제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2×3

2. 함수 $f(x)=2x^3-5x^2+3$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(2)=24-20$

$f'(a)=6a^2-10a$

3. $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$인 θ에 대하여 $\sin(-\theta)=\frac{1}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\sin\theta=-\frac{1}{3}$

$\tan\theta=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases}3x-a & (x<2)\\ x^2+a & (x\geq 2)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$6-a=4+a;\ a=1$

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x(x-2),\quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(2)-6=\int_1^2 3x^2-6x\,dx$

$=x^3-3x^2\Big|_1^2$

$=7-3\times 3=-2$

$f(2)=4$

① $\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$ 이용하기

6. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_4-S_2=3a_4,\quad a_5=\frac{3}{4}$$

일 때, a_1+a_2의 값은? [3점]

① 27 ② 24 ③ 21 ④ 18 ⑤ 15

$a_3+a_4=3a_4$; $a_3=2a_4$

$r=\frac{1}{2}$

$a\cdot r^4=\frac{3}{4}$; $a=12$

$A=12+6$

① $S_4-S_2=a_3+a_4$

② 등비수열 관계식 2개 구하기

7. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, α와 β는 상수이다.) [3점]

① -4 ② -1 ③ 2 ④ 5 ⑤ 8

$f'(x)=x^2-4x-12=0$;

$x=-2,6$

$\alpha=-2,\ \beta=6$

① $f'(x)=0$ 실근 구하기

② 극대 극소 x값 구하기

8. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$$

를 만족시킬 때, $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$의 값은? [3점]

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$a=3,\ b-3=0,\ c-b=0,\ d-c=-3$

$a=3,\ b=3,\ c=3,\ d=0$

$\int_{-2}^{2} 3x^3+3x^2+3x\,dx = 2\int_0^2 3x^2\,dx$

$= 2\cdot x^3\big|_0^2 = 16$

① 다항함수 + 항등식 ⇒ 미정계수법
② 우함수·기함수 정적분

9. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1일 때, 4^m의 값은? (단, m은 $0<m<1$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

$(1-m)\log_5 3 + m\log_5 12 = 1$;

$m\cdot\log_5 4 = \log_5 \frac{5}{3}$; $4^m = \frac{5}{3}$

① 내분점 공식 이용하기
② 4^m 꼴 맞추기

10. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=t^2-6t+5,\quad v_2(t)=2t-7$$

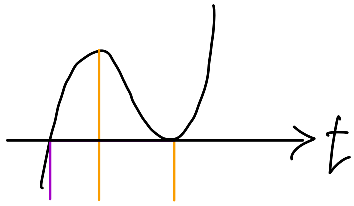
이다. 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[0,\,a]$에서 증가하고, 구간 $[a,\,b]$에서 감소하고, 구간 $[b,\,\infty)$에서 증가한다. 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0<a<b$) [4점]

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{17}{2}$ ③ $\frac{19}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{23}{2}$

$v_1 - v_2 = t^2 - 8t + 12$

$x_1 - x_2 = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t$

$f(t) = \left|\frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t\right|$



0 2 6

$a=2,\ b=6$

$A = \int_2^6 |2t-7|\,dt$

$= \int_5^6 2t-7\,dt + 2\int_{3.5}^{5} 2t-7\,dt$

$= t^2-7t\big|_5^6 + 2(t^2-7t)\big|_{3.5}^{5}$

$= 4 + 2\left(\frac{49}{4} - 7\times\frac{3}{2}\right) = \frac{17}{2}$

$\frac{9}{4}$

① $f(t)$에서 절댓값 영향 확인
② 0, 2, 6은 비율관계 성립
③ 직선의 정적분은 대칭성 이용하기

$\frac{1}{9}(x^3-15x^2+54x)$

11. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$|a_6| = a_8, \quad \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은? [4점]

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

① $d \neq 0 \Rightarrow a_6 \neq a_8$

$-a_6 = a_8$; $a_7 = 0$

② 분수식 합 ⇒ 부분분수 변형

$\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_6}\right) = \frac{5}{96}$

③ 등차수열 관계식 2개 구하기

④ a_7로 a_1, a_6 표현하기

$\frac{1}{d}\left(\frac{1}{-6d} + \frac{1}{d}\right) = \frac{5}{96}$;

$\frac{5}{6} = \frac{5}{96}d^2$; $d^2 = 16$; $d = \pm 4$

⑤ $a_6 < 0$, $a_8 > 0 \Rightarrow d > 0$

$d = 4$, $a_1 = -24$

⑥ 등차중항으로 답 구하기

$A = 15 \cdot a_8 = 15 \times 4$

12. 함수 $f(x) = \frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 $t\,(0 < t < 6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

