2016학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회

수학 영역(A 형) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

1) [정답] ② (출제자 : 13김찬호)

[출제의도] 지수계산을 할 수 있는가?

[해설]

$3^2 \times 9^{-\frac{1}{2}} = 3^2 \times (3^2)^{-\frac{1}{2}} = 3^2 \times 3^{-1} = 3$

2) [정답] ④ (출제자 : 13김찬호)

[출제의도] 행렬을 계산할 수 있는가?

[해설]

$AB = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+6 & -a+4 \\ 18 & 7 \end{pmatrix}$, $(1,\ 1)$ 성분이 10 이므로

$a+6=10$

$a=4$

3) [정답] ⑤ (출제자 : 13김찬호)

[출제의도] 수열의 극한 계산을 할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3+3}{n^3+2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(5+\frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n^3}}{1+\frac{2}{n^2}}$$

이 되고, $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}=0$ 이고, $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{n^2}=0$ 이므로,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n^3}}{1+\frac{2}{n^2}}=5$$

4) [정답] ⑤ (출제자 : 15최봉규)

[출제의도] 그래프를 나타내는 행렬을 구할 수 있는가?

[해설]

그래프를 나타내는 행렬은 1 또는 0 의 값을 갖는다.
이때, 1 의 개수는 변의 개수의 두 배이므로 1 의 개수는
$2\times 7=14$, 따라서 답은 ⑤이다.

5) [정답] ① (출제자 : 15최봉규)

[출제의도] 등비수열의 일반항을 구하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_3 \div a_1 = r^2 = 9$, $r=3$ $(\because r>0)$

$a_4 = a_3 \times r = 18\times 3 = 54$

$\therefore 54$

6) [정답] ③ (출제자 : 14고정민)

[출제의도] 정적분을 계산할 수 있는가?

개념 알기

모든 실수 x에 대하여
$f(-x)=f(x)$를 만족하는 함수 $f(x)$를 <u>'우함수'</u>
$f(-x)=-f(x)$를 만족하는 함수 $f(x)$를 <u>'기함수'</u>
라고 한다.

우함수 $f(x)$에 대해 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ 가 성립한다.

기함수 $f(x)$에 대해 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ 이 성립한다.

(그래프를 그려보면 쉽게 확인할 수 있다.)

[해설]

x는 기함수이므로 $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$ 이고, x^2은 우함수이므로

$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = 2\int_0^1 x^2 dx$ 이다.

따라서 $\int_{-1}^{1}(ax^2+2x)dx = \int_{-1}^{1} ax^2\,dx$

$$= 2\int_0^1 ax^2\,dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{3}ax^3 dx\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}a$$

$$= 2$$

$a=3$ 이다.

7) [정답] ⑤ (출제자 : 15유정훈)

[출제의도] 함수의 그래프를 통해 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\lim_{x \to -1-0} f(x)$ 의 값을 구하기 위해 함수에서 x 는 -1 에서의 좌극한을 구해보면, 그 값이 2 임을 알 수 있다.

$\lim_{x \to 1+0} f(x)$ 의 값을 구하기 위해, 함수에서 x는 1 에서의 우극한을 구해보면, 그 값이 3 인 것을 알 수 있다.

따라서 $\lim_{x \to -1-0} f(x) + \lim_{x \to 1+0} f(x)$ 의 값은 5 이다.

8) [정답] ③ (출제자 : 13오현주)

[출제의도] 이항정리를 이해하고 문제에 적용하여 해결할 수 있는가?

[해설]

$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^r b^{n-r}$ 의 관계식을 이항정리라 하고,

이때, 일반항은 ${}_nC_r a^r b^{n-r}$ 이 되고, ${}_nC_r$ 가 일반항의 이항계수이다.

주어진 다항식 $(ax+1)^5$ 의 일반항은 ${}_5C_r(ax)^r$ 이고

따라서 일반항의 이항계수는 ${}_5C_r a^r$ 이다.

x^2 의 계수가 ${}_5C_2 a^2 = 90$ 이므로 $a^2 = 9$ 이고, 양수 a 의 값은 3 이다.

9) [정답] ① (출제자 : 15유정훈)

[출제의도] 역행렬을 통해 연립방정식의 해를 구할 수 있는가?

[해설]

$\begin{pmatrix} 2a & a+3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$ 에서

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & a+3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -a-3 \\ -2 & 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 4-2a \end{pmatrix}$

$x=0$ 을 만족하므로 $a=-1$ 임을 알 수 있다.

b 의 값은 $a=-1$ 일 때, 6 이다.

$\therefore ab = -6$

[별해]

$\begin{pmatrix} 2a & a+3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$ 에서 $x=0$,$y=b$ 를 만족하므로,

$\begin{pmatrix} 2a & a+3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$ 이 식을 전개하면, $b(a+3) = 12$, $b=6$ 이다.

