 곡선 $y=x^3+2x^2-3x$는 접한다.'
직선 $y=mx+8$이 곡선 $y=x^3+2x^2-3x$에 접할 때, 접점의 x좌표를 t로 두자.
(접점의 y좌표)
$=mt+8=t^3+2t^2-3t$ …㉠
(접선의 기울기)
$=m=3t^2+4t-3$ …㉡
㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면
$t^3+t^2+4=0$
좌변을 인수분해하면
$(t+2)(t^2-t+2)=0$
풀면
$t=-2$
($\because$ $t^2-t+2=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\neq 0$)
이를 ㉡에 대입하면
$\therefore$ $m=1$
답 ③

E099 | 답 28

[풀이]
$h(x)=f(x)-g(x)$로 두면
다음의 필요충분조건이 성립한다.
두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 두 점에서 만난다.
$\Leftrightarrow$
곡선 $y=h(x)$와 x축은 두 점에서 만난다.
함수 $h(x)$의 도함수는
$h'(x)=6x^2-2x=6x\left(x-\frac{1}{3}\right)$
방정식 $h'(x)=0$을 풀면
$x=0$ 또는 $x=\frac{1}{3}$
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $h(x)$의 그래프는



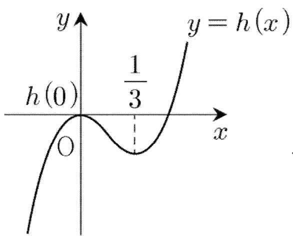
부정적분을 하면

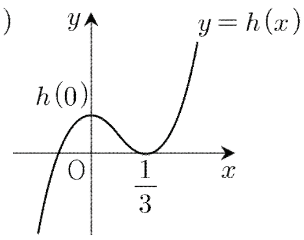
$h(x)=\int h'(x)dx=2x^3-x^2+C$

(단, C는 적분상수)

$h(0)=C$이므로

$h(x)=2x^3-x^2+h(0)$





곡선 $y=h(x)$가 x축과 두 점에서 만나기 위해서는

$h(0)=0$ 또는 $h\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}+h(0)=0$

정리하면

$h(0)=0$ 또는 $h(0)=\frac{1}{27}$

따라서 $f(0)-g(0)$의 모든 값들만의 합은 $\frac{1}{27}$이다.

$p=27$, $q=1$이므로

$\therefore\ p+q=28$

답 28

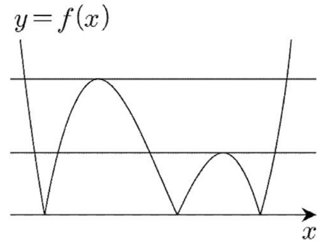
E100 | 답 ⑤

[풀이]

함수 $y=x^3-12x$의 그래프는 $x=\pm2$에서 극값을 갖고, 원점에 대하여 대칭이다.

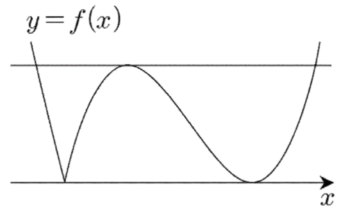
k의 값을 변화시키면서 함수 $f(x)$의 그래프를 그려보자.

(경우1)



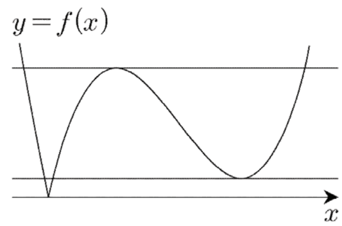
교점의 개수가 홀수인 음이 아닌 실수 a의 값은 3개다.

(경우2)



교점의 개수가 홀수인 음이 아닌 실수 a의 값은 1개다.

(경우3)



교점의 개수가 홀수인 음이 아닌 실수 a의 값은 3개다.

이상에서 곡선 $y=x^3-12x+k$의 극솟값은 0이다.

즉, $y|_{x=2}=k-16=0$

$\therefore\ k=16$

답 ⑤

E101 | 답 ②

[풀이]

조건 (가)에 의하여

$f(x)-f(2)=(x-2)(x-5)(x-\alpha)$

이므로 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-2)(x-5)(x-\alpha)+f(2)$

조건 (나)에 의하여

실수 p는 함수 $f(x)$의 극댓값 또는 극솟값이다.

그런데 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(2)$는 함수 $f(x)$의 극댓값이다. 그러므로 $f'(2)=0$이다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=(x-5)(x-\alpha)+(x-2)(x-\alpha)$
$+(x-2)(x-5)$

이므로

$f'(2)=-3(2-\alpha)=0$에서 $\alpha=2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-2)^2(x-5)+f(2)$

$f(0)=-20+f(2)=0$에서 $f(2)=20$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-2)^2(x-5)+20$

$=x^3-9x^2+24x$

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$\therefore \displaystyle\int_0^2 f(x)dx$

$=\left[\dfrac{1}{4}x^4-3x^3+12x^2\right]_0^2$

$=4-24+48=28$

답 ②

E102 | 답 ①

[풀이]

조건 (가)에서

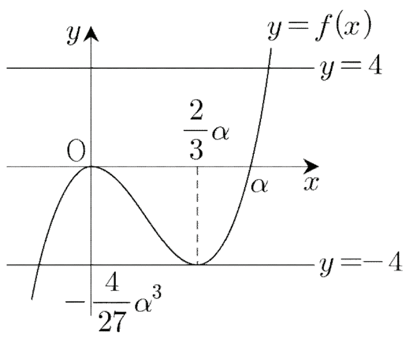
$g(0)=f(0)+|f'(0)|$, $f'(0)=0$

인수 정리에 의하여

$f(x)=x^2(x-\alpha)$

이때, $f'(x)=3x\left(x-\dfrac{2}{3}\alpha\right)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=\dfrac{2}{3}\alpha$에서 극솟값을 갖는다. ($\because$ 조건 (나)에서 $\alpha>0$)

조건 (다)에서 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f\left(\dfrac{2}{3}\alpha\right)=-\dfrac{4}{27}\alpha^3=-4$, $\alpha=3$

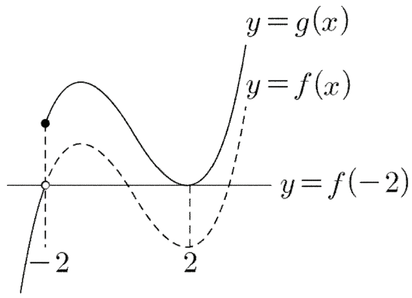
$\therefore\ g(3)=f(3)+|f'(3)|=0+9=9$

답 ①

E103 | 답 ③

[풀이]

아래 그림과 같이 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 그려지면 방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근은 2뿐이다. 이때, $f'(2)=0$, $g(2)=f(2)+8$(즉, $f(-2)-f(2)=8$)이다.



함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x^3+ax^2+bx+\dfrac{1}{2}$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(-2)-f(2)=-16-4b=8$, $b=-6$

$f'(2)=12+4a+b=0$, $a=-\dfrac{3}{2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3x-6=0$, $(x+1)(x-2)=0$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 4를 갖는다.

답 ③

E104 | 답 ④

[풀이]

조건 (나)에 의하여

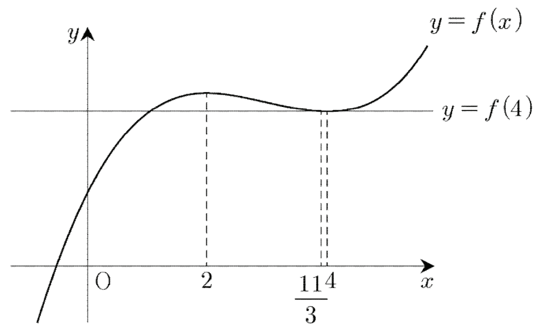
$f'(2)=0$, $f(2)=35$

조건 (다)에 의하여 다음의 두 경우가 가능하다.

$f'(4)=0$, $f(4)=f(2)$ $\cdots$(경우1)

$f'(4)\neq 0$, $f(4)=f(2)$ $\cdots$(경우2)

▸ (경우1)



인수정리에 의하여

$f'(x)=3(x-2)(x-4)$

위의 그림에서 $f'\left(\dfrac{11}{3}\right)<0$이므로 조건 (가)는 성립한다.

부정적분을 하면

$f(x)=\displaystyle\int f'(x)dx=x^3-9x^2+24x+C$

(단, C는 적분상수)

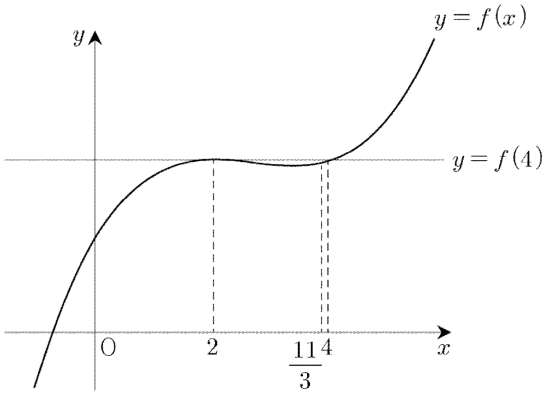
조건 (나)에 의하여

$f(2)=20+C=35$ 즉, $C=15$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^3-9x^2+24x+15$

▸ (경우2)



인수정리에 의하여

$f(x)-f(4)=(x-2)^2(x-4)$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2(x-2)(x-4)+(x-2)^2$

$=(x-2)(3x-10)$

$f'\left(\frac{11}{3}\right)=\frac{5}{3}>0$

조건 (가)는 성립하지 않는다.

따라서 (경우1)만이 가능하다.

$\therefore\ f(0)=15$

답 ④

E105 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

$x=0$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

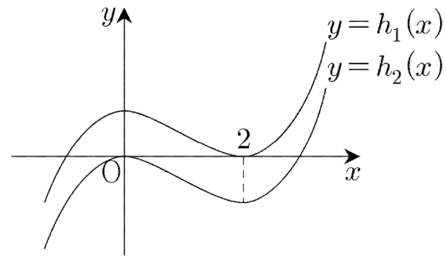
▸ ㄴ. (참)

$h(x)=f(x)-g(x)$로 두자.

조건 (나)에서 곡선 $y=h(x)$는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=x^2-2x$

이므로 함수 h는 h_1 또는 h_2이다. (아래 그림)



위의 그림에서

$h(0)=0$ 또는 $h(2)=0$

$\Leftrightarrow$

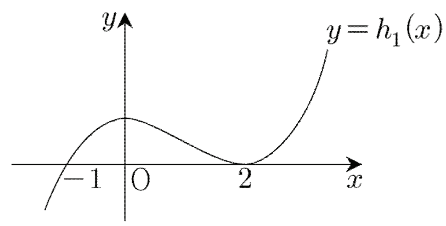
$f(0)-g(0)=0$ 또는 $f(2)-g(2)=0$

$\Leftrightarrow$

$\{f(0)-g(0)\}\times\{f(2)-g(2)\}=0$

▸ ㄷ. (참)

$\int_{-1}^{x}h(t)dt\geq 0$이므로 함수 h는 h_1이다.



$h'(x)=x^2-2x$

$h(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+C$

$h(2)=-\frac{4}{3}+C=0$, $C=\frac{4}{3}$

$\therefore\ \int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx$

$=\int_{-1}^{1}h(x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x\right]_{-1}^{1}$

$=2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

E106 | 답 ①

[풀이]

(가): 삼차함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.

(나):

$g(x)=(x-3)^2+1\geq 1$

(단, 등호는 $x=3$일 때 성립한다.)

이므로 $m=1$이다.

다음의 필요충분조건이 성립한다.

$g(f(x))=1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

⇔

$f(x)=3$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

⇔

함수 $f(x)$의 두 개의 극값 중에서 하나는 3이다.

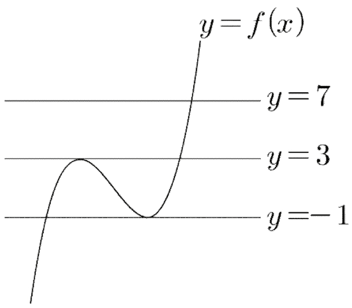
(다):

$g(x)=17 \Leftrightarrow (x+1)(x-7)=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ 또는 $x=7$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=-1$, $y=7$의 교점의 개수는 모두 3이다.

이상에서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은 $2(=3+(-1))$이다.

답 ①

E107 | 답 35

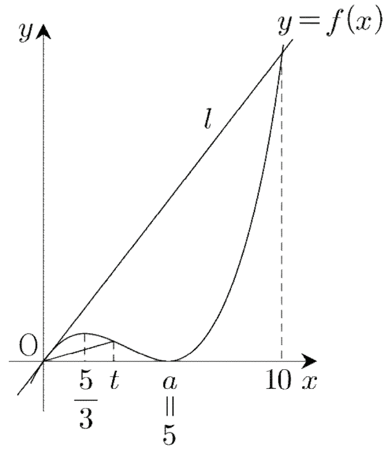
[풀이] ★

$g(t)=\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}$

=(두 점 $(0,\ f(0))$, $(t,\ f(t))$를 잇는 직선의 기울기)

(단, $t>0$)

조건 (가)에 의하여 곡선 $y=f(x)$는 $x=b$에서 극솟값 $f(0)$을 가져야 한다.(그렇지 않으면 즉, $f(b)<f(0)$ 또는 $f(b)>f(0)$이면 함수 $g(t)$는 0을 최솟값으로 가질 수 없다.) 따라서 아래 그림처럼 곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나고, $x=b$(즉, $x=a$)에서 극솟값 0을 갖는다고 해도 좋다. (그래도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.)



조건 (나)에서

$f'(a)=g(a)$ (즉, 순간변화율=평균변화율)

이므로 $b=a$임을 알 수 있다.

따라서 함수 $f(x)$는 위의 그림처럼 $x=a$일 때 극솟값 0을 갖는다.

삼차함수의 비율관계에 의하여

$a=\dfrac{5}{3}\times 3=5$

(이때, $f(x)=x(x-a)^2$으로 두고 $f'\left(\dfrac{5}{3}\right)=0$임을 이용하여 a의 값을 유도해도 좋다.)

한편 함수 $f(x)=x(x-5)^2$의 그래프 위의 원점에서의 접선의 방정식은

l: $y=25x$

이고, 이 직선의 방정식과 함수 $f(x)$의 방정식을 연립하면

$x=10$

이제 집합 A_m에서 주어진 등식을 다시 쓰면

$f'(x)=\dfrac{f(m)}{m}$

=(원점과 점 $(m,\ f(m))$을 잇는 직선의 기울기)

(단, $0<x\le m$)

평균값의 정리에 의하여

위의 등식을 만족시키는 x의 개수는

$m<5$이면 1,

$5\le m<10$이면 2,

$m\ge 10$이면 1

이다.

따라서 모든 자연수 m의 값의 합은

$5+6+7+8+9=35$

답 35

E108 | 답 8

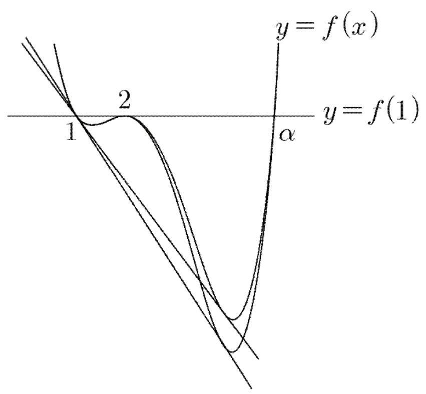
[풀이1] 시험장

▸ 함수 $g(t)$가 $t=2$에서 극댓값 0을 가지므로 $f(1)=f(2)$이고, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 가져야 한다.

▸ 함수 $g(t)$가 최솟값을 가지므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$과 '점 $(1,\ f(1))$이 아닌 점' 에서 만나야 한다. (접하거나, 서로 다른 두 개의 점에서 만난다.)

위의 두 조건을 모두 만족시키도록

함수 $f(x)$의 그래프를 그리면



(단, $\alpha>2$, $f(\alpha)=f(1)$)

인수정리에 의하여

$f(x)-f(1)=k(x-1)(x-2)^2(x-\alpha)$

(단, $k>0$)

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식은

$y=k(1-\alpha)(x-1)+f(1)$

이 직선과 곡선 $y=f(x)$의 방정식을 연립하면

$x=1$ 또는 $(x-2)^2(x-\alpha)=1-\alpha$

구간 $(2,\ \infty)$에서 곡선 $y=(x-2)^2(x-\alpha)$와

직선 $y=1-\alpha$가 만나야 하므로

(삼차함수의 극솟값)$\leq 1-\alpha$

즉, $4\left(\dfrac{2-\alpha}{3}\right)^3 \leq 1-\alpha$

$4\alpha^3-24\alpha^2+21\alpha-5 \geq 0$

$(\alpha-5)(2\alpha-1)^2 \geq 0$

풀면 $\alpha \geq 5$($\because \alpha>2$)

방정식 $f(x)=f(1)$을 다시 쓰면

$k(x-1)(x-2)^2(x-\alpha)=0$

풀면 $x=1$ 또는 2 또는 α

α가 최소일 때, $1+2+\alpha$의 값은 최솟값 8을 갖는다.

답 8

[풀이2] (이과생을 위한 풀이)

함수 $g(t)$는

$$g(t)=\frac{f(t)-f(1)}{t-1} \quad \cdots (*)$$

함수 $g(t)$의 도함수는

$$g'(t)=\frac{f'(t)(t-1)-f(t)}{(t-1)^2}$$

함수 $g(t)$는 $t=2$에서 극댓값 0을 가지므로

$g(2)=f(2)-f(1)=0$

$g'(2)=f'(2)-f(2)=0$

즉, $f(2)=f'(2)=f(1)$

인수정리에 의하여

$f(x)-f(1)=k(x-1)(x-2)^2(x-\alpha)$

(단, $k>0$, α는 상수)

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=k(x-1)(x-2)^2(x-\alpha)+f(1)$

이를 (*)에 대입하면

$g(t)=k(t-2)^2(t-\alpha)$ (단, $k>0$)

삼차함수 $g(t)$가 $t=2$에서 극댓값을 가져야 하므로 $\alpha>2$이다.

함수 $g(t)$의 도함수는

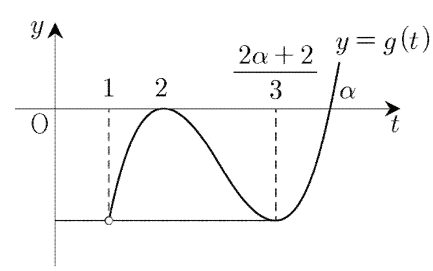
$g'(t)=k(t-2)(3t-2\alpha-2)$

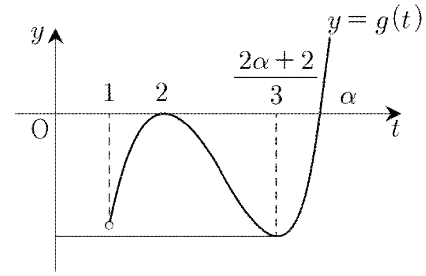
방정식 $g'(t)=0$을 풀면

$t=2$ 또는 $t=\dfrac{2\alpha+2}{3}$

$t=\dfrac{2\alpha+2}{3}$의 좌우에서 $g'(t)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $g(t)$는 $t=\dfrac{2\alpha+2}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $g(t)$의 그래프는





위의 그림처럼 정의역이 열린구간 $(1,\ \infty)$인

함수 $g(t)$가 최솟값을 갖기 위해서는

$g(1) \geq$ (함수 $g(t)$의 극솟값)$=g\left(\dfrac{2\alpha+2}{3}\right)$

즉, $1-\alpha \geq \frac{4}{27}(2-\alpha)^3$

정리하면

$4\alpha^3-24\alpha^2+21\alpha-5 \geq 0$

$(\alpha-5)(2\alpha-1)^2 \geq 0$

풀면 $\alpha \geq 5(\because \alpha > 2)$

방정식 $f(x)=f(1)$을 다시 쓰면

$k(x-1)(x-2)^2(x-\alpha)=0$

풀면

$x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\alpha$

α가 최소일 때, $1+2+\alpha$의 값은 최소가 된다.

따라서 구하는 값은 8이다.

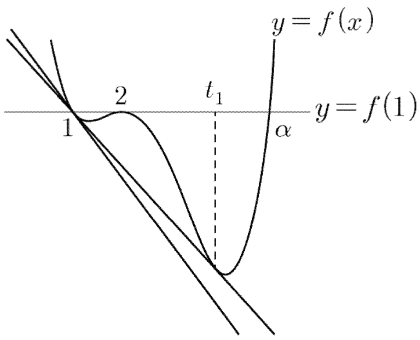
답 8

[참고]

다음과 같은 관찰을 해보자.

- $2<\alpha<5$인 경우

아래 그림처럼 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 x좌표를 t_1이라고 하자.



t의 값을 변화시키면서 평균변화율 $g(t)$의 값의 변화를 관찰하면 다음과 같다.

$1<t<2$일 때, $g(t)$의 값은 증가한다.

$2<t<t_1$일 때, $g(t)$의 값은 감소한다.

$t_1<t<\alpha$일 때, $g(t)$의 값은 증가한다.

$t=2$일 때, 함수 $g(t)$는 극댓값 0을 갖고,

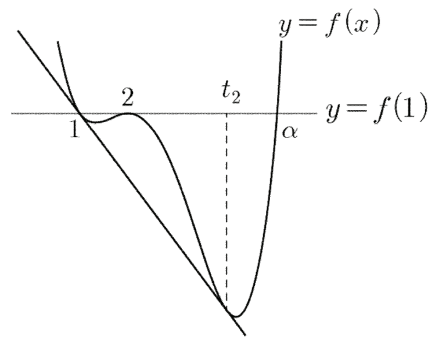
$t=t_1$일 때, 함수 $g(t)$는 극솟값 $f'(t_1)$을 갖는다.

그런데 $f'(t_1)>f'(1)$이고, $g(t)>f'(1)$

이므로 함수 $g(t)$는 최솟값을 갖지 않는다.

- $\alpha=5$인 경우

점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 x좌표를 t_2라고 하자.



t의 값을 변화시키면서 평균변화율 $g(t)$의 값의 변화를 관찰하면 다음과 같다.

$1<t<2$일 때, $g(t)$의 값은 증가한다.

$2<t<t_2$일 때, $g(t)$의 값은 감소한다.

$t_2<t<\alpha$일 때, $g(t)$의 값은 증가한다.

$t=2$일 때, 함수 $g(t)$는 극댓값 0을 갖고,

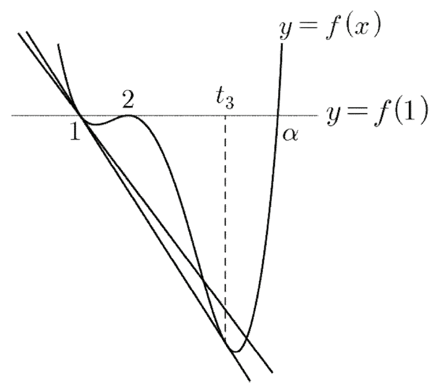
$t=t_2$일 때, 함수 $g(t)$는 극솟값 $f'(t_2)$를 갖는다.

$g(t) \geq f'(t_2)=f'(1)$

이므로 함수 $g(t)$는 최솟값을 갖는다.

- $\alpha>5$인 경우

점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 x좌표를 t_3이라고 하자.



t의 값을 변화시키면서 평균변화율 $g(t)$의 값의 변화를 관찰하면 다음과 같다.

$1<t<2$일 때, $g(t)$의 값은 증가한다.

$2<t<t_3$일 때, $g(t)$의 값은 감소한다.

$t_3<t<\alpha$일 때, $g(t)$의 값은 증가한다.

$t=2$일 때, 함수 $g(t)$는 극댓값 0을 갖고,

$t=t_3$일 때, 함수 $g(t)$는 극솟값 $f'(t_3)$을 갖는다.

$g(t) \geq f'(t_3)$이고, $f'(t_3)<f'(1)$

이므로 함수 $g(t)$는 최솟값을 갖는다.

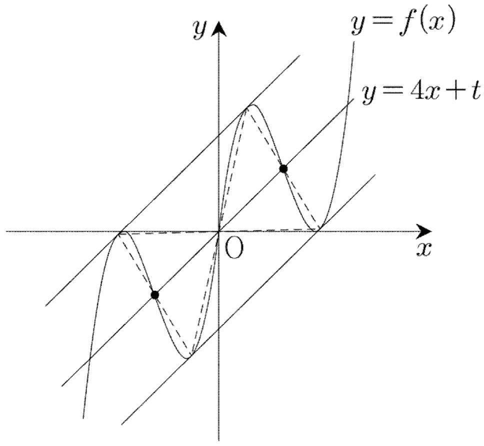
E109 | 답 36

[풀이] ★

모든 실수 x에 대하여

$f(-x) = -f(x)$

이므로 곡선 $y = f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.



곡선 $y = f(x)$가 위의 그림처럼 그려지면 이 곡선과 직선 $y = 4x + t$의 위치관계는 다음과 같다.

t: $-\infty$ ⇨ ∞

$g(t)$: 1 ⇨ 3 ⇨ 5(최댓값) ⇨ 3 ⇨ 1

이때, 함수 $g(t)$는 불연속함수이고, 이 함수가 불연속인 점의 개수는 2이다.

$h(x) = f(x) - (4x + t)$

$= \begin{cases} x(x+a)^2 - 4x - t & (x < 0) \\ x(x-a)^2 - 4x - t & (x \geq 0) \end{cases}$

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4ax + a^2 - 4 & (x < 0) \\ 3x^2 - 4ax + a^2 - 4 & (x > 0) \end{cases}$

모든 실수 x에 대하여

$h'(-x) = h'(x)$

이므로 함수 $h'(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.

$x > 0$일 때, 방정식 $h'(x) = 0$의 서로 다른 두 실근을 각각 α, β라고 하면

$x < 0$일 때, 방정식 $h'(x) = 0$의 서로 다른 두 실근은 각각 $-\alpha$, $-\beta$이다.

(단, $\alpha < \beta$)

위의 그림처럼 원점과 점 $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$을 잇는 직선의 기울기는 4이다.

그런데 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2}{3}a$

이므로

$\dfrac{\frac{2}{3}a\left(\frac{2}{3}a - a\right)^2}{\frac{2}{3}a} = 4$, $a^2 = 36$

$x > 0$일 때, 함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = (x-a)^2 + 2x(x-a)$

이므로

$\therefore\ f'(0) = \lim_{x \to 0+} f'(x) = a^2 = 36$

답 36

E110

|답 121

[풀이]

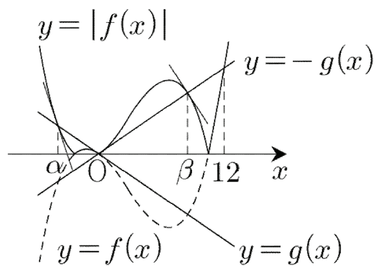
문제에서 주어진 조건에 의하여

$f(0) = 0$이고, $g(x) = f'(0)x$

$h(3) = |f(3)| + g(3) < 0$에서 $g(3) < 0$

직선 $y = g(x)$는 두 점 $(0,\ 0)$, $(3,\ g(3))$(단, $g(3) < 0$)을 지나므로 제2사분면과 제4사분면을 지난다.

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수라고 가정하자.



(단, $-f(\alpha) = g(\alpha)$, $-f(\beta) = g(\beta)$, $\alpha < 0 < \beta$)

조건 (가):

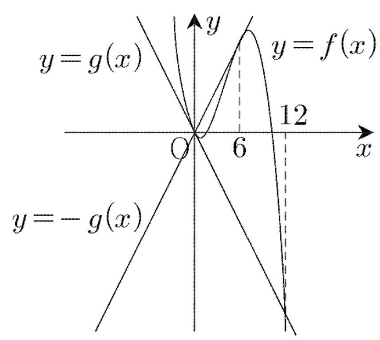
$f(k) < 0$일 때,

$-f(k) + g(k) = 0$, $-f'(k) + g'(k) = 0$

$k = \alpha$, β일 때 전자의 등식은 만족시키지만, 후자의 등식은 만족시키지 않는다. 왜냐하면

$g'(k) < 0$이지만 $f'(k) > 0$이기 때문이다.

따라서 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다.



조건 (가):

$k \geq 0$일 때,

$f(k) = -g(k)$, $f'(k) = -g'(k) = -f'(0)$

이므로 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(k,\ f(k))$에서의 접선은

$y = -f'(0)x$

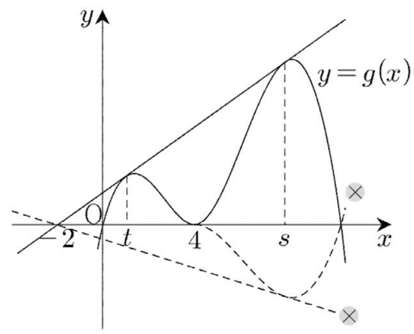
이다. (따라서 위의 그림처럼 함수 $f(x)$의 그래프가 그려진다.)

이제 k의 값을 구하자.

