제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\sqrt[3]{24} \times 3^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$2 \times 3 = 6$

2. 함수 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

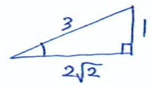
$f'(x) = 6x^2 - 10x$

$f'(2) = 24 - 20 = 4$

3. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$인 θ에 대하여 $\sin(-\theta) = \frac{1}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\sin\theta = -\frac{1}{3}$



$\tan\theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & (x < 2) \\ x^2 + a & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$6 - a = 4 + a$

$a = 1$

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x(x-2),\quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=3x^2-6x$

$f(x)=x^3-3x^2+8$

$f(2)=8-12+8=4$

6. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_4-S_2=3a_4,\quad a_5=\frac{3}{4}$$

일 때, a_1+a_2의 값은? [3점]

① 27 ② 24 ③ 21 ④ 18 ⑤ 15

$a_3+a_4=3a_4 \Rightarrow a_4=\frac{1}{2}a_3 \Rightarrow r=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{3}{4}\times 2^4+\frac{3}{4}\times 2^3=12+6=18$

7. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, α와 β는 상수이다.) [3점]

① -4 ② -1 ③ 2 ④ 5 ⑤ 8

$f'(x)=x^2-4x-12=0 \Rightarrow x=-2, 6$

$\therefore 6-(-2)=8$

8. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$$

를 만족시킬 때, $\int_{-2}^{2} f(x)dx$의 값은? [3점]

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

$(x-1)f(x)=3x(x-1)(x^2+x+1)$

$f(x)=3x^3+3x^2+3x$

$\therefore\ 2\int_0^2 3x^2\,dx=16$

9. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1일 때, 4^m의 값은? (단, m은 $0<m<1$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

$m\log_5 12+(1-m)\log_5 3=1$

$12^m\times 3^{1-m}=5$

$\therefore\ 4^m=\frac{5}{3}$

10. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도가 각각

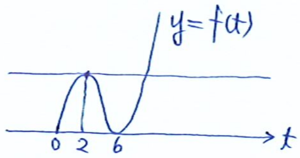
$$v_1(t)=t^2-6t+5,\quad v_2(t)=2t-7$$

이다. 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[0,a]$에서 증가하고, 구간 $[a,b]$에서 감소하고, 구간 $[b,\infty)$에서 증가한다. 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0<a<b$) [4점]

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{17}{2}$ ③ $\frac{19}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{23}{2}$

$f(t)=|x_1(t)-x_2(t)|$

$x_1'(t)-x_2'(t)=v_1(t)-v_2(t)=t^2-8t+12=(t-2)(t-6)$



$a=2,\ b=6$

$\therefore\ S=\int_2^6|2t-7|\,dt=\frac{9}{4}+\frac{25}{4}=\frac{17}{2}$

11. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$|a_6| = a_8, \quad \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은? [4점]

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

$-a_6 = a_8 \geq 0 \Rightarrow a_7 = 0 \Rightarrow a_n = d(n-7)$

$\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\frac{5}{96}$

$\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_6}\right)=\frac{5}{96}$

$\frac{5}{a_1 a_6}=\frac{5}{96}$

$(-6d)(-d)=96 \Rightarrow d^2=16 \Rightarrow d=4$

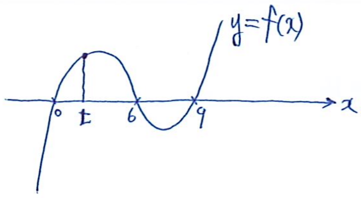
$\therefore a_n=4(n-7) \Rightarrow 15a_8=15\times 4=60$

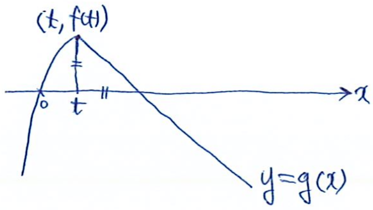
12. 함수 $f(x) = \frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 $t\,(0 < t < 6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < t) \\ -(x-t)+f(t) & (x \geq t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y = g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은? [4점]

① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$ ④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$





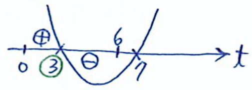
$S=\int_0^t f(x)\,dx+\frac{1}{2}\{f(t)\}^2 \quad (0<t<6)$

$S'=f(t)+f(t)f'(t)=f(t)\{f(t)+1\}=0$

⊕

$f(x)=\frac{1}{9}(x^3-15x^2+54x)$

$f'(t)=\frac{1}{3}(t^2-10t+18)=-1 \Rightarrow t^2-10t+21=0$



$\therefore S=\int_0^3 \frac{1}{9}(x^3-15x^2+54x)\,dx+\frac{1}{2}\{f(3)\}^2$

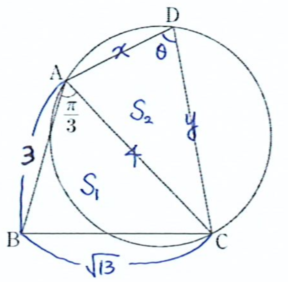
$=\frac{9}{4}-15+27+18=\frac{129}{4}$

13. 그림과 같이

$$\overline{\mathrm{AB}}=3,\quad \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{13},\quad \overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}=9,\quad \angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