$6(a+3) = 12$ 식을 풀면 $a=-1$ 이 나온다. 따라서 $ab=-6$

10) [정답] ③ (출제자 : 11양종현)

[출제의도] 로그의 실생활활용 문제에서 주어진 내용을 잘 적용할 수 있는가?

[해설]

혼합용액 A 에 관한 식은 $\log\lambda_A = \dfrac{\mu_A - \frac{1}{2}}{200k}$ … ①

혼합용액 B 에 관한 식은 $\log\lambda_B = \dfrac{\mu_B - \frac{3}{4}}{300k}$ … ②

식 ①에서 식 ②를 빼면

$$\log\frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \left(\frac{\mu_A}{200k} - \frac{\mu_B}{300k}\right) - \left(\frac{1}{400k} - \frac{1}{400k}\right)$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\mu_B}{200k} - \frac{\mu_B}{300k} \quad (\because \mu_A = \frac{2}{3}\mu_B)$$

$$= 0$$

따라서 $\log\frac{\lambda_A}{\lambda_B} = 0$ 이므로 $\frac{\lambda_A}{\lambda_B} = 1$ 이다.

11) [정답] ① (출제자 : 14임현우)

[출제의도] 1. 무한등비급수를 계산할 줄 아는가?

2. 무한급수의 성질(시그마의 성질)을 잘 아는가?

($\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 와 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 다르다는 것을 명심하자!

– 특히 답을 $9 \times 15 = 135$ 로 계산한 친구들!)

[해설]

$\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , $\{b_n\}$ 의 첫째항을 b 라 두면

$\dfrac{a}{1-\frac{2}{3}} = 9$, $\dfrac{b}{1-\frac{2}{3}} = 15$

$a=3$, $b=5$

수열 $\{a_n b_n\}$ 은 등비수열끼리 곱했기 때문에 역시 등비수열이다.

첫째항은 $a_1 b_1 = ab$ 이고, 공비는 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ 이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 을 계산하면,

$$\frac{ab}{1-r^2} = \frac{15}{1-\frac{4}{9}} = \frac{15 \times 9}{5} = 27$$

12) [정답] ② (출제자 : 14서재현)

[출제의도] 정규분포의 정의를 알고 활용할 수 있는가?

[해설]

자판기의 하루 콜라 판매량을 확률변수 X 라 하면

X 는 $\mathrm{N}(56, 4)$ 인 정규분포를 따른다. 자판기에서 콜라 한 캔의 판매가격이 700 원이므로, 하루 동안 콜라를 판매하여 얻은 금액이 42000 원 이상이 되기 위해서는 하루에 콜라를 60 개 이상 판매해야 한다. 즉 하루에 콜라 판매량이 60 개 이상일 확률을 구하면 된다.

$\mathrm{P}(X \geq 60)$ 을 표준화하면

$\mathrm{P}\left(\frac{X-56}{4} \geq \frac{60-56}{4}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 1) = 0.1587$

따라서 정답은 ②번이다.

13) [정답] ④ (출제자 : 15최봉규)

[출제의도] 다항함수의 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는가?

[해설]

두 그래프의 교점의 x 좌표는 $-x^2+5x=-x+8$ 의 실근이다.
다음 방정식을 풀면 $x=2,\ 4$ 이므로 두 그래프는 $x=2,\ x=4$ 에서 만난다.

$f(x)-g(x)=-x^2+6x-8$ 이므로

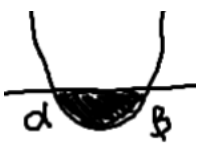
$\int_2^4 f(x)-g(x)\,dx = \int_2^4 -x^2+6x-8\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2-8x\right]_2^4$

$=-\frac{1}{3}(4^3-2^3)+3(4^2-2^2)-8(4-2)$

$=\frac{-56+108-48}{3}=\frac{4}{3}$ $\therefore \frac{4}{3}$

[별해]



$y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 위와 같으면

색칠한 부분의 넓이가 $\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ 이다.

따라서 답은 $\frac{|-1|}{6}(4-2)^3=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$ 이다.

14) [정답] ② (출제자 : 15최봉규)

[출제의도] 등차수열과 내분점을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$\overline{\mathrm{PA}}=l_1,\ \overline{\mathrm{AB}}=l_2$ 이라 하면 $\overline{\mathrm{PB}}=l_1+l_2$

$\overline{\mathrm{PA}},\overline{\mathrm{AB}},\overline{\mathrm{PB}}$ 가 차례대로 등차수열을 이루므로

등차중항을 이용하면 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=2\overline{\mathrm{AB}}$

$l_1+(l_1+l_2)=2l_2,\ l_2=2l_1$, 따라서 $l_1:l_2=1:2$

두 점 A, B 에서 x 축에 수선의 발을 내린 점을 각각 A$'$, B$'$ 라고 하면

$\overline{\mathrm{PA}}:\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OA'}}:\overline{\mathrm{AB'}}=1:2$

점 A 의 x 좌표를 a 라고 하면 $\overline{\mathrm{A'B'}}=2a$ 이므로

점 B 의 x 좌표는 $3a$ 이다.