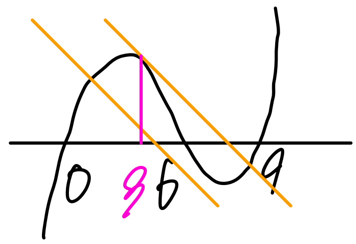
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < t) \\ -(x-t) + f(t) & (x \geq t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y = g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은? [4점]

① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$ ④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

① $x \geq t$에서 직선

② 그래프로 영역 파악하기



$f(3) = 6$

③ 직선·곡선 위치관계 ⇒ 접선 의미

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 10x + 18) = -1$;

$x^2 - 10x + 18 = -3$;

$x^2 - 10x + 21 = 0$; $x = 3, 7$

④ 정적분과 직각삼각형 이용

$A = \int_0^3 \frac{1}{9}(x^3 - 15x^2 + 54x)\,dx + \frac{1}{2} \cdot 6^2$

$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}x^4 - 5x^3 + 27x^2\right)\Big|_0^3 + 18$

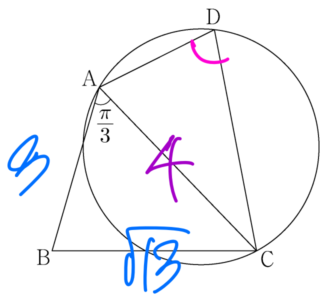
$= \frac{9}{4} + 12 + 18 = \frac{129}{4}$

13. 그림과 같이

$$\overline{AB}=3,\quad \overline{BC}=\sqrt{13},\quad \overline{AD}\times\overline{CD}=9,\quad \angle BAC=\frac{\pi}{3}$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

$S_2=\frac{5}{6}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$의 값은? [4점]



① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$ ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

① ABC : 각1변2 ⇒ 코사인 법칙

$13 = x^2+9-2\cdot 3\cdot x\cdot\frac{1}{2}$;

$x^2-3x-4=0$; $x=-1, 4$

② S_1 구하기 ⇒ S_2 구하기

$S_1=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

$S_2=\frac{5}{2}\sqrt{3}$

③ ACD : 두 변+끼인각 ⇒ 넓이

$S_2=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot\sin\theta$; $\sin\theta=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

④ 사인법칙으로 R 구하기

$R=\frac{4}{2\sin\theta}=\frac{18}{5\sqrt{3}}$

$A=\frac{18}{5\sqrt{3}}\times\frac{9}{5\sqrt{3}}=\frac{54}{25}$

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}2x^3-6x+1 & (x\le 2)\\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2)\end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

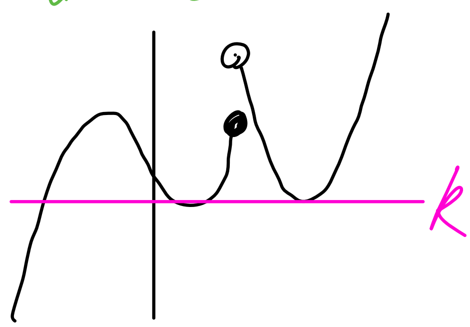
$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

$17-12=5$

① 교점 개수는 그래프 그리기



② 접선보다 의심하기

$f(1)=-3$

$a\times\frac{b-2}{2}\times\frac{2-b}{2}+9=-3$;

$a(b-2)^2=48=2^4\times 3$

③ 자$_1$×자$_2$=자$_3$ ⇒ 소인수분해 이용

④ 미지수 개수 > 식 개수 & 자연수 조건 ⇒ 부정방정식

$a(b-2)^2=12\times 2^2,\ 3\times 4^2,\ 48\times 1^2$

$a=12$, $b=4$ $a=3$, $b=6$ $a=48$, $b=1, 3$

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6 + a_7 = 3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153 ④ 160 ⑤ 167

① 중간항 주어짐 ⇒ 노가다.
② 첫째항 정보가 점화식 기준과 불일치 ⇒ 역연산
③ a_n은 무조건 자연수
⇒ a_6, a_7 부정방정식 이용

$a_6 + a_7 = 1+2$ or $2+1$
O.K O.K.