$S_2=\frac{5}{6}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle\mathrm{ADC})}$의 값은? [4점]



$xy=9$

① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$ ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

$\overline{AC}=a$: $13=a^2+9-3a \Rightarrow a^2-3a-4=0$

$\therefore \overline{AC}=4$

$\frac{1}{2}xy\sin\theta=\frac{5}{6}\times 6\sin\frac{\pi}{3}$

$9\sin\theta=5\sqrt{3}$

$\sin\theta=\frac{5\sqrt{3}}{9}=\frac{4}{2R}$

$\therefore \frac{R}{\sin\theta}=\frac{18}{5\sqrt{3}}\times\frac{9}{5\sqrt{3}}=\frac{54}{25}$

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}2x^3-6x+1 & (x\le 2)\\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2)\end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

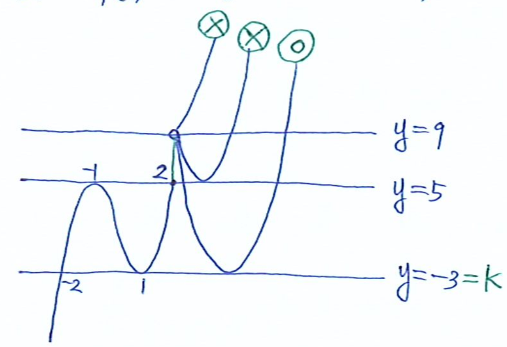
$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

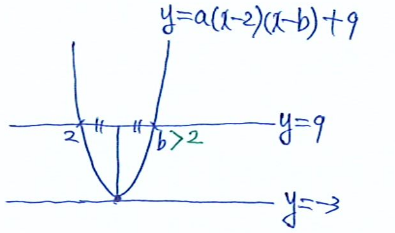
$g(k)+g(k-)+g(k+)=9$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

$x<2$: $f'(x)=6x^2-6=0 \Rightarrow x=-1, 1$





$a\left(\frac{b-2}{2}\right)^2=12 \Rightarrow a(b-2)^2=48=1^2\times 48$

$=2^2\times 12$

$=4^2\times 3$

a	b-2	b	a+b
48	1	3	51
48	-1	1	49 (X)
12	2	4	16
3	4	6	9

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

a_n : 자연수

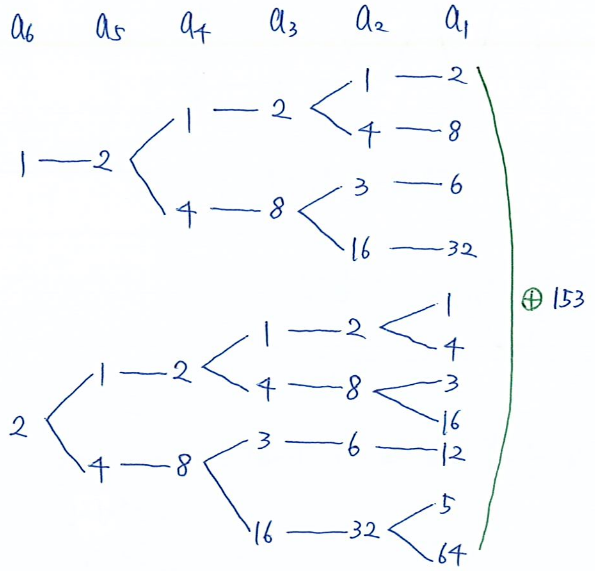
를 만족시킬 때, $a_6 + a_7 = 3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153 ④ 160 ⑤ 167

i) a_6이 홀수 : $a_7 = 2^{a_6} \Rightarrow a_6 + 2^{a_6} = 3 \Rightarrow a_6 = 1$

ii) a_6이 짝수 : $a_7 = \frac{1}{2}a_6 \Rightarrow a_6 + \frac{1}{2}a_6 = 3 \Rightarrow a_6 = 2$

$$a_n = \begin{cases} \log_2 a_{n+1} & (a_n : \text{홀}) \\ 2a_{n+1} & (a_n : \text{짝}) \end{cases}$$