$-x^2+5x=-x+k$

이를 정리하면 $x^2-6x+k=0$

근과 계수의 관계를 이용하면 $a+3a=6,\ a=\frac{3}{2}$

다시 근과 계수의 관계를 이용하면 $k=3a^2=3\times\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$

$\therefore 4k=27$

15) [정답] ① (출제자 : 15정다혜)

[출제의도] 지수부등식을 치환을 이용해서 해결할 수 있는가?

[해설]

$4^x+a\cdot 2^x+b<0$에서 $2^x=t$로 놓으면

$t^2+at+b<0$ …… ㉠

이 때, $-1<x<0$에서 $\frac{1}{2}<2^x=t<1$이므로

$\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)=t^2-\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}<0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}$이다.

따라서 $a+b=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-1$이다.

16) [정답] ⑤ (출제자 : 15이민욱)

[출제의도] 1. 확률 계산을 잘 할 수 있는가?
2. 사건의 독립의 정의를 알고 있는가?

[해설]

$\mathrm{P}(A\cup B^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)-\mathrm{P}(A\cap B^C)$

사건 A 와 B가 독립이므로, 사건 A 와 사건 B^C 또한 독립이다.

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$

$\mathrm{P}(A\cup B^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{7}{12}$

$\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B^C)-\frac{1}{3}\mathrm{P}(B^C)=\frac{7}{12}$,

$\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{8}$ 이고, $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{8}$

두 사건 A 와 B가 독립이므로, 사건 A^C와 사건 B또한 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)=\frac{5}{8}$ 이다.

[추가 설명]

(사건의 독립의 정의를 잘 알아두자!)

두 사건 $A,\ B$가 독립이면 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$이다.

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\mathrm{P}(A)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ 이다.

또한 $A,\ B$가 독립이면

사건 $A^C,\ B$

사건 $A,\ B^C$

사건 $A^C,\ B^C$ 또한 독립이다.

17) [정답] ② (출제자 : 15정다혜)

[출제의도] 1. 수열의 합과 일반항 간의 관계를 아는가?
2. 분수 꼴인 수열의 합을 구할 수 있는가?

[해설]

$S_n = n^2 + 2n$이므로,

(ⅰ) $n = 1$일 때

$a_1 = S_1 = 3$

(ⅱ) $n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= n^2 + 2n - (n-1)^2 - 2(n-1)$

$= 2n + 1 \cdots\cdots (*)$

이때 $a_1 = 3$은 $(*)$에 $n = 1$을 대입한 것과 같으므로 $a_n = 2n+1$이다.

$$\sum_{k=2}^{10} \frac{1}{a_{k-1}a_k} = \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+1}\right)$이므로

$$\therefore \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{a_{k-1}a_k} = \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{10}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{21}\right) = \frac{1}{7}$$

18) [정답] ④ (출제자 : 14서재현)

[출제의도] 중복조합을 이해하고 실생활에 적용할 수 있는가?

[해설]

A초콜릿의 개수를 a, B초콜릿의 개수를 b, C초콜릿의 개수를 c, D초콜릿 개수를 d, E초콜릿 개수를 e라고 할 때, 1000원을 남김없이 사용하여 초콜릿을 사려면 $200a + 200b + 400c + 400d + 200e = 1000$이다.

식을 정리하면

$a + b + 2c + 2d + e = 5$을 만족하는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 개수를 구하면 된다. 가격이 다른 초콜릿을 분류하면,

a, b, e (200원)와 c, d (400원)이기 때문에

두 종류를 따로 생각해야 한다.

즉 400원 초콜릿을 종류에

상관없이 몇 개 뽑을 건지 결정한 후

(400원의 초콜릿은 최대 2개까지 뽑을 수 있다.)

c, d를 중복하여 뽑는 경우의 수와 남은 a, b, c를 뽑는 경우의 수를 구하여 곱하면 된다.

ⅰ) 400원 초콜릿 0개 뽑는 경우

$c + d = 0$이고 $a + b + e = 5$이므로

a, b, e 중에서 중복을 허락하여 5개 뽑는 경우의 수 $= {}_3\mathrm{H}_5$

ⅱ) 400원 초콜릿 1개 뽑는 경우

$c + d = 1$이고 $a + b + e = 3$이므로

c, d 중 하나 뽑는 경우의 수

$\times\ a, b, e$ 중에서 중복을 허락하여 3개 뽑는 경우의 수

$= 2 \times {}_3\mathrm{H}_3$

ⅲ) 400원 초콜릿 2개 뽑는 경우

$c + d = 2$이고 $a + b + e = 1$이므로

c, d 중 중복을 허락하여 2개 뽑는 경우의 수

$\times\ a, b, e$ 중에서 중복을 허락하여 1개 뽑는 경우의 수

$= {}_2\mathrm{H}_2 \times {}_3\mathrm{H}_1$

따라서 구하는 정답은

${}_3\mathrm{H}_5 + 2 \times {}_3\mathrm{H}_3 + {}_2\mathrm{H}_2 \times {}_3\mathrm{H}_1 = 50$

