#11

정답: 60

$|a_6| = a_8$에서 $-a_6 = a_8$이어야 하므로 $a_7 = 0$.

$a_n = d(n-7)$로 놓으면 $a_1 = -6d$, $a_6 = -d$에서

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_6}\right) = \frac{5}{6d^2} = \frac{5}{96};\quad d = 4.$$

$$\sum_{k=1}^{15} a_k = 15a_8 = 15d = 60.$$

#12

정답: ③

함수 $g(x)$는 $x = t$ 왼쪽에서 $f(x)$ 그대로, $x = t$ 오른쪽에서는 $(t, f(t))$에서 출발하여 기울기가 -1인 직선의 모양이다. $y = g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이가 최대가 되려면 직선이 $y = f(x)$에 접하는 형태가 되어야 하므로

$f'(t) = \dfrac{t^2 - 10t + 18}{3} = -1$에서 $t = 3,\ 7$이다. 이때 그래프의 개형을 적절히 그리면 $t = 3$이어야 한다는 것을 알 수 있다.

$$\int_0^3 f(x)dx = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{4}x^4 - 5x^3 + 27x^2\right]_0^3 = \frac{57}{4},$$

$f(3) = 6$이므로 구하는 넓이는

$$\int_0^3 f(x)dx + \frac{1}{2}\{f(3)\}^2 = \frac{57}{4} + 18 = \frac{129}{4}.$$

#13

정답: ①

$\overline{\mathrm{AC}} = 4$은 쉽게 구할 수 있다.

$S_1 = 3\sqrt{3}$이므로 $S_2 = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$이고, $\theta = \angle \mathrm{ADC}$이면

$S_2 = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AD}} \times \overline{\mathrm{CD}} \times \sin\theta = \dfrac{9}{2}\sin\theta = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$에서

$\sin\theta = \dfrac{5\sqrt{3}}{9}$. 사인법칙에 의하여 $R = \dfrac{2}{\sin\theta}$이므로

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{2}{\sin^2\theta} = \frac{54}{25}.$$

#14

정답: 51

함수 $2x^3 - 6x + 1$은 $x = -1$에서 극댓값 5, $x = 1$에서 극솟값 -3을 갖는다. 또한 $x = 2$에서 함숫값 5를 갖는다. 함수 $a(x-2)(x-b) + 9$는 이차함수이고, $y = 9$와 $x = 2,\ b$에서 만난다.

한편, $g(t)$가 $x = k$에서 연속이면

$$g(k) + \lim_{t \to k-} g(t) + \lim_{t \to k+} g(t) = 9\text{에서}$$

$$3g(k) = 9,\quad g(k) = 3$$

이므로, 조건을 만족시키는 k의 값이 하나뿐이려면, 삼차함수가 가로선과 세 점에서 만나도록 하는 모든 y값을 이차함수가 무조건 지나가야 한다. 즉 이차함수의 최솟값은 삼차함수의 극솟값 -3보다 작거나 같아야 한다. 이때 이차함수의 최솟값이 -3보다 작으면 조건을 만족시키는 k의 값이 없다.

따라서 이차함수의 최솟값은 -3이고,

이차함수는 $x = \dfrac{b+2}{2}$에서 최솟값을 가지므로

$$a\left(\frac{b}{2} - 1\right)\left(1 - \frac{b}{2}\right) + 9 = -\frac{1}{4}a(b-2)^2 + 9 = -3\text{에서}$$

$a(b-2)^2 = 48$. 두 수 a, b는 자연수이므로 (a, b)로 가능한 순서쌍은 $(48, 3)$, $(12, 4)$, $(3, 6)$.

$a + b$의 최댓값은 51이다.

#15

정답: □

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 자연수이므로 귀납적 정의를 살펴보면 모든 항이 자연수이다.

a_6이 짝수이면 $a_7 = \dfrac{1}{2}a_6$이고, $a_6 + a_7 = \dfrac{3}{2}a_6 = 3$에서

$a_6 = 2$이다. 한편, a_6이 홀수이면 $a_7 = 2^{a_6}$이고,

$a_6 + a_7 = a_6 + 2^{a_6} = 3$에서 $a_6 = 1$이다.