※ $a_6 + a_7 = 3 \Rightarrow (a_6, a_7) = (1, 2), (2, 1)$

단답형

16. 방정식 $3^{x-8} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

2

$x - 8 = -3x$

$x = 2$

17. 함수 $f(x) = (x+1)(x^2+3)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

8

$f'(x) = (x^2+3) + (x+1)2x$

$f'(1) = 4 + 4 = 8$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10}(2b_k-1), \quad \sum_{k=1}^{10}(3a_k+b_k)=33$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값을 구하시오. [3점] 9

$$\begin{cases} a=2b-10 \\ 3a+b=33 \end{cases}$$

$\therefore\ b=9$

19. 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$라 할 때, $0<x<16$에서 부등식

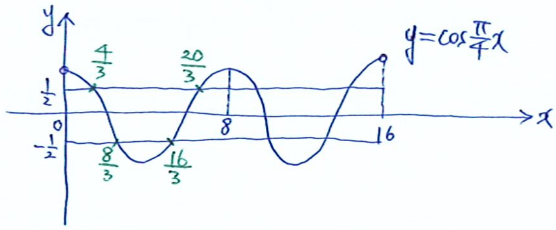
$$f(2+x)f(2-x)<\frac{1}{4}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점] 32

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)<\frac{1}{4}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{4}$$

$\therefore\ -\frac{1}{2}<\cos\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{2}$ (주기 : 8)



$\frac{\pi}{4}x=\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ \sim$

+8

$\therefore\ x=2,\ 6,\ 10,\ 14 \Rightarrow$ (합) $=32$

+8

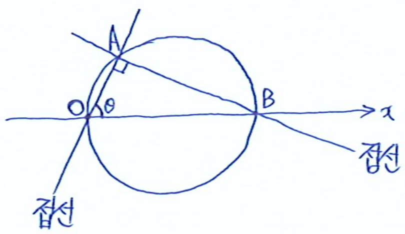
20. $a>\sqrt{2}$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=-x^3+ax^2+2x$$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0, 0)$에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오. [4점] 25

$f'(x)=-3x^2+2ax+2$

근과 계수 : $0+0+ⓢ=a \Rightarrow A(a, 2a)$



$f'(0)\times f'(a)=-1 \Rightarrow 2(2-a^2)=-1 \Rightarrow a^2=\frac{5}{2}$

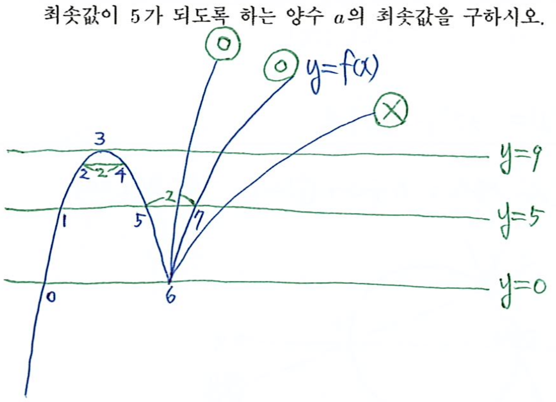
$$\begin{cases} \overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{5}a \\ \overline{\mathrm{AB}}=2\,\overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{5}a \end{cases}$$

$\therefore\ 10a^2=25$

21. 양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & (-1 \leq x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \geq 6) \end{cases}$$

이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점] 10

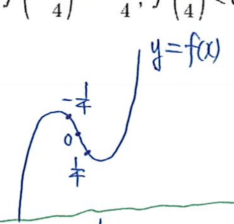


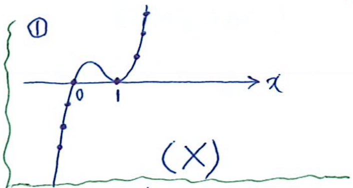
$f(7)=\frac{1}{2}a \geq 5 \Rightarrow a \geq 10$

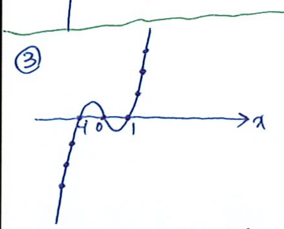
22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

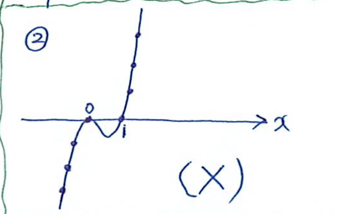
> 함수 $f(x)$에 대하여
>
> $f(k-1)f(k+1)<0$
>
> 을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4},\ f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점] 483

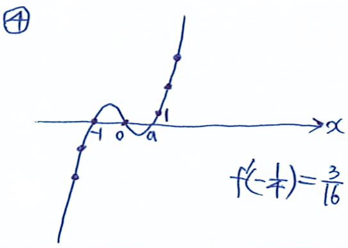




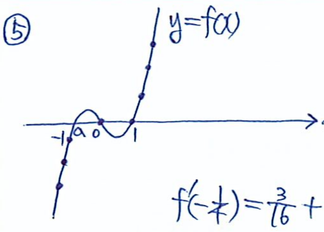




$f(x)=x^3-x \Rightarrow f'(x)=3x^2-1$ (X)