19) [정답] ③ (출제자 : 15최봉규)

[출제의도] 우함수의 성질을 이용해서 정적분 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

먼저 준 식에 $x = 0$을 대입하면

$$0 = -4\int_{-1}^{0} f(t)\,dt + k$$

$$\int_0^x f(t)dt = x^3 + 2x\int_0^1 f(t)dt$$

다음으로 $x = 1$을 대입하면

$$\int_0^1 f(t)\,dt = 1 + 2\int_0^1 f(t)dt$$

$$\int_0^1 f(t)\,dt = -1$$

$$\therefore \int_0^x f(t)dt = x^3 - 2x$$

$f(x) = 3x^2 - 2,\ f(2) = 10$

다항함수 $y = f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-1}^{0} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt = -1$$

$$k = 4\int_{-1}^{0} f(t)dt = -4$$

$\therefore f(2) + k = 10 - 4 = 6$

20) [정답] ⑤ (출제자 : 14고정민)

[출제의도] 행렬의 성질을 이용해서 주어진 식을 변형하여 문제를 풀어낼 수 있는가?

[해설]

ㄱ. (참)

$A^2 - 2BA = E$에서 $(A - 2B)A = E$이다.

따라서 행렬 $A - 2B$의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. (참)

ㄱ에서 역행렬이 존재하기 때문에 $(A-2B)A=E=A(A-2B)$ 이므로 $AB=BA$ 이다.

ㄷ. (참)

ㄱ과 ㄴ이 참인 것을 이용해서 $A^2-2B^2=AB$을 정리해보자.
먼저 $A^2=2BA+E$이므로, $A^2-2B^2=AB$에 대입해보면
$2BA+E-2B^2=AB$이다.
한편, $AB=BA$ 이므로 $2AB+E-2B^2=AB$이고
즉 $AB-2B^2+E=0$ 이다.
$AB-2B^2+E=0$ 에서 $2B^2-AB=E$이고
이를 인수분해하면 $B(2B-A)=-B(A-2B)=E$이다.
이 식에서 $A-2B$의 역행렬이 $-B$이고 $-B$는 $(A-2B)A=E$에서 구한 역행렬 A와 같으므로 $A=-B$이다.
따라서 이 식을 $A^2-2BA=E$에 대입하면, $A^2+2A^2=E$이므로, $3A^2=E$이다.

[별해]

$A^2-2B^2=AB$는 $A^2-AB-2B^2=O$이고 이 식을 인수분해하면 $(A-2B)(A+B)=O$이다. 한편, $A-2B$의 역행렬이 존재하므로, 양변에 $(A-2B)^{-1}$을 곱하면 $A+B=O$이어야 한다.
따라서 $A=-B$이다.

21) [정답] ③ (출제자 : 11양종현)

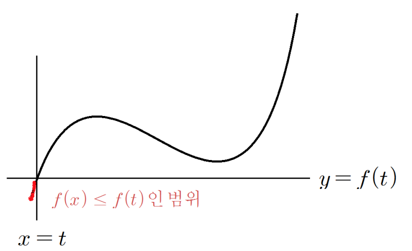
[출제의도] 삼차함수의 그래프의 개형에 대해 파악하고, 새로 정의된 함수를 이해할 수 있는가?

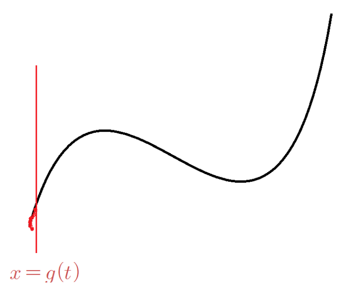
[해설]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수의 그래프의 개형은 세 가지가 있다.

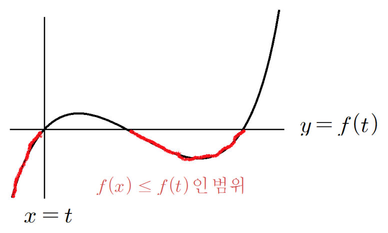
(i) 방정식 $f'(x)=0$ 의 해가 서로 다른 두 실근인 경우

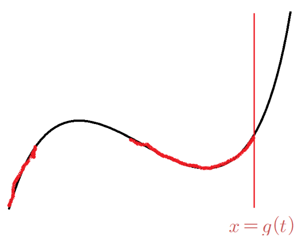
t 값이 충분히 작은 수일 때 (구체적으로 $f(t)$ 의 값이 극솟값보다 작은 수일 때), 아래 그림과 같이 $g(t)$ 의 값은 t 와 같다.