따라서 $a_6 = 1,\ 2$만이 가능하다.

a_{n+1}에서 a_n을 구할 때, a_n이 홀수이려면 a_{n+1}은 2의 홀수 거듭제곱이어야 한다. a_n이 짝수인 경우는 항상 가능하다. 따라서, 가능한 값을 모두 구하면

$a_5 \Rightarrow 2,\quad 1,\quad 4,$

$a_4 \Rightarrow 1,\quad 4,\quad 2,\quad 8,$

$a_3 \Rightarrow 2,\quad 8,\quad 1,\quad 4,\quad 3,\quad 16,$

$a_2 \Rightarrow 1,\ 4,\ 3,\ 16,\ 2,\ 8,\ 6,\ 32,$

$a_1 \Rightarrow 2,\ 8,\ 6,\ 32,\ 1,\ 4,\ 3,\ 16,\ 12,\ 5,\ 64$

가 가능하다. a_1의 값을 모두 합하면 153.

#19

정답: 32

$f(2+x)=f(2-x)=\cos\frac{\pi}{4}x$이므로,

$\cos^2\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{4}$, $\left|\cos\frac{\pi}{4}x\right|<\frac{1}{2}$.

$\left|\cos\frac{\pi}{4}x\right|$의 주기는 4이므로 첫 주기만 본다.

$\cos\frac{\pi}{4}x=\pm\frac{1}{2}$의 해는 첫 주기에서 $\frac{4}{3}$, $\frac{8}{3}$이고,

따라서 $\left|\cos\frac{\pi}{4}x\right|<\frac{1}{2}$의 정수해는 2뿐이다.

$2+6+10+14=32$.

확#28

정답: ④

8을 4개의 자연수로 분할하는 방법은

$1+1+3+3$,
$1+2+2+3$,
$2+2+2+2$

의 세 가지뿐이다. 확인한 수가 1이면 상자 B에 1개의 공이, 2 또는 3이면 2개의 공이, 4이면 3개의 공이 들어가므로,
각각의 분할의 확률은

$1+1+3+3$에서 $\dfrac{1^2\times 1^2\times {}_4\mathrm{C}_2}{4^4}=\dfrac{6}{4^4}$,

$1+2+2+3$에서 $\dfrac{1\times 2^2\times 1\times {}_4\mathrm{C}_2\times 2}{4^4}=\dfrac{48}{4^4}$,

$2+2+2+2$에서 $\dfrac{2^4}{4^4}=\dfrac{16}{4^4}$이다.

이러한 분할 중 검은 공의 개수가 2가 되도록 하는 것은 첫 번째 경우뿐이므로, 구하는 확률은

$$\frac{6}{6+48+16}=\frac{3}{35}.$$

확#29

정답: 196

c의 값으로 경우를 나누면, $c=k$일 때
$(a,\,b)$로 가능한 순서쌍의 개수는 k^2이고,
d로 가능한 값의 개수는 $7-k$이므로,
구하는 순서쌍의 개수는

$$\sum_{k=1}^{6}k^2(7-k)=7\times\frac{6\times7\times13}{6}-\left\{\frac{6\times7}{2}\right\}^2=196.$$

확#30

정답: 673

$\mathrm{P}(X\le 5t)\ge\dfrac{1}{2}$에서 $5t$는 X의 기댓값보다 커야 한다. 따라서 $5t\ge 1$에서 $t\ge\dfrac{1}{5}$이다. 한편,

$\mathrm{P}(t^2-t+1\le X\le t^2+t+1)=\mathrm{P}(t-1\le Z\le t+1)$은 길이가 2로 일정한 구간에서의 확률이므로, 구간의 중심이 정규분포의 중심과 최대한 가까울 때 최댓값을 가진다. (단, Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수)

구간의 중심은 t이고, 이것이 0과 가장 가까울 때는 $t=\dfrac{1}{5}$일 때이므로 $\mathrm{P}\left(-\dfrac{4}{5}\le Z\le\dfrac{6}{5}\right)$의 값을 구하면 $0.288+0.385=0.673$에서 $1000k=673$.

미#27

정답: ①

접선의 기울기를 m이라 놓으면, 접점의 x좌표는 $-\dfrac{1}{e^x}=m$에서 $x=-\ln(-m)$이다. 접선의 방정식이

$$y=m(x+\ln(-m))-m+e^t$$

이고 이 접선의 방정식에 $(0,\,0)$을 대입하면

$$0=m\ln(-m)-m+e^t,$$

$f(a)=m=-e\sqrt{e}$이면 $e^a=\dfrac{e\sqrt{e}}{2}$이다. 한편 e^t를 넘기고 양변을 미분하면

$$e^t\,dt=-\ln(-m)\,dm$$

에서 $f'(t)=\dfrac{dm}{dt}=\dfrac{e^t}{-\ln(-m)}$이다.