$f(x)=x(x+1)(x-a)\ (0<a<1)$
$=x^3+(1-a)x^2-ax$
$f'(x)=3x^2+2(1-a)x-a$
$f'(-\frac{1}{4})=\frac{3}{16}-\frac{a+1}{2}=-\frac{1}{4} \Rightarrow a=-\frac{1}{8}$ (X)



$f(x)=x(x-1)(x-a)\ (-1<a<0)$
$=x^3-(a+1)x^2+ax$
$f'(x)=3x^2-2(a+1)x+a$
$f'(-\frac{1}{4})=\frac{3}{16}+\frac{3a+1}{2}=-\frac{1}{4} \Rightarrow a=-\frac{5}{8}$ (O)

$\therefore f(x)=x(x-1)(x+\frac{5}{8}) \Rightarrow f(8)=8\times7\times\frac{69}{8}=483$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시 수학 영역(확률과 통계) 홀수형

5지선다형

23. 5개의 문자 x, x, y, y, z를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

$\frac{5!}{2!2!} = 30$

24. 두 사건 A, B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}(A^C) = 2\mathrm{P}(A)$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

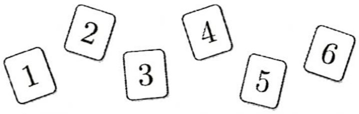
① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

$1-2a=a \Rightarrow a=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}b=\frac{1}{4} \Rightarrow b=\frac{3}{4}$

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 10 이하가 되도록 카드가 놓일 확률은? [3점]

① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{19}{30}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{14}{15}$



여사건 : (합) ≥ 11 ⇒ 5, 6

$\therefore 1-\frac{2!\times4!}{6!}=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$

26. 4개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 나오는 동전의 개수를 확률변수 X라 하고, 이산확률변수 Y를

$$Y=\begin{cases} X & (X\text{가 } 0 \text{ 또는 } 1\text{의 값을 가지는 경우}) \\ 2 & (X\text{가 } 2 \text{ 이상의 값을 가지는 경우}) \end{cases}$$

라 하자. $\mathrm{E}(Y)$의 값은? [3점]

① $\frac{25}{16}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{27}{16}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{29}{16}$

Y	0	1	2
P(Y)	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{11}{16}$

$E(Y)=\frac{4+22}{16}=\frac{26}{16}=\frac{13}{8}$

27. 정규분포 $N(m,\ 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 49인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le \frac{6}{5}a$이다. $\overline{x}$의 값은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 15.2 ② 15.4 ③ 15.6 ④ 15.8 ⑤ 16.0

$$\frac{1}{5}a = 2 \times 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{49}}$$

$$\therefore \overline{x} = \frac{11}{10}a = \frac{11}{10} \times \frac{10 \times 5 \times 1.96}{7}$$

$$= 11 \times 5 \times 0.28$$

$$= 11 \times 1.4$$

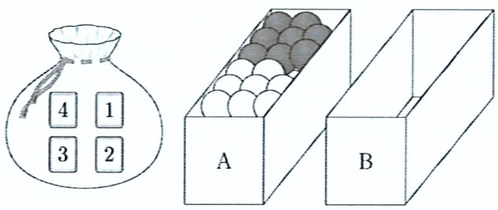
$$= 15.4$$

28. 하나의 주머니와 두 상자 A, B가 있다. 주머니에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있고, 상자 A에는 흰 공과 검은 공이 각각 8개 이상 들어 있고, 상자 B는 비어 있다. 이 주머니와 두 상자 A, B를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어
> 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는다.
>
> 확인한 수가 1이면
> 상자 A에 있는 흰 공 1개를 상자 B에 넣고,
>
> 확인한 수가 2 또는 3이면
> 상자 A에 있는 흰 공 1개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣고,
>
> 확인한 수가 4이면
> 상자 A에 있는 흰 공 2개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8일 때, 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{70}$ ② $\frac{2}{35}$ ③ $\frac{1}{14}$ ④ $\frac{3}{35}$ ⑤ $\frac{1}{10}$



$A\left(\frac{1}{4}\right) : (1, 0)$

$B\left(\frac{1}{2}\right) : (1, 1)$

$C\left(\frac{1}{4}\right) : (2, 1)$

$$\begin{cases} a+b+c=4 \\ a+2b+3c=8 \end{cases}$$

$$b+2c=4$$

a	b	c	검
2	0	2	2
1	2	1	3
0	4	0	4

$$\therefore \frac{{}_4C_2\left(\frac{1}{4}\right)^4}{{}_4C_2\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \frac{4!}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{3}{35}$$

단답형

29. 다음 조건을 만족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점] 196

$a \le c \le d$이고 $b \le c \le d$이다.