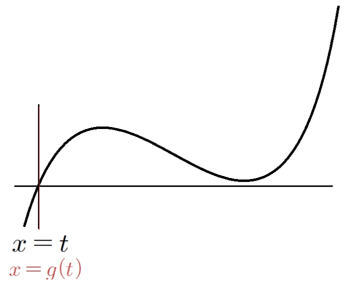


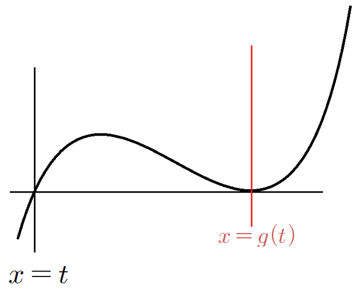
$f(t)$ 의 값이 극솟값보다 크고 극댓값보다 작을 때, 아래 그림과 같이 $g(t)$ 의 값은 극솟점의 x 좌표보다 크다.





위의 두 가지 경우로 추측해 보건데, t 값이 충분히 작은 값에서 계속 증가하다보면 직선 $y=f(t)$ 가 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 극솟점과 처음으로 만나는 지점이 생긴다. 그 지점에서 $g(t)$ 의 변화 과정은 아래 두 그림과 같다.

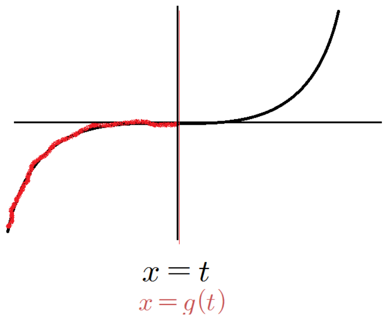




그러므로 함수 $g(t)$ 는 직선 $y=f(t)$ 가 극솟점과 만나는 $t=\alpha$ 에서 불연속인 점이 생긴다.

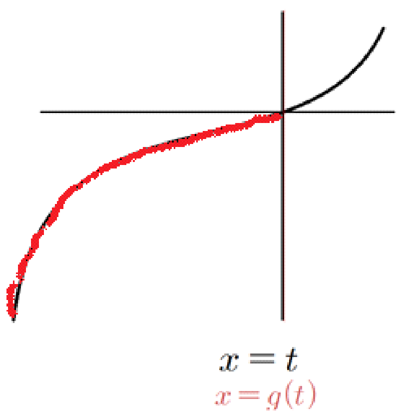
(ii) 방정식 $f'(x)=0$ 의 해가 중근인 경우

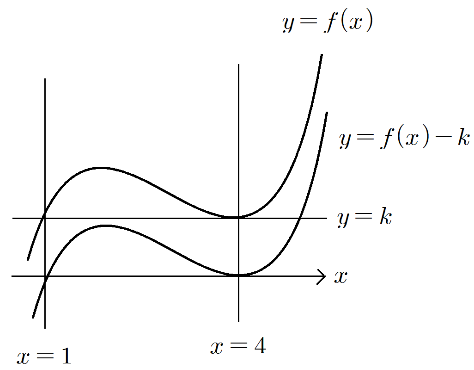
'(i)'에서와 같은 방법으로 해보면, 모든 실수 t 에 대하여 $g(t)=t$ 를 만족하고 연속이다.



(iii) 방정식 $f'(x)=0$ 의 해가 두 허근인 경우

'(ii)'에서와 마찬가지로, 모든 실수 t 에 대하여 $g(t)=t$ 를 만족하고 연속이다.
문제에서 $t=1$ 에서만 불연속이라 했으므로 '(i)'의 경우만 해당하며 $\alpha=1$ 이다. 또한 $g(1)=4$ 라 했으므로 극솟점의 x 좌표가 4 이다.
그러면 함수 $f(x)$ 는 $f(1)=f(4)=k$ 를 만족하므로, 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a 라 하면 다음과 같이 표현된다.





평행이동한 함수 $y=f(x)-k$ 가 위 그림과 같이 $x=1$ 을 근으로 가지고, 곡선 $y=f(x)-k$ 위의 점 $(4,\ 0)$ 에서 x 축에 접하므로 $x=4$ 를 중근으로 갖는다. 이를 통해 삼차함수 $y=f(x)-k$ 의 식을 추론해보면 다음과 같다.

$f(x)-k=a(x-1)(x-4)^2$ (단, a는 양수)

$\therefore f(x)=a(x-1)(x-4)(x-4)+k$

양변을 x에 대해 미분하면

$f'(x)=a\{(x-4)(x-4)+(x-1)(x-4)+(x-1)(x-4)\}$

문제에서 $f'(3)=-6$이라 했으므로

$f'(3)=a\{(-1)^2+2\times(-1)+2\times(-1)\}=-3a=-6$

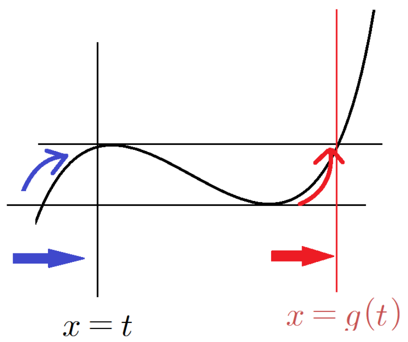
$\therefore a=2$

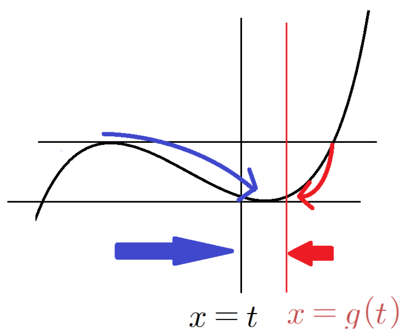
$f'(x)=2\{(x-4)(x-4)+(x-1)(x-4)+(x-1)(x-4)\}$이므로