$f(x)-g(x)=ax^2(x-12)\ (a<0)$
x가 k에 아주 가까운 실수일 때,
$h(x)=f(x)+g(x)=ax^2(x-12)+2f'(0)x$
$h'(x)=2ax(x-12)+ax^2+2f'(0)$
$h(k)=ak^2(k-12)+2f'(0)k=0$,
(즉, $2f'(0)=-ak(k-12)$)
$h'(k)=2ak(k-12)+ak^2+2f'(0)=0$
위의 두 등식을 연립하면
$ak(k-12)+ak^2=0$, $k-12+k=0$,
$\therefore\ k=6$, $f'(0)=18a$
$h(3)=f(3)+g(3)$
$=-81a+6f'(0)$
$=-81a+108a$
$=27a=-\dfrac{9}{2}$, $a=-\dfrac{1}{6}$
$h(x)=\left|-\dfrac{1}{6}x^2(x-12)-3x\right|-3x$
$\therefore\ k\times\{h(6)-h(11)\}$
$=-6\times h(11)\ (\because h(6)=0)$
$=-6\times\left\{-\dfrac{1}{6}\times 11^2+33-33\right\}$
$=121$
답 121

E111 | 답 29

[풀이]
$0<x<4$일 때,
$g'(x)=3x^2-16x+16=(3x-4)(x-4)$
$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$ 또는 $x=4$
함수 $g(x)$가 $x=4$에서 연속이고 미분가능하므로
$f(4)=f'(4)=0$
(가): $f\left(\dfrac{21}{2}\right)=0$
(나): 만약 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수(+)이면 아래 그림처럼 접선의 개수는 2이다.
따라서 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수(−)이다.
문제에서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$0<x<4$에서 접점의 x좌표를 t라고 하자.
접선의 방정식은
$y=(3t^2-16t+16)(x-t)+t^3-8t^2+16t$
이 직선이 $(-2,\ 0)$을 지나므로
$0=(3t^2-16t+16)(-2-t)+t^3-8t^2+16t$
$(t-1)(t+4)(t-4)=0$, $t=1\ (\because 0<t<4)$
이때, 접선의 방정식은
$y=3x+6$
이제 $f(x)=a(x-4)^2(2x-21)$로 두자. (단, $a<0$)
$f'(x)=2a(x-4)(3x-25)$
$x>4$에서 접점의 x좌표를 s라고 하자.
접선의 방정식은
$y=2a(s-4)(3s-25)(x-s)+a(s-4)^2(2s-21)$
이 직선이 $(-2,\ 0)$을 지나므로
$0=2a(s-4)(3s-25)(-2-s)$
$+a(s-4)^2(2s-21)$,
$0=2(3s-25)(-2-s)+(s-4)(2s-21)$,
$4s^2-9s-184=0$, $(4s+23)(s-8)=0$
$s=8\ (\because s>4)$
$f'(8)=2a\times4\times(-1)=3$, $a=-\dfrac{3}{8}$
$f(10)=-\dfrac{3}{8}\times36\times(-1)=\dfrac{27}{2}$
$\therefore\ p+q=29$
답 29

E112 | 답 ⑤

[풀이]
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=3x^2-3$
방정식 $f'(x)=0$을 풀면
$x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 정리하면 다음과 같다.

F081 | 답 ⑤

[풀이]

함수 $f(x)$는 $x=k$에서 연속이므로

$\lim_{x\to k-} f(x)=\lim_{x\to k+} f(x)$, 즉

$ak=-k^2+4bk-3b^2$ $\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\begin{cases} a & (x<k) \\ -2x+4b & (x>k) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 $x=k$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to k-} f'(x)=\lim_{x\to k+} f'(x)$, 즉

$a=-2k+4b$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$(-2k+4b)k=-k^2+4bk-3b^2$,

$k^2=3b^2$, $k=\sqrt{3}b$, $a=(4-2\sqrt{3})b$

▸ ㄱ. (참)

$a=1$이면 $f'(k)=\lim_{x\to k-} f'(x)=1$

▸ ㄴ. (참)

$k=3$이면 $b=\sqrt{3}$이므로

$a=(4-2\sqrt{3})\times\sqrt{3}=-6+4\sqrt{3}$

▸ ㄷ. (참)

$f(k)=f'(k)$

$\Leftrightarrow -k^2+4bk-3b^2=a$

$\Leftrightarrow -(\sqrt{3}b)^2+4b\times\sqrt{3}b-3b^2$

$=(4-2\sqrt{3})b$

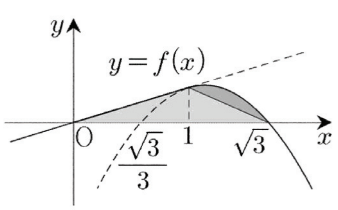
$(\because k=\sqrt{3}b,\ a=(4-2\sqrt{3})b)$

$\therefore\ b=\frac{1}{\sqrt{3}},\ k=1$

$$f(x)=\begin{cases} \left(\frac{4}{\sqrt{3}}-2\right)x & (x<1) \\ -x^2+\frac{4}{\sqrt{3}}x-1 & (x\geq 1) \end{cases}$$

(이때, $-x^2+4bx-3b^2=-(x-b)(x-3b)$)

함수 $f(x)$의 그래프는



구하는 넓이를 S라고 하면

$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\left(\frac{4}{\sqrt{3}}-2\right)+\frac{1}{6}(\sqrt{3}-1)^3$

$=2-\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}-1}{6}$

$=\frac{1}{3}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

F082 | 답 ①

[풀이]

인수정리에 의하여

$f(x)=kx^3(x-\alpha)$ (단, $k\neq 0$)

$f'(x)=4kx^3-3k\alpha x^2=4kx^2\left(x-\frac{3}{4}\alpha\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=\frac{3}{4}\alpha$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값 2를 가지므로

$\frac{3}{4}\alpha=1,\ f(1)=k(1-\alpha)=2$

$\alpha=\frac{4}{3},\ k=-6$

구간

$\therefore\ \int_0^2 f(x-1)dx$

$=\int_{-1}^1 f(x)dx$

($\because$ 함수 $f(x-1)$의 그래프와 적분구간 $[0,\ 2]$를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이다.)

$=\int_{-1}^1 -6x^3\left(x-\frac{4}{3}\right)dx$

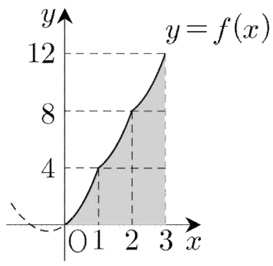
$=-12\int_0^1 x^4dx=-12\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=-\frac{12}{5}$

답 ①

F083 | 답 17

[풀이]

조건 (나)에 의하여 구간 $[0,\ 1)$에서 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a^2만큼 평행이동시키면 구간 $[1,\ 2)$에서 함수 $f(x)$의 그래프와 일치한다. 나머지 구간 $[2,\ \infty)$에서도 마찬가지의 방법으로 함수 $f(x)$의 그래프를 그릴 수 있다.



함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-} f(x)=f(1)$, 즉 $2+a=a^2$

$a^2-a-2=0$, $(a-2)(a+1)=0$, $a=2$

구하는 넓이를 S라고 하면

$$S=3\int_0^1 f(x)dx+4\times3$$

$$=3\left[\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_0^1+12$$

$$=17$$

답 17

F084 |답 41

[풀이]

모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

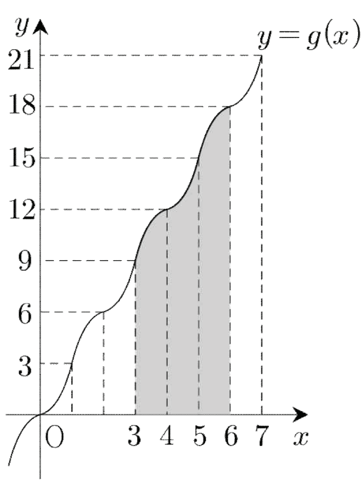
조건 (나)에서

$n=1$: $g(x)=f(x-2)+6$ (구간 $[1, 3]$)

$n=2$: $g(x)=f(x-4)+12$ (구간 $[3, 5]$)

⋮

이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 아래와 같다.



$$\therefore \int_3^6 g(x)dx$$

$$=\int_3^5 g(x)dx+\int_5^6 g(x)dx$$

$$=12\times2+\{15\times1+(3-1)\}$$

$$=24+17=41$$

답 41

F085 |답 66

[풀이]

(가)+(나):

곡선 $y=f(x-p)-f(-p)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기는 0이므로

곡선 $y=f(x)-f(-p)$ 위의 점 $(-p, 0)$에서의 접선의 기울기는 0이다.

(이때, 모든 곡선과 점을 x축의 방향으로 $-p$만큼 평행이동시킨 것이다.)

즉, $f'(-p)=0$

마찬가지의 방법으로

$f'(p)=0$

요컨대 함수 $f(x)$는 $x=\pm p$에서 극값을 가지므로

$f'(x)=3(x+p)(x-p)=3x^2-3p^2$

$f(x)=x^3-3p^2x+1$ ($\because f(0)=1$)

$$\int_0^p g(x)dx=\int_0^p \{f(x+p)-f(p)\}dx$$

$$=\int_p^{2p} \{f(x)-f(p)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}p^2x^2+x\right]_p^{2p}-pf(p)$$

$$=\frac{15}{4}p^4-\frac{9}{2}p^4+p-p^4+3p^4-p$$

$$=\frac{5}{4}p^4=20,\ p=2$$

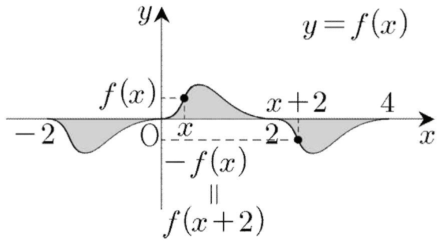
$\therefore$ $f(5)=66$

답 66

F086 |답 −1

[풀이] 시험장

문제에서 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프를 그리면 아래 그림과 같다.



위의 그림에서

$$\therefore \int_{-2}^{4} f(x)dx = -1+1+(-1) = -1$$

답 -1

F087 | 답 137

[풀이] 시험장

(가): $f(x) = x^4 + \cdots$

구간 $[0,\ 1)$에서의 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 n만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시키면

구간 $[n,\ n+1)$에서의 함수 $g(x)$의 그래프와 일치한다.

그런데 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

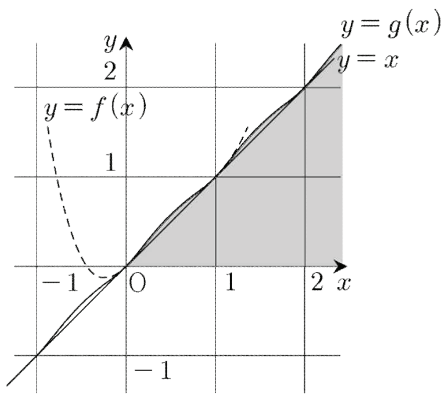
연속성: $f(0) = f(1) - 1 = 0$, 즉 $f(0) = 0$

미분가능성: $f'(1) = f'(0) = 1$

인수정리에 의하여

$f(x) - x = x^2(x-1)^2$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



$$\therefore \frac{q}{p} = \int_0^4 g(x)dx$$

$$= 4\int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{2} \times (1+3+5+7)$$

$$= 4\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + 6$$

$$= \frac{32}{15} + 6 = \frac{122}{15}$$

답 137

F088 | 답 32

[풀이]

(가)+(나)+(다):

$-2 < x < 2$일 때,

$g'(x) = -x + a = -x + 1$

($\because$ 함수 $g(x)$는 $x = 1$에서 극값을 가지므로

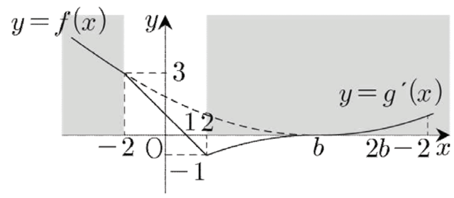
$g'(1) = -1 + a = 0$, $a = 1$)

$x \le -2$ 또는 $x \ge 2$일 때,

$g'(x) = \pm f(x)$이고, $f(x) \ge 0$

이때, 함수 $f(x)$의 그래프는 제3사분면, 제4사분면을 지나지 않으므로 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이다.

함수 $g'(x)$는 $x = \pm 2$에서 연속이므로 곡선 $y = f(x)$는 점 $(-2,\ 3)$, $(2,\ 1)$을 반드시 지난다. 이때, 점 $(2,\ 1)$은 (함수 $g(x)$의 그래프가 지나는) 점 $(2,\ -1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.



위의 그림처럼

$f(x) = m(x-b)^2$ (단, $m > 0$)

이어야 함수 $g(x)$는 $x = b$에서 극값을 가진다.

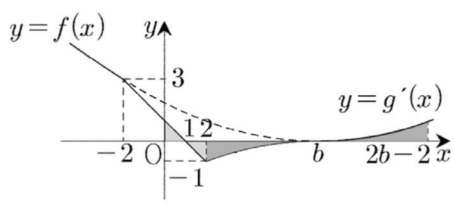
$f(-2) = m(-2-b)^2 = 3$,

$f(2) = m(2-b)^2 = 1$

위의 두 식을 변변히 나누면

$\dfrac{(2+b)^2}{(2-b)^2} = 3$, $b^2 - 8b + 4 = 0$,

$b = 4 + 2\sqrt{3}$



$g(0) = 0$($\because$ (나))이고, 위의 그림에서 어둡게 색칠된 두 삼각형의 넓이가 같으므로 $g(2) = 0$이다.

$g(2) = 0$이고, 위의 그림에서 더 어둡게 색칠된 두 도형의 넓이가 같으므로 $g(2b-2) = 0$이다.

그리고 $x \le 0$, $x \ge 2b-2$일 때, $g'(x) > 0$이므로

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 2b-2$

$0 + 2 + (2b-2) = 8 + 4\sqrt{3}$

$\therefore\ p \times q = 32$

답 32

F089 | 답 ②

[풀이1]

정적분의 성질에 의하여

$g(a+4)-g(a)$

$=\int_{-2}^{a+4} f(t)dt-\int_{-2}^{a} f(t)dt$

$=\int_{a}^{a+4} f(t)dt$

$=\int_{0}^{4} f(t)dt$ ($\because$ (가)에서 함수 $f(x)$의 주기는 2)

$=2$ ($\because$ 조건(가)+(나))

답 ②

F090 | 답 12

[풀이]

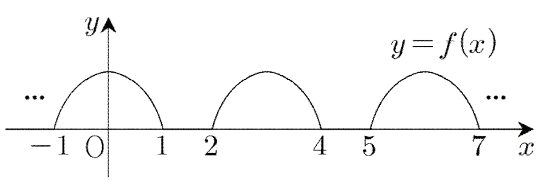
문제에서 주어진 정적분 값이 최소가 되려면

구간 $[-1,\ 1]$에서 $f(x)+x^2-1=0$, 즉

$f(x)=1-x^2$

그리고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 구간 $[1,\ 2]$에서 $f(x)=0$이면 된다. (그래야 이 구간에서의 정적분 값도 최소가 된다.)

주기가 3인 함수 $f(x)$의 그래프는



$26=2+8\times3$이므로

$\therefore \int_{-1}^{26} f(x)dx$

$=9\times\int_{-1}^{2} f(x)dx$

$=9\times2\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$=12$

답 12

F091 | 답 ⑤

[풀이]

함수 $f(x)$가 사차함수이므로 함수 $f'(x)$는 삼차함수이다.

그런데 모든 실수 x에 대하여

$f'(-x)=-f'(x)$

가 성립하므로 삼차함수 $f'(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

함수 $f'(x)$의 방정식을

$f'(x)=4x^3+ax$

문제에서 주어진 조건 $f'(1)=0$에 의하여

$f'(1)=a+4=0$에서 $a=-4$

함수 $f'(x)$의 방정식은

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

부정적분을 하면

$f(x)=\int f'(x)dx=x^4-2x^2+C$

(단, C는 적분상수)

문제에서 주어진 조건 $f(1)=2$에 의하여

$f(1)=-1+C=2$에서 $C=3$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^4-2x^2+3$

▸ ㄱ. (참)

문제에서 주어진 항등식에 $x=1$을 대입하면

$f'(-1)=-f'(1)=0$

▸ ㄴ. (참)

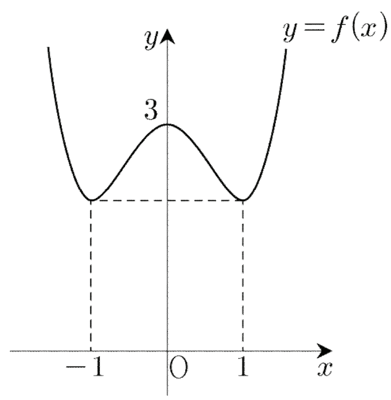
방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 정리하면 다음과 같다.

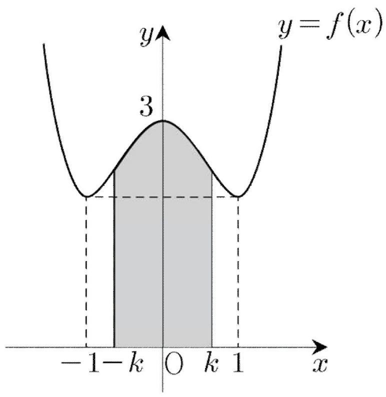
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	2 극소	↗	3 극대	↘	2 극소	↗

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

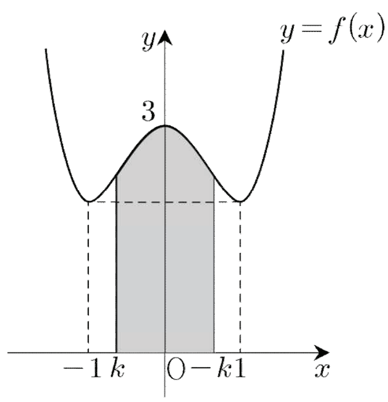


위의 그림처럼 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$k>0$일 때, 아래 그림에서 보기에서 주어진 등식이 항상 성립함을 확인할 수 있다.



$k=0$일 때, 보기에서 주어진 등식의 좌변과 우변은 모두 0이므로 등호가 성립한다.
$k<0$일 때, 아래 그림에서 보기에서 주어진 등식이 항상 성립함을 확인할 수 있다.

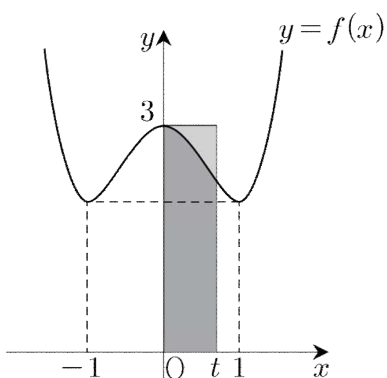


따라서 모든 실수 k에 대하여

$$\int_{-k}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{k} f(x)dx$$

이다.

▸ ㄷ. (참)



함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-t}^{t} f(x)dx = 2\int_{0}^{t} f(x)dx$$

$<2\times$(이웃한 두 변의 길이가 각각 t, 3인 직사각형의 넓이)
$=2\times 3t=6t$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

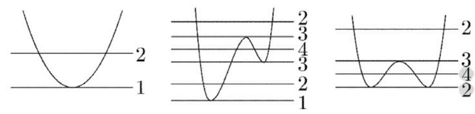
답 ⑤

F092 | 답 182

[풀이]

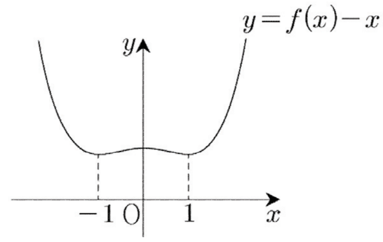
$h(t)=$(사차함수 $f(x)-x$와 직선 $y=f(t)-t$의 교점의 개수)

사차함수와 (만나는) x축에 평행한 직선의 교점의 개수를 써보면 다음과 같다.



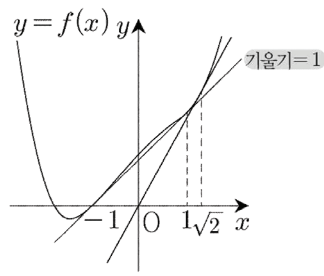
이웃한 두 수의 차이가 2인 경우가 포함된 그래프는 맨 오른쪽뿐이다.

(가): 함수 $f(x)-x$는 $x=-1$, $x=1$에서 극솟값을 갖는다. 그리고 y축에 대하여 대칭이다.



(나): $\alpha<0$일 때, 구간 $[\alpha,\ 0]$에서 $f(x)\ge 0$이고, α의 최솟값은 -1이므로 $f(-1)=0$이다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는



(다): $f(x)-kx\ge 0 \Leftrightarrow f(x)\ge kx$

이때, k의 최댓값은 $f'(\sqrt{2})$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\sqrt{2},\ f(\sqrt{2}))$에서의 접선은 원점을 지나야 한다.

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)-x=a(x+1)^2(x-1)^2+b$

(단, a, b는 상수)

$f(-1)=b-1=0$에서 $b=1$

$f'(x)=2a(x+1)(x-1)^2$
$+2a(x+1)^2(x-1)+1$

$f'(\sqrt{2})=2a(\sqrt{2}-1)+2a(\sqrt{2}+1)+1$

$=4\sqrt{2}a+1=\dfrac{a+1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{f(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$

(즉, 순간변화율$=$평균변화율)

$a=\dfrac{1}{7}$

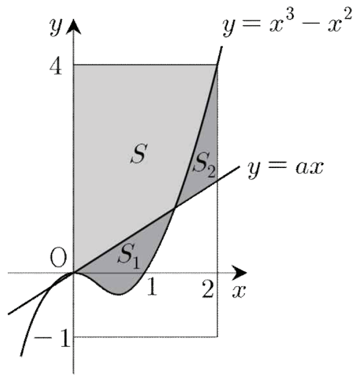
$\therefore\ f(6)=\frac{1}{7}\times 49\times 25+1+6=182$

답 182

F093 | 답 200

[풀이]

곡선과 직선으로 둘러싸인 세 도형의 넓이를 아래 그림처럼 S, S_1, S_2라고 하자.



문제에서 주어진 조건에서

$A=S+S_1$, $C=S+S_2$

$A-C=S_1-S_2=0$

이므로

$S_1=S_2$

즉, $\int_0^2 (x^3-x^2-ax)dx=0$이다.

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_0^2 (x^3-x^2-ax)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^2$$

$$=4-\frac{8}{3}-2a=0 \text{ 즉, } a=\frac{2}{3}$$

$\therefore\ 300a=200$

답 200

F094 | 답 54

[풀이]

직선 l의 방정식을

$l:\ y=mx+n$

으로 두자.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$$\int_0^6 (mx+n)dx=\int_0^6 f(x)dx$$

정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^6 \{f(x)-mx-n\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3-\frac{m}{2}x^2-nx\right]_0^6$$

$$=-18-3m-n=0$$

즉, $n=-3m-18$

이를 직선 l의 방정식에 대입하여 정리하면

$l:\ y=m(x-3)-18$

직선 l이 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점은 $(3,\ -18)$이다.

즉, 점 D의 좌표는 $\mathrm{D}(3,\ -18)$이다.

따라서 삼각형 ODC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 6\times 18=54$$

답 54

F095 | 답 17

[풀이]

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 α라고 하자.

문제에서 주어진 조건에서 $S_1=S_2$이므로

$$\int_0^\alpha (f(x)-k)dx=\int_\alpha^1 (k-f(x))dx$$

즉, $\int_0^\alpha (f(x)-k)dx-\int_\alpha^1 (k-f(x))dx=0$

정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^\alpha (f(x)-k)dx+\int_\alpha^1 (f(x)-k)dx=0$$

이므로

$$\int_0^1 (f(x)-k)dx=0$$

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_0^1 (f(x)-k)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}(x+1)^4+(8-k)x\right]_0^1$$

$$=\frac{17}{4}-k=0 \text{ 즉, } k=\frac{17}{4}$$

$\therefore\ 4k=17$

답 17

이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

구성

▸ **'이동훈 기출문제집 교육청/사관/경찰 미적분'** 에는 교육청, 사관학교, 경찰대가 출제한 전체 문항 중에서 **2015개정 교육과정에 맞는 479개의 문항을 엄선**하여 수록하였습니다.

교육청 : 2002년 3월 ~ 2023년 11월 고3, 고2, 고1 (출제 년도 기준)
사관학교 : 2002학년도 ~ 2024학년도 (학년도 기준)
경찰대 : 1999학년도 ~ 2024학년도 (학년도 기준)

▸ 문항 선정의 기준은 다음과 같습니다.
단순 계산 문제는 제외
교과서의 기본문제 및 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
수능, 평가원 기출문제와 지나치게 중복되는 전형적인 응용문제는 필요한 문제만 수록
난문(어려운 4점)이지만 수능과 거리가 먼 문제는 제외

▸ 문항 정렬은 유형별, 난이도순을 따랐습니다.
유형별 문항 구성은 출제 의도를 뚜렷하게 보여줄 것이며,
난이도순은 학습의 효율성을 높일 것입니다.

▸ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
핵심적인 풀이와 참고만을 수록하여 문제가 가진 출제의도를 뚜렷이 하였으며, 학습의 효율을 꾀하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 또는 그 수준의 문제
○○ : 교과서 연습문제 또는 그 수준의 문제
○○○ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 낮음
●●● : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 – 상대적으로 난이도 높음 (실전이론 필요성 비교적 높음)
★★★ : 교과서 예제, 연습문제 이상의 수준의 문제 - 최고난문 (실전이론 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 ‘기본개념’ 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 ‘실전이론’ 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 (A) 또는 (C) 또는 이 둘 모두에 해당합니다.
[풀이2], [풀이3], … 은 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)
[참고], [참고1], [참고2], … 는 (A)에 해당할 수도 있고, (B)에 해당할 수도 있습니다. ((C)는 시험장으로 표시)

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

<u>특히 (C)의 시험장 풀이(시험장)는 간결하므로 다른 풀이가 지나치게 길다고 생각된다면 시험장을 읽을 것을 권합니다.</u>

수능/평가원/교사경 기출문제에서 반복되는 ‘기본개념’, ‘실전이론’, ‘(실전이론에 따른) 전형적인 풀이 과정’ 을 포함한 문제의 해설에는 다음과 같이 ★ 표시를 해두었습니다. (★가 표시된 풀이 또는 참고의 대부분은 개념적으로 중요합니다. 꼭 익혀두세요.)

[풀이] ★
[참고] ★

반드시 익혀야 하는 풀이 또는 참고가 아닌 경우에는 다음과 같이 (선택) 표시를 해두었습니다.

[풀이] (선택)
[참고] (선택)

단원별 알파벳 구성

<table>
<tr><th>과목</th><th>대단원</th><th>알파벳</th><th>과목</th><th>대단원</th><th>알파벳</th></tr>
<tr><td rowspan="3">수학 Ⅰ</td><td>지수함수와 로그함수</td><td>A</td><td rowspan="3">기하</td><td>이차곡선</td><td>M</td></tr>
<tr><td>삼각함수</td><td>B</td><td>평면벡터</td><td>N</td></tr>
<tr><td>수열</td><td>C</td><td>공간도형과 공간좌표</td><td>P</td></tr>
<tr><td rowspan="3">수학 Ⅱ</td><td>함수의 극한과 연속</td><td>D</td><td rowspan="6">수학</td><td>다항식</td><td>Q</td></tr>
<tr><td>미분</td><td>E</td><td>방정식과 부등식</td><td>R</td></tr>
<tr><td>적분</td><td>F</td><td>도형의 방정식</td><td>S</td></tr>
<tr><td rowspan="3">미적분</td><td>수열의 극한</td><td>G</td><td>집합과 명제</td><td>T</td></tr>
<tr><td>미분법</td><td>H</td><td>함수</td><td>U</td></tr>
<tr><td>적분법</td><td>I</td><td>순열과 조합</td><td>V</td></tr>
<tr><td rowspan="3">확률과
통계</td><td>경우의 수</td><td>J</td><td colspan="2">교육과정 外</td><td>Z</td></tr>
<tr><td>확률</td><td>K</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>통계</td><td>L</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

목 차

미적분

G 수열의 극한

- 2015개정 교육과정

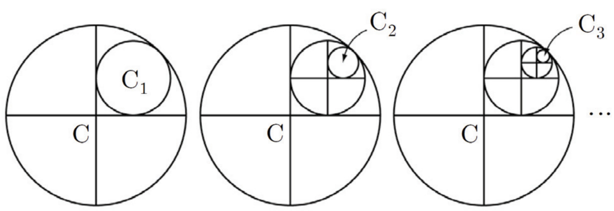
- ○ 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 공식은 수학Ⅰ 삼각함수 단원을 따름
- ○ 삼각형, 사각형, 원, 부채꼴의 기하학적 성질은 개정 중학교 수학 교과서를 따름
- ○ 주기 함수 관련 문제 포함
- ○ 부등식의 영역 관련 문제 제외 또는 변형 수록
- ○ 사인법칙, 코사인법칙 관련 문제 포함
- ○ 라디안 표현이 포함된 문제 포함

G. 등비급수(기하): 두 원의 위치 관계

G128

○○
(2007(4)고3-가형17)

반지름의 길이가 1인 원 C가 있다.
원 C를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_1,
원 C_1을 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_2,
원 C_2를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_3,
⋮
이와 같은 과정을 계속하여 얻어진 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} r_k$의 값은? [4점]

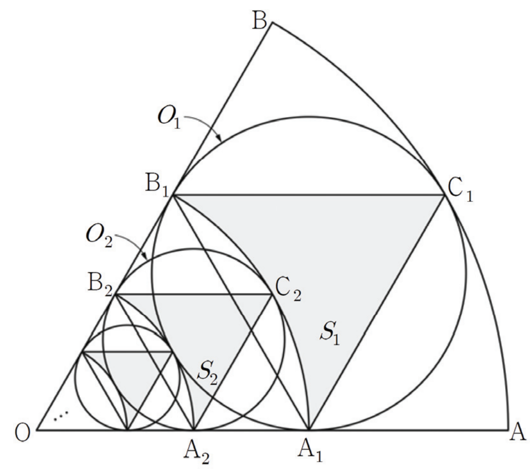


① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$　⑤ 1

G129

○○○
(2015(4)고3-B형18)

그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이고 반지름의 길이가 6인 부채꼴 OAB가 있다.
부채꼴 OAB에 내접하는 원 O_1이 두 선분 OA, OB, 호 AB와 만나는 점을 각각 A_1, B_1, C_1이라 하고, 부채꼴 OA_1B_1의 외부와 삼각형 $A_1C_1B_1$의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1이라 하자.
부채꼴 OA_1B_1에 내접하는 원 O_2가 두 선분 OA_1, OB_1, 호 A_1B_1과 만나는 점을 각각 A_2, B_2, C_2라 하고, 부채꼴 OA_2B_2의 외부와 삼각형 $A_2C_2B_2$의 내부의 공통부분의 넓이를 S_2라 하자.
위와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부채꼴 OA_nB_n의 외부와 삼각형 $A_nC_nB_n$의 내부의 공통부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $8\sqrt{3}-3\pi$　② $8\sqrt{3}-2\pi$　③ $9\sqrt{3}-3\pi$
④ $9\sqrt{3}-2\pi$　⑤ $10\sqrt{3}-3\pi$

G130

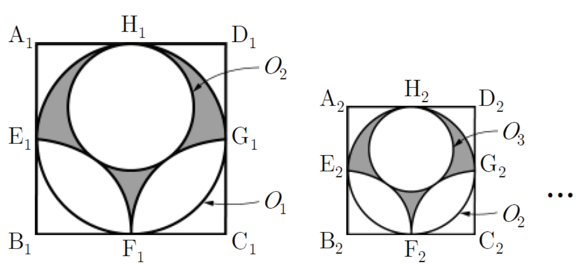
○○○ (2011(4)고3-가형18/나형18)

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O_1에 외접하는 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 네 변 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1의 중점을 각각 E_1, F_1, G_1, H_1이라 하자.