$c=1 : 6 \times 1^2 = 6$

$c=2 : 5 \times 2^2 = 20$

$c=3 : 4 \times 3^2 = 36$

$c=4 : 3 \times 4^2 = 48$

$c=5 : 2 \times 5^2 = 50$

$c=6 : 1 \times 6^2 = 36$

⊕ 196

※ $a=b \le c \le d : {}_6\mathrm{H}_3 = 56$

$a<b \le c \le d : {}_8\mathrm{C}_4 = 70$

$b<a \le c \le d : {}_8\mathrm{C}_4 = 70$

⊕ 196

30. 양수 t에 대하여 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(1, t^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X \le 5t) \ge \frac{1}{2}$$

이 되도록 하는 모든 양수 t에 대하여 $\mathrm{P}(t^2 - t + 1 \le X \le t^2 + t + 1)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점] 673

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

$$Z = \frac{X-1}{t}$$

$\mathrm{P}\left(Z \le \frac{5t-1}{t}\right) \ge \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5t-1}{t} \ge 0 \Rightarrow t \ge \frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(t-1 \le Z \le t+1) \Rightarrow$ (중앙값)$=t$

$t = \frac{1}{5} : \mathrm{P}(-0.8 \le Z \le 1.2) = 0.673 = k$

※ $\mathrm{P}(X \le 5t) \ge \frac{1}{2} \Rightarrow 5t \ge 1 \Rightarrow t \ge \frac{1}{5}$

＊ 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. ○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

24. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x = \ln(t^3+1), \quad y = \sin \pi t$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}\pi$ ② $-\frac{2}{3}\pi$ ③ $-\pi$ ④ $-\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $-\frac{5}{3}\pi$

$y' = \frac{\pi \cos \pi t}{\frac{3t^2}{t^3+1}} = \frac{-\pi}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\pi$

25. 양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이고, $g'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.
모든 양수 a에 대하여

$$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}\,dx = 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$$

이고 $f(1)=8$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

$g(f(x)) = x \Rightarrow g'(f(x))f'(x) = 1$

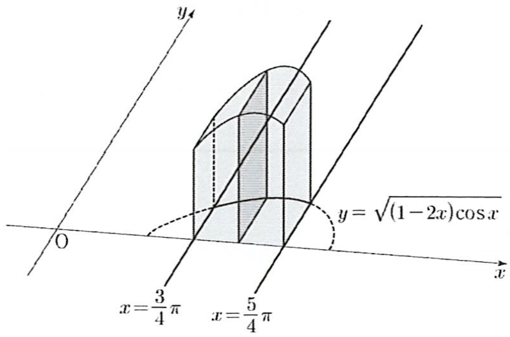
$\int_1^a \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left[\ln|f(x)|\right]_1^a = \ln|f(a)| - \ln|f(1)|$

$a=2$: $\ln f(2) - \ln 8 = 2\ln 2 + \ln 3 - \ln 2$

$\therefore f(2) = 2\times3\times8 = 48$

※ $y=f(x) \Rightarrow x>0,\ y>0$

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{(1-2x)\cos x}$ $\left(\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi\right)$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}\pi-1$ ③ $2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}\pi-1$ ⑤ $2\sqrt{2}\pi$

$V = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(1-2x)\cos x\,dx$ $\left(\begin{matrix}\cos x & 1-2x \\ \sin x & -2\end{matrix}\right)$

$= \left[(1-2x)\sin x - 2\cos x\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}$

$= 2\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}$

※ $f(h(t))=f(\underbrace{g(t)}_{\ominus})=f\left(\underbrace{\frac{k-h(t)}{2}}_{\ominus}\right)=2\{h(t)-k\}e^{\{h(t)-k\}^2}$ (단, $h(t)>k$)

$\therefore f(x)=2(x-k)e^{(x-k)^2}$ (단, $x>k$)

27. 실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$ ② $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$ ③ $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$ ④ $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$ ⑤ $-e\sqrt{e}$

$y=e^{-x}+e^t \Rightarrow y'=-e^{-x}$

$(0,0)$, $(s, e^{-s}+e^t)$

$f(t)=\frac{e^{-s}+e^t}{s}=-e^{-s} \Rightarrow (s+1)e^{-s}+e^t=0$

$t=a: -e^{-s}=-e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow s=-\frac{3}{2},\ e^a=\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$

$f'(t)=e^{-s}\times\frac{ds}{dt}$

$-se^{-s}s'+e^t=0 \Rightarrow s'=\frac{e^{s+t}}{s}$

$\therefore f'(a)=e^{\frac{3}{2}}\times\frac{e^{-\frac{3}{2}}\times\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$

28. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이고, $x<0$일 때 $f(x)=-4xe^{4x^2}$이다.
모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자.
두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여