$$f'(a)=\frac{e^a}{-\ln(e\sqrt{e})}=-\frac{e\sqrt{e}}{3}.$$

미#28

정답: ②

$f(x)$는 $(-\infty,\,0]$에서 감소한다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이고 모든 양수 t에 대하여 $f(x)=t$의 실근이 두 개이므로 $f(x)$의 $x\ge 0$에서의 개형은 $y=0$인 부분과 증가하는 부분으로 이루어진다. $2g(t)+h(t)=k$를 해석해보면 $\lim\limits_{t\to0+}g(t)=0$이므로 $\lim\limits_{t\to0+}h(t)=k$여야 하고, $y=0$인 부분이 $x=k$까지 이어져야 한다.

$\displaystyle\int_0^7 f(x)dx=e^4-1$인데, 이는 k부터 7까지 $f(x)$를 적분한 것이다. 한편 $h(t)=k-2g(t)$에서 $f(x)$의 $x\ge k$인 부분은 $f(x)$의 $x\le 0$인 부분을 x축의 방향으로 “두 배 늘린” 모양이다. 따라서,

$f(x)$를 $k\le x\le 7$에서 적분한 것은,
$f(x)$를 $-\dfrac{7-k}{2}\le x\le 0$에서 적분한 것의 2배

가 된다. $-\dfrac{7-k}{2}=\alpha$라 두면,

$$\int_\alpha^0 f(x)dx=\frac{e^4-1}{2}$$

이다. 치환적분으로 해결하면 $\alpha=-1$이므로 $k=5$.

$$f(8)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=6e^9,\quad f(9)=f(-2)=8e^{16}.$$

따라서 $\dfrac{f(9)}{f(8)}=\dfrac{4}{3}e^7$.

미#29

정답: 162

$\{a_n\}$의 공비를 r, $\{b_n\}$의 공비를 s라 하면,

$\dfrac{a_1b_1}{1-rs}=\dfrac{a_1}{1-r}\times\dfrac{b_1}{1-s}$에서 $1-rs=(1-r)(1-s)$.

정리하면 $2rs-r-s=0$이다.

$\{|a_n|\}$의 공비는 $|r|$이다. $|r|=k$라 놓으면

$3\times\dfrac{|a_1|k}{1-k^2}=7\times\dfrac{|a_1|k^2}{1-k^3}$이므로

$$3(1+k+k^2)=7k(1+k),$$

$$4k^2+4k-3=0,\quad (2k+3)(2k-1)=0,$$

$k=\dfrac{1}{2}$이어야만 한다. $r=\pm\dfrac{1}{2}$을 $2rs-r-s=0$에

대입하면 $r=\dfrac{1}{2}$은 모순, $r=-\dfrac{1}{2}$이면 $s=\dfrac{1}{4}$.

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(s^{n-1}+s^{2n+1})$$

$$=\frac{1}{1-s}+\frac{s^3}{1-s^2}=\frac{4}{3}+\frac{1}{60}=\frac{27}{20}.$$

미#30

정답: ㅁ

$|x|$의 부정적분이 $\dfrac{1}{2}x|x|$임을 기억하면,

$f'(x)=|\sin x|\cos x$에서 $f(x)=\dfrac{1}{2}|\sin x|\sin x$이다.

함수 $h(x)=\displaystyle\int_0^x\{f(t)-g(t)\}dt$를 미분해보면

$y=f(x)$와 $y=g(x)$의 접점 $x=a$에서 극대 또는 극소가 된다는 것은, $x=a$에서의 접선 $y=g(x)$에 함수 $y=f(x)$가 접하면서 통과해야 한다는 뜻이 된다. (접하면서 튕기면 극대, 극소가 될 수 없다.)

이제 $y=f(x)$의 그래프를 대강 그려보고 째려보면, 접하면서 통과할 수 있는 변곡점의 위치가

$$0<a_1<\frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{2}<a_2<\pi,\quad a_3=\pi,$$

$$\pi<a_4<\frac{3\pi}{2},\quad \frac{3\pi}{2}<a_5<2\pi,\quad a_6=2\pi,\ \cdots$$

임을 알 수 있다. $x=a_2$에서 $y=f(x)$가 변곡점을 가지므로, $y=\dfrac{1}{2}\sin^2x$도 변곡점을 가져야 한다.