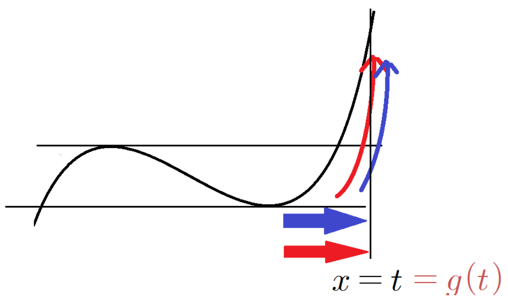
$\therefore f'(5)=18$

[출제자의 말]

덧붙여서 '(i)'의 경우에서 이후에 t값을 계속 증가시키면 다음 그림과 같이 $g(t)$의 값이 증가 → 감소 →증가하면서 연속입니다.







(모든 그림은 컬러로 봐주세요.)

22) [정답] 8 (출제자 : 15이민욱)

[출제의도] 함수의 극한을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+10x+9}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+9)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x+9)=8$$

23) [정답] 3 (출제자 : 12황성문)

[출제의도] 함수의 연속을 이해할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$x=3$에서 연속이어야 하므로

$f(3)=\lim_{x\to3}f(x)$이어야 한다.

$f(3)=3b$,

$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}(x^2-ax)=9-3a$이므로

$3b=9-3a$

$3a+3b=9$

$\therefore a+b=3$

24) [정답] 18 (출제자 : 14임현우)

[출제의도] 무한급수의 성질(시그마의 성질)을 잘 아는가?

($\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 와 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 이 다르다는 것을 명심하자!)

[해설]

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+2a_nb_n+b_n^2)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+2\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2=13+2\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=49$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=36$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=18$$

25) [정답] 64 (출제자 : 15이민욱)

[출제의도] 이항분포에서 평균값을 구할 수 있는가?

[해설]

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ \frac{1}{5})$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{5}=\frac{n}{5}$

$\mathrm{E}(10X+8)=10\mathrm{E}(X)+8=10\times\frac{1}{5}n+8=2n+8=40$이므로

$n=16$이다.

따라서 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(16,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{V}(X)=16\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{64}{25}$이므로

$\mathrm{V}(5X)=25\mathrm{V}(X)=64$이다.

26) [정답] 10 (출제자 : 15김효석)

[출제의도] 미분과 적분의 관계를 속도와 위치의 관점에서 볼 수 있는가?

[해설]

$t=2$에서 점 P의 운동방향이 바뀌므로, 이 때 속도가 0이 되어야 한다.

따라서, $4(2)-a=0$, $a=8$이다.

점 P는 원점에서 출발하므로 $t=5$일 때 원점과 점 P 사이의 거리는

$0+\int_{0}^{5}(4t-8)dt=\left[2t^2-8t\right]_0^5=50-40=10$이다.

27) [정답] 9 (출제자 : 12황성문)

[출제의도] 확률밀도함수를 이용하여 값을 구할 수 있는가?

[해설]

확률밀도함수의 정의된 구간 $[-3, 3]$내에서의 넓이가 1이므로

$\int_{-3}^{3}f(x)dx=1$인데 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\int_{0}^{3}f(x)dx=\frac{1}{2}$이다. 따라서 $\frac{k}{2}$를 구하면 된다.

$\int_{-3}^{3}\frac{1}{k}(|x|-3)^2dx=1$을 이용하여 k를 구하자.

$x\ge 0$일 때, $\int_{0}^{3}\frac{1}{k}(x-3)^2dx=\frac{1}{k}\int_{0}^{3}(x^2-6x+9)dx$

$=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_0^3$

$x<0$일 때, $\int_{-3}^{0}\frac{1}{k}(-x-3)^2dx=\frac{1}{k}\int_{-3}^{0}(x^2+6x+9)dx$

$=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x\right]_{-3}^0$

따라서 $\frac{1}{k}\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_0^3+\frac{1}{k}\left[\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x\right]_{-3}^0=1$

계산하면,

$\frac{1}{k}(9-27+27+9-27+27)=\frac{1}{k}\times 18=1$

$k=18$

$\therefore k\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\frac{1}{2}\times 18=9$

28) [정답] 3 (출제자 : 15이상민)

[출제의도] 등비수열의 합을 구할 수 있는가?