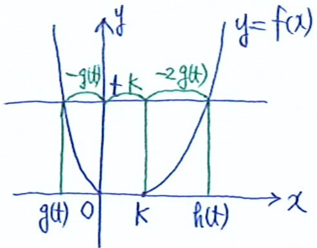
$$2g(t)+h(t)=k\ (k\text{는 상수})$$

$f(g(t))=f(h(t))=t$

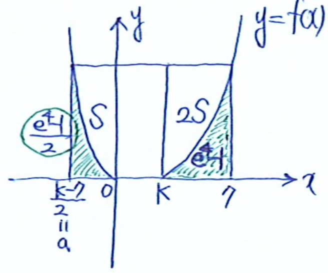
를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x)\,dx=e^4-1$일 때, $\frac{f(9)}{f(8)}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}e^5$ ② $\frac{4}{3}e^7$ ③ $\frac{5}{4}e^9$ ④ $\frac{6}{5}e^{11}$ ⑤ $\frac{7}{6}e^{13}$

$\lim_{t\to 0+} g(t)=0 \Rightarrow \lim_{t\to 0+} h(t)=k$



$h(t)=k-2g(t)$



$\int_a^0 (-4xe^{4x^2})\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{4x^2}\right]_0^a=\frac{1}{2}\left(e^{4a^2}-1\right)=\frac{e^4-1}{2}$

$\therefore a=-1 \Rightarrow k=5: 2g(t)+h(t)=5 \Rightarrow g(t)=\frac{5-h(t)}{2}$

$\therefore \frac{f(9)}{f(8)}=\frac{f(-2)}{f(-\frac{3}{2})}=\frac{2e^{16}}{\frac{3}{2}e^9}=\frac{4}{3}e^7$

※ $-4g(t)e^{4\{g(t)\}^2}=f(\underbrace{k-2g(t)}_{x}) \Rightarrow g(t)=\frac{k-x}{2}<0$

$\therefore f(x)=2(x-k)e^{(x-k)^2}$ (단, $x>k$)

$\int_0^7 f(x)\,dx=\int_k^7 2(x-k)e^{(x-k)^2}\,dx=\left[e^{(x-k)^2}\right]_k^7=e^{(7-k)^2}-1=e^4-1$

$\therefore k=5: f(x)=2(x-5)e^{(x-5)^2}$ (단, $x>5$) $\Rightarrow \frac{f(9)}{f(8)}=\frac{8e^{16}}{6e^9}=\frac{4}{3}e^7$

단답형

29. 첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right),$$

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$$

이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1} + b_{3n+1}}{b_n} = S$일 때, $120S$의 값을 구하시오. [4점] 162

$$\begin{cases} \frac{ab}{1-rs} = \frac{a}{1-r} \times \frac{b}{1-s} \Rightarrow 2rs = r+s \\ 3 \times \frac{|ar|}{1-|r|^2} = 7 \times \frac{|ar^2|}{1-|r|^3} \Rightarrow \frac{3}{1-r^2} = \frac{7|r|}{1-|r|^3} \end{cases}$$

i) $0<r<1$: $7r(\cancel{1-r})(1+r) = 3(\cancel{1-r})(1+r+r^2)$

$4r^2+4r-3=0 \Rightarrow r=\frac{1}{2}$: $s=\frac{1}{2}+s$ (X)

$2r \quad +3$
$2r \quad -1$

ii) $-1<r<0$: $-7r(1-r)(\cancel{1+r}) = 3(\cancel{1+r})(1-r+r^2)$

$4r^2-4r-3=0 \Rightarrow r=-\frac{1}{2}$: $-s=-\frac{1}{2}+s \Rightarrow s=\frac{1}{4}$

$2r \quad -3$
$2r \quad +1$

$\therefore \frac{1}{1-s} + \frac{s^3}{1-s^2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{60} = \frac{81}{60} = S$

※ $a_n = ar^{n-1} \Rightarrow |a_n| = |a| \times |r|^{n-1}$

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 (연속)

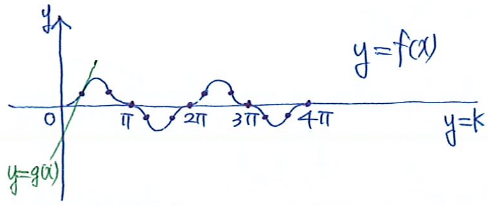
$$f'(x) = |\sin x| \cos x = \begin{cases} \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x & (\sin x \geq 0) \\ -\sin x \cos x = -\frac{1}{2}\sin 2x & (\sin x \leq 0) \end{cases}$$

이다. 양수 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 함수

$$h(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\}dt \Rightarrow h'(x) = f(x) - g(x)$$

가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\frac{100}{\pi} \times (a_6 - a_2)$의 값을 구하시오. [4점] 125

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin^2 x + k & (\sin x \geq 0) \\ -\frac{1}{2}\sin^2 x + k & (\sin x \leq 0) \end{cases}$$



$x=a$: 변곡점

$$f''(x) = \begin{cases} \cos 2x & (\sin x > 0) \\ -\cos 2x & (\sin x < 0) \end{cases}$$