④ 귀류법으로 성립하는 조합 찾기

case1. $a_6 = 1$, $a_7 = 2$

$2 - 1 < 0$ ✱
$2 < 1 - 2 < 1 - 2$
$4 - 8$
$4 < 2$ ✱
$8 < 3 - 6$
$16 - 32$

case2. $a_6 = 2$, $a_7 = 1$

$1 - 2 < 1 - 2 < 1 - 2 < 1$
4
$4 - 8$
$4 - 8 < 3$
16
$< 3 - 6 - 12$
$16 - 32 < 5$
64

단답형

16. 방정식 $3^{x-8} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x - 8 = -3x$; $x = 2$

17. 함수 $f(x) = (x+1)(x^2+3)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f'(1) = 4 + 2 \cdot 2 = 8$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10}(2b_k - 1), \quad \sum_{k=1}^{10}(3a_k + b_k) = 33$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값을 구하시오. [3점]

$a = 2b - 10$, $3a + b = 33$

$7b - 30 = 33$; $b = 9$

19. 함수 $f(x) = \sin\frac{\pi}{4}x$라 할 때, $0 < x < 16$에서 부등식

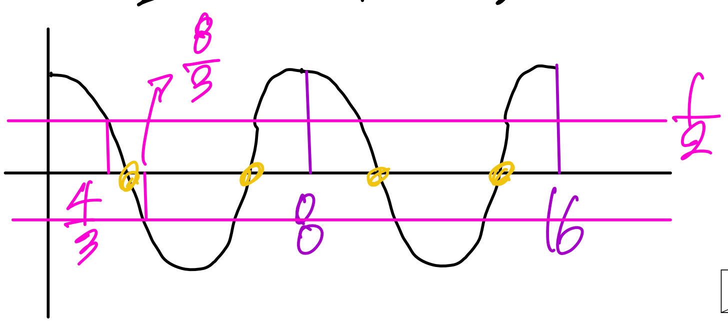
$$f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x\right) < \frac{1}{4}$

$\cos\frac{\pi}{4}x \cdot \cos\frac{\pi}{4}x < \frac{1}{4}$;

$-\frac{1}{2} < \cos\frac{\pi}{4}x < \frac{1}{2}$



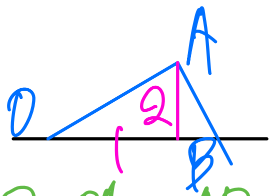
$A = 8 \times 4 = 32$

20. $a > \sqrt{2}$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 2x$$

라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0, 0)$에서의 접선이 곡선 $y = f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오. [4점]

① 그래프 그려서 상황 해석하기



② $OA \perp AB$

③ A 좌표는 비율관계 이용가능

변곡점 $x = \frac{a}{3} \Rightarrow x_A = a$

$A(a, 2a)$

$f'(x) = -3x^2 + 2ax + 2$

$f'(a) = -a^2 + 2$

④ 기울기 곱 $= -1$

$(-a^2+2) \times 2 = -1$; $a^2 = \frac{5}{2}$

⑤ 직각삼각형 닮음 이용하기

$2OA = AB$; $2OA^2 = 2(a^2 + 4a^2)$

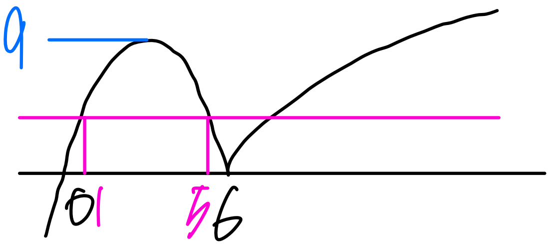
$= 10a^2 = 25$

21. 양수 a에 대하여 $x \ge -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & (-1 \le x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \ge 6) \end{cases}$$

이다. $t \ge 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

① 최대 최소는 그래프 그리기



② 구간 안에 함숫값이 5 이하로 가면 안된다.

③ $t-1=5$일 때 $f(t+1)\ge 5$

$a\log_4(2)\ge 5$;

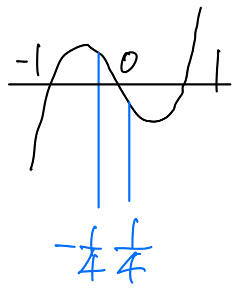
$a \ge 10$　　A=10

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
>
> $f(k-1)f(k+1)<0$
>
> 을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

① $f(k-1)$, $f(k+1)$ 부호 같음



② 연속적인 경우 조건성립 불가

③ $f(x)=0$의 실근이 연속된 정수 2개 이상

$f(x)=(x+1)x(x-k)$, $k\le 1$

$(x-1)x(x-k)$, $-1\le k$

④ 조건 만족하는 경우 2개 이상 → 구해봐

$-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-k\right)+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}-k\right)+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}-k\right)-\frac{3}{16}=-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}+k=\frac{1}{8}$　$k=-\frac{1}{8}$ ✗

$-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-k\right)-\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{4}-k\right)-\frac{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$