점 B_1을 중심으로 하고 선분 B_1F_1을 반지름으로 하는 부채꼴 $B_1F_1E_1$의 호 E_1F_1과 점 C_1을 중심으로 하고 선분 C_1F_1을 반지름으로 하는 부채꼴 $C_1F_1G_1$의 호 G_1F_1과 원 O_1의 호 $E_1H_1G_1$로 둘러싸인 도형을 R_1이라 하자. R_1에 내접하는 원을 O_2라 하고 도형 R_1의 넓이에서 원 O_2의 넓이를 뺀 값을 S_1이라 하자.

원 O_2에 외접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 네 변 A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2, D_2A_2의 중점을 각각 E_2, F_2, G_2, H_2라 하자. 점 B_2를 중심으로 하고 선분 B_2F_2를 반지름으로 하는 부채꼴 $B_2F_2E_2$의 호 E_2F_2과 점 C_2를 중심으로 하고 선분 C_2F_2를 반지름으로 하는 부채꼴 $C_2F_2G_2$의 호 G_2F_2과 원 O_2의 호 $E_2H_2G_2$로 둘러싸인 도형을 R_2라 하자. R_2에 내접하는 원을 O_3이라 하고 도형 R_2의 넓이에서 원 O_3의 넓이를 뺀 값을 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 E_nF_n, 호 G_nF_n, 호 $E_nH_nG_n$으로 둘러싸인 도형을 R_n이라 하고 R_n에 내접하는 원을 O_{n+1}이라 하자. 도형 R_n의 넓이에서 원 O_{n+1}의 넓이를 뺀 값을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{9-2\pi}{3}$ ② $\frac{18-4\pi}{5}$ ③ $\frac{9-2\pi}{2}$

④ $\frac{18-4\pi}{3}$ ⑤ $9-2\pi$

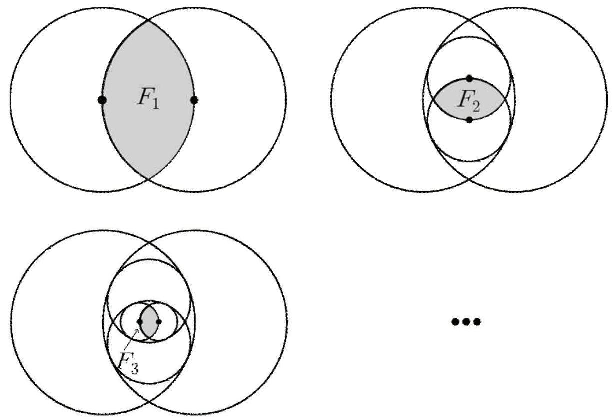
G131

●●● (2013사관(1차)-이과24)

그림과 같이 반지름의 길이가 3인 두 원을 서로의 중심을 지나도록 그렸을 때, 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_1이라 하자.

F_1의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_1과 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_2라 하자.

F_2의 내부에 반지름의 길이가 같고 서로의 중심을 지나는 두 원을 F_2와 접하면서 반지름의 길이가 최대가 되도록 그렸을 때, 그려진 두 원의 내부에서 겹친 부분이 나타내는 도형을 F_3이라 하자.



이와 같은 방법으로 계속하여 도형 F_n을 그려 나갈 때, F_n의 둘레의 길이를 l_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]

① $2\pi(1+\sqrt{7})$ ② $\frac{8\pi}{3}(1+\sqrt{7})$ ③ $\frac{4\pi}{3}(2+\sqrt{7})$

④ $2\pi(2+\sqrt{7})$ ⑤ $\frac{5\pi}{3}(2+\sqrt{7})$

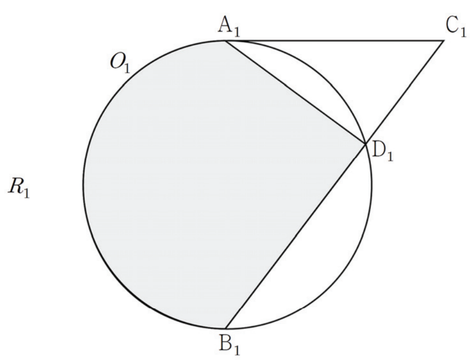
G132

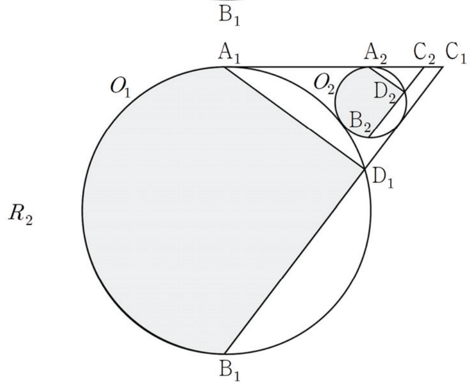
(2021(4)고3-미적분28)

그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 원 O_1이 있다. 원 O_1의 외부에 $\angle B_1A_1C_1 = \frac{\pi}{2}$, $\overline{A_1B_1} : \overline{A_1C_1} = 4 : 3$이 되도록 점 C_1을 잡고 두 선분 A_1C_1, B_1C_1을 그린다. 원 O_1과 선분 B_1C_1의 교점 중 B_1이 아닌 점을 D_1이라 하고, 점 D_1을 포함하지 않는 호 A_1B_1과 두 선분 A_1D_1, B_1D_1로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 호 A_1D_1과 두 선분 A_1C_1, C_1D_1에 동시에 접하는 원 O_2를 그리고 선분 A_1C_1과 원 O_2의 교점을 A_2, 점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1과 평행한 직선이 원 O_2와 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 그림 R_1에서 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 C_2, D_2를 잡고, 점 D_2를 포함하지 않는 호 A_2B_2와 두 선분 A_2D_2, B_2D_2로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]





⋮ ⋮

① $\frac{32}{15}\pi + \frac{256}{125}$ ② $\frac{9}{4}\pi + \frac{54}{25}$ ③ $\frac{32}{15}\pi + \frac{512}{125}$

④ $\frac{9}{4}\pi + \frac{108}{25}$ ⑤ $\frac{8}{3}\pi + \frac{128}{25}$

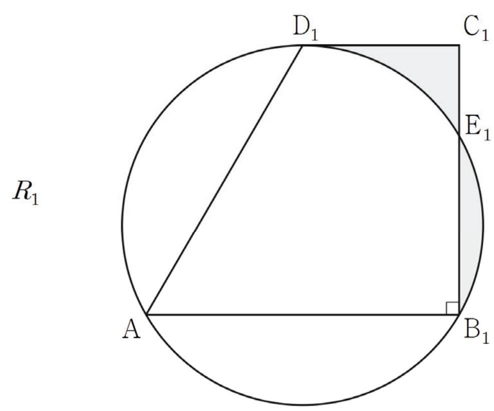
G133

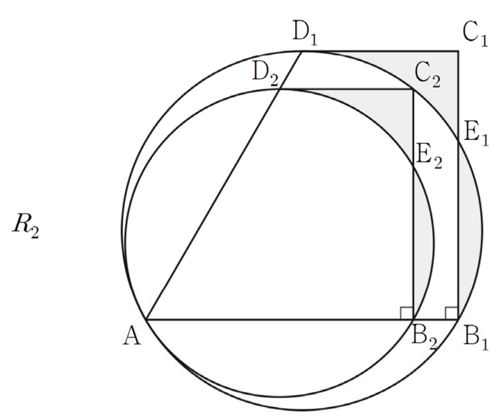
(2023(4)고3-미적분28)

그림과 같이 $\overline{AB_1} = 2$, $\overline{B_1C_1} = \sqrt{3}$, $\overline{C_1D_1} = 1$이고 $\angle C_1B_1A = \frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $AB_1C_1D_1$이 있다. 세 점 A, B_1, D_1을 지나는 원이 선분 B_1C_1과 만나는 점 중 B_1이 아닌 점을 E_1이라 할 때, 두 선분 C_1D_1, C_1E_1과 호 E_1D_1로 둘러싸인 부분과 선분 B_1E_1과 호 B_1E_1로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 AB_1 위의 점 B_2, 호 E_1D_1 위의 점 C_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{B_2C_2} : \overline{C_2D_2} = \sqrt{3} : 1$이고 $\angle C_2B_2A = \frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 점 E_2를 잡고, 사다리꼴 $AB_2C_2D_2$에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]





⋮ ⋮

① $\frac{49}{144}\sqrt{3}$ ② $\frac{49}{122}\sqrt{3}$ ③ $\frac{49}{100}\sqrt{3}$

④ $\frac{49}{78}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{7}{8}\sqrt{3}$

G. 등비급수(기하): 원과 접선

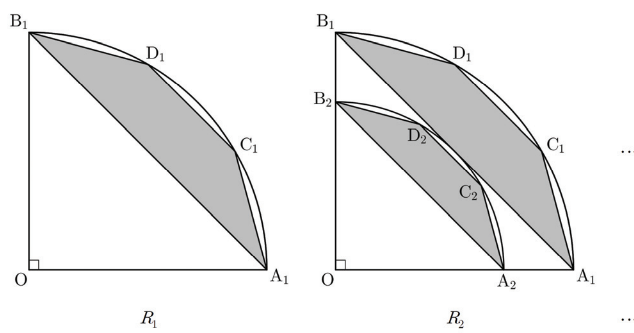
G134

○○
(2024사관(1차)-미적분26)

그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1의 삼등분점 중 점 A_1에 가까운 점을 C_1, 점 B_1에 가까운 점을 D_1이라 하고, 사각형 $A_1C_1D_1B_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 중심이 O이고 선분 A_1B_1에 접하는 원이 선분 OA_1과 만나는 점을 A_2, 선분 OB_1과 만나는 점을 B_2라 하고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OA_2}$, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 C_2, D_2를 잡고, 사각형 $A_2C_2D_2B_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



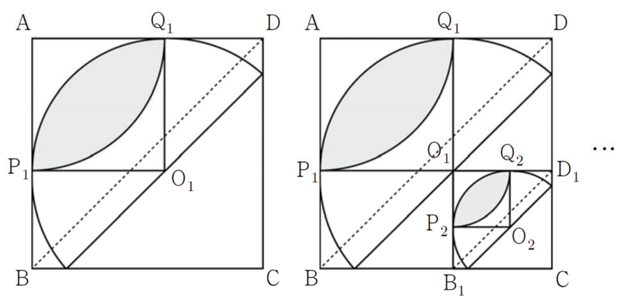
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{13}{24}$ ③ $\frac{7}{12}$

④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

G135

○○○
(2017(6)고2-가형20)

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 내부에 지름의 양 끝점이 각각 변 BC, 변 CD 위에 있고, 지름이 선분 BD와 평행한 반원을 내접하게 그린다. 이 반원의 중심을 O_1이라 하고 반원이 두 변 AB, AD와 만나는 점을 각각 P_1, Q_1이라 하자.
중심이 A, 반지름이 선분 AP_1, 중심각이 $\angle P_1AQ_1$인 부채꼴의 내부와 이 반원의 내부의 공통부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 있는 점 O_1에서 두 변 BC, CD 위에 내린 수선의 발을 각각 B_1, D_1이라 하고 네 점 O_1, B_1, C, D_1을 꼭짓점으로 하는 정사각형 $O_1B_1CD_1$을 그린다. 정사각형 $O_1B_1CD_1$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = (p\sqrt{2}-q)(\pi-2)$이다. 두 유리수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은? [4점]



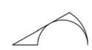
R_1 R_2 ⋯

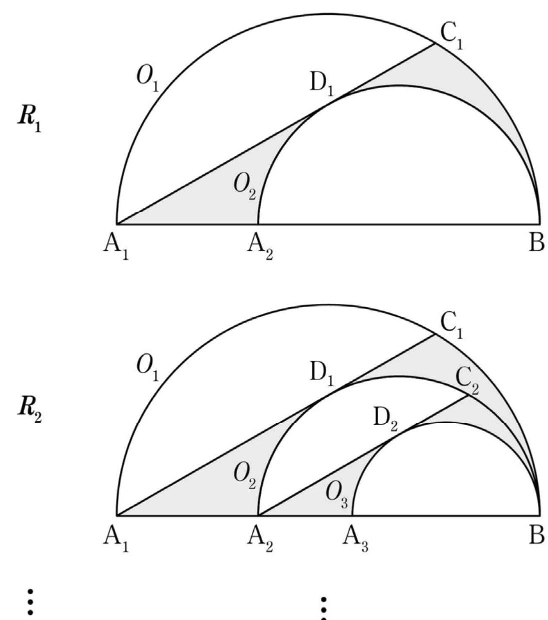
① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

G136

○○○
(2021(10)고3-미적분26)

그림과 같이 길이가 2인 선분 A_1B를 지름으로 하는 반원 O_1이 있다. 호 BA_1 위에 점 C_1을 $\angle BA_1C_1 = \frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 선분 A_2B를 지름으로 하는 반원 O_2가 선분 A_1C_1과 접하도록 선분 A_1B 위에 점 A_2를 잡는다. 반원 O_2와 선분 A_1C_1의 접점을 D_1이라 할 때, 두 선분 A_1A_2, A_1D_1과 호 D_1A_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 두 호 BC_1, BD_1로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 호 BA_2 위에 점 C_2를 $\angle BA_2C_2 = \frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 선분 A_3B를 지름으로 하는 반원 O_3이 선분 A_2C_2와 접하도록 선분 A_2B 위에 점 A_3을 잡는다. 반원 O_3과 선분 A_2C_2의 접점을 D_2라 할 때, 두 선분 A_2A_3, A_2D_2와 호 D_2A_3으로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 두 호 BC_2, BD_2로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{4\sqrt{3}-\pi}{10}$ ② $\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{20}$ ③ $\frac{8\sqrt{3}-\pi}{20}$
④ $\frac{5\sqrt{3}-\pi}{10}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}-\pi}{20}$

G137

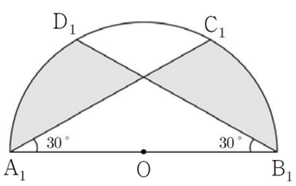
○○○
(2016(6)고2-가형20)

중심이 O이고 길이가 4인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 반원이 있다. 그림과 같이 반원 위에 $\angle C_1A_1B_1=30^\circ$, $\angle D_1B_1A_1=30^\circ$가 되도록 두 점 C_1, D_1을 각각 정하고, 두 선분 A_1C_1, B_1D_1과 두 호 B_1C_1, A_1D_1로 둘러싸인  모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

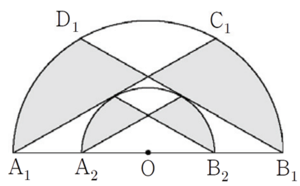
그림 R_1에서 중심이 O이고 두 선분 A_1C_1, B_1D_1에 접하는 원이 선분 A_1B_1과 만나는 점을 각각 A_2, B_2라 하자. 선분 A_2B_2를 지름으로 하는 반원에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는  모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때,

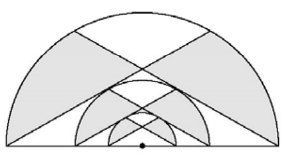
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{a\pi+b\sqrt{3}}{9}$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 정수이다.) [4점]



R_1



R_2


R_3

⋯

⋯

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

G138

○○○
(2017(9)고2-가형20)

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고, 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle POA=\angle BOQ=30^\circ$가 되도록 잡는다.

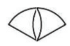
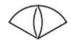
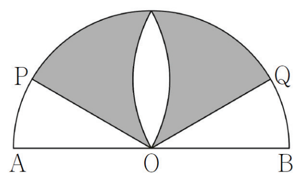
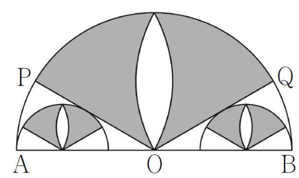
부채꼴 POQ의 내부에서 점 P를 중심으로 하고 선분 PO를 반지름으로 하는 원의 내부와 점 Q를 중심으로 하고 선분 QO를 반지름으로 하는 원의 내부의 공통부분을 제외한  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

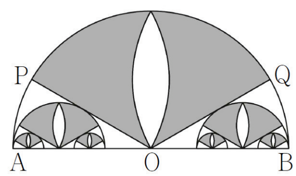
그림 R_1에서 지름의 양 끝점이 선분 AB 위에 있고 선분 PO와 선분 QO에 각각 접하는 가장 큰 반원을 그린다. 새로 그려진 2개의 반원에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로  모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2



R_3

⋯

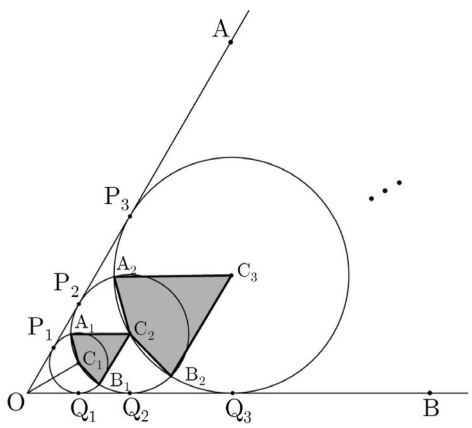
⋯

① $\dfrac{15\sqrt{3}}{7}$ ② $\dfrac{16\sqrt{3}}{7}$ ③ $\dfrac{17\sqrt{3}}{7}$
④ $\dfrac{18\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\dfrac{19\sqrt{3}}{7}$

G139

●●● (2010(4)고3-가형17)

그림과 같이 크기가 60°인 $\angle AOB$의 이등분선 위에 $\overline{OC_1}=2$인 점 C_1을 잡아 점 C_1을 중심으로 하고 반직선 OA와 OB에 접하는 원 C_1을 그릴 때, 원 C_1과 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_1, Q_1이라 하자.
점 C_1을 지나고 반직선 OA와 OB에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 C_2, 원 C_2와 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 원 C_1과 원 C_2가 만나는 점을 각각 A_1, B_1이라 할 때, 사각형 $A_1C_1B_1C_2$의 넓이를 S_1이라 하자.
점 C_2를 지나고 반직선 OA와 OB에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 C_3, 원 C_3과 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_3, Q_3라 하고, 원 C_2와 원 C_3이 만나는 점을 각각 A_2, B_2라 할 때, 사각형 $A_2C_2B_2C_3$의 넓이를 S_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{4^n+3^n}$의 값은? [4점]



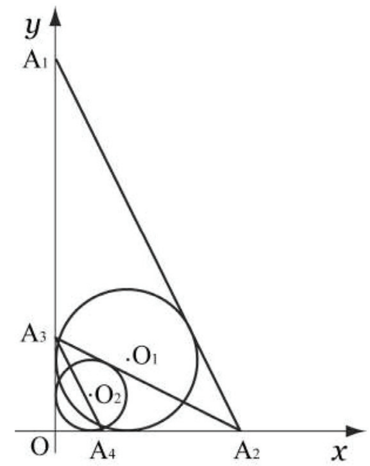
① $\frac{1}{4}$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$　⑤ $\frac{\sqrt{15}}{8}$

G. 등비급수(기하): 직각삼각형과 내접원

G140

○○ (2009(7)고3-가형24)

그림과 같이 세 점 $O(0,\ 0)$, $A_1(0,\ 4)$, $A_2(2,\ 0)$으로 이루어진 $\triangle OA_1A_2$에 내접하는 원을 O_1이라 하자. y축 위의 점 A_3이 선분 A_1A_2의 기울기와 선분 A_2A_3의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle OA_2A_3$에 내접하는 원을 O_2라 하자.
x축 위의 점 A_4가 선분 A_2A_3의 기울기와 선분 A_3A_4의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle OA_3A_4$에 내접하는 원을 O_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 생기는 $\triangle OA_nA_{n+1}$에 내접하는 원을 O_n이라 하고, O_n의 반지름의 길이가 r_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = a-2\sqrt{b}\,(a,\ b$는 자연수)이다. $a+b$의 값을 구하시오. [4점]



H170

★★★ (2021(10)고3-미적분30)

서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-\frac{ax^3+bx}{x^2+1}$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\neq 0$이고, 두 함수 $g(x)=f(x)-f^{-1}(x)$, $h(x)=(g\circ f)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(2)=h(0)$
(나) $g'(2)=-5h'(2)$

$4(b-a)$의 값을 구하시오. [4점]

H. 그래프 개형: $y=x^n e^x$

H171

●●● (2018사관(1차)-가형28)

함수 $f(x)=(x^3-a)e^x$과 실수 t에 대하여 방정식 $f(x)=t$의 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 불연속인 점의 개수가 2가 되도록 하는 10 이하의 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오.

(단, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이다.) [4점]

H172

●●● (2016(3)고3-가형30)

함수 $f(x)=x^2e^{ax}\,(a<0)$에 대하여 부등식 $f(x)\geq t\,(t>0)$을 만족시키는 x의 최댓값을 $g(t)$라 정의하자. 함수 $g(t)$가 $t=\frac{16}{e^2}$에서 불연속일 때, $100a^2$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$) [4점]

H173

●●● (2023(10)고3-미적분30)

두 정수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.
(나) 함수 $\lvert f(x)\rvert$가 $x=k$에서 극대 또는 극소인 모든 k의 값의 합은 3이다.

$f(10)=pe^{-10}$일 때, p의 값을 구하시오. [4점]

H174

★★★ (2022(7)고3-미적분30)

최고차항의 계수가 3보다 크고 실수 전체의 집합에서 최솟값이 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$g(x)=e^x f(x)$

이다. 양수 k에 대하여 집합 $\{x \mid g(x)=k,\ x$는 실수$\}$의 모든 원소의 합을 $h(k)$라 할 때, 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(k)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(k)$가 $k=t$에서 불연속인 t의 개수는 1이다.
(나) $\lim_{k\to 3e+} h(k)-\lim_{k\to 3e-} h(k)=2$

$g(-6)\times g(2)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to -\infty} x^2e^x=0$) [4점]

H175

★★★
(2017(7)고3-가형30)

상수항을 포함한 모든 항의 계수가 유리수인 이차함수 $f(x)$가 있다. 함수 $g(x)$가

$$g(x)=|f'(x)|e^{f(x)}$$

일 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
(나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $4\sqrt{e}$이다.
(다) 방정식 $g(x)=4\sqrt{e}$의 근은 모두 유리수이다.

$|f(-1)|$의 값을 구하시오. [4점]

H. 그래프 개형: $y=\dfrac{f(x)}{x}$

H176

○○
(2012사관(1차)-이과20)

함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln x$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\dfrac{1}{e}$이다.
ㄴ. $2011^{2012}>2012^{2011}$
ㄷ. 열린구간 $(0,\ e)$에서 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H. 그래프 개형: $y=x\sin x$

H177

●●●
(2014사관(1차)-B형20)

함수 $f(x)=x\sin x$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.
ㄴ. 직선 $y=x$는 곡선 $y=f(x)$에 접한다.
ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖는 a가 구간 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{4}\right)$에 존재한다.

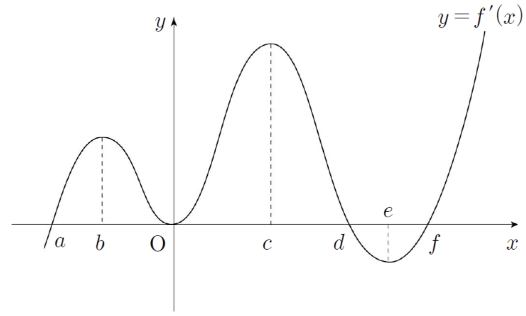
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H. 그래프 개형: 그 외

H178

○○
(2012(7)고3-가형13)

다항함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



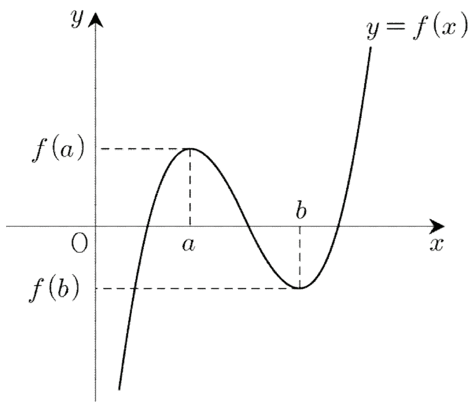
ㄱ. 구간 $[a,\ f]$에서 $f(x)$의 변곡점은 4개다.
ㄴ. 구간 $[a,\ e]$에서 $f(x)$가 극대가 되는 x의 개수는 1이다.
ㄷ. 구간 $[a,\ e]$에서 $f(x)$의 최댓값은 $f(c)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H179

○○
(2012사관(1차)-이과14)

그림과 같이 $x=a$에서 극댓값, $x=b$에서 극솟값을 가지는 삼차함수 $f(x)$가 있다. $(0<a<b)$



함수 $g(x)=e^{-x^2}f(x)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. $g'(0)>0$
ㄴ. $f'(a)+g'(a)>0$
ㄷ. $g(b)g'(b)>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H180

○○
(2010(7)고3-가형19)

함수 $f(x)=\dfrac{x-\dfrac{1}{2}}{(x^2-2x+2)^2}$에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선과 원점 사이의 거리는 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\dfrac{1}{8}$이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)-f(10)=0$와 서로 다른 실근의 개수는 2개다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H181

○○
(2011(10)고3-가형17)

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=e^x+\dfrac{1}{x}$이 $x=\alpha$에서 극값을 가질 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, e는 자연로그의 밑이다.) [4점]

ㄱ. $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha^2}$
ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 존재한다.
ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H182

○○
(2013사관(1차)-이과20)

$x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{(\ln x)^6}{x^2}$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

(단, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^6}{x^2}=0$이다.) [4점]

ㄱ. $x=e^3$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. $x=e$에서 극솟값을 갖는다.
ㄷ. $x>0$에서 방정식 $f(x)=1$의 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H183

(2020(10)고3-가형20)

자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{nx}{x^n+1} & (x \neq -1) \\ -2 & (x=-1) \end{cases}$$

일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $n=3$일 때, 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$에서 증가한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이 되도록 하는 n에 대하여 방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. 구간 $(-1,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 10 이하의 모든 자연수 n의 값의 합은 24이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H184

(2021사관(1차)-가형20)

세 상수 a, b, c $(a>0,\ c>0)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -ax^2+6ex+b & (x<c) \\ a(\ln x)^2-6\ln x & (x \geq c) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 함수 $f(x)$의 역함수가 존재한다.

$f\left(\dfrac{1}{2e}\right)$의 값은? [4점]

① $-4\left(e^2+\dfrac{1}{4e^2}\right)$ ② $-4\left(e^2-\dfrac{1}{4e^2}\right)$
③ $-3\left(e^2+\dfrac{1}{4e^2}\right)$ ④ $-3\left(e^2-\dfrac{1}{4e^2}\right)$
⑤ $-2\left(e^2+\dfrac{1}{4e^2}\right)$

H. 그래프 개형: 합성함수

H185

(2018(7)고3-가형19)

자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 $f(x)=x^n-1$, $g(x)=\log_3(x^4+2n)$이다.