미분을 두 번 해 보면, $y'=\sin x\cos x$,

$y''=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1=0$에서

$\cos x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이고, $\dfrac{\pi}{2}<a_2<\pi$이므로 $a_2=\dfrac{3\pi}{4}$.

$$\frac{100}{\pi}(a_6-a_2)=\frac{100}{\pi}\left(2\pi-\frac{3}{4}\pi\right)=125.$$

기#27

정답: ③

포물선의 정의를 쓰려면 당연히 포물선 위의 모든 점에서 준선에 수선의 발을 내린다. C, D, F에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 C′, D′, F′이라 하면, △BCC′과 △BDD′의 1:2 닮음에 의하여 $\overline{CC'}:\overline{DD'}=1:2$이다. 따라서 $\overline{CC'}:\overline{BC}=1:3$이므로 삼각비를 이용하면 $\overline{FF'}=4$에서 $\overline{BF'}=8\sqrt{2}$이다.

점 A의 y좌표가 $8\sqrt{2}$이므로 x좌표는 16이고, 점 D의 y좌표는 $-4\sqrt{2}$로 구할 수 있다.

$$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times18\times12\sqrt{2}=108\sqrt{2}.$$

기#28

정답: ⑤

문제만 복잡하고 개념은 쉽다.

점 H를 중심으로 하는 원이 선분 AB와 접하는 점을 T라 하자. $\overline{HT}=4$에서 삼각비에 의하여 $\overline{HF}=8$을 얻는다. 또한 $\overline{HQ}=4$이므로 $\overline{FQ}=12$. 타원의 정의에 의하여 $\overline{F'Q}=6$이어야 하고, $\angle QFF'=\dfrac{\pi}{6}$을 고려할 때 $\angle QF'F$는 직각이다.

선분 AB의 중점 M에 대하여, $\overline{FF'}=6\sqrt{3}$, $\overline{FM}=3\sqrt{3}$, $\overline{FT}=4\sqrt{3}$이므로 $\overline{MT}=\sqrt{3}$이다.

주의를 평면 α에 국한하면 $\overline{MP}=9$ (원의 반지름), $\overline{MT}=\sqrt{3}$, $\angle PTM$은 직각이므로 $\overline{PT}=\sqrt{78}$.

평면 α와 β가 이루는 각 θ는 $\angle PTH$이므로

$$\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{78}}=\frac{2\sqrt{78}}{39}.$$

기#29

정답: 11

경우를 잘만 나누면 된다.
삼각형 PF′F가 이등변삼각형일 때는 두 가지 경우가 있다. $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{FF'}}$이거나 $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}$.
($\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PF'}}$인 경우는 당연히 불가능하다!)

전자의 경우 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{FF'}}=2c$, $\overline{\mathrm{PF'}}=2c+6$이다.
$\overline{\mathrm{F'Q}}=d$라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{QF}}=d+6$이고, $\overline{\mathrm{PQ}}=2c+6-d$이므로 삼각형 PQF의 둘레의 길이는

$$2c+(d+6)+(2c+6-d)=4c+12=28$$

에서 $c=4$.

후자의 경우 $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}=2c$, $\overline{\mathrm{PF}}=2c-6$이다.
$\overline{\mathrm{F'Q}}=d$라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{QF}}=d+6$이고, $\overline{\mathrm{PQ}}=2c-d$이므로 삼각형 PQF의 둘레의 길이는

$$(2c-6)+(d+6)+(2c-d)=4c=28$$

에서 $c=7$.

기#30

정답: 147

점 P, Q, R은 원 위를 움직이는 점이므로, 조건 (나)를 해석할 때 각 벡터에 원의 중심을 끼워넣는 것은 필수적이다. 즉,

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PD}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\overrightarrow{\mathrm{QE}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{RA}}=\overrightarrow{\mathrm{RF}}+\overrightarrow{\mathrm{FA}}$$

이고, 대칭성에 의하여 $\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}}+\overrightarrow{\mathrm{FA}}=\vec{0}$이다.

나머지 벡터를 더하면

$$\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{PD}}+\overrightarrow{\mathrm{QE}}+\overrightarrow{\mathrm{RF}}$$

이므로 최대는 세 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{QE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{RF}}$가 방향이 일치할 때 일어난다. 이때 삼각형 PQR을 $\overrightarrow{\mathrm{PD}}$의 역벡터만큼 평행이동하면 삼각형 DEF와 같고, 넓이는 쉽게 $\dfrac{7\sqrt{3}}{4}$로 구할 수 있다.