$a_1 = \frac{\pi}{4}$, $a_2 = \frac{3}{4}\pi$, $a_3 = \pi$, $a_4 = \frac{5}{4}\pi$, $a_5 = \frac{7}{4}\pi$, $a_6 = 2\pi$

$\therefore \frac{100}{\pi} \times \frac{5\pi}{4} = 125$

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

23. 좌표공간의 두 점 A$(a, -2, 6)$, B$(9, 2, b)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 $(4, 0, 7)$일 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$a=-1$, $b=8$

24. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(\sqrt{3}, -2)$에서의 접선의 기울기는? (단, a는 양수이다.) [3점]

① $\sqrt{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{5}$

$\frac{3}{a^2}+\frac{2}{3}=1 \Rightarrow a=3$

$\frac{\sqrt{3}x}{9}-\frac{y}{3}=1 \Rightarrow m=\frac{\sqrt{3}}{3}$

25. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$|\vec{a}| = \sqrt{11}, \quad |\vec{b}| = 3, \quad |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{17}$$

일 때, $|\vec{a} - \vec{b}|$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$4 \times 11 + 9 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} = 17 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 9$

$\therefore \sqrt{11+9-18} = \sqrt{2}$

26. 좌표공간에 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 서로 다른 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 할 때,

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} = 6$$

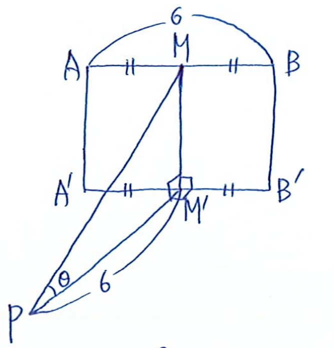
이다. 선분 AB의 중점 M의 평면 α 위로의 정사영을 M′이라 할 때,

$$\overline{PM'} \perp \overline{A'B'}, \quad \overline{PM'} = 6$$

이 되도록 평면 α 위에 점 P를 잡는다.

삼각형 A′B′P의 평면 ABP 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 선분 PM의 길이는? [3점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

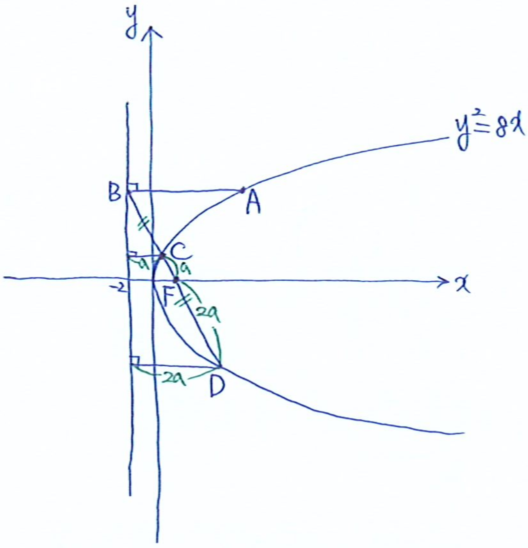


$\cos\theta = \frac{\frac{9}{2}}{18} = \frac{1}{4}$

$\therefore \overline{PM} = 6 \times 4 = 24$

27. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 한 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 직선 BF와 포물선이 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{BC}=\overline{CD}$일 때, 삼각형 ABD의 넓이는? (단, $\overline{CF}<\overline{DF}$이고, 점 A는 원점이 아니다.) [3점]

① $100\sqrt{2}$ ② $104\sqrt{2}$ ③ $108\sqrt{2}$
④ $112\sqrt{2}$ ⑤ $116\sqrt{2}$

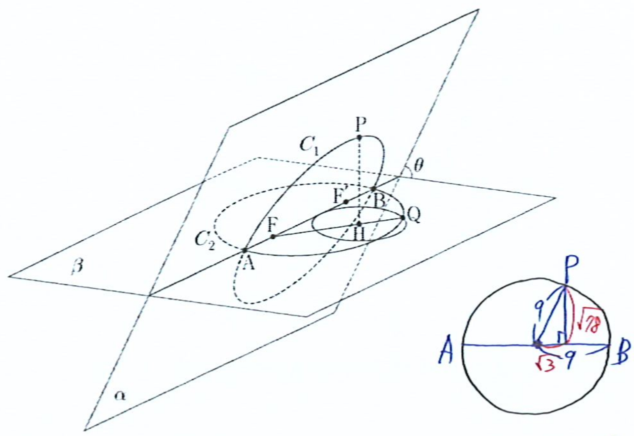


$\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}=\frac{1}{2} \Rightarrow a=3$

$C(1, 2\sqrt{2})$, $D(4, -4\sqrt{2})$, $B(-2, 8\sqrt{2})$, $A(16, 8\sqrt{2})$

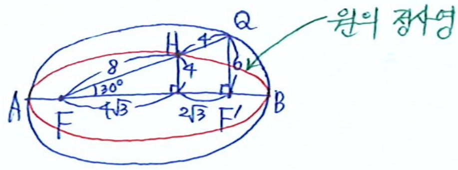
$\therefore S=\frac{1}{2}\times 18\times 12\sqrt{2}=108\sqrt{2}$