함수 $h(x)$가 $h(x)=g(f(x))$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

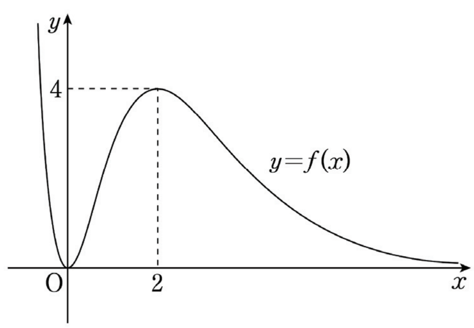
ㄱ. $h'(1)=0$
ㄴ. 열린구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $h(x)$는 증가한다.
ㄷ. $x>0$일 때, 방정식 $h(x)=n$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H186

교육청 기출

그림은 함수 $f(x)=x^2e^{-x+2}$의 그래프이다.



함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{15}{e^2}$의 교점의 개수는? (단, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$) [4점]

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

H187

(2021사관(1차)-가형30)

두 함수 $f(x)=x^2-ax+b\,(a>0)$, $g(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$에 대하여 상수 k와 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(0)<h(4)$
(나) 방정식 $|h(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수는 7이고, 그 중 가장 큰 실근을 α라 할 때 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이다.

$f(1)=-\dfrac{7}{32}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+16b$의 값을 구하시오.

(단, $\dfrac{5}{2}<e<3$이고, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$이다.) [4점]

H188

★★★
(2023(7)고3–미적분30)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\sin|\pi f(x)|$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 함수 $g(x)$와 자연수 m이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=a_4$와 $x=a_8$에서 극대이다.
(나) $f(a_m)=f(0)$

$f(a_k)\le f(m)$을 만족시키는 자연수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

H. 그래프 개형: 볼록성과 직선의 기울기 대소 관계

H189

○○
(2016(3)고3–가형19)

함수 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

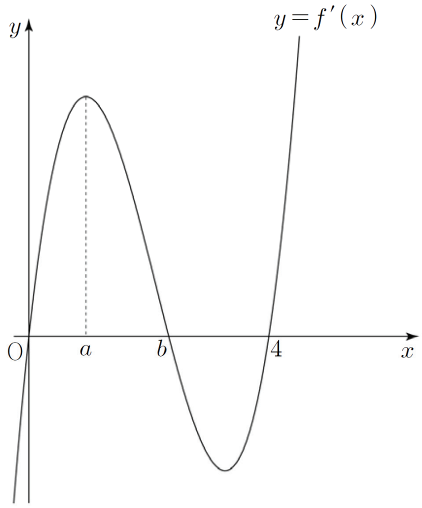
ㄱ. $f'(0)=1$
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge-\dfrac{1}{2}$이다.
ㄷ. $0<a<b<1$일 때, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H190

○○○
(2015(9)고2-가형21)

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다. 함수 $f'(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가질 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(0)=f'(b)=f'(4)=0$이다.) [4점]



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. $a<t<b$일 때, $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}>\dfrac{f(t)-f(b)}{t-b}$이다.

ㄷ. $\displaystyle\int_a^4 f'(x)dx=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(a)$는 서로 다른 세 점에서 만난다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

H191

○○○
(2016(7)고3-가형20)

두 함수 $f(x)=\ln x$, $g(x)=\ln\dfrac{1}{x}$의 그래프가 만나는 점을 P라 할 때 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 점 P의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.

ㄴ. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 각각의 접선은 서로 수직이다.

ㄷ. $t>1$일 때, $-1<\dfrac{f(t)g(t)}{(t-1)^2}<0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

I. 정적분

I009

★★★ (2018(4)고3-가형30)

함수 $f(x)=e^x(ax^3+bx^2)$과 양의 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[-t,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $M(t)$, 최솟값을 $m(t)$라 할 때, 두 함수 $M(t)$, $m(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 t에 대하여 $M(t)=f(t)$이다. (나) 양수 k에 대하여 닫힌구간 $[k,\ k+2]$에 있는 임의의 실수 t에 대해서만 $m(t)=f(-t)$가 성립한다. (다) $\displaystyle\int_1^5\{e^t\times m(t)\}dt=\frac{7}{3}-8e$

$f(k+1)=\dfrac{q}{p}e^{k+1}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

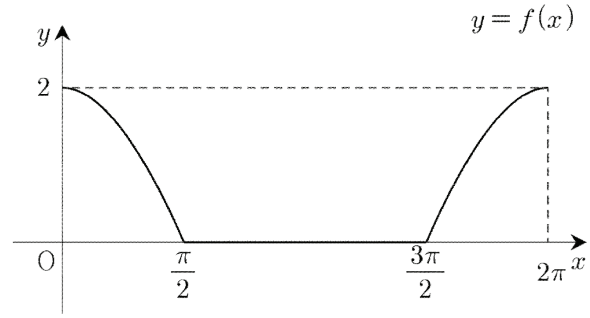
(단, a와 b는 0이 아닌 상수, p와 q는 서로소인 자연수이고, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=0$이다.) [4점]

I. 정적분: 치환적분법

I010

○○ (2003사관(1차)-이과24)

아래 그림은 $0\le x\le 2\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=\cos x+|\cos x|$의 그래프이다. 이 때, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}f\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)dx$의 값은? [4점]



① $\dfrac{1}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　③ 1

④ $\sqrt{3}$　⑤ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

I011

○○○ (2006(10)고3-가형28)

$a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의할 때, 옳은 내용을 보기에서 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $a_1+a_3=\dfrac{1}{2}$ ㄴ. $a_1+a_2+a_3+a_4=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$ ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}a_k=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{51}$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

I012

○○○ (2017사관(1차)-가형16)

자연수 n에 대하여

$$S_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$$

이라 할 때, 다음은 $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값을 구하는 과정이다.

〈과정〉

$1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}$

$=\boxed{\text{(가)}}-(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{1+x^2}$ 이므로

$S_n=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}$

$=\displaystyle\int_0^1\{1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}\}dx$

$=\displaystyle\int_0^1\boxed{\text{(가)}}dx-(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$

이다. 한편, $0\le\dfrac{x^{2n}}{1+x^2}\le x^{2n}$이므로

$0\le\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx\le\int_0^1 x^{2n}dx=\boxed{\text{(나)}}$

이다. 따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx=0$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\boxed{\text{(가)}}dx$이다.

$x=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\boxed{\text{(가)}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta$

$=\boxed{\text{(다)}}$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(x)$, $g(n)$, (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $k\times f(2)\times g(2)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{\pi}{40}$　② $\dfrac{\pi}{60}$　③ $\dfrac{\pi}{80}$　④ $\dfrac{\pi}{100}$　⑤ $\dfrac{\pi}{120}$

I013

○○○ (2019(4)고3-가형27)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다.

$g(x)$가 $f(x)$의 역함수이고 $g(2)=1$, $g(5)=5$일 때,

$\displaystyle\int_1^5\frac{40}{g'(f(x))\{f(x)\}^2}dx$의 값을 구하시오. [5점]

I014

○○○ (2017(10)고3-가형14)

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다. $f(1)=3$, $g(1)=3$일 때,

$$\int_1^3\left\{\frac{f(x)}{f'(g(x))}+\frac{g(x)}{g'(f(x))}\right\}dx$$

의 값은? [4점]

① -8　② -4　③ 0　④ 4　⑤ 8

I015

●●● (2022사관(1차)-미적분29)

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x \le 1$에서 $f(x) < 0$이다.
(나) $\int_{-1}^{0} \|f(x)\sin x\| dx = 2$, $\int_{0}^{1} \|f(x)\sin x\| dx = 3$

함수 $g(x) = \int_{-1}^{x} |f(t)\sin t| dt$에 대하여

$\int_{-1}^{1} f(-x)g(-x)\sin x dx = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

I. 정적분: 치환적분법(응용)

I016

○○○ (2023사관(1차)-미적분28)

$0 < a < 1$인 실수 a에 대하여 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 두 함수

$y = \sin x$, $y = a\tan x$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(a)$라 할 때, $f'\left(\frac{1}{e^2}\right)$의 값은? [4점]

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$

④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

I017

○○○ (2018(4)고3-가형27)

자연수 n에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

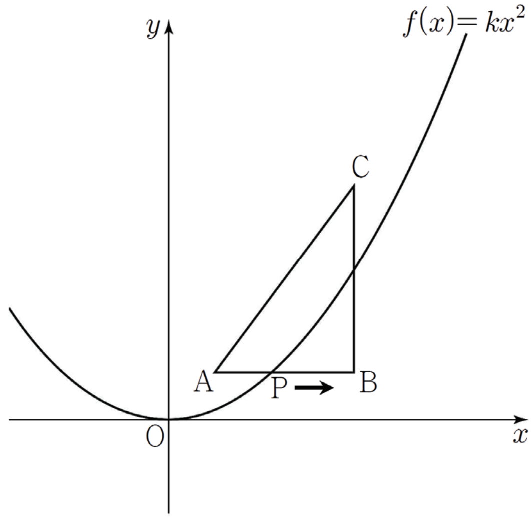
$$f(x) = \int_{1}^{x} \frac{n - \ln t}{t} dt$$

의 최댓값을 $g(n)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{12} g(n)$의 값을 구하시오. [4점]

I018

(2017(4)고3-가형20)

그림과 같이 세 점 A(1, 1), B(4, 1), C(4, 5)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 점 P는 점 A를 출발하여 삼각형 ABC의 변을 따라 점 B를 지나 점 C까지 매초 1의 일정한 속력으로 움직이고 이차함수 $f(x)=kx^2$의 그래프가 점 P를 지난다. t초 후 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기를 $g(t)$라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. $0 \le t < 3$일 때 점 P의 좌표는 $(t+1, 1)$이다. ㄴ. $g(t)=\dfrac{2}{t+1} \,(0 \le t < 3)$ ㄷ. $\displaystyle\int_0^7 g(t)dt=6+4\ln 2$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

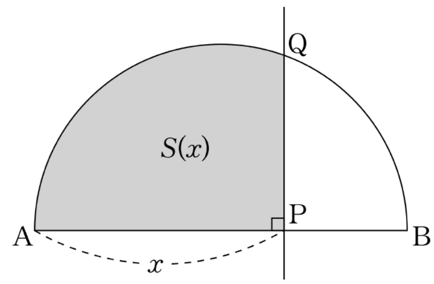
I019

(2017(10)고3-가형30)

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB 위의 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 선분 AB를 지름으로 하는 반원과 만나는 점을 Q라 하자.
$\overline{\mathrm{AP}}=x$라 할 때, $S(x)$를 다음과 같이 정의한다.
$0<x<2$일 때 $S(x)$는 두 선분 AP, PQ와 호 AQ로 둘러싸인 도형의 넓이이고, $x=2$일 때 $S(x)$는 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 넓이이다.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\{S(1+\sin\theta)-S(1+\cos\theta)\}d\theta=p+q\pi^2$$

일 때, $\dfrac{30p}{q}$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 유리수이다.) [4점]



I020

★★★
(2020(7)고3-가형30)

함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$와 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=e^{af(x)}+bf(x)\ (0<x<12)$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_m\ (m\text{은 자연수})$$

라 할 때, m 이하의 자연수 n에 대하여 α_n은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) n이 홀수일 때, $\alpha_n=n$이다.
> (나) n이 짝수일 때, $g(\alpha_n)=0$이다.

함수 $g(x)$가 서로 다른 두 개의 극댓값을 갖고 그 합이 e^3+e^{-3}일 때,

$$m\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}g(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=pe^3+qe$$

이다. $p-q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 정수이다.) [4점]

I021

★★★
(2020(10)고3-가형30)

최고차항의 계수가 $k(k>0)$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=f(-2)$, $f(0)\neq 0$이다.
함수

$$g(x)=(ax+b)e^{f(x)}(a<0)$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $(x+1)\{g(x)-mx-m\}\leq 0$
> 을 만족시키는 실수 m의 최솟값은 -2이다.
> (나) $\int_0^1 g(x)dx=\int_{-2f(0)}^1 g(x)dx=\frac{e-e^4}{k}$

$f(ab)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

I. 정적분: 부분적분법

I022

○○
(2015(4)고3-B형17)

자연수 n에 대하여 함수 $f(n)=\int_1^n x^3 e^{x^2}dx$라 할 때, $\dfrac{f(5)}{f(3)}$의 값은? [4점]

① e^{14}　② $2e^{16}$　③ $3e^{16}$
④ $4e^{18}$　⑤ $5e^{18}$

I023

○○
(2017사관(1차)-가형18)

함수 $f(x)=\int_1^x e^{t^3}dt$에 대하여 $\int_0^1 xf(x)dx$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1-e}{2}$　② $\dfrac{1-e}{3}$　③ $\dfrac{1-e}{4}$
④ $\dfrac{1-e}{5}$　⑤ $\dfrac{1-e}{6}$

I024

○○
(2023(7)고3-미적분26)

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고

$$\int_1^2 (x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx=2$$

를 만족시킨다. $f(1)=4$일 때, $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$의 값은? [3점]

① $\dfrac{3}{4}$　② 1　③ $\dfrac{5}{4}$
④ $\dfrac{3}{2}$　⑤ $\dfrac{7}{4}$

I025

○○○
(2015(10)고3-B형27)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$
(나) $\int_0^1 (x-1)f'(x+1)dx=-4$

$\int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하시오. (단, $f'(x)$는 연속함수이다.) [4점]

I026

○○○
(2017(3)고3-가형16)

연속함수 $f(x)$가

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=12,\ \int_0^1 xf(x)dx=\int_0^{-1} xf(x)dx$$

를 만족시킨다. $\int_{-1}^x f(t)dt=F(x)$라 할 때,

$\int_{-1}^1 F(x)dx$의 값은? [4점]

① 6　② 8　③ 10
④ 12　⑤ 14

I027

(2017(3)고3-가형21)

구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt\,(0\le x\le 1)$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $F(x)=f(x)-x$

(나) $\int_0^1 F(x)dx=e-\frac{5}{2}$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $F(1)=e$

ㄴ. $\int_0^1 xF(x)dx=\frac{1}{6}$

ㄷ. $\int_0^1 \{F(x)\}^2dx=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

I028

(2018(7)고3-가형20)

양수 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여

$$g(x)=\int_1^x \frac{f(t^2+1)}{t}dt$$

(나) $\int_2^5 f(x)dx=16$

$g(2)=3$일 때, $\int_1^2 xg(x)dx$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

I029

(2023(7)고3-미적분29)

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x<1$일 때, $f'(x)=-2x+4$이다.

(나) $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x^2+1)=ae^{2x}+bx$이다. (단, a, b는 상수이다.)

$\int_0^5 f(x)dx=pe^4-q$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 유리수이다.) [4점]

I030

(2023(10)고3-미적분28)

함수

$$f(x)=\sin x\cos x\times e^{a\sin x+b\cos x}$$

이 다음 조건을 만족시키도록 하는 서로 다른 두 실수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 $a-b$의 최솟값은? [4점]

(가) $ab=0$
(나) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\frac{1}{a^2+b^2}-2e^{a+b}$

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

I. 정적분: 부분적분법(응용)

I031

(2019(3)고3-가형17)

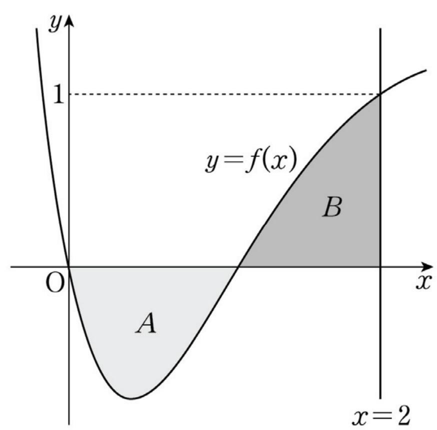
두 함수 $f(x)=ax^2(a>0)$, $g(x)=\ln x$의 그래프가 한 점 P에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기와 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 서로 같다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $\frac{2\sqrt{e}-3}{6}$ ② $\frac{2\sqrt{e}-3}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{e}-1}{2}$ ④ $\frac{4\sqrt{e}-3}{6}$ ⑤ $\sqrt{e}-1$

I032

(2020(10)고3-가형27)

실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=0$, $f(2)=1$이다. 그림과 같이 $0\le x\le 2$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 두 부분의 넓이를 각각 A, B라 하자. $A=B$일 때, $\displaystyle\int_0^2(2x+3)f'(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]



이동훈
기출문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

빠른 답지

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

G 수열의 극한

1	③	2	①	3	③	4	①	5	⑤
6	50	7	①	8	④	9	②	10	⑤
11	⑤	12	10	13	4	14	15	15	④
16	③	17	①	18	④	19	②	20	③
21	④	22	③	23	24	24	④	25	④
26	③	27	③	28	40	29	④	30	①
31	②	32	25	33	125	34	④	35	6
36	①	37	④	38	⑤	39	4	40	80
41	12	42	5	43	①	44	③	45	⑤
46	③	47	④	48	④	49	192	50	④
51	④	52	③	53	②	54	①	55	②
56	②	57	④	58	⑤	59	③	60	②
61	253	62	④	63	13	64	27	65	28
66	25	67	②	68	②	69	25	70	①
71	②	72	⑤	73	①	74	②	75	3
76	12	77	②	78	②	79	⑤	80	③
81	②	82	④	83	①	84	③	85	④
86	②	87	②	88	②	89	④	90	7
91	18	92	③	93	⑤	94	①	95	24
96	①	97	12	98	④	99	①	100	③
101	①	102	③	103	①	104	④	105	125
106	④	107	④	108	②	109	10	110	19
111	④	112	⑤	113	①	114	①	115	④
116	①	117	①	118	④	119	②	120	④
121	①	122	125	123	①	124	⑤	125	③
126	④	127	②	128	③	129	③	130	②
131	①	132	③	133	④	134	①	135	②
136	②	137	①	138	④	139	⑤	140	11
141	②	142	②	143	②	144	47	145	②
146	②	147	②	148	③	149	12	150	①
151	④	152	③	153	②	154	④	155	①
156	①	157	⑤	158	②	159	④	160	②
161	⑤	162	③	163	①	164	⑤	165	④
166	59								

H 미분법

1	①	2	③	3	④	4	⑤	5	②
6	23	7	③	8	107	9	③	10	⑤
11	③	12	②	13	⑤	14	⑤	15	①
16	②	17	5	18	③	19	①	20	79
21	14	22	①	23	61	24	18	25	48
26	30	27	20	28	②	29	②	30	3
31	9	32	32	33	⑤	34	18	35	②
36	③	37	③	38	20	39	③	40	④
41	135	42	③	43	①	44	④	45	④
46	③	47	4	48	①	49	①	50	④
51	25	52	9	53	②	54	18	55	17
56	⑤	57	⑤	58	②	59	④	60	②
61	②	62	30	63	②	64	②	65	③
66	49	67	208	68	4	69	②	70	④
71	④	72	①	73	⑤	74	③	75	8
76	5	77	①	78	120	79	②	80	④
81	20	82	③	83	⑤	84	⑤	85	③
86	③	87	③	88	④	89	⑤	90	20
91	③	92	⑤	93	⑤	94	13	95	②
96	②	97	③	98	②	99	⑤	100	②
101	①	102	③	103	⑤	104	⑤	105	10
106	④	107	8	108	10	109	10	110	25
111	6	112	②	113	⑤	114	①	115	①
116	③	117	②	118	503	119	④	120	71
121	③	122	⑤	123	①	124	3	125	①
126	③	127	②	128	②	129	①	130	4
131	30	132	8	133	④	134	②	135	①
136	②	137	64	138	37	139	①	140	9
141	50	142	⑤	143	15	144	77	145	⑤
146	25	147	③	148	⑤	149	④	150	12
151	③	152	④	153	③	154	95	155	①
156	①	157	③	158	③	159	9	160	⑤
161	3	162	13	163	64	164	④	165	⑤
166	⑤	167	④	168	③	169	②	170	10
171	49	172	25	173	91	174	129	175	71
176	⑤	177	⑤	178	③	179	①	180	⑤
181	④	182	③	183	②	184	③	185	③
186	③	187	6	188	208	189	③	190	⑤
191	⑤	192	④	193	27	194	④	195	④
196	34	197	32	198	25	199	4	200	40

201	①	202	⑤	203	⑤	204	6

Ⅰ 적분법

1	④	2	72	3	⑤	4	④	5	②
6	⑤	7	⑤	8	④	9	49	10	③
11	③	12	④	13	12	14	①	15	19
16	②	17	325	18	⑤	19	80	20	48
21	25	22	③	23	⑤	24	④	25	6
26	④	27	④	28	①	29	12	30	④
31	②	32	7	33	586	34	26	35	②
36	①	37	12	38	③	39	③	40	8
41	51	42	②	43	40	44	102	45	①
46	⑤	47	①	48	④	49	②	50	⑤
51	⑤	52	③	53	④	54	③	55	①
56	16	57	36	58	③	59	18	60	125
61	③	62	33	63	②	64	④	65	②
66	5	67	⑤	68	①	69	①	70	①
71	②	72	⑤	73	⑤	74	②	75	54
76	⑤	77	10	78	11	79	100	80	11
81	88	82	50	83	④	84	④	85	②
86	13	87	④	88	14	89	④	90	⑤
91	24	92	⑤	93	②	94	350	95	③
96	③	97	③	98	⑤	99	④	100	④
101	12	102	①	103	①	104	7	105	⑤
106	④	107	①	108	④	109	⑤		

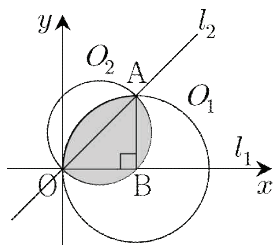
해설 목차

미적분

G126 | 답 ④

[풀이]

두 원 O_1, O_2의 두 교점 중에서 O가 아닌 점을 A, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라고 하자. 이때, 점 B는 원 O_1의 중점이다.



S_1 =(호 AO와 현 AO로 둘러싸인 활꼴의 넓이)

$+\frac{1}{2}\times$(원 O_2의 넓이)

$=\frac{9}{4}\pi-\frac{9}{2}+\frac{9}{4}\pi=\frac{9}{2}\pi-\frac{9}{2}$

두 원 O_1, O_2의 닮음비는 $1:\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$S_2=\frac{1}{2}S_1$ (그리고 $S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n$)

등비급수의 합의 공식에 의하여

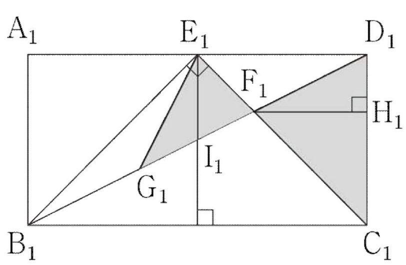
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{9}{2}\pi-\frac{9}{2}}{1-\frac{1}{2}}=9\pi-9$$

답 ④

G127 | 답 ②

[풀이]

점 F_1에서 선분 D_1C_1에 내린 수선의 발을 H_1, 점 E_1을 지나고 직선 B_1C_1에 수직인 직선이 선분 B_1D_1과 만나는 점을 I_1이라고 하자.



직각삼각형 $E_1B_1F_1$에서 $\overline{G_1E_1}=\overline{G_1F_1}$이므로

세 점 E_1, B_1, F_1은 중심이 G_1이고 지름이 $\overline{B_1F_1}$인 원 위에 있다.

닮음인 두 삼각형 $F_1E_1I_1$, $F_1C_1D_1$의 닮음비는 $1:2$이므로

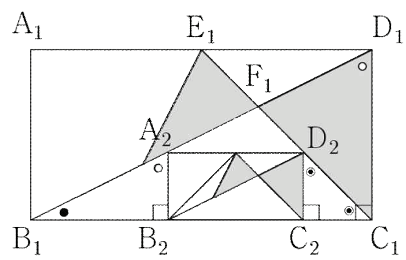
$\overline{E_1F_1}=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\overline{F_1H_1}=\frac{2}{3}$

$S_1=\frac{1}{2}\times(\triangle E_1B_1F_1$의 넓이$)+(\triangle F_1C_1D_1$의 넓이$)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{3}$

$=\frac{1}{2}$

직사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 이웃한 두 변의 길이를 각각 x, $2x$로 두자.



(단, ◉= 45°)

$\overline{B_1C_1}=\overline{B_1B_2}+\overline{B_2C_2}+\overline{C_2C_1}$

즉, $2=2x+2x+x$, $x=\frac{2}{5}$

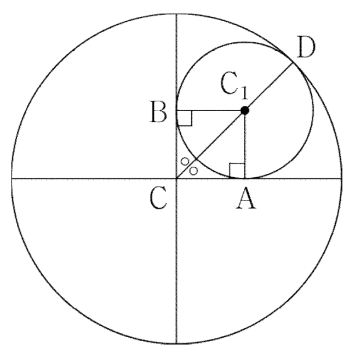
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{25}{42}$$

답 ②

G128 | 답 ③

[풀이]

아래 그림처럼 원 C_1이 사분원과 만나는 세 점을 각각 A, B, D라고 하자.



(단, ○= 45°)

직각이등변삼각형 C_1CA에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{CC_1}=\sqrt{2}r_1$

원의 정의에 의하여

$\overline{CD}=\overline{CC_1}+\overline{C_1D}=\sqrt{2}r_1+r_1=1$

정리하면

$r_1 = \sqrt{2}-1$

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$r_n = (\sqrt{2}+1)r_{n+1}$

이므로

$r_{n+1} = (\sqrt{2}-1)r_n$

수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 $\sqrt{2}-1$이고, 공비가 $\sqrt{2}-1$인 등비수열이다.

등비급수의 합의 공식에 의하여

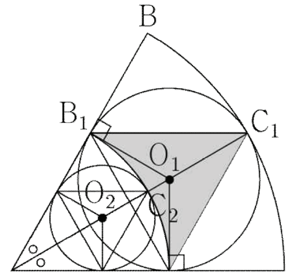
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} r_k = \frac{\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ③

G129 | 답 ③

[풀이]

두 원 O_1, O_2의 중심을 각각 O_1, O_2, 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라고 하자.



(단, ○$=30^\circ$)

직각삼각형 $\mathrm{O_1OA_1}$에서

$\frac{r}{6-r} = \sin 30^\circ \left(=\frac{1}{2}\right)$ 풀면 $r=2$

이므로 $\overline{\mathrm{OA_1}} = 2\sqrt{3}$

$\therefore$ $S_1 = (\square \mathrm{OA_1C_1B_1}$의 넓이$) - ($♡$\mathrm{OA_1B_1}$의 넓이$)$

$= 6\sqrt{3} - 2\pi$

한편 두 부채꼴 OAB, $\mathrm{OA_1B_1}$의 닮음비는

$6 : 2\sqrt{3} (= \overline{\mathrm{OA}} : \overline{\mathrm{OA_1}})$

이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

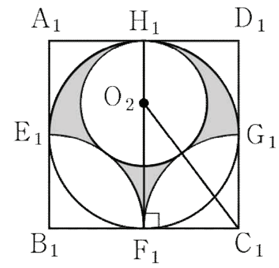
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{6\sqrt{3}-2\pi}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 9\sqrt{3}-3\pi$$

답 ③

G130 | 답 ②

[풀이]

원 O_2의 중심과 반지름의 길이를 각각 O_2, r이라고 하자.



점 C_1을 중심으로 하는 부채꼴과 원 O_2가 서로 접하므로

$\overline{\mathrm{O_2C_1}} = r+1$

점 H_1에서 원 O_2가 원 O_1에 내접하므로

$\overline{\mathrm{O_2F_1}} = \overline{\mathrm{H_1F_1}} - \overline{\mathrm{H_1O_2}} = 2-r$

직각삼각형 $\mathrm{O_2F_1C_1}$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{O_2C_1}}^2 = \overline{\mathrm{O_2F_1}}^2 + \overline{\mathrm{F_1C_1}}^2$

즉, $(r+1)^2 = (2-r)^2 + 1^2$

정리하면

$r = \frac{2}{3}$

$S_1 = ($원 O_1의 넓이$)$

$-($원 O_2의 넓이$)$

$-4\times($호 $\mathrm{E_1F_1}$와 현 $\mathrm{E_1F_1}$으로 둘러싸인 도형의 넓이$)$

$= \pi - \left(\frac{2}{3}\right)^2\pi - 4\times\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$

$= 2 - \frac{4}{9}\pi$

두 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$, $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 닮음비가 $1 : \frac{2}{3}$이므로

$S_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_1$ 즉, $S_2 = \frac{4}{9}S_1$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$S_{n+1} = \frac{4}{9}S_n$

수열 $\{S_n\}$의 귀납적 정의는

$S_1 = 2-\frac{4}{9}\pi$, $S_{n+1} = \frac{4}{9}S_n$

등비급수의 합의 공식에 의하여

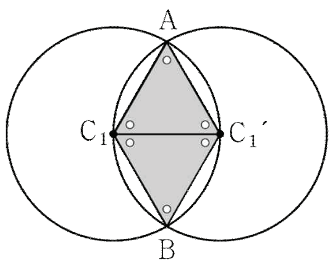
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{2-\frac{4}{9}\pi}{1-\frac{4}{9}} = \frac{18-4\pi}{5}$$

답 ②

G131 | 답 ①

[풀이]

문제에서 주어진 첫 번째 그림의 두 원의 중심을 각각 C_1, $C_1{}'$라고 하자. 그리고 두 원이 만나는 두 교점을 각각 A, B 라고 하자.