[해설]

$x=0$일 때는 두 함수의 y절편이 2^n이므로 정수 점의 개수는 2^n이고

x가 양수일 때는 다음과 같이

$x=1$ 일 때 2^{n-1}개

$x=2$ 일 때 2^{n-2}개

⋮

$x=n$ 일 때 2^0개

x가 n보다 클 때는 정수점이 존재하지 않으므로

정수 점의 개수는 공비가 2이고 초항이 1, 항의 개수가 n인 수열이다.

이 수열의 합은 $\frac{1(2^n-1)}{2-1}$

x가 음수일 때도 마찬가지이므로

x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는

$(2^n-1)\times 2+2^n=3\times 2^n-2$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{3\times 2^n-2}{2^n}=3$

29) [정답] 120 (출제자 : 10최원재)

[출제의도] 미분계수의 정의를 이해하고, 곱의 미분법을 적용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

[해설]

(가)조건에서 $f(1)=-2$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$의 값이 존재하므로

$f'(1)=k$라고 하자.

(나)조건에서 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 $x=1$에서의 접선의 기울기가 서로 수직이므로 $f'(1)\times g'(1)=-1$

즉, $g'(1)=-\frac{1}{k}$

함수 $g(x)=(-x+2)f(x)$에서 $g(1)=f(1)=-2$

함수 $g(x)$를 미분하면 $g'(x)=-f(x)+(-x+2)f'(x)$가 되고,

$g'(1)=2+f'(1)=2+k$, $g'(1)=-\frac{1}{k}$이므로,

$-\frac{1}{k}=2+k$를 정리하면 $k^2+2k+1=0$이다. 따라서 $k=-1$.

$g'(1)=1$, $g(1)=-2$이므로,

$y=g(x)$의 $x=1$에서의 접선의 방정식은

$y=1(x-1)-2=x-3$

따라서 $(6, 3)$을 지난다.

30) [정답] 54 (출제자 : 12양한솔, 14서재현)

[출제의도] 지수 함수의 개형을 알고 그래프를 파악할 수 있는가?

[해설]

$f(t+k)=-n^t+1+f(k)$ $(0<t\le 1)$ ⋯ ①

$f(k+t)=nt+f(k)$ $(0<t\le 1)$ ⋯ ② 라고 하자.

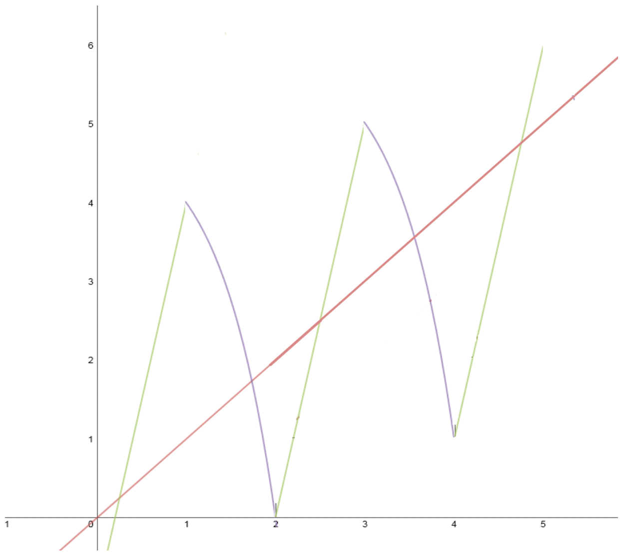
위 함수는 '식 ①'은 $0<t\le 1$에서 함숫값이 $n-1$만큼 감소하는 함수, '식 ②'는 $0<t\le 1$에서 함숫값이 n만큼 증가하는 함수이다.

$y=f(x)$와 $y=x$가 만나는 점의 개수를 최대가 되려면 함수 $f(x)$는 $0<x\le 1$에서 '식 ②'를 선택해야 한다. ('식 ①'을 선택하면 $0<x\le 1$에서 $f(x)$가 $y=x$와 만나지 않기 때문이다.)

$y=f(x)$와 $y=x$가 만나는 점의 개수를 최대가 되려면 정수 k에 대해서 구간 $(k, k+1]$에서의 함수 $y=f(x)$와 함수 $y=x$가 한번 씩 만나도록 해야 한다.

(‘식 ①’은 구간에서 증가함수, ‘식 ②’은 구간에서 감소함수이기 때문에, $y=x$ 와 최대 한번 만날 수밖에 없다.)

첫 번째에 ‘식 ②’, 감소함수를 선택하였기 때문에, 다음 구간에서는 ‘식 ①’을 선택해야 한다. 이런 식으로 ‘식 ①’과 ‘식 ②’을 번갈아가면서 선택해보면 다음과 같은 그래프가 그려진다.