28. 그림과 같이 서로 다른 두 평면 α, β의 교선 위에 $\overline{AB}=18$인 두 점 A, B가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 원 C_1이 평면 α 위에 있고, 선분 AB를 장축으로 하고 두 점 F, F′을 초점으로 하는 타원 C_2가 평면 β 위에 있다. 원 C_1 위의 한 점 P에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{HF'}<\overline{HF}$이고 $\angle HFF'=\frac{\pi}{6}$이다. 직선 HF와 타원 C_2가 만나는 점 중 점 H와 가까운 점을 Q라 하면, $\overline{FH}<\overline{FQ}$이다. 점 H를 중심으로 하고 점 Q를 지나는 평면 β 위의 원은 반지름의 길이가 4이고 직선 AB에 접한다. 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?
(단, 점 P는 평면 β 위에 있지 않다.) [4점]



① $\frac{2\sqrt{66}}{33}$ ② $\frac{4\sqrt{69}}{69}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{4\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{78}}{39}$

⑤ $\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{78}}$



$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow H(\sqrt{3}, 4): \frac{1}{27}+\frac{16}{b^2}=1$

$b^2=\frac{8\times 27}{13}$

$\therefore \cos\theta=\frac{b}{9}=\frac{2\sqrt{2}\times 3\sqrt{3}}{\sqrt{13}\times 9}=\frac{2\sqrt{78}}{39}$

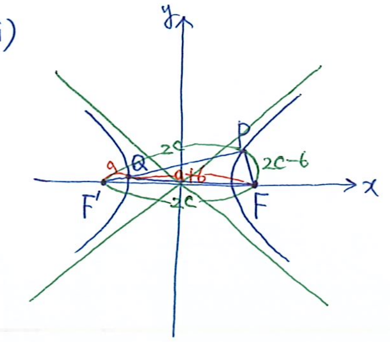
단답형

29. 양수 c에 대하여 두 점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$을 초점으로 하고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선 위에 다음 조건을 만족시키는 서로 다른 두 점 P, Q가 존재하도록 하는 모든 c의 값의 합을 구하시오. [4점]

11

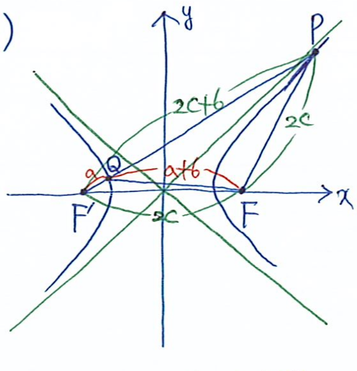
> (가) 점 P는 제1사분면 위에 있고,
> 　　점 Q는 직선 PF′ 위에 있다.
>
> (나) 삼각형 PF′F는 이등변삼각형이다.
>
> (다) 삼각형 PQF의 둘레의 길이는 28이다.

i)



$(2c-\cancel{a})+(2c-\cancel{6})+(\cancel{a}+\cancel{6})=28 \Rightarrow \underline{c=7}$

ii)



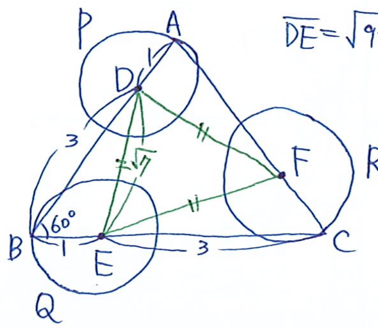
$2c+(2c+6-\cancel{a})+(\cancel{a}+6)=28 \Rightarrow \underline{c=4}$

30. 좌표평면에 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 1:3으로 내분하는 점을 E, 선분 CA를 1:3으로 내분하는 점을 F라 하자. 네 점 P, Q, R, X가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{EQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{FR}}|=1$
>
> (나) $\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{RA}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|$의 값이 최대일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 S라 하자. $16S^2$의 값을 구하시오. [4점]

147



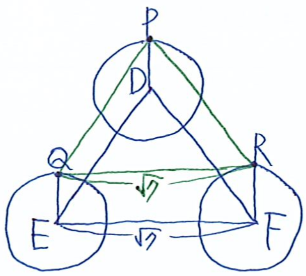
$\overline{DE}=\sqrt{9+1-3}=\sqrt{7}$

$\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{QE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{RF}+\overrightarrow{FA}$

$\vec{0}$

$=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{QE}+\overrightarrow{RF}$

$=-(\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{EQ}+\overrightarrow{FR})$



$\therefore S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 7$

$\Rightarrow 16\times\frac{3\times 49}{16}=147$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.