(단, ○$=60^\circ$)

원의 정의에 의하여

$\overline{C_1A}=\overline{C_1C_1{}'}=\overline{C_1B}$,

$\overline{C_1{}'A}=\overline{C_1{}'C_1}=\overline{C_1{}'B}$

이므로 두 삼각형 $AC_1C_1{}'$, $BC_1{}'C_1$은 정삼각형이다. (그리고 서로 합동이다.)

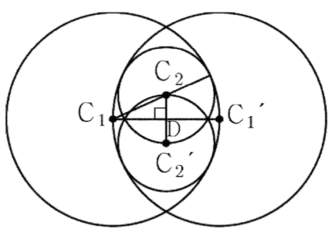
$\angle AC_1B=\angle AC_1{}'B=120^\circ$

이므로

$l_1=2\times$(호 AC_1B의 길이)

$=2\times 6\pi\times\dfrac{120}{360}=4\pi$

문제에서 주어진 두 번째 그림의 작은 두 원의 중심을 각각 C_2, $C_2{}'$, 반지름의 길이를 r이라고 하자. 그리고 두 선분 $C_1C_1{}'$, $C_2C_2{}'$의 교점을 D라고 하자.



원 C_2가 원 C_1에 내접하므로

$\overline{C_2C_1}=3-r$

두 선분 $C_1C_1{}'$, $C_2C_2{}'$는 서로를 수직이등분하므로

$\overline{C_1D}=\dfrac{3}{2}$, $\overline{DC_2}=\dfrac{r}{2}$

직각삼각형 C_2C_1D에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{C_2C_1}^2=\overline{C_1D}^2+\overline{DC_2}^2$

$(3-r)^2=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{r}{2}\right)^2$

정리하면

$r^2-8r+9=0$

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$r=4-\sqrt{7}$ $(\because 0<r<3)$

두 원 C_1, C_2의 닮음비가 $3:4-\sqrt{7}$이므로

$l_2=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}l_1$

2 이상의 자연수 n에 대하여 마찬가지의 방법으로

$l_{n+1}=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}l_n$

수열 $\{l_n\}$의 귀납적 정의는

$l_1=4\pi$, $l_{n+1}=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}l_n$

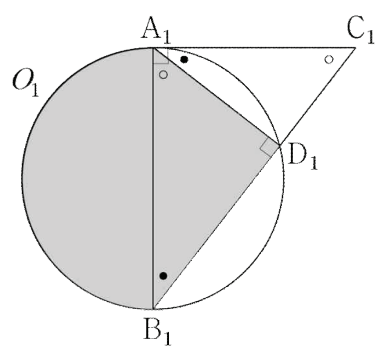
등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n=\frac{4\pi}{1-\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}}=2\pi(1+\sqrt{7})$$

답 ①

G132 | 답 ③

[풀이]



(단, ●$+$○$=90^\circ$)

위의 그림처럼 삼각형 $A_1B_1D_1$에서 $\overline{A_1B_1}$은 원 O_1의 지름이므로

$\angle A_1D_1B_1=90^\circ$

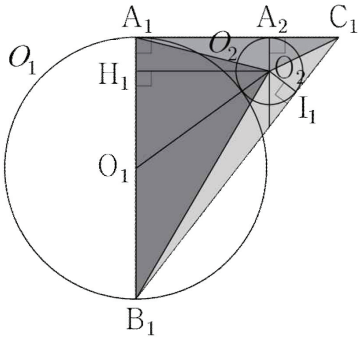
두 직각삼각형 $A_1B_1C_1$, $D_1B_1A_1$은 서로 닮음이고,

이때, 닮음비는 $5:4$이므로

$S_1=\dfrac{1}{2}\times 4\pi+\left(\dfrac{1}{2}\times 4\times 3\right)\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^2$

$=2\pi+\dfrac{96}{25}$

두 원 O_1, O_2의 중점을 각각 O_1, O_2, 점 O_2에서 두 선분 A_1B_1, B_1C_1에 내린 수선의 발을 각각 H_1, I_1이라 하자. 그리고 원 O_2의 반지름의 길이를 r이라 하자.



(△$A_1B_1C_1$의 넓이)=(△$A_1O_2C_1$의 넓이)+(△$A_1B_1O_2$의 넓이)+(△$O_2B_1C_1$의 넓이)

즉, $\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{1}{2}(3r+4\overline{H_1O_2}+5r)$

$\overline{H_1O_2}=3-2r$

직각삼각형 $H_1O_1O_2$에서 피타고라스의 정리에 의하여

$(2+r)^2=(2-r)^2+(3-2r)^2$

$4r^2-20r+9=0$, $(2r-9)(2r-1)=0$

$r=\frac{1}{2}$

그림 R_2에서 색칠된 두 도형의 닮음비는 $2:\frac{1}{2}$이므로

등비급수의 합의 공식에 의하여

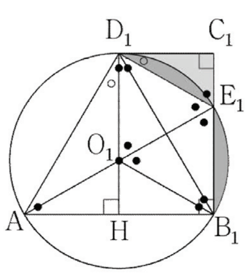
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2\pi+\frac{96}{25}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{32}{15}\pi+\frac{512}{125}$$

답 ③

G133 | 답 ④

[풀이]

그림 R_1에서 주어진 원의 중심을 O_1, 점 D_1에서 선분 AB_1에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$)

$\overline{D_1C_1}^2=\overline{C_1E_1}\,\overline{C_1B_1}$, 즉

$1^2=\overline{C_1E_1}\times\sqrt{3}$, $\overline{C_1E_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\overline{E_1B_1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

직각삼각형 D_1AH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{D_1A}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

($\because\ \overline{AH}=1$, $\overline{D_1H}=\sqrt{3}$)

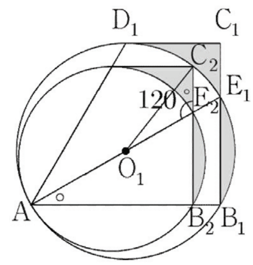
삼각형 D_1AB_1은 정삼각형이고, 위의 그림처럼 각의 크기(●, ○)가 결정된다.

그림 R_1에서 주어진 원의 반지름의 길이는 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이고, 두 삼각형 $D_1O_1E_1$, $E_1O_1B_1$은 정삼각형이고, 서로 합동이다.

위의 그림에서 더 어둡게 색칠된 두 도형의 넓이가 같으므로

$S_1=$(△$C_1D_1E_1$의 넓이)$=\frac{\sqrt{3}}{6}$

이제 $\overline{C_2B_2}=\sqrt{3}x$로 두자.



(단, ○$=30^\circ$)

$\overline{C_2O_1}=$(큰 원의 반지름의 길이)$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\overline{O_1E_2}=$(작은 원의 지름의 길이)$-\overline{AO_1}$

$=\frac{4\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\overline{C_2E_2}=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

삼각형 $C_2O_1E_2$에서 코사인법칙에 의하여

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2$$

$$-2\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)\times\cos120^\circ,$$

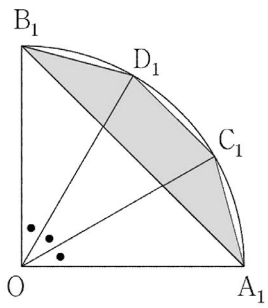
$7x^2-6x=0$, $x=\frac{6}{7}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-x^2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{1-\left(\frac{6}{7}\right)^2}=\frac{49}{78}\sqrt{3}$$

답 ④

G134 ㅣ답 ①

[풀이]

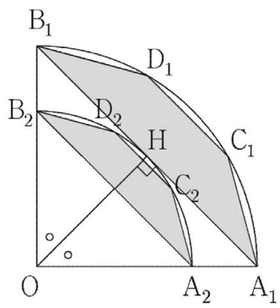


(단, ●$=30^\circ$)

$S_1=3\times$($\triangle C_1OA_1$의 넓이)$-$($\triangle B_1OA_1$의 넓이)

$=3\times\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin30^\circ-\dfrac{1}{2}\times1\times1$

$=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$



(단, ○$=45^\circ$)

점 O에서 선분 B_1A_1에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

직각삼각형 HOA_1에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{OA_1}:\overline{OH}=1:\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

이므로 위의 그림에서 색칠된 두 도형의 닮음비는 $1:\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

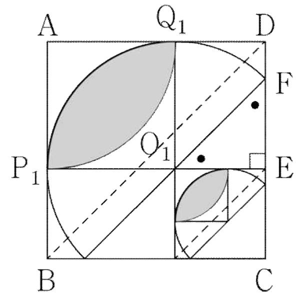
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{4}}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

답 ①

G135 ㅣ답 ②

[풀이]

점 O_1에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 E, 반원 O_1이 변 CD와 만나는 점을 F라고 하자. 평행선의 성질을 이용하면 아래 그림과 같이 각(•)을 결정할 수 있다.



R_2

(단, •$=45^\circ$)

반원 O_1의 반지름의 길이를 r이라고 하면

직각삼각형 FO_1E에서

$\dfrac{\overline{O_1E}}{\overline{FO_1}}=\cos45^\circ$, 즉 $\dfrac{4-r}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

풀면 $r=8-4\sqrt{2}$

$\therefore\ S_1=2\left(\dfrac{\pi}{4}r^2-\dfrac{1}{2}r^2\right)=\dfrac{r^2(\pi-2)}{2}$

한편 두 정사각형 $AP_1O_1Q_1$, $O_1B_1CD_1$의 닮음비는

$\overline{AQ_1}:\overline{O_1D_1}=1:\sqrt{2}-1$

이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{r^2(\pi-2)}{2}}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{16(\sqrt{2}-1)^2(\pi-2)}{2(\sqrt{2}-1)}$$

$=8(\sqrt{2}-1)(\pi-2)$

$\therefore\ p+q=16$

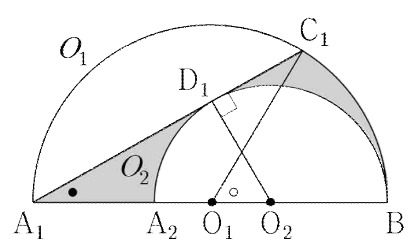
답 ②

G136 ㅣ답 ②

[풀이]

그림 R_1에서 주어진 두 반원의 중심을 각각 O_1, O_2라고 하자. (아래 그림)

그리고 반원 O_2의 반지름의 길이를 r이라고 하자.



R_1

(단, ●$=30^\circ$, ○$=60^\circ$)

직각삼각형 $A_1O_2D_1$에서

$\dfrac{r}{2-r}=\sin30^\circ$, $r=\dfrac{2}{3}$

$S_1=(\triangle \mathrm{A_1O_1C_1}$의 넓이$)+(\triangledown \mathrm{C_1O_1B}$의 넓이$)$

$-($반원 O_2의 넓이$)$

$$=\frac{1}{2}\times 1^2\times \sin 120^\circ+\frac{1}{2}\times 1^2\times \frac{\pi}{3}-\pi\left(\frac{2}{3}\right)^2\times \frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}$$

등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{20}$$

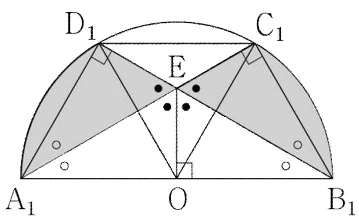
답 ②

G137 | 답 ①

[풀이]

두 선분 $\mathrm{A_1C_1}$, $\mathrm{B_1D_1}$의 교점을 E라고 하자.

이등변삼각형의 성질, 삼각형의 세 내각의 합을 이용하면 아래 그림과 같이 각(○, ●)을 결정할 수 있다.



R_1

(단, ○$=30^\circ$, ●$=60^\circ$)

직각삼각형 $\mathrm{EOB_1}$에서

$$\overline{\mathrm{EO}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

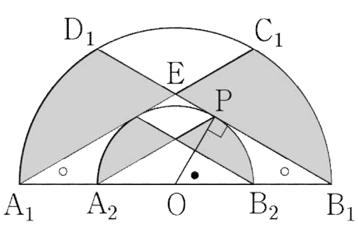
$\frac{S_1}{2}=($호 $\mathrm{B_1C_1}$와 현 $\mathrm{B_1C_1}$으로 둘러싸인 활꼴의 넓이$)$

$+(\triangle \mathrm{C_1EB_1}$의 넓이$)$

$$=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore\ S_1=\frac{4}{3}\pi-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

점 O에서 선분 $\mathrm{B_1D_1}$에 내린 수선의 발을 P라고 하자.



R_2

(단, ○$=30^\circ$, ●$=60^\circ$)

$\overline{\mathrm{A_1B_1}}:\overline{\mathrm{A_2B_2}}=\overline{\mathrm{OB_1}}:\overline{\mathrm{OP}}=2:1$

이므로 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{4}{3}\pi-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{16}{9}\pi-\frac{8\sqrt{3}}{9}$$

$\therefore\ a+b=16-8=8$

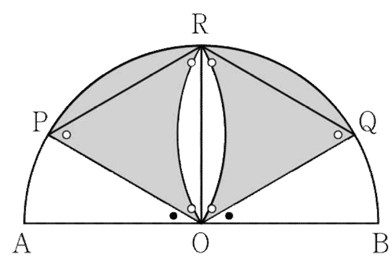
답 ①

G138 | 답 ④

[풀이]

그림 R_n에서 새롭게 그려진  모양의 도형 1개의 넓이를 a_n, 개수를 b_n이라고 하자.

그림 R_1에서 세 원 O, P, Q가 만나는 점을 R이라고 하자.



R_1

(단, ●$=30^\circ$, ○$=60^\circ$)

원의 정의에 의하여 세 선분

PO, OR, RP

의 길이는 2로 같다.

따라서 삼각형 POR은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

마찬가지의 이유로

삼각형 ROQ는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

두 부채꼴 POR(OR이 호), RPO(RP가 호)는 서로 합동이므로

호 PR과 현 PR로 둘러싸인 활꼴과

호 RO와 현 RO로 둘러싸인 활꼴은 서로 합동이다.

마찬가지의 이유로

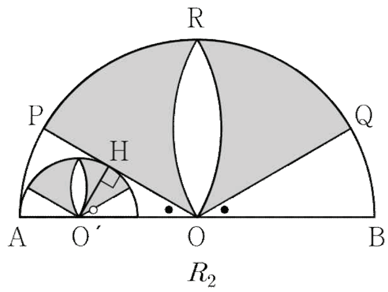
호 QR과 현 QR로 둘러싸인 활꼴과

호 RO와 현 RO로 둘러싸인 활꼴은 서로 합동이다.

따라서 그림 R_1에서 색칠된 도형의 넓이는 사다리꼴 POQR의 넓이와 같다.

$$a_1=2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=2\sqrt{3}$$

그림 R_2에서 새롭게 그려진 왼쪽 반원의 중심을 O′, 점 O′에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 그리고 그림 R_2에서 새롭게 그려진 반원의 반지름의 길이를 r이라고 하자.



(단, ●$=30^\circ$, ○$=60^\circ$)

직각삼각형 OHO′에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\cos 60^\circ = \dfrac{\overline{O'H}}{\overline{OO'}}$ 즉, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{r}{2-r}$

풀면 $r = \dfrac{2}{3}$

두 원 O, O'의 닮음비는 $2 : r$이므로

$a_2 = a_1 \times \left(\dfrac{r}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{9}a_1$

마찬가지의 방법으로

2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_{n+1} = \dfrac{1}{9}a_n$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1 = 2\sqrt{3}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{9}a_n$

수열 $\{b_n\}$의 귀납적 정의는

$b_1 = 1$, $b_{n+1} = 2b_n$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$이므로

등비급수의 합의 공식에 의하여

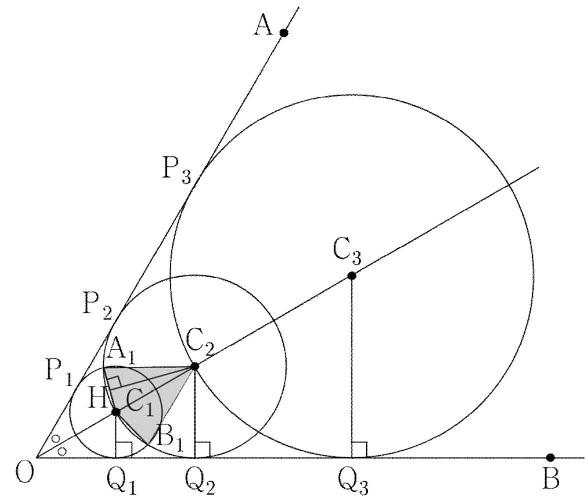
$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{2\sqrt{3}}{1-\dfrac{2}{9}} = \dfrac{18\sqrt{3}}{7}$

답 ④

G139 | 답 ⑤

[풀이]

점 C_2에서 선분 A_1C_1에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 그리고 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라고 하자.



(단, ○$=30^\circ$)

원 C_n은 점 Q_n에서 직선 OB에 접하므로

$\overline{C_nQ_n} \perp \overline{OB}$

직각삼각형 C_1OQ_1에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{OQ_1} = \sqrt{3}$, $\overline{C_1Q_1} = 1 (= r_1)$

직각삼각형 C_2OQ_2에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\sin 30^\circ = \dfrac{\overline{C_2Q_2}}{\overline{OC_2}}$ 즉, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{r_2}{r_2+2}$

풀면 $r_2 = 2$

마찬가지의 방법으로 3 이상의 자연수 n에 대하여

$\sin 30^\circ = \dfrac{\overline{C_nQ_n}}{\overline{OC_n}}$

즉, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{r_n}{2 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n}$

정리하면

$r_n = 2 + r_2 + r_3 + \cdots + r_{n-1}$

n의 자리에 $n-1$을 대입하면

$r_{n-1} = 2 + r_2 + r_3 + \cdots + r_{n-2}$

위의 두 등식을 변변히 빼서 정리하면

$r_n = 2r_{n-1} (n \geq 3)$

수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열이다.

일반항 r_n은

$r_n = 2^{n-1} (n \geq 1)$

이제 사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이를 구하자.

원의 정의에 의하여

$\overline{A_1C_1} = 1$, $\overline{C_2A_1} = 2$

이등변삼각형 $C_2A_1C_1$에서 점 H는 선분 A_1C_1의 중점이므로

$\overline{A_1H} = \dfrac{1}{2}$

직각삼각형 C_2A_1H에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{C_2H} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

$S_1 = 2\times(\triangle\, C_2A_1C_1$의 넓이)

$= 2\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{15}}{2}\right) = \frac{\sqrt{15}}{2}$

등비수열 $\{r_n\}$의 공비가 2이므로, 수열 $\{S_n\}$은 공비가 4인 등비수열이다.

일반항 S_n은

$$S_n = \frac{\sqrt{15}}{2}\times 4^{n-1}(n\geq 1)$$

수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{4^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{15}}{8}\times 4^n}{4^n+3^n} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

답 ⑤

G140 ㅣ답 11

[풀이]

문제에서 주어진 기울기 조건에 의하여

두 직선 A_1A_2, A_2A_3은 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

이때, $\angle\, A_1A_2O = \angle\, A_2A_3O$이므로

두 직각삼각형 A_1A_2O, A_2A_3O은 서로 닮음이다.

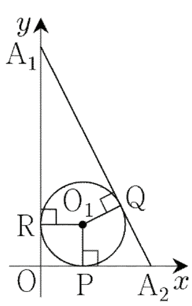
이때, 닮음비가 $2:1$이므로 $r_2 = \frac{1}{2}r_1$이다.

마찬가지의 방법으로

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n(n\geq 1)$$

이제 r_1의 값을 구하자.

점 O_1에서 x축, 직선 A_1A_2, y축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R이라고 하자.



$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1Q} + \overline{QA_2} = \overline{A_1R} + \overline{A_2P}$

즉, $2\sqrt{5} = 4 - r_1 + 2 - r_1$

$r_1 = 3 - \sqrt{5}$

등비급수의 합의 공식에 의하여

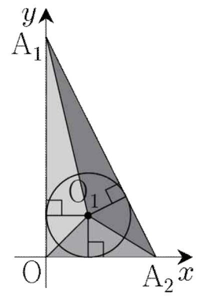
$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \frac{3-\sqrt{5}}{1-\frac{1}{2}} = 6-2\sqrt{5}$$

$\therefore\ a+b=11$

답 11

[참고]

r_1의 값을 다음과 같이 구해도 좋다.



($\triangle\, A_1OA_2$의 넓이)

$=$($\triangle\, A_1OO_1$의 넓이)$+$($\triangle\, O_1OA_2$의 넓이)$+$($\triangle\, A_2A_1O_1$의 넓이)

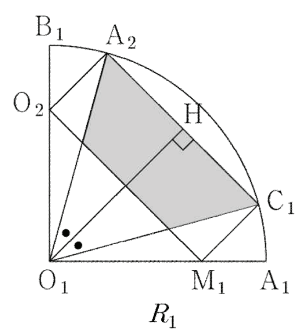
즉, $\frac{1}{2}\times 2\times 4 = \frac{1}{2}\times r_1\times(6+2\sqrt{5}\,)$

$\therefore\ r_1 = 3-\sqrt{5}$

G141 ㅣ답 ②

[풀이]

점 O_1에서 선분 A_2C_1에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



(단, $\bullet = 30^\circ$)

직각삼각형 $O_2O_1M_1$에서

$\overline{O_2M_1} = 2$

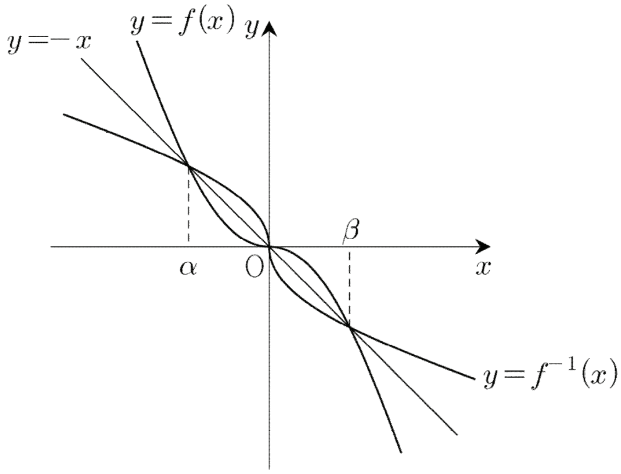
이고, 원의 정의에 의하여

$\overline{O_1A_2} = \overline{O_1C_1} = 2$

이므로 삼각형 $O_1C_1A_2$는 정삼각형이다.

$\overline{A_2O_2} = x$로 두자.

직각삼각형 C_1HO_1에서



위의 그림처럼 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 세 교점은 직선 $y=-x$ 위에 있다.

방정식 $f(x)=-x$는

$-\dfrac{kx^3}{x^2+1}=-x$

$\Leftrightarrow -\dfrac{kx^2}{x^2+1}=-1$ 또는 $x=0$

$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}$ 또는 $x=0$

$\alpha=-\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}$, $\beta=\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}$

이때, $\beta=-\alpha$, $f(\beta)=\alpha$, $f(\alpha)=\beta$이다.

$h(x)=f(x-2\beta)+2\alpha$로 두자.

$h(\beta)=f(-\beta)+2\alpha=f(\alpha)+2\alpha$

$=\beta+2\alpha=\alpha$

역함수의 성질에 의하여

$g(\alpha)=\beta$

역함수의 미분법에 의하여

$g'(\alpha)=\dfrac{1}{h'(\beta)}$

그런데 $h'(x)=f'(x-2\beta)$이므로

$g'(\alpha)=\dfrac{1}{f'(-\beta)}$

함수 $f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

함수 $f'(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

즉, 모든 실수 x에 대하여

$f'(-x)=f'(x)$이 성립한다.

$g'(\alpha)=\dfrac{1}{f'(\beta)}$

이를 문제에서 주어진 등식에 대입하면

$f'(\beta)=2g'(\alpha)=\dfrac{2}{f'(\beta)}$

정리하면

$f'(\beta)=-\sqrt{2}$

($\because f(x)$는 감소함수이다.)

$f'(\beta)=f'\left(\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}\right)$

$=-\dfrac{\dfrac{k}{k-1}\times\dfrac{3k-2}{k-1}}{\left(\dfrac{k}{k-1}\right)^2}=-\sqrt{2}$

정리하면

$(3-\sqrt{2})k=2$

풀면

$\therefore\ k=\dfrac{6+2\sqrt{2}}{7}$

답 ②

H170 | 답 10

[풀이]

모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$

이므로 함수 $f(x)$는 기함수이다. (즉, 원점 대칭이다.)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=-\dfrac{ax^4+(3a-b)x^2+b}{(x^2+1)^2}$ (단, $a>0$, $b>0$)

$f'(0)=-b<0$이므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이어야 한다.

즉, 함수 $f(x)$는 감소함수이다.

조건 (가)에서

$f(2)-f^{-1}(2)=g(f(0))$

$=g(0)=f(0)-f^{-1}(0)=0-0=0$

즉, $f(2)=f^{-1}(2)$($=t$로 두자.)

역함수의 성질에 의하여

$f(t)=2$

그런데 $f(x)$가 원점 대칭이므로

$f(-2)=-f(2)=-t$,

$f(-t)=-f(t)=-2$

즉, 곡선 $y=f(x)$는 다음의 네 점을 지난다.

$(2,\ t)$, $(t,\ 2)$, $(-2,\ -t)$, $(-t,\ -2)$

이때, $t\neq-2$이면 '함수 $f(x)$는 감소함수이다.' 에 모순이다.

따라서 $t=-2$ 즉, $f(2)=-2$

이제 상수 a, b의 값을 결정하자.

$f(2)=-\dfrac{8a+2b}{5}=-2$, $4a+b=5$ $\cdots$㉠

두 함수 $g(x)$, $h(x)$의 도함수는

$g'(x)=f'(x)-(f^{-1})'(x)$

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

이므로

$g'(2)=f'(2)-(f^{-1})'(2)=f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}$,

($\because$ $f'(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.)

$h'(2)=g'(f(2))f'(2)=g'(-2)f'(2)$

$=\{f'(-2)-(f^{-1})'(-2)\}f'(2)$

$=\left\{f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}\right\}f'(2)$

($\because$ $f'(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.)

$=(f'(2))^2-1$

조건 (나)에 의하여

$f'(2)-\dfrac{1}{f'(2)}=-5\{(f'(2))^2-1\}$

$f'(2)=p$로 두고 정리하면

$5p^3+p^2-5p-1=0$, $(5p+1)(p+1)(p-1)=0$

$p=-\dfrac{1}{5}(=f'(2))$ 또는 $p=-1(=f'(2))$

($\because f'(2)<0$)

• (1) $f'(2)=-\dfrac{1}{5}$인 경우 (○)

$f'(2)=-\dfrac{28a-3b}{25}=-\dfrac{1}{5}$, $28a-3b=5$

㉠과 연립하면

$a=\dfrac{1}{2}$, $b=3$

• (2) $f'(2)=-1$인 경우 (×)

$f'(2)=-\dfrac{28a-3b}{25}=-1$, $28a-3b=25$

㉠과 연립하면

$a=1$, $b=1$이므로 모순이다. ($\because a\neq b$)

(1), (2)에서

$\therefore$ $4(b-a)=10$

답 10

H171 | 답 49

[풀이]

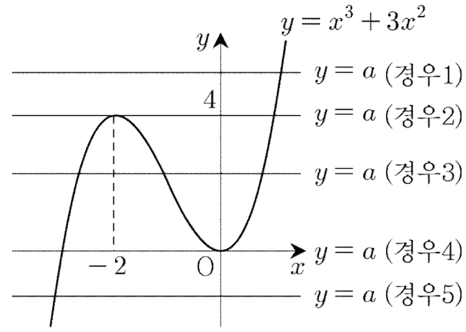
함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=(x^3+3x^2-a)e^x$

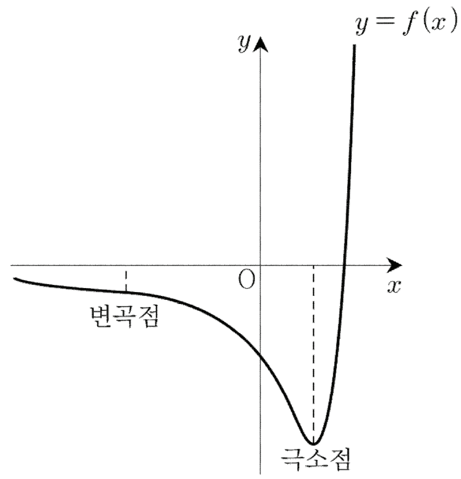
방정식 $f'(x)=0$과 아래의 방정식은 서로 필요충분조건이다.

$x^3+3x^2-a=0$

곡선 $y=x^3+3x^2$과 직선 $y=a$의 위치 관계에 따른 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



▸ (경우1) $a>4$

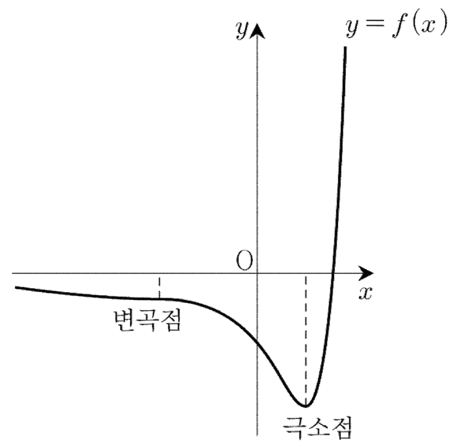


실수 t가 $-\infty$에서 ∞까지 변할 때, $g(t)$의 함숫값의 변화는 다음과 같다.