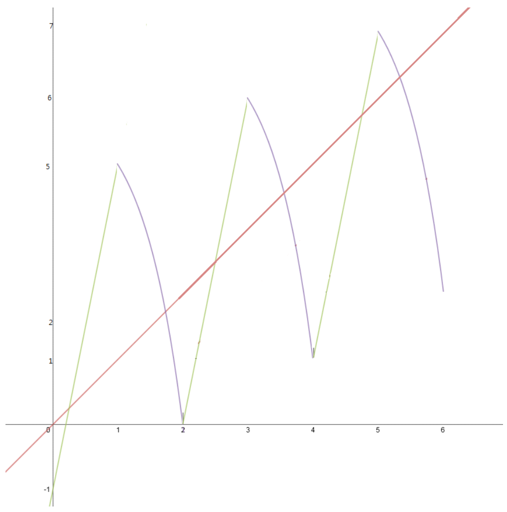


‘식 ①’은 구간에서 $n-1$ 만큼 감소하고, ‘식 ②’은 구간에서 n 만큼 증가하기 때문에, n 이 홀수일 때, 짝수일 때로 나누어 생각해 보자.

(i) n 이 짝수일 때

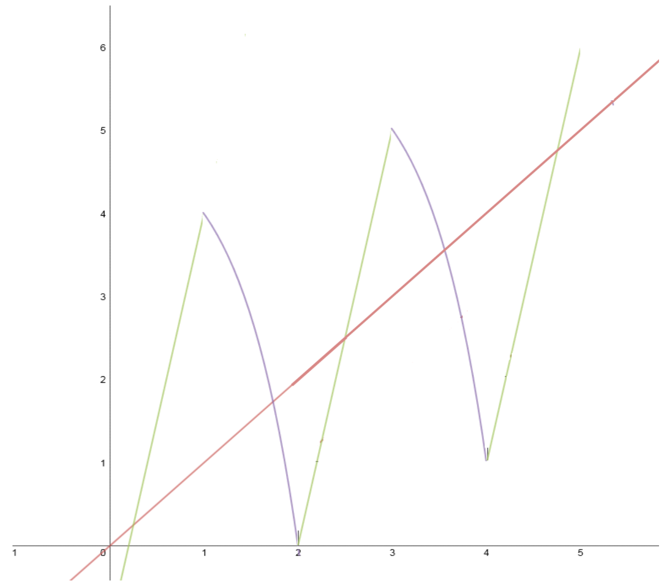
‘식 ②’와 ‘식 ①’을 번갈아가면서 사용하면, ‘식 ①’은 구간에서 $n-1$ 만큼 감소하고, ‘식 ②’은 구간에서 n 만큼 증가하기 때문에, 구간 두 번 동안 1 이 증가하게 된다. 또 시작점인 $f(0)=-1$ 이기 때문에 $(n,\ f(n))$ 은 $y=\frac{1}{2}x-1$ 직선 위에 있게 된다.

따라서 $a_8=3$ 이다.



(ii) n 이 홀수일 때

‘식 ②’과 ‘식 ①’을 번갈아 가면서 사용하지만 n 이 홀수 이면 마지막에 ‘식 ②’으로 끝나기 때문에 짝수일 때와 다른 방식으로 구해야 한다. $(0,\ -1)$에서 n 만큼 증가하면 $(1,\ n-1)$ 그다음 구간에서 $n-1$ 만큼 감소하면 $(2,\ 0)$이 되고 그다음 구간에서 n 만큼 증가하면 $(3,\ n)$이다. x 좌표가 1 에서 시작하여 2 씩 증가할 때 y 좌표는 1 씩 증가하므로, x 가 홀수일 때 $(1,\ n-1)$ 을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선, $y=\frac{1}{2}(x-3)+n$ 위에 $f(n)$ 이 존재한다. 따라서 $a_{13}=18$ 이다.



정답은 $a_8\times a_{13}=54$ 가 된다.

[별해]

직접좌표를 구해보는 것도 n 이 작을 때는 편리할 수 있다. ‘식 ②’을 사용하면 n 만큼 증가하고 ‘식 ①’을 사용하면 함숫값이 $n-1$ 만큼 감소한다. a_8 먼저구해보자. $(0,\ -1)$ 에서 ‘식 ②’을 사용하면 8 만큼 증가하므로 $(1,\ 7)$ 가 되고 ‘식 ①’을 사용하면 7 만큼이 감소하여 $(2,\ 0)$ 이 된다. 같은 방법으로 ‘식 ②’과 ‘식 ①’을 번갈아 사용 해보면 $(3,\ 8)$, $(4,\ 1)$, $(5,\ 9)$, $(6,\ 2)$, $(7,\ 10)$, $(8,\ 3)$이고, 즉 $a_8=3$ 이 된다.

같은 방법으로 a_{13} 을 구해보면

$(0,\ -1)$, $(1,\ 12)$, $(2,\ 0)$, $(3,\ 13)$, $(4,\ 1)$, $(5,\ 14)$, $(6,\ 2)$, $\cdots$, $(13,\ 18)$

즉 $a_{13}=18$ 따라서 $a_8\times a_{13}=54$ 이다.