$0\to1\to2\to1$

함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 2이다.

▸ (경우2) $a=4$

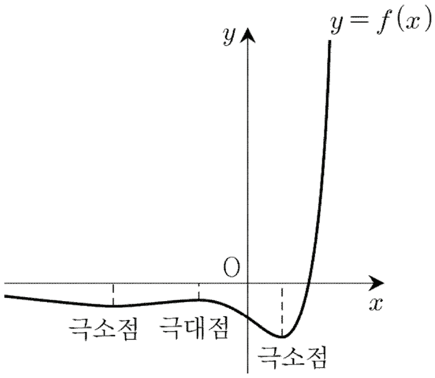


실수 t가 $-\infty$에서 ∞까지 변할 때, $g(t)$의 함숫값의 변화는 다음과 같다.

$0\to1\to2\to1$

함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 2이다.

▸ (경우3) $0<a<4$

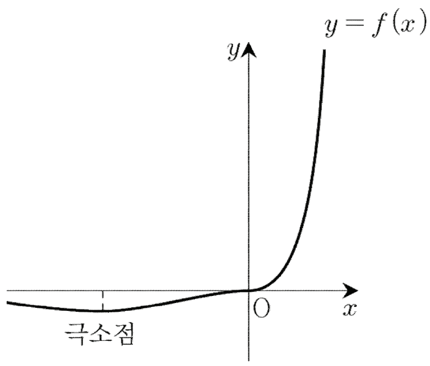


실수 t가 $-\infty$에서 ∞까지 변할 때, $g(t)$의 함숫값의 변화는 다음과 같다.

$0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$

함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 4이다.

▸ (경우4) $a = 0$

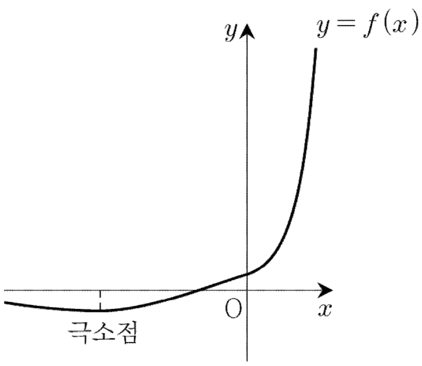


실수 t가 $-\infty$에서 ∞까지 변할 때, $g(t)$의 함숫값의 변화는 다음과 같다.

$0 \to 1 \to 2 \to 1$

함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 2이다.

▸ (경우5) $a < 0$



실수 t가 $-\infty$에서 ∞까지 변할 때, $g(t)$의 함숫값의 변화는 다음과 같다.

$0 \to 1 \to 2 \to 1$

함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 2이다.

따라서 문제에서 주어진 모든 조건을 만족시키는 a의 범위는

$a \geq 4$ 또는 $a \leq 0$

따라서 구하는 값은

$4+5+6+7+8+9+10 = 55-6 = 49$

답 49

H172 | 답 25

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = (ax^2 + 2x)e^{ax}$

방정식 $f'(x) = 0$을 풀면

$x = 0$ 또는 $x = -\dfrac{2}{a}$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x) = (a^2x^2 + 4ax + 2)e^{ax}$

방정식 $f''(x) = 0$을 정리하면

$a^2x^2 + 4ax + 2 = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D/4 = (2a)^2 - a^2 \times 2 = 2a^2 > 0$

따라서 방정식 $f''(x) = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이 두 실근을 각각 α, β라고 하자. (단, $\alpha < \beta$)

이차방정식의 근의 공식에 의하여

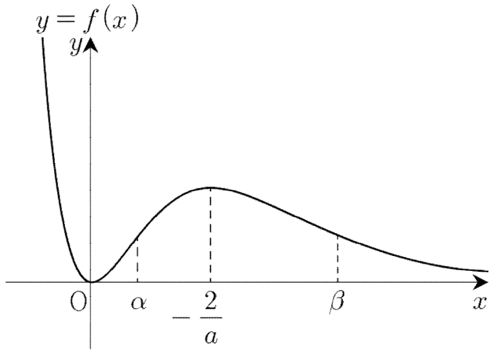
$\alpha = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{a}$, $\beta = \dfrac{-2-\sqrt{2}}{a}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그 그래프를 그리면 다음과 같다.

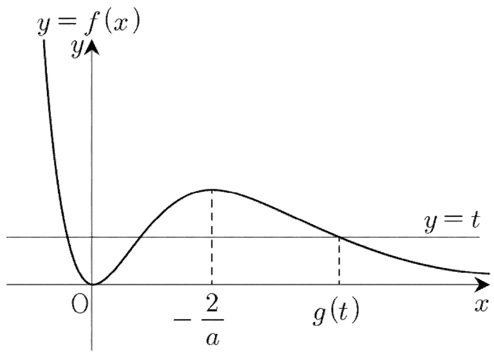
x	$\cdots$	0	$\cdots$	α
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0
$f(x)$	↘	0 극소	↗	변곡점
$\cdots$	$-\dfrac{2}{a}$	$\cdots$	β	$\cdots$
$+$	0	$-$	$-$	$-$
$-$	$-$	$-$	0	$+$
↗	$\dfrac{4}{a^2e^2}$ 극대	↘	변곡점	↘

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{-ax}} = 0$이므로 x축은 점근선이다.

함수 $f(x)$의 그래프는

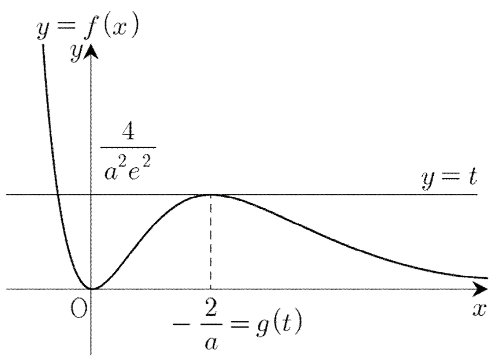


• (1) $0<t<\dfrac{4}{a^2e^2}$인 경우



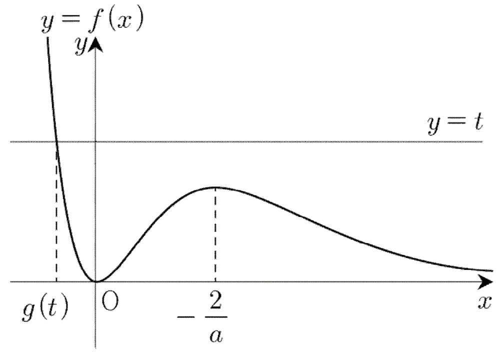
위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 서로 다른 세 점에서 만난다. 이 세 교점의 x좌표 중에서 가장 큰 값을 $g(t)$로 두면 된다. (위의 그림)

• (2) $t=\dfrac{4}{a^2e^2}$인 경우



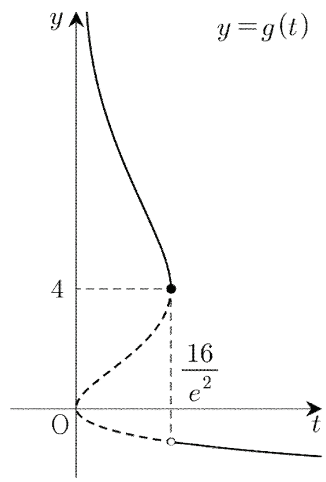
위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 교점의 x좌표 중에서 가장 큰 값은 $-\dfrac{2}{a}$이므로 $g(t)=-\dfrac{2}{a}$이다.

• (3) $t>\dfrac{4}{a^2e^2}$인 경우



위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 오직 한 점에서 만난다. 이때, 이 점의 x좌표의 값을 $g(t)$로 두면 된다. (위의 그림)

(1), (2), (3)에서 함수 $g(t)$의 그래프는



함수 $g(t)$는 $t=\dfrac{4}{a^2e^2}$에서 불연속이므로

$\dfrac{4}{a^2e^2}=\dfrac{16}{e^2}$에서 $a=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 100a^2=25$

답 25

H173 | 답 91

[풀이]

$f'(x)=\{-x^2+(2-a)x+a-b\}e^{-x}$

$(=-(x-\alpha)(x-\beta)e^{-x})$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+(a-2)x+b-a=0(\cdots(*1))$

(가): $f(x)$가 극값을 가지므로

이차방정식 (*1)은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$D=(a-2)^2-4(b-a)=a^2+4-4b\geq 0$

이때, (*1)의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 하면

$x=\alpha$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로

함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖고,

$x=\beta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로
함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.

그리고 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+ax+b}{e^x}=0$이므로 x축은 점근선이다.

한편 $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+ax+b=0(\cdots(*2))$

이 이차방정식에 대하여 $D=a^2-4b$이고,

(경우1) $D\ge 0$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

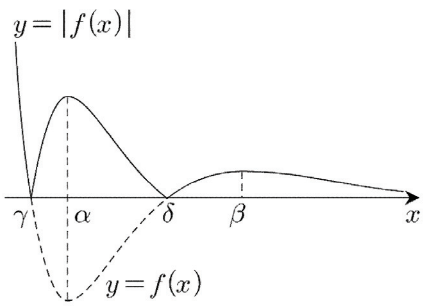
이때, 서로 다른 두 실근을 γ, δ(단, $\gamma<\delta$)라고 하자.

(경우2) $D=0$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 x축에 접한다. (오직 한 점)

이때, 중근은 α이다. (아래 그림에서 확인)

(경우3) $D<0$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

• (경우1) $f(\alpha)<0$

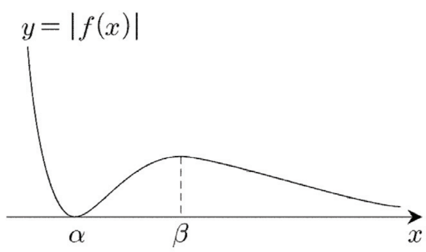


두 이차방정식 (*1), (*2)에서 근과 계수와의 관계에 의하여

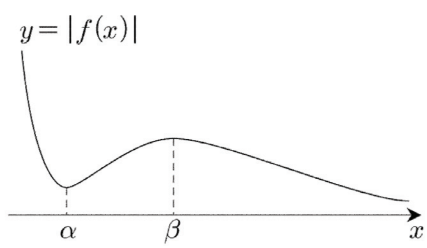
$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2-a-a=3$, $a=-\dfrac{1}{2}$(정수×)

문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

• (경우2) $f(\alpha)=0$ 또는 $f(\alpha)>0$



(단, $f(\alpha)=0$)



(단, $f(\alpha)>0$)

이차방정식 (*1)에서 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2-a=3$, $a=-1$

(*1): $D=a^2+4-4b=5-4b>0$, $b<\dfrac{5}{4}$

(*2): $D=a^2-4b=1-4b<0$, $b>\dfrac{1}{4}$

$b=1$, $f(x)=(x^2-x+1)e^{-x}$

$f(10)=91e^{-10}$

$\therefore\ p=91$

답 91

H174

| 답 129

[풀이]

$g'(x)=e^x\underbrace{\{f'(x)+f(x)\}}_{2\text{차 함수}}$

방정식

$g'(x)=0$ $\cdots(*)$

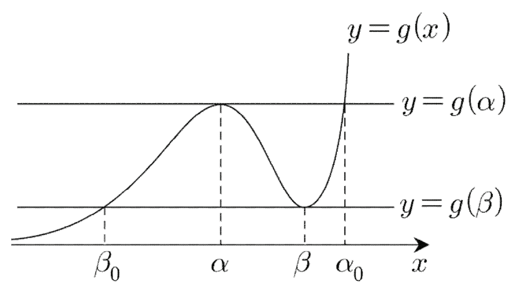
의 서로 다른 실근의 개수는 2 또는 1(중근) 또는 0이다.

(*)의 서로 다른 실근의 개수가 1 또는 0이면 함수 $g(x)$는 증가하므로 함수 $h(k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 따라서 (*)의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 이때, 서로 다른 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 하자.

함수 $g(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.

이때, $g(\beta)>0$이다. 왜냐하면 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=e^xf(x)>0$이기 때문이다.



(단, $g(\alpha_0)=g(\alpha)$, $g(\beta_0)=g(\beta)$)

조건 (가)에서 함수 $h(k)$는 $k=g(\alpha)$ 또는 $k=g(\beta)$에서 불연속이어야 한다.

(정확하게 말하면 둘 중 하나에서는 불연속, 나머지 하나에서는 연속이다.)

조건 (나)에서 함수 $h(k)$는 $k=3e$에서 불연속이다.

• (1) 함수 $h(k)$가 $k=g(\alpha)(=3e)$에서 불연속인 경우

(나): $\alpha_0-(\alpha_0+2\alpha)=-2\alpha=2$, $\alpha=-1$, $g(-1)=3e$

그리고 함수 $h(k)$는 $k=g(\beta)$에서 연속이므로

$\lim\limits_{k\to g(\beta)+}h(k)=\lim\limits_{k\to g(\beta)-}h(k)$ 즉, $2\beta+\beta_0=\beta_0$, $\beta=0$

$g'(x)=ae^x(x+1)x$ (단, $a>3$)

$g(x)=ae^x(x^2-x+1)$

$(\because g(x)=e^x(ax^2+bx+c)$로 두면

$g'(x)=e^x(ax^2+(2a+b)x+b+c)$

$2a+b=a$, $b+c=0$에서 $b=-a$, $c=a)$

$g(-1)=3ae^{-1}=3e$, $a=e^2(>3)$

$\therefore\ g(x)=e^{x+2}(x^2-x+1)$

• (2) 함수 $h(k)$가 $k=g(\beta)(=3e)$에서 불연속인 경우

(나): $(\beta_0+2\beta)-\beta_0=2\beta=2$, $\beta=1$, $g(1)=3e$

그리고 함수 $h(k)$는 $k=g(\alpha)$에서 연속이므로

$\lim_{k\to g(\alpha)+} h(k)=\lim_{k\to g(\alpha)-} h(k)$ 즉, $\alpha_0=2\alpha+\alpha_0$, $\alpha=0$

$g'(x)=ae^x x(x-1)$ (단, $a>3$)

$g(x)=ae^x(x^2-3x+3)$

$(\because g(x)=e^x(ax^2+bx+c)$로 두면

$g'(x)=e^x(ax^2+(2a+b)x+b+c)$

$2a+b=-a$, $b+c=0$에서 $b=-3a$, $c=3a)$

$g(1)=ae=3e$, $a=3$ (×)

(1), (2)에서

$g(x)=e^{x+2}(x^2-x+1)$

$\therefore\ g(-6)\times g(2)$

$=43e^{-4}\times 3e^4=129$

답 129

H175 | 답 71

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=ax^2+bx+c$

(단, $a\neq 0$이고, a, b, c는 유리수이다.)

함수 $f(x)$의 도함수와 이계도함수는

$f'(x)=2ax+b$, $f''(x)=2a$

$h(x)=f'(x)e^{f(x)}$로 두면

$h(x)=(2ax+b)e^{ax^2+bx+c}$

$a>0$이라고 가정하자.

$x\to\infty$일 때, $f'(x)$의 부호는 양(+)이므로

$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} h(x)=\infty$

함수 $g(x)$는 최댓값을 갖지 않으므로

이는 가정에 모순이다. (조건(나))

따라서 $a<0$이다.

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=\{f''(x)+(f'(x))^2\}e^{f(x)}$

$h'(x)=0$

$\Leftrightarrow f''(x)+(f'(x))^2=0$ $(\because e^{f(x)}>0)$

$\Leftrightarrow 2a+(2ax+b)^2=0$

풀면

$x=\dfrac{\pm\sqrt{-2a}-b}{2a}$ (단, $a<0$)

방정식 $h'(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 각각

α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 하면

$\alpha=\dfrac{-\sqrt{-2a}-b}{2a}$, $\beta=\dfrac{\sqrt{-2a}-b}{2a}$

$x=\alpha$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖는다.

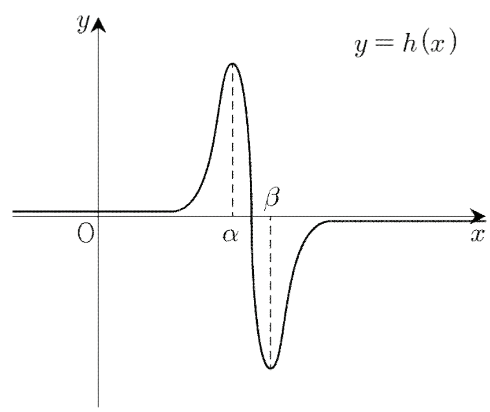
$x=\beta$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다.

$\lim_{x\to\infty} h(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2ax+b}{e^{-ax^2-bx-c}}=0$이고,

$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2ax+b}{e^{-ax^2-bx-c}}=0$

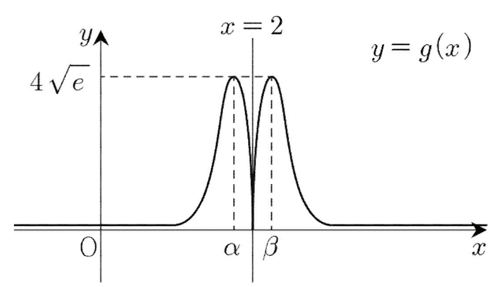
이므로 x축은 곡선 $y=h(x)$의 점근선이다.

함수 $h(x)$의 그래프의 개형은



$g(x)=|f'(x)|e^{f(x)}=|f'(x)e^{f(x)}|=|h(x)|$

이므로 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은



조건 (가)에 의하여

함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$\dfrac{b}{-2a}=2$ 즉, $b=-4a$

이때, $\dfrac{b}{-2a}$는 방정식 $h(x)=0$

$(g(x)=0)$의 해이다.

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=|2a(x-2)|e^{a(x-2)^2+c-4a}$

모든 실수 x에 대하여

$g(4-x)=g(x)$

이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

조건 (나)에 의하여

$g(\alpha)=g(\beta)=4\sqrt{e}$

$\alpha=\dfrac{-\sqrt{-2a}-b}{2a}=2+\dfrac{1}{\sqrt{-2a}}$이므로

$g(\alpha)=\sqrt{-2a}\,e^{-\frac{1}{2}+c-4a}=4e^{\frac{1}{2}}$

a, c는 유리수이므로

$\sqrt{-2a}=4$, $-\dfrac{1}{2}+c-4a=\dfrac{1}{2}$

연립방정식을 풀면

$a=-8$, $c=-31$, $b=32(\because b=-4a)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=-8x^2+32x-31$

$\therefore\ |f(-1)|$

$=71$

답 71

H176 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

함수 $f(x)$의 도함수와 이계도함수는

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $f''(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−	−	−
$f''(x)$		−	−	−	0	+
$f(x)$		↗	극대	↘	변곡점	↘

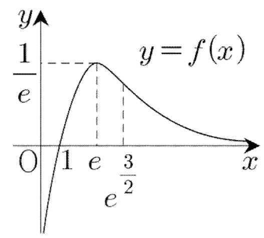
$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{t}{e^t}$

$=\lim\limits_{s\to\infty}-se^s=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

이므로 x축, y축은 점근선이다.

함수 $f(x)$의 그래프는



따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$일 때 최댓값 $\dfrac{1}{e}$을 갖는다.

▸ ㄴ. (참)

$f(2011)>f(2012)$, 즉

$\dfrac{\ln2011}{2011}>\dfrac{\ln2012}{2012}$, $\ln2011^{2012}>\ln2012^{2011}$

함수 $y=\ln x$는 증가하므로

$2011^{2012}>2012^{2011}$

▸ ㄷ. (참)

구간 $(0,\ e)$에서 $f''(x)<0$이므로

곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

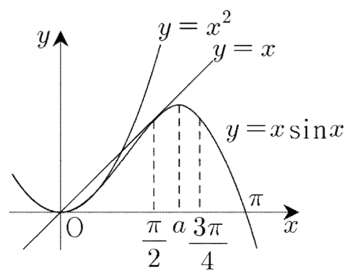
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

H177 | 답 ⑤

[풀이] 시험장

함수 $y=x\sin x$의 그래프는 다음과 같다.



▸ ㄱ. (참)

$x\to0$일 때, $x\sin x\approx x^2$이므로 곡선 $y=x\sin x$는 원점 주위에서 곡선 $y=x^2$에 한없이 가까워진다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

▸ ㄴ. (참)

$\sin x\le1$이므로 구간 $[0,\ \infty)$에서 곡선 $y=x\sin x$는 직선 $y=x$의 아래쪽에 그려진다.

$(\because x-x\sin x=x(1-\sin x)\ge0)$

그런데 곡선 $y=x\sin x$와 직선 $y=x$는 점 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 만나므로 이 점에서 곡선은 직선에 접한다.

▸ ㄷ. (참)

곡선 $y=x\sin x$가 두 점 $(0,\ 0)$, $(\pi,\ 0)$을 지나므로 롤의 정리에 의하여 $f'(a)=0$인 a가 구간 $(0,\ \pi)$에 존재한다.

그런데

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0$, $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}(4-3\pi)}{8}<0$

이므로 a는 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$에 속한다.

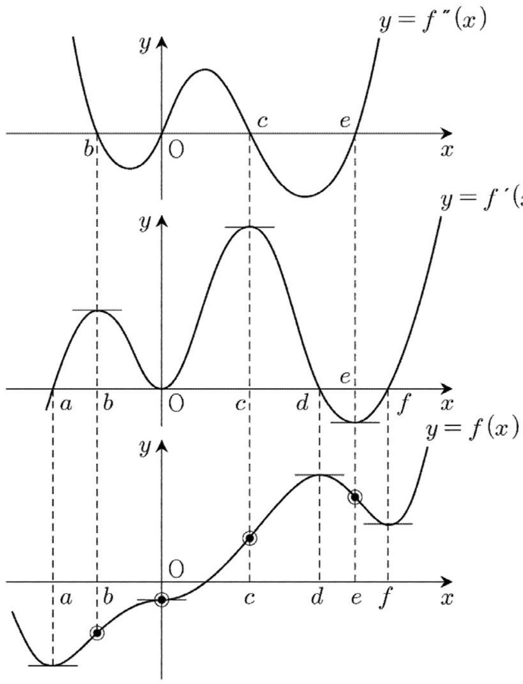
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

H178 | 답 ③

[풀이] ★

세 함수 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(단, ◉은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.)

▸ ㄱ. (참)

$f''(b)=0$이고, $x=b$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 점 $(b, f(b))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

$f''(0)=0$이고, $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 점 $(0, f(0))$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

$f''(c)=0$이고, $x=c$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 점 $(c, f(c))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

$f''(e)=0$이고, $x=e$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 점 $(e, f(e))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

따라서 구간 $[a, f]$에서 $f(x)$의 변곡점은 4개다.

▸ ㄴ. (참)

$f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

$f'(0)=0$이지만 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

$f'(d)=0$이고, $x=d$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=d$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 구간 $[a, e]$에서 $f(x)$가 극대가 되는 x의 개수는 1이다.

▸ ㄷ. (거짓)

구간 $[a, e]$에서 $f(x)$의 최댓값은 $f(d)$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

H179 | 답 ①

[풀이]

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=e^{-x^2}(-2xf(x)+f'(x))$

▸ ㄱ. (참)

$g'(0)=1\times(0+f'(0))=f'(0)>0$

▸ ㄴ. (거짓)

$f'(a)+g'(a)$

$=0+e^{-a^2}(-2af(a)+f'(a))$

$=e^{-a^2}(-2af(a)+0)$

$=-2ae^{-a^2}f(a)<0$

$(\because a>0,\ f(a)>0)$

▸ ㄷ. (거짓)

$g(b)=e^{-b^2}f(b)<0$

$(\because f(b)<0)$

$g'(b)=e^{-b^2}(-2bf(b)+f'(b))$

$=e^{-b^2}(-2bf(b)+0)$

$=-2be^{-b^2}f(b)>0$

$(\because b>0,\ f(b)<0)$

$\therefore\ g(b)g'(b)<0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

H180 ㅣ답 ⑤

[풀이]

$x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$

이므로 함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\frac{-x(3x-4)}{(x^2-2x+2)^3}$$

방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

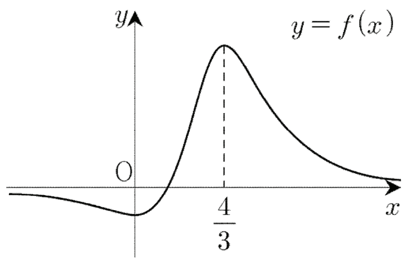
$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

$x=\frac{4}{3}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{4}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

이므로 x축은 점근선이다.

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



▸ ㄱ. (참)

접선의 방정식은

$y=x-\frac{1}{2}$

이므로, 점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여 접선과 원점 사이의 거리는

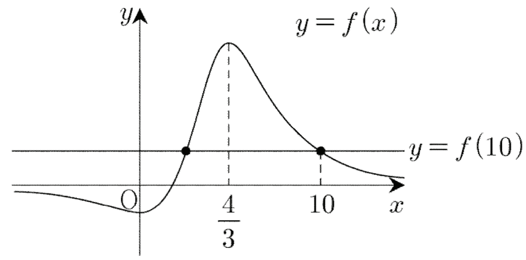
$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

▸ ㄴ. (참)

$f(x)\geq f(0)=-\frac{1}{8}$이므로

함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\frac{1}{8}$이다.

▸ ㄷ. (참)



위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(10)$의 교점의 개수는 2이다.

따라서 방정식 $f(x)=f(10)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

H181 ㅣ답 ④

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=e^x-\frac{1}{x^2}$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가지므로

$f'(\alpha)=e^\alpha-\frac{1}{\alpha^2}=0$

$\therefore\ e^\alpha=\frac{1}{\alpha^2}$

▸ ㄴ. (거짓)

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=e^x+\frac{2}{x^3}>0$

$x>0$일 때, $f''(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 변곡점을 갖지 않는다.

▸ ㄷ. (참)

$f''(\alpha)=e^\alpha+\frac{2}{\alpha^3}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{2}{\alpha^3}>0$

즉, $f'(\alpha)=0$, $f''(\alpha)>0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖는다.

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 최솟값을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

H182 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\frac{2(\ln x)^5(3-\ln x)}{x^3}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1,\ x=e^3$

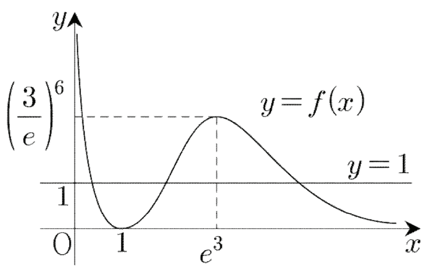
$x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$x=e^3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=e^3$에서 극댓값을 갖는다.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{(\ln x)^6}{x^2}=\lim_{t\to -\infty}\frac{t^6}{e^{2t}}=\lim_{s\to\infty}s^6e^{2s}=\infty$$

이므로 y축은 점근선이다. (그리고 문제에서 주어진 조건에 의하여 x축은 점근선이다.)

함수 $f(x)$의 그래프는



▸ ㄴ. (거짓)

위의 그래프에서 $x=e$에서 함수 $f(x)$는 증가한다. 따라서 $x=e$에서 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

▸ ㄷ. (참)

위의 그래프에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1$은 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

H183 | 답 ②

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\frac{n(1-n)x^n+n}{(x^n+1)^2}$$

▸ ㄱ. (참)

$n=3$이고 $x<-1$일 때,

$$f'(x)=\frac{-6x^3+3}{(x^3+1)^2}>0$$

$(\because\ x^3<-1,\ -6x^3+3>9)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$에서 증가한다.

▸ ㄴ. (참)

n이 홀수일 때,

$$\lim_{x\to -1+}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to -1-}f(x)=\infty$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속일 수 없다.

n이 짝수일 때,

$$\lim_{x\to -1}f(x)=-\frac{n}{2},\ f(-1)=-2$$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이기 위한 필요충분조건은

$-\frac{n}{2}=-2$, 즉 $n=4$

$n=4$일 때,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^4=\frac{1}{3}$

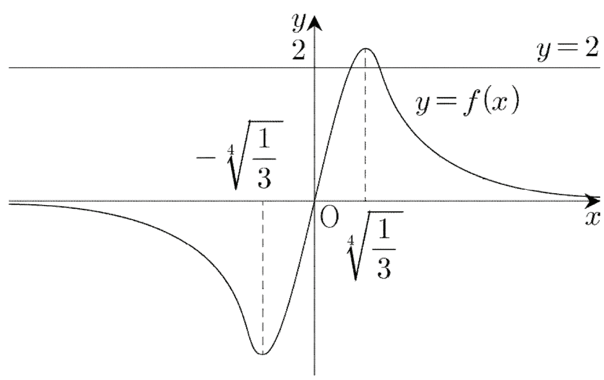
$\Leftrightarrow x=\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ 또는 $x=-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$

함수 $f(x)$는 $x=\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$에서 극댓값을 갖고,

$x=-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$에서 극솟값을 갖는다.

그리고 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to -\infty}f(x)=0$이므로 x축은 점근선이다.

함수 $f(x)$의 그래프는



$$f\left(\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)=\frac{4\sqrt[4]{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}+1}=3\sqrt[4]{\frac{1}{3}}=\sqrt[4]{27}>2$$

$(\because\ 27>8=2^3)$

위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$의 교점의 개수는 2이므로 방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

▸ ㄷ. (거짓)

$n=1$일 때, $f'(x)=0 \Leftrightarrow$ 해가 없다.

$n=2$일 때, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

이때, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖는다.

n이 3 이상의 홀수일 때,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$

이때, 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$에서 극댓값을 갖는다.

n이 4 이상의 짝수일 때,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$

이때, 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$에서 극솟값을 갖는다.

$-\dfrac{1}{\sqrt[n]{n-1}}>-1$, $\sqrt[n]{n-1}>1$, $n-1>1$, $n>2$

$\therefore\ n=4,\ 6,\ 8,\ 10$

따라서 구하는 값은 28이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

H184 | 답 ③

[풀이]

조건 (가)에 의하여

$\lim\limits_{x\to c-} f(x)=f(c)$, 즉

$-ac^2+6ec+b=a(\ln c)^2-6\ln c$ …㉠

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\begin{cases}-2ax+6e & (x<c)\\ \dfrac{2a\ln x}{x}-\dfrac{6}{x} & (x>c)\end{cases}$$

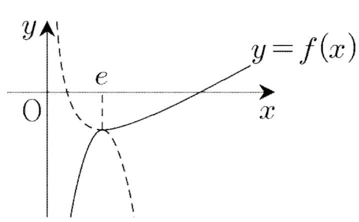
$x\to-\infty$일 때, $f(x)\to-\infty$이므로

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$는 증가해야 한다.

$x>c$일 때, 방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$x=e^{\frac{3}{a}}$

$x=e^{\frac{3}{a}}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=e^{\frac{3}{a}}$에서 극솟값을 갖는다.



실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$가 증가하기 위해서는

$e^{\frac{3}{a}}\le c$ …㉡

이어야 한다.

$x<c$일 때, $f'(x)\ge 0$이므로

$c\le\dfrac{3e}{a}$ …㉢

㉡, ㉢에 의하여

$e^{\frac{3}{a}}\le\dfrac{3e}{a}$, 즉 $e^{\frac{3}{a}-1}\le\dfrac{3}{a}$

그런데 실수 전체의 집합에서

$e^{x-1}\ge x$ (단, 등호는 $x=1$일 때 성립한다.)

이므로 $e^{\frac{3}{a}-1}=\dfrac{3}{a}$이고, $a=3$이다.

이를 ㉡, ㉢에 대입하면 $c=e$

이를 다시 ㉠에 대입하면

$-3e^2+6e^2+b=3-6$, $b=-3-3e^2$

마지막으로 $\dfrac{1}{2e}<e$이므로

$\therefore\ f\left(\dfrac{1}{2e}\right)$

$=-3\left(\dfrac{1}{2e}\right)^2+6e\times\dfrac{1}{2e}-3-3e^2$

$=-3\left(e^2+\dfrac{1}{4e^2}\right)$

답 ③

H185 | 답 ③

[풀이1]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수는

$f'(x)=nx^{n-1}(n\ge 2)$, $f'(x)=1(n=1)$

$g'(x)=\dfrac{4x^3}{(x^4+2n)\ln 3}$

합성함수의 미분법에 의하여

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

$=\dfrac{4nx^{n-1}(x^n-1)^3}{((x^n-1)^4+2n)\ln 3}(n\ge 2)$

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

$=\dfrac{4(x-1)^3}{((x-1)^4+2n)\ln 3}(n=1)$

▸ ㄱ. (참)

모든 자연수 n에 대하여 $1^n-1=0$이므로

$h'(1)=0$

▸ ㄴ. (거짓)

우선 $\ln 3>0=\ln 1$이다.

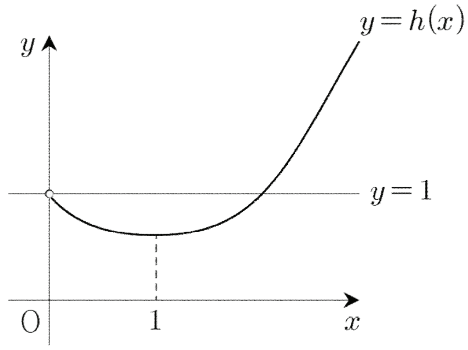
$n=1$일 때, 구간 $(0,\ 1)$에 속하는 모든 실수 x에 대하여

$(x-1)^4>0$, $(x-1)^3<0$

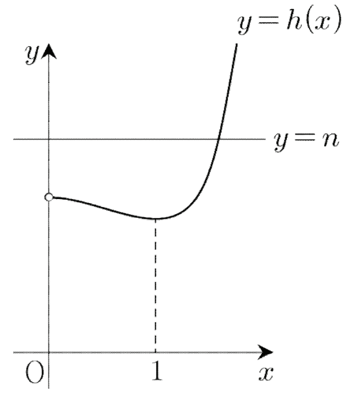
이므로 $h'(x)<0$이다.

$n\ge 2$일 때, 구간 $(0,\ 1)$에 속하는 모든 실수 x에 대하여

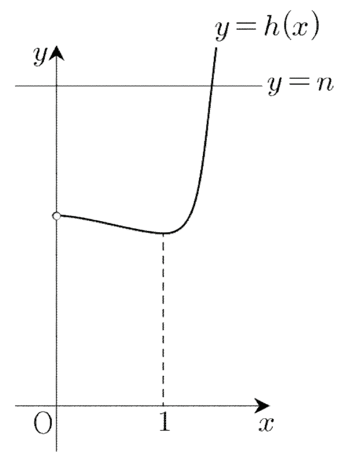
$(x^n-1)^4>0$, $x^{n-1}>0$, $(x^n-1)^3<0$
이므로 $h'(x)<0$이다.
따라서 열린구간 $(0, 1)$에서 함수 $h(x)$는 감소한다.
▸ ㄷ. (참)
함수 $h(x)$의 도함수를 다시 쓰자.
$n=1$일 때,
$h'(x)$
$$=\frac{4(x-1)^3}{((x-1)^4+2)\ln 3}$$
$n\geq 2$일 때,
$h'(x)$
$$=\frac{4nx^{n-1}(x-1)^3(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)^3}{((x^n-1)^4+2n)\ln 3}$$
• (1) $n=1$인 경우
방정식 $h'(x)=0$을 풀면 $x=1$이다.
$x=1$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
함수 $h(x)$의 y절편은 1이다.
$x>0$일 때, 함수 $h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그림처럼 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=1$의 교점의 개수는 1이다.
• (2) n이 2 이상의 홀수인 경우
방정식 $h'(x)=0$을 풀면 $x=0$ 또는 $x=1$이다.
$x=1$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
함수 $h(x)$의 y절편은 $\log_3(1+2n)$이다.
이때, $\log_3(1+2n)<n$이다.
왜냐하면 $1+2n<3^n$이기 때문이다.
$x>0$일 때, 함수 $h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그림처럼 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=n$의 교점의 개수는 1이다.
• (3) n이 2 이상의 짝수인 경우
방정식 $h'(x)=0$을 풀면 $x=0$ 또는 $x=1$이다.
$x=0$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
$x=1$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
함수 $h(x)$의 y절편은 $\log_3(1+2n)$이다.
이때, $\log_3(1+2n)<n$이다.
왜냐하면 $1+2n<3^n$이기 때문이다.
$x>0$일 때, 함수 $h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그림처럼 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=n$의 교점의 개수는 1이다.
(1), (2), (3)에서 $x>0$일 때, 방정식 $h(x)=n$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.
답 ③

[풀이2] 시험장
▸ ㄱ. (참)
함수 $h(x)$의 도함수는
$$h'(x)=\frac{4(x-1)^3}{\{(x-1)^4+2\}\ln 3}\ (n=1)$$

$h'(x)=\dfrac{4(x^n-1)^3 nx^{n-1}}{\{(x^n-1)^4+2n\}\ln 3}\,(n \geq 2)$

$\therefore\ h'(1)=0$

▸ ㄴ. (거짓)

x: $0 \Rightarrow 1$ (증가)

$f(x)$: $-1 \Rightarrow 0$ (증가)

$\{f(x)\}^4$: $1 \Rightarrow 0$ (감소)

$g(f(x))$: $\log_3(1+2n) \Rightarrow \log_3 2n$ (감소)

따라서 함수 $h(x)$는 구간 $(0,\ 1)$에서 감소한다.

▸ ㄷ. (참)

구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $h(x)$는 감소하고

($h(x)$: $\log_3(1+2n)$에서 $\log_3 2n$로 감소)

구간 $[1,\ \infty)$에서 함수 $h(x)$는 증가하므로

($h(x)$: $\log_3 2n$에서 증가하여 ∞로 발산)

모든 자연수 n에 대하여

(y절편)$=\log_3(1+2n) \leq n$, 즉 $1+2n \leq 3^n$

이므로 $x>0$일 때, 방정식 $h(x)=n$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다. 이때, 실근은 항상 1보다 크다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

H186

| 답 ③

[풀이1]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=-x(x-2)e^{-x+2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=2$

합성함수의 도함수는

$\dfrac{dy}{dx}=f'(f(x))f'(x)$

$\dfrac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow f'(f(x))=0$ 또는 $f'(x)=0$

$\Leftrightarrow f(x)=0$ 또는 $f(x)=2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

$\Leftrightarrow x=\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ 0,\ 2$

(이때, $\alpha<\beta<\gamma$이고,

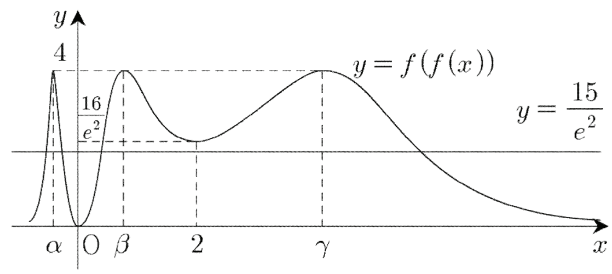
$f(\alpha)=2,\ f(\beta)=2,\ f(\gamma)=2$)

함수 $f(f(x))$의 증가와 감소를 표로 정리하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$	β
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(f(x))$	$-$	0	$+$	0	$+$	0
$\dfrac{dy}{dx}$	$+$	0	$-$	0	$+$	0
y	↗	4	↘	0	↗	4

x	$\cdots$	2	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f'(f(x))$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{dy}{dx}$	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$\dfrac{16}{e^2}$	↗	4	↘

함수 $y=f(f(x))$의 그래프는 아래 그림과 같다.



곡선 $y=f(f(x))$와 직선 $y=\dfrac{15}{e^2}$의 교점의 개수는 4이다.

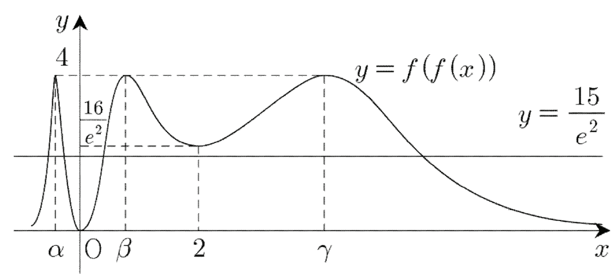
답 ③

[풀이2] 시험장 ★

도함수 없이 합성함수의 그래프의 개형을 그려보자.

x	$f(x)$	$f(f(x))$
$-\infty \Rightarrow 0$	$\infty \Rightarrow 0$	$(0) \Rightarrow 4 \Rightarrow 0$
$0 \Rightarrow 2$	$0 \Rightarrow 4$	$0 \Rightarrow 4 \Rightarrow f(4)$
$2 \Rightarrow \infty$	$4 \Rightarrow (0)$	$f(4) \Rightarrow 4 \Rightarrow (0)$

함수 $y=f(f(x))$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



곡선 $y=f(f(x))$와 직선 $y=\dfrac{15}{e^2}$의 교점의 개수는 4이다.

답 ③

H187 | 답 6

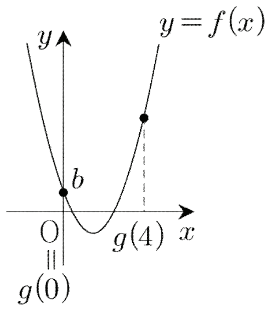
[풀이] ★

이차함수 $f(x)$의 대칭축은 $x=\frac{a}{2}(>0)$이므로 아래 그림과 같이 그려진다. (이 이차함수의 꼭짓점의 y좌표는 음수인데, 이는 문제풀이 과정에서 밝혀진다.)

이때, 조건 (가)에서

$h(0)=f(0)<f(g(4))=h(4)$

이므로 $f(g(4))>b=f(0)$

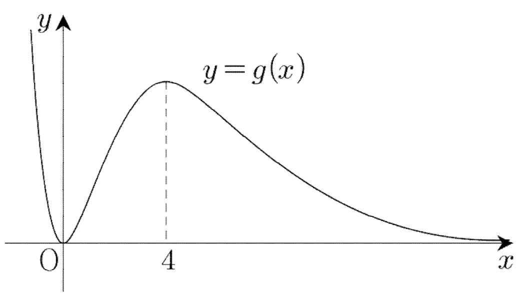


함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=-\frac{1}{2}x(x-4)e^{-\frac{x}{2}}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ 또는 $x=4$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖고, $x=4$에서 극댓값을 가지므로 함수 $g(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



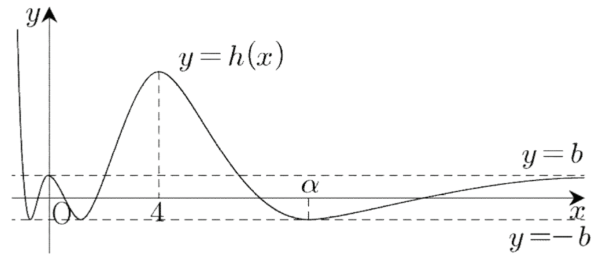
x의 값의 변화에 따른 함수 $h(x)$의 값의 변화를 관찰하면 다음과 같다.

x: $-\infty$ ⇨ 0 ⇨ 4 ⇨ ∞

$g(x)$: ∞ ⇨ 0 ⇨ $g(4)$ ⇨ (0)

$h(x)=f(g(x))$: ∞ ⇨ $f\left(\frac{a}{2}\right)$(극솟값) ⇨ b(극댓값) ⇨ $f\left(\frac{a}{2}\right)$(극솟값) ⇨ $f(g(4))$(극댓값) ⇨ $f\left(\frac{a}{2}\right)$(극솟값) ⇨ (b) (점근선)

함수 $h(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



조건 (나)에서 주어진 방정식의 실근의 개수가 7이기 위해서는 $k=b$이어야 한다. (위의 그림)

극솟값: $f\left(\frac{a}{2}\right)=-b$, $\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+b=-b$

정리하면 $a^2=8b$

그리고 $f(1)=1-a+b=-\frac{7}{32}$이므로

위의 두 등식을 연립하면

$a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{9}{32}$

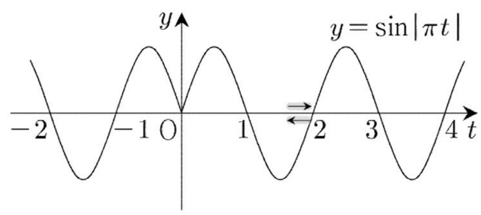
$\therefore\ a+16b=6$

답 6

H188 | 답 208

[풀이]

함수 $y=\sin|\pi t|$(단, $t=f(x)$)의 그래프는



위의 그림처럼

$t(=f(x))$가 $2-$, 2, $2-$의 값을 가질 때,

$g(x)$는 극댓값 0을 갖는다. (이때, $0-$ ⇨ 0 ⇨ $0-$)

이때, 함수 $f(x)$의 극댓값은 2이다.

한편

$g(x)=0 \Leftrightarrow \sin|\pi f(x)|=0$

$\Leftrightarrow f(x)=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots$

그리고 조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$의 극값은 정수이다.

(가): 함수 $f(x)$는 $x=a_4$에서 극댓값을 갖고, $x=a_8$에서 극솟값을 갖는다.

이때, $f(a_4)-f(a_8)=4$이다.

$(f(a_4),\ f(a_8))=\cdots,\ \underbrace{(-1,\ -5)}_{㉠},\ \underbrace{(2,\ -2)}_{㉡},$

$\underbrace{(4,\ 0)}_{㉢},\ (6,\ 2),\ \cdots$

㉠: 함수 $g(x)$는 $x=a_8$에서 극소이다. (×)

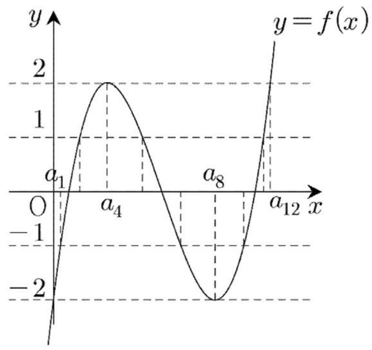
ㄴ: 함수 $g(x)$는 $x=a_4$, $x=a_8$에서 극대이다.

ㄷ: 함수 $g(x)$는 $x=a_8$에서 극소이다. (×)

따라서 $f(a_4)=2$(극대), $f(a_8)=-2$(극소)

(나): $f(a_8)=f(0)$에서 $m=8$

함수 $f(x)$의 그래프는



$f(x)+2=x(x-a_8)^2$

함수 $f(x)$는 $x=a_4=\dfrac{a_8}{3}$에서 극댓값 2를 가지므로

$f\left(\dfrac{a_8}{3}\right)=\dfrac{a_8}{3}\left(-\dfrac{2}{3}a_8\right)^2-2=2$, $a_8=3$

$f(x)=x(x-3)^2-2$에서 $f(m)=f(8)=198$

$f(a_k)\leq 198$에서 $k\leq 208$

따라서 k의 최댓값은 208이다.

답 208

H189 | 답 ③

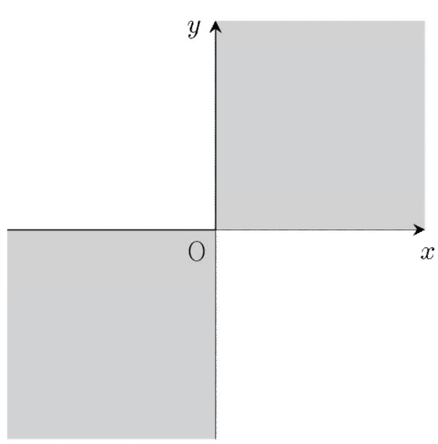
[풀이]

❶ 함수의 정의역, 치역 (그래프가 그려지는 영역표시)

함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

$x>0$일 때, $f(x)>0$, $x<0$일 때, $f(x)<0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 아래의 그림에서 색칠된 영역을 지나야 한다.



사이값 정리에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 원점을 반드시 지나야 한다.

❷ 대칭성과 주기

임의의 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

❸ 좌표축과의 교점

$f(0)=0$이므로 원점을 지난다.

❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

$f'(x)=\dfrac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=\dfrac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$이므로

$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

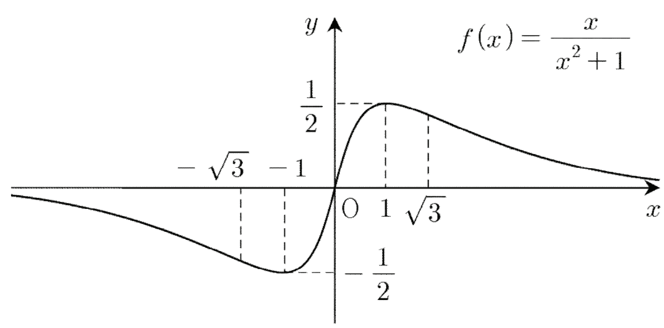
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 변곡점	↘	$-\dfrac{1}{2}$ 극소	↗
0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
0 변곡 점	↗	$\dfrac{1}{2}$ 극대	↘	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 변곡 점	↘

❻ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, 점근선

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 x축이 점근선이다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



▸ ㄱ. (참)

함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=\dfrac{(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$이므로

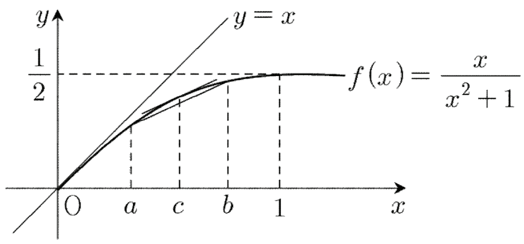
$f'(0)=1$

▸ ㄴ. (참)

함수 $f(x)$의 최솟값이 $-\frac{1}{2}$이므로

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq -\frac{1}{2}$이다.

▸ ㄷ. (거짓)



닫힌구간 $[a,\ b]$에서 함수 $f(x)$가 연속이고
열린구간 $(a,\ b)$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하므로
평균값 정리에 의하여

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.
그런데 열린구간 $(0,\ 1)$에서 $f''(x)<0$이므로
이 구간에서 함수 $f'(x)$는 감소한다.
$f'(1) \leq f'(c) \leq f'(0)$ 즉, $0 \leq f'(c) \leq 1$

따라서 $0 \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 1$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

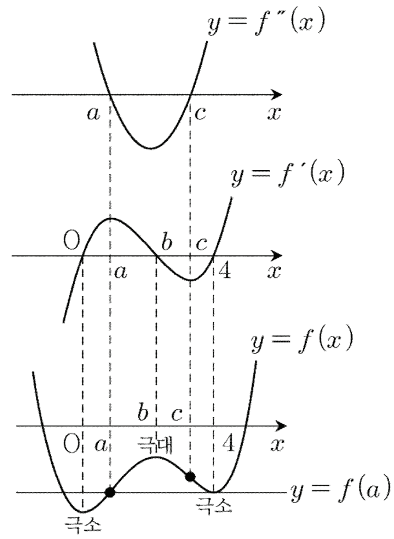
답 ③

H190 | 답 ⑤

[풀이] ★
삼차함수 $f'(x)$가 $x=c$에서 극솟값을 갖는다고 하면
$f''(c)=0$
$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	변곡점	↗
b	$\cdots$	c	$\cdots$	4	$\cdots$
0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
극대	↘	변곡점	↘	극소	↗

세 함수 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



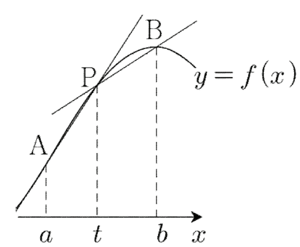
(단, •는 변곡점이다.)

▸ ㄱ. (참)

함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 갖는다.

▸ ㄴ. (참)

구간 $(a,\ b)$에서 $f''(x)<0$이므로
구간 $(a,\ b)$에서 함수 $f(x)$는 위로 볼록이다.
세 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$, $(t,\ f(t))$
를 각각 A, B, P라고 하자.



위의 그림에서
(직선 AP의 기울기)>(직선 PB의 기울기)
이므로

$\frac{f(t)-f(a)}{t-a} > \frac{f(t)-f(b)}{t-b}$

▸ ㄷ. (참)

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$\int_a^4 f'(x)dx = f(4)-f(a)=0$

즉, $f(a)=f(4)$이므로 점 $(4,\ f(4))$는 직선 $y=f(a)$ 위에 있다.
위의 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(a)$의 교점의 개수는 3이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

H191 | 답 ⑤

[풀이]

$g(x)=-\ln x$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 x축에 대하여 대칭이다.

▸ ㄱ. (참)

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \ln x=-\ln x$

$\Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

이므로 $\mathrm{P}(1,\ 0)$이다.

▸ ㄴ. (참)

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=-\dfrac{1}{x}$

(곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기)

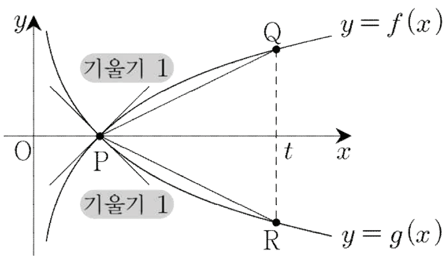
×(곡선 $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기)

$=1\times(-1)=-1$

이므로 주어진 명제는 참이다.

▸ ㄷ. (참)

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위의 점 중에서 x좌표가 t인 점을 각각 Q, R이라고 하자.



위의 그림에서 $t>1$일 때,

$0<\dfrac{f(t)}{t-1}=$(직선 PQ의 기울기)<1,

$-1<\dfrac{g(t)}{t-1}=$(직선 PR의 기울기)<0

이므로

$-1<\dfrac{f(t)}{t-1}\times\dfrac{g(t)}{t-1}<0$

$\therefore\ -1<\dfrac{f(t)g(t)}{(t-1)^2}<0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

H192 | 답 ④

[풀이]

삼각함수의 정의에 의하여 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$

직각삼각형 POQ에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OP}}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

삼각함수의 정의에 의하여 점 Q의 좌표는

$\mathrm{Q}\left(\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\dfrac{\pi}{4},\ \cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

내분점의 공식에 의하여

(점 M의 y좌표)

$=\dfrac{\sin\theta+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)}{2}$

$=\dfrac{\sin\theta+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)}{2}$

$=\dfrac{3}{4}\sin\theta+\dfrac{1}{4}\cos\theta(=f(\theta))$

함수 $f(\theta)$의 도함수는

$f'(\theta)=\dfrac{3}{4}\cos\theta-\dfrac{1}{4}\sin\theta$

$=\dfrac{1}{4}\cos\theta(3-\tan\theta)$

방정식 $f'(\theta)=0$을 풀면

$\tan\theta=3$

$\tan\theta_0=3(\dfrac{\pi}{4}<\theta_0<\dfrac{\pi}{2})$인 θ_0에 대하여 $\theta=\theta_0$의 좌우에서 $f'(\theta)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_0$일 때 극댓값(최댓값)을 갖는다.

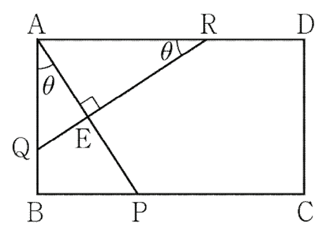
$\therefore\ \tan\theta=3$

답 ④

H193 | 답 27

[풀이]

$\angle\mathrm{PAB}=\theta$로 두고, 두 선분 AP, QR의 교점을 E라고 하자.



$\angle\mathrm{RAE}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이고, 삼각형 ERA의 세 내각의 합은 π이므로

$\angle\mathrm{ERA}=\theta$

직각삼각형 ABP에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{\cos\theta}$, $\overline{\mathrm{AE}}=\dfrac{1}{\cos\theta}$

직각삼각형 AQE에서 삼각비의 정의에 의하여

$=\int_1^2\{e^t\times m(t)\}dt+\int_2^4\{e^t\times m(t)\}dt$

$+\int_4^5\{e^t\times m(t)\}dt$

$=\int_1^2 0dt+\int_2^4 at^2(2-t)dt$

$+\int_4^5\left(-\frac{32a}{e^4}e^t\right)dt$

$=\left[\frac{2a}{3}t^3-\frac{a}{4}t^4\right]_2^4+\left[-\frac{32a}{e^4}e^t\right]_4^5$

$=\frac{28a}{3}-32ae=\frac{7}{3}-8e$에서 $a=\frac{1}{4}$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\frac{1}{4}x^2e^x(x+2)$

$f(k+1)=f(3)=\frac{45}{4}e^3$

$p=4,\ q=45$

$\therefore\ p+q=49$

답 49

I010 | 답 ③

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}2\cos x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi\right)\\ 0 & \left(\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$$

정적분의 치환적분법을 적용하자.

$2x-\frac{\pi}{6}=t$도 두면 $2dx=dt$,

$x=\frac{\pi}{6}$일 때 $t=\frac{\pi}{6}$, $x=\pi$일 때 $t=\frac{11\pi}{6}$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}f\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}}f(t)dt$

$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt+\frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{6}}f(t)dt$

$=\frac{1}{2}[2\sin t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}[2\sin t]_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{6}}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

답 ③

I011 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

정적분의 치환적분법에 의하여

$a_1+a_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x(1+\tan^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\sec^2 x dx$

$(\because\ 1+\tan^2 x=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x)$

$=\int_0^1 tdt$

($\because$ $t=\tan x$로 두면 $dt=\sec^2 xdx$,

$x=0$일 때 $t=0$이고, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=1$이다.)

$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$

▸ ㄴ. (참)

정적분의 치환적분법에 의하여

$a_2+a_4=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^4 x dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x(1+\tan^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\sec^2 x dx$

$(\because\ 1+\tan^2 x=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x)$

$=\int_0^1 t^2dt$

($\because$ $t=\tan x$로 두면 $dt=\sec^2 xdx$,

$x=0$일 때 $t=0$이고, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=1$이다.)

$=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

이므로

$\therefore\ a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

▸ ㄷ. (거짓)

마찬가지의 방법으로

$a_5+a_7=\frac{1}{6}$, $a_6+a_8=\frac{1}{7}$,

$a_9+a_{11}=\frac{1}{10}$, $a_{10}+a_{12}=\frac{1}{11}$,

$\vdots$

$a_{97}+a_{99}=\frac{1}{98}$, $a_{98}+a_{100}=\frac{1}{99}$

$\therefore \sum_{k=1}^{100} a_k=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{98}+\frac{1}{99}$

$\neq \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{51}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

I012 | 답 ④

[풀이]

〈과정〉

등비수열의 합의 공식에 의하여

$1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}$

$=\frac{1-(-x^2)^n}{1-(-x^2)}=\frac{1-(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$

$=\boxed{\frac{1}{1+x^2}}-(-1)^n\frac{x^{2n}}{1+x^2}$이므로

$S_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$

$=\left[x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}\right]_0^1$

$=\int_0^1\{1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}\}dx$

$=\int_0^1\boxed{\frac{1}{1+x^2}}dx-(-1)^n\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$

이다. 한편, $0\leq\frac{x^{2n}}{1+x^2}\leq x^{2n}$이므로

$0\leq\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx\leq\int_0^1 x^{2n}dx=\boxed{\frac{1}{2n+1}}$

$\left(\because \int_0^1 x^{2n}dx=\left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_0^1=\frac{1}{2n+1}\right)$

이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx=0$이므로

$\left(\because n\to\infty\right.$일 때, $\left.0\to 0,\ \frac{1}{2n+1}\to 0\right)$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\boxed{\frac{1}{1+x^2}}dx$이다.

$x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$dx=\sec^2\theta d\theta$이고,

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때, $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\boxed{\frac{1}{1+x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{1+\tan^2\theta}d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1d\theta\ (\because 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta)$

$=\boxed{\frac{\pi}{4}}$

이다.

(가): $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

(나): $g(n)=\frac{1}{2n+1}$

(다): $k=\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ k\times f(2)\times g(2)=\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{\pi}{100}$

답 ④

I013 | 답 12

[풀이]

$f(x)=t$로 두면 $f'(x)dx=dt$이고,

$x=1$일 때 $t=f(1)=2$,

$x=5$일 때 $t=f(5)=5$

($\because$ 역함수의 성질에 의하여

$g(2)=1 \Leftrightarrow f(1)=2$, $g(5)=5 \Leftrightarrow f(5)=5$)

역함수의 성질에 의하여

$g(f(x))=x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=1$, 즉

$\frac{dx}{g'(f(x))}=f'(x)dx=dt$

정적분의 치환적분법에 의하여

$\therefore\ \int_1^5\frac{40}{g'(f(x))\{f(x)\}^2}dx$

$=\int_2^5\frac{40}{t^2}dt=\left[-\frac{40}{t}\right]_2^5=-8+20=12$

답 12

I014 | 답 ①

[풀이]

역함수의 성질에 의하여

$f(g(x))=x$, $g(f(x))=x$

$f(1)=3,\ g(3)=1,$

$g(1)=3,\ g(3)=1$

역함수의 미분법에 의하여

$f'(g(x))g'(x)=1,\ g'(f(x))f'(x)=1$

이므로

$\dfrac{1}{f'(g(x))}=g'(x),\ \dfrac{1}{g'(f(x))}=f'(x)$

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$$\int_1^3\left\{\frac{f(x)}{f'(g(x))}+\frac{g(x)}{g'(f(x))}\right\}dx$$

$$=\int_1^3\{f(x)g'(x)+f'(x)g(x)\}dx$$

$$=[f(x)g(x)]_1^3$$

$$=f(3)g(3)-f(1)g(1)$$

$$=1\times1-3\times3=-8$$

답 ①

I015 | 답 19

[풀이]

조건 (나)에서

$g(0)=2,\ g(1)=2+3=5$

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=|f(x)\sin x|$

$$=\begin{cases} f(x)\sin x & (-1\le x\le 0)\\ -f(x)\sin x & (0<x\le 1)\end{cases}$$

그리고 $g(-1)=0$이다.

$$\int_{-1}^{1}f(-x)g(-x)\sin x dx$$

$$=-\int_{-1}^{1}f(t)g(t)\sin t dt$$

($t=-x$로 두면 $dt=-dx$이고,

$x=-1$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=-1$)

$$=-\int_{-1}^{0}g(t)g'(t)dt+\int_0^1 g(t)g'(t)dt$$

$$=-\left[\frac{1}{2}\{g(t)\}^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}\{g(t)\}^2\right]_0^1$$

$$=\frac{-2(g(0))^2+(g(-1))^2+(g(1))^2}{2}$$

$$=\frac{-2\times2^2+0^2+5^2}{2}$$

$(\because g(-1)=0,\ g(0)=2,\ g(1)=2+3=5)$

$$=\frac{17}{2}$$

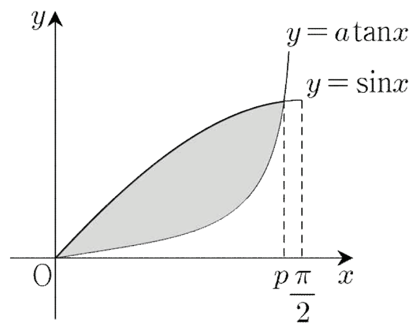
$\therefore\ p+q=19$

답 19

I016 | 답 ②

[풀이]

두 곡선 $y=a\tan x$, $y=\sin x$의 교점의 x좌표를 p라고 하자. (이때, p는 a에 대한 함수이므로 사실상 $p(a)$이다.)



교점의 y좌표: $a\tan p=\sin p$에서 $a=\cos p$

$$f(a)=\int_0^p(\sin x-a\tan x)dx$$

$$=[-\cos x+a\ln(\cos x)]_0^p$$

$$=-\cos p+a\ln(\cos p)+1$$

$$=-a+a\ln a+1$$

$f'(a)=-1+\ln a+1=\ln a$

$\therefore\ f'\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=-2$

답 ②

I017 | 답 325

[풀이]

적분과 미분의 관계에 의하여

$f'(x)=\dfrac{n-\ln x}{x}$

방정식 $f'(x)=0$을 풀면

$x=e^n$

$x=e^n$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=e^n$에서 극댓값(최댓값)을 갖는다.

정적분의 성질에 의하여

$$g(n)=f(e^n)=\int_1^{e^n}\frac{n-\ln t}{t}dt$$

$$=\int_0^n s ds$$

($\because$ 정적분의 치환적분법

$n-\ln t=s$로 두면 $-\dfrac{1}{t}dt=ds$,

$t=1$일 때 $s=n$, $t=e^n$일 때 $s=0$)

$=\left[\dfrac{1}{2}s^2\right]_0^n$

$=\dfrac{n^2}{2}$

연속되는 자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{12} g(n)=\sum_{n=1}^{12}\frac{n^2}{2}=\frac{12\times13\times25}{2\times6}=325$

답 325

I018 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$0\le t<3$일 때, 점 P의 좌표는 $(t+1,\ 1)$이고,

$3\le t\le 7$일 때, 점 P의 좌표는 $(4,\ t-2)$이다.

▸ ㄴ. (참)

$0\le t<3$일 때, 점 P의 좌표는 $(t+1,\ 1)$이므로

$1=k(t+1)^2$ 즉, $k=\dfrac{1}{(t+1)^2}$

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2kx$

$g(t)=f'(t+1)=2k(t+1)$

$=\dfrac{2}{t+1}$ (단, $0\le t<3$)

$3\le t\le 7$일 때, 점 P의 좌표는 $(4,\ t-2)$이므로

$t-2=16k$ 즉, $k=\dfrac{t-2}{16}$

$g(t)=f'(4)=8k=\dfrac{t-2}{2}$ (단, $3\le t\le 7$)

함수 $g(t)$의 방정식은

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{t+1} & (0\le t<3)\\[2mm] \dfrac{t-2}{2} & (3\le t\le 7)\end{cases}$$

▸ ㄷ. (참)

$\displaystyle\int_0^7 g(t)dt$

$\displaystyle=\int_0^3 g(t)dt+\int_3^7 g(t)dt$

$\displaystyle=\int_0^3\frac{2}{t+1}dt+\int_3^7\left(\frac{t}{2}-1\right)dt$

$=\left[2\ln(t+1)\right]_0^3+\left[\dfrac{1}{4}t^2-t\right]_3^7$

($\because$ 정적분의 치환적분법)

$=6+4\ln 2$

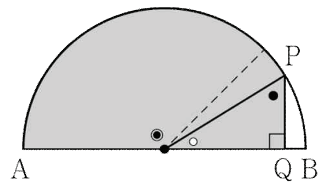
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

I019 | 답 80

[풀이]

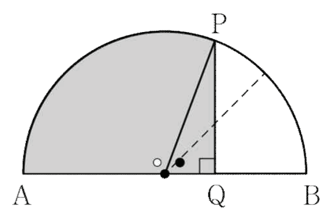
• (1) $\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$인 경우



(단, ●$=\theta$, ○$=\dfrac{\pi}{2}-\theta$, ◉$=\dfrac{\pi}{2}+\theta$)

삼각형과 부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S(1+\sin\theta)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$



(단, ●$=\theta$, ○$=\pi-\theta$)

삼각형과 부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S(1+\cos\theta)=\dfrac{1}{2}(\pi-\theta)+\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$

$S(1+\sin\theta)-S(1+\cos\theta)$

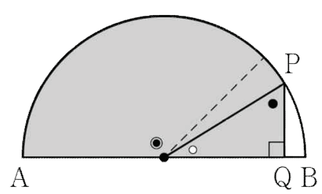
$=\theta-\dfrac{\pi}{4}$

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\{S(1+\sin\theta)-S(1+\cos\theta)\}d\theta$

$=\left[\dfrac{1}{2}\theta^2-\dfrac{\pi}{4}\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi^2}{32}$

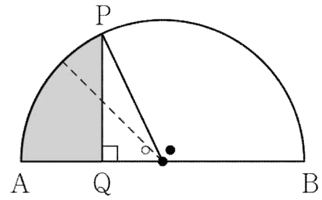
• (2) $\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{3\pi}{4}$인 경우



(단, ●$=\pi-\theta$, ○$=-\dfrac{\pi}{2}+\theta$, ◉$=\dfrac{3\pi}{2}-\theta$)

삼각형과 부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$S(1+\sin\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$



(단, $\bullet=\theta$, $\circ=\pi-\theta$)

삼각형과 부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$S(1+\cos\theta)=\frac{1}{2}(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$$

$$S(1+\sin\theta)-S(1+\cos\theta)$$

$$=\frac{\pi}{4}-\sin\theta\cos\theta$$

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)와 정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\{S(1+\sin\theta)-S(1+\cos\theta)\}d\theta$$

$$=\left[\frac{\pi}{4}\theta-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$$

(1), (2)에서

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\{S(1+\sin\theta)-S(1+\cos\theta)\}d\theta$$

$$=\frac{3\pi^2}{32}+\frac{1}{4}$$

$$p=\frac{1}{4},\ q=\frac{3}{32}$$

$$\therefore\ \frac{30p}{q}=80$$

답 80

1020 | 답 48

[풀이]

함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=af'(x)e^{af(x)}+bf'(x)$$

$$=\frac{a\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\,e^{a\sin\frac{\pi}{2}x}+\frac{b\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x$$

$$=\frac{a\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\left\{e^{a\sin\frac{\pi}{2}x}-\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}$$

$$g'(x)=0$$

$\Leftrightarrow$

$$\cos\frac{\pi}{2}x=0\ \text{또는}\ \sin\frac{\pi}{2}x=\frac{1}{a}\ln\left(-\frac{b}{a}\right)$$

그런데 조건 (가), (나)에 의하여

(전자): $x=1,\ 3,\ 5,\ \cdots$ (즉, $\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_5,\ \cdots$)

(후자): $x=\alpha_2,\ \alpha_4,\ \alpha_6,\ \cdots$

이때, n이 짝수이면

$$\sin\frac{\pi}{2}\alpha_n=\frac{1}{a}\ln\left(-\frac{b}{a}\right)$$

이므로

$$g(\alpha_n)=e^{a\sin\frac{\pi}{2}\alpha_n}+b\sin\frac{\pi}{2}\alpha_n$$

$$=e^{\ln\left(-\frac{b}{a}\right)}+\frac{b}{a}\ln\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$=-\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\ln\left(-\frac{b}{a}\right)=0,\ \text{즉}$$

$$\ln\left(-\frac{b}{a}\right)=1,\ -\frac{b}{a}=e,\ b=-ea \qquad \cdots ㉠$$

㉠에 의하여

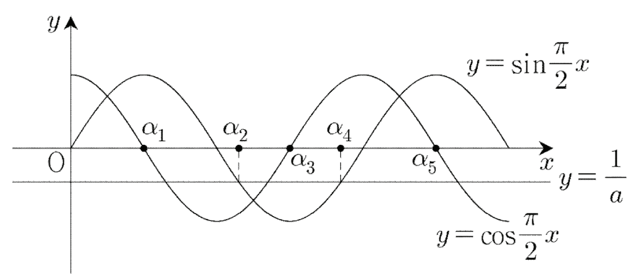
$$g'(x)=\frac{a\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\left(e^{a\sin\frac{\pi}{2}x}-e\right)$$

이므로

$$g'(x)=0$$

$\Leftrightarrow$

$$\cos\frac{\pi}{2}x=0\ \text{또는}\ \sin\frac{\pi}{2}x=\frac{1}{a}$$



문제에서 주어진 조건에 의하여

$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\cdots$

이므로 위의 그림처럼 $-1<\frac{1}{a}<0$

(즉, $a<-1,\ b>0$)이어야 한다.

$x=\alpha_1$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha_1$에서 극댓값을 갖는다. (마찬가지의 방법으로 $x=\alpha_3,\ \alpha_5,\ \cdots$에서 함수 $g(x)$는 극댓값을 갖는다.)

$x=\alpha_2$의 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=\alpha_2$에서 극솟값을 갖는다. (마찬가지의 방법으로 $x=\alpha_4,\ \alpha_6,\ \cdots$에서 함수 $g(x)$는 극솟값을 갖는다.)

$g(\alpha_1)=g(1)=e^a+b,$

$g(\alpha_3)=g(3)=e^{-a}-b$

이므로

$g(\alpha_1)+g(\alpha_3)=e^a+e^{-a}=e^3+e^{-3}$

즉, $a=-3$ $\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $b=3e$

$g(x)=e^{-3\sin\frac{\pi}{2}x}+3e\sin\frac{\pi}{2}x$

그리고 수열 α_1, α_2, $\cdots$, α_m을 쓰면

1, α_2, 3, α_4, 5, α_6, 7, $\cdots$, α_{10}, 11, α_{12}

이므로 $m=12$

정적분의 치환적분법에 의하여

$m\pi\int_{\alpha_3}^{\alpha_4}g(x)\cos\frac{\pi}{2}xdx$

$=12\pi\int_3^{\alpha_4}\left(e^{-3\sin\frac{\pi}{2}x}+3e\sin\frac{\pi}{2}x\right)\cos\frac{\pi}{2}xdx$

$=24\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}(e^{-3t}+3et)dt$

(이때, $\sin\frac{\pi}{2}x=t$로 치환함)

$=24\left[-\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{3e}{2}t^2\right]_{-1}^{-\frac{1}{3}}$

$=8e^3-40e$

$p=8$, $q=-40$이므로

$\therefore\ p-q=48$

답 48

I021 | 답 25

[풀이]

주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=kx(x+2)+p=kx^2+2kx+p$

(단, $p\neq 0$)

조건 (가)에서

$x\geq -1 \Leftrightarrow g(x)\leq m(x+1)$

$x\leq -1 \Leftrightarrow g(x)\geq m(x+1)$

위의 두 조건에서

$g(-1)=0$, 즉 $b=a$

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=ae^{f(x)}+a(x+1)f'(x)e^{f(x)}$

$=a\{1+2k(x+1)^2\}e^{kx^2+2kx+p}$

함수 $g(x)$의 이계도함수는

$g''(x)=2ak(x+1)\{3+2k(x+1)^2\}e^{kx^2+2kx+p}$

조건 (가)에서 $x=-1$을 기준으로 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=m(x+1)$의 위치 관계가 바뀌므로 점 $(-1,\ 0)$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이어야만 한다. (이때, $g''(-1)=0$임을 확인할 수 있다.)

그리고 곡선 $y=g(x)$ 위의 변곡점 $(-1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 -2이어야 한다.

$g'(-1)=-2$, 즉 $ae^{-k+p}=-2$ $\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 주어진 등식에서

$\int_0^1 g(x)dx=\frac{e-e^4}{k}$, 즉

$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 a(x+1)e^{kx^2+2kx+p}dx$

$=\int_p^{3k+p}\frac{a}{2k}e^t dt$

($kx^2+2kx+p=t$로 두고 치환적분법을 적용하면 $2k(x+1)dx=dt$, $x=0$일 때 $t=p$이고, $x=1$일 때 $t=3k+p$)

$=\frac{a}{2k}(e^{3k+p}-e^p)$

$=\frac{-2e^{k-p}}{2k}(e^{3k+p}-e^p)$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{e-e^4}{k}$

정리하면

$-e^{4k}+e^k=e-e^4$

(사실 위의 등식에 $k=1$을 대입하면 등호가 성립하므로 $k=1$이 해임을 빠르게 알 수 있긴 하다.)

$e^{4k}-e^4-e^k+e=0$

$(e^k-e)\{(e^{2k}+e^2)(e^k+e)-1\}=0$

$(e^{2k}+e^2)(e^k+e)-1>0$이므로

$e^k-e=0$, 즉 $k=1$

조건 (나)에서 주어진 등식에서

$\int_0^1 g(x)dx=\int_{-2f(0)}^1 g(x)dx$

이므로

$\int_{-2f(0)}^0 g(x)dx=0$, 즉

$\int_{-2f(0)}^0 g(x)dx=\int_{-2f(0)}^0 a(x+1)e^{x^2+2x+p}dx$

$=\int_{4p^2-3p}^p\frac{a}{2}e^t dt$

$=\frac{a}{2}(e^p-e^{4p^2-3p})=0$

그런데 $a\neq 0$이므로 $e^p=e^{4p^2-3p}$,

$p=4p^2-3p$, $p=1(p\neq 0)$

$k=1$, $p=1$을 ㉠에 대입하면

$a=-2$, $b=-2$

$\therefore\ f(ab)=f(4)=25$

답 25

1022 | 답 ③

[풀이]

정적분의 치환적분법을 적용하자.

$x^2=t$로 두면 $2xdx=dt$이고,

$x=1$일 때 $t=1$, $x=n$일 때 $t=n^2$

$f(n)=\int_1^n xx^2e^{x^2}dx$

$=\int_1^{n^2}\frac{1}{2}te^t dt$

$=\frac{1}{2}[te^t-e^t]_1^{n^2}=\frac{1}{2}(n^2-1)e^{n^2}$

($\because$ 정적분의 부분적분법)

$\therefore\ \frac{f(5)}{f(3)}=\frac{12e^{25}}{4e^9}=3e^{16}$

답 ③

1023 | 답 ⑤

[풀이]

적분과 미분의 관계에 의하여

$f'(x)=e^{x^3}$

정적분의 정의(미적분의 기본 정리)에 의하여

$f(1)=\int_1^1 e^{t^3}dt=0$

정적분의 부분적분법에 의하여

$\therefore\ \int_0^1 xf(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2f(x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2f'(x)dx$

$=\frac{1}{2}f(1)-0-\int_0^1\frac{1}{2}x^2e^{x^3}dx$

$=-\left[\frac{1}{6}e^{x^3}\right]_0^1$($\because$ 정적분의 치환적분법)

$=\frac{1-e}{6}$

답 ⑤

1024 | 답 ④

[풀이]

$\frac{x}{2}=t$로 두면 $x=2t$, $dx=2dt$이고,

$x=1$일 때 $t=\frac{1}{2}$, $x=2$일 때 $t=1$

$\int_1^2(x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx$

$=\int_{\frac{1}{2}}^1(4t-2)f'(t)dt$

$=[(4t-2)f(t)]_{\frac{1}{2}}^1-\int_{\frac{1}{2}}^1 4f(t)dt$

$=2f(1)-\int_{\frac{1}{2}}^1 4f(t)dt=2$

$\therefore\ \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=\frac{2f(1)-2}{4}=\frac{3}{2}$

($\because f(1)=4$)

답 ④

1025 | 답 6

[풀이]

$t=x+1$로 두면 $dt=dx$이고,

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$

정적분의 치환적분법에 의하여

$\int_0^1(x-1)f'(x+1)dx$

$=\int_1^2(t-2)f'(t)dt$

$=[(t-2)f(t)]_1^2-\int_1^2 f(t)dt$

($\because$ 정적분의 부분적분법)

$=f(1)-\int_1^2 f(t)dt$

$=2-\int_1^2 f(t)dt$($\because$ 조건(가))

$=-4$

$\therefore\ \int_1^2 f(t)dt=6$

답 6

1026 | 답 ④

[풀이]

적분과 미분의 관계에 의하여

$F'(x)=f(x)$

문제에서 주어진 등식에서

$F(-1)=\int_{-1}^{-1} f(t)dt=0$,

$F(1)=\int_{-1}^{1} f(t)dt=12$

정적분의 성질에 의하여

$\int_{0}^{1} xf(x)dx=-\int_{-1}^{0} xf(x)dx$

$\int_{0}^{1} xf(x)dx+\int_{-1}^{0} xf(x)dx=0$

$\int_{-1}^{1} xf(x)dx=0$

정적분의 부분적분법에 의하여

$\therefore \int_{-1}^{1} F(x)dx$

$=[xF(x)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1} xf(x)dx$

$=F(1)+F(-1)-\int_{-1}^{1} xf(x)dx$

$=12+0-0=12$

답 ④

I027 | 답 ④

[풀이]

적분과 미분의 관계에 의하여

$F'(x)=f(x)$

그리고

$F(0)=\int_{0}^{0} f(t)dt=0$

▸ ㄱ. (거짓)

조건 (나)에서

$\int_{0}^{1} F(x)dx$

$=\int_{0}^{1} \{f(x)-x\}dx$ ($\because$ 조건(가))

$=\left[F(x)-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$

$=F(1)-F(0)-\frac{1}{2}$

$=F(1)-\frac{1}{2}=e-\frac{5}{2}$

$\therefore F(1)=e-2$

▸ ㄴ. (참)

정적분의 부분적분법에 의하여

$\int_{0}^{1} xF(x)dx$

$=\int_{0}^{1} \{xf(x)-x^2\}dx$ ($\because$ 조건(가))

$=[xF(x)]_{0}^{1}-\int_{0}^{1} F(x)dx-\frac{1}{3}$

$=(e-2)-\left(e-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

▸ ㄷ. (참)

$\int_{0}^{1} \{F(x)\}^2dx$

$=\int_{0}^{1} F(x)\{f(x)-x\}dx$

$=\int_{0}^{1} F(x)f(x)dx-\int_{0}^{1} xF(x)dx$

$=\left[\frac{1}{2}\{F(x)\}^2\right]_{0}^{1}-\frac{1}{6}$

$=\frac{(e-2)^2}{2}-\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

I028 | 답 ①

[풀이]

조건 (가)에서 주어진 함수 $g(x)$의 도함수는

적분과 미분의 관계에 의하여

$g'(x)=\frac{f(x^2+1)}{x}$(단, $x>0$)

정리하면

$f(x^2+1)=xg'(x)$(단, $x>0$)

양변에 양수 x를 곱하면

$xf(x^2+1)=x^2g'(x)$

정적분의 치환적분법에 의하여

$\int_{1}^{2} xf(x^2+1)dx$

$=\frac{1}{2}\int_{2}^{5} f(t)dt=8$ ($\because$ 조건(나))

($\leftarrow x^2+1=t$로 두면 $2xdx=dt$,

$x=1$일 때 $t=2$, $x=2$일 때 $t=5$)

이므로

$\int_{1}^{2} x^2g'(x)dx=8$

정적분의 부분적분법에 의하여

$$\int_1^2 2xg(x)dx = [x^2g(x)]_1^2 - \int_1^2 x^2g'(x)dx$$

$$=4g(2)-g(1)-8=4$$

$$(\because g(1)=\int_1^1 \frac{f(t^2+1)}{t}dt=0)$$

정적분의 성질에 의하여

$$\therefore \int_1^2 xg(x)dx=2$$

답 ①

1029 | 답 12

[풀이]

(가): $x<1$일 때, $f(x)=-x^2+4x+C$

(단, C는 적분상수)

(나): $x\geq 0$일 때, $2x\times f'(x^2+1)=2ae^{2x}+b$

$x=0$을 대입하면 $0\times f'(1)=2a+b$, 즉

$b=-2a$

$x\times f'(x^2+1)=a(e^{2x}-1)$

양변을 0이 아닌 x로 나누면

$$f'(x^2+1)=a\times\frac{e^{2x}-1}{x}\ (\text{단, } x>0)$$

함수 $f'(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-} f'(x)=\lim_{x\to 1+} f'(x)$, 즉

$2=\lim_{x\to 0+} f'(x^2+1)$,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times 2a=2a=2,$$

$a=1$, $b=-2$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$, 즉

$3+C=1$, $C=-2$

$$\therefore \int_0^5 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^5 f(x)dx$$

$$=\int_0^1(-x^2+4x-2)dx+\int_0^2 f(t^2+1)2tdt$$

(이때, $t^2+1=x$로 둔 것이다.)

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-2x\right]_0^1+\int_0^2 2t(e^{2t}-2t)dt$$

$$=-\frac{1}{3}+\left[te^{2t}-\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{4}{3}t^3\right]_0^2$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}e^4-\frac{61}{6}$$

$$=\frac{3}{2}e^4-\frac{21}{2}$$

$$\therefore\ p+q=\frac{3+21}{2}=12$$

답 12

1030 | 답 ④

[풀이]

(가): $a=0$ 또는 $b=0$

(1) $a=0$인 경우

$f(x)=\sin x\cos x\times e^{b\cos x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{b}\cos x\right)(-b\sin x\times e^{b\cos x})dx$$

$$=\left[-\frac{1}{b}\cos x\times e^{b\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{b}\sin x\right)e^{b\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{b}e^b+\left[\frac{1}{b^2}e^{b\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{b}e^b+\frac{1-e^b}{b^2}$$

$$=\frac{1}{b^2}+\frac{b-1}{b^2}e^b$$

$$=\frac{1}{b^2}-2e^b$$

$$\frac{b-1}{b^2}=-2,\ 2b^2+b-1=0,$$

$$(2b-1)(b+1)=0,\ b=-1\ \text{또는}\ b=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ (a,\ b)=(0,\ -1),\ \left(0,\ \frac{1}{2}\right)$$

(2) $b=0$인 경우

$f(x)=\sin x\cos x\times e^{a\sin x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\times e^{a\sin x}dx$$

(이때, $\frac{\pi}{2}-x=t$로 두면 $-dx=dt$,

$x=0$일 때 $t=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$)

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos t \sin t \times e^{a\cos t}\, dt$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \times e^{a\cos t}\, dt$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{a-1}{a^2} e^a \quad (\because \text{(1)과 같다.})$$

$$= \frac{1}{a^2} - 2e^a$$

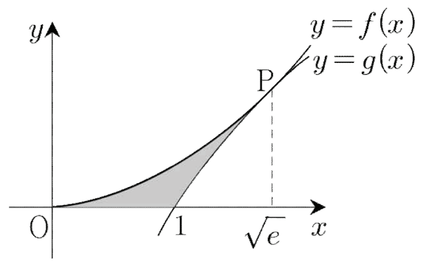
$\therefore\ (a,\ b) = (-1,\ 0),\ \left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

(1), (2)에서 $a-b$의 최솟값은 -1이다.

답 ④

1031 | 답 ②

[풀이]



점 P의 x좌표를 t로 두면

접점: $at^2 = \ln t$

기울기: $2at = \frac{1}{t}$, 즉 $t^2 = \frac{1}{2a}$

위의 두 등식을 연립하면

$\frac{1}{2} = \ln t,\ t = \sqrt{e},\ a = \frac{1}{2e}$

점 P의 좌표는 $\left(\sqrt{e},\ \frac{1}{2}\right)$이다.

구하는 넓이를 S라고 하자.

정적분의 부분적분법에 의하여

$$\therefore\ S = \int_0^{\sqrt{e}} \frac{1}{2e} x^2 dx - \int_1^{\sqrt{e}} \ln x\, dx$$

$$= \frac{1}{2e}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{e}} - [x\ln x - x]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \frac{\sqrt{e}}{6} + \frac{\sqrt{e}}{2} - 1$$

$$= \frac{2\sqrt{e}-3}{3}$$

답 ②

1032 | 답 7

[풀이]

문제에서 주어진 넓이 조건에 의하여

$\int_0^2 f(x)dx = 0\ (\because -A+B=0)$

정적분의 부분적분법에 의하여

$$\int_0^2 (2x+3)f'(x)dx$$

$$= [(2x+3)f(x)]_0^2 - 2\int_0^2 f(x)dx$$

$$= 7f(2) - 3f(0) - 2\times 0$$

$$= 7 - 0 - 0$$

$$= 7$$

답 7

1033 | 답 586

[풀이]

모든 실수 x에 대하여

$g(-x) = g(x)$

이므로 함수 $g(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.

함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x) = f'(x) \times \frac{10-f(x)}{10f(x)}$$

$$= \frac{2ax(10-ax^2-b)}{10(ax^2+b)}$$

이때, 분모는 항상 양수이다.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2ax(10-b-ax^2) = 0$

$b = 10$이면 $x = 0$

이때, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.(×)

$b < 10$이면 $x = 0,\ x = \pm\sqrt{\frac{10-b}{a}}$

이때, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.(○)

$b > 10$이면 $x = 0$

이때, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.(×)

이상에서 조건 (가)에 의하여 $1 \le b < 10$이다.

$g(0) = \ln b - \frac{b-1}{10} \ge 0$

(단, 등호는 $b=1$일 때 성립한다.)

• (1) $b=1$인 경우

함수 $|g(x)|$의 그래프는