$-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}-k\right)=-\frac{9}{16}$; $-\frac{1}{4}-k=\frac{3}{8}$; $k=-\frac{5}{8}$

$f(x)=(x-1)x\left(x+\frac{5}{8}\right)$

$f(8)=7\times 8\times \frac{69}{8}=7\times 69=483$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 5개의 문자 x, x, y, y, z를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

$\frac{5!}{2!2!} = 30$

24. 두 사건 A, B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(A)$$

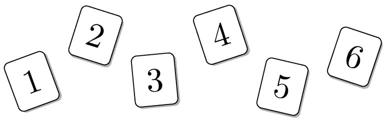
일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

$A\cdot B=\frac{1}{4}$, $1-A=2A$; $A=\frac{1}{3}$ $B=\frac{3}{4}$

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 10 이하가 되도록 카드가 놓일 확률은? [3점]

① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{19}{30}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{14}{15}$



① 이상·이하 ⇒ 여사건
② 양끝에 5,6 오는 경우 제외

$1-\frac{2\times4!}{6!}=1-\frac{1}{15}$

26. 4개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 나오는 동전의 개수를 확률변수 X라 하고, 이산확률변수 Y를

$$Y=\begin{cases} X & (X\text{가 } 0 \text{ 또는 } 1\text{의 값을 가지는 경우}) \\ 2 & (X\text{가 } 2 \text{ 이상의 값을 가지는 경우}) \end{cases}$$

라 하자. $\mathrm{E}(Y)$의 값은? [3점]

① $\frac{25}{16}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{27}{16}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{29}{16}$

① pmf 없으면 표 그리기

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{16}$

$E(Y)=\frac{1}{4}+\frac{11}{8}=\frac{13}{8}$

27. 정규분포 $N(m, 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 49인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le \frac{6}{5}a$이다. $\overline{x}$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 15.2 ② 15.4 ③ 15.6 ④ 15.8 ⑤ 16.0

① 신뢰구간은 $\overline{x}$ or 길이 이용

$\frac{a}{5} = 2\times1.96\times\frac{5}{7}$; i

$a = \cancel{2}\times\frac{\cancel{196}^{28}}{\cancel{100}_{2}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{7}} = 14$

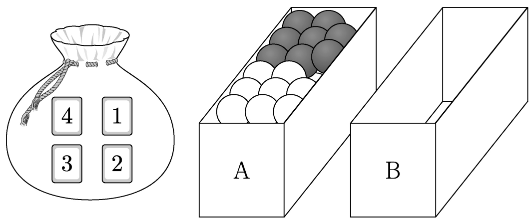
$2\overline{x} = \frac{11}{5}a$; $\overline{x} = \frac{77}{5}$

28. 하나의 주머니와 두 상자 A, B가 있다. 주머니에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있고, 상자 A에는 흰 공과 검은 공이 각각 8개 이상 들어 있고, 상자 B는 비어 있다. 이 주머니와 두 상자 A, B를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는다.
>
> 확인한 수가 1이면 상자 A에 있는 흰 공 1개를 상자 B에 넣고, 1개
>
> 확인한 수가 2 또는 3이면 상자 A에 있는 흰 공 1개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣고, 2개
>
> 확인한 수가 4이면 상자 A에 있는 흰 공 2개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣는다. 3개

이 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8일 때, 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{70}$ ② $\frac{2}{35}$ ③ $\frac{1}{14}$ ④ $\frac{3}{35}$ ⑤ $\frac{1}{10}$



① 1, 2, 3 중 나온 다해서 8

3+3+1+1, 3+2+2+1, 2+2+2+2

② 케이스 분류되기까지 확률 고려

i) 3311   ii) 3221

$_4C_2\left(\frac{1}{4}\right)^4$ $\frac{4!}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$

iii) 2222

$\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$P = \frac{6}{6+12\cdot2^2+2^4} = \frac{6}{70}$

단답형

29. 다음 조건을 만족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

> $a \le c \le d$이고 $b \le c \le d$이다.

① a, b는 서로 독립적
② a=b, a≠b 케이스 나누기

i) $a=b$ ii) $a \ne b$ $a<b \le c \le d$

${}_6H_3 = 56$ $2 \times {}_8C_4 = 140$

196

30. 양수 t에 대하여 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(1, t^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X \le 5t) \ge \frac{1}{2}$$

이 되도록 하는 모든 양수 t에 대하여 $\mathrm{P}(t^2 - t + 1 \le X \le t^2 + t + 1)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

① 5t와 평균 비교하기

$5t \ge 1$; $t \ge \frac{1}{5}$

$\mathrm{P}\left(\frac{t^2-t}{t} \le Z \le \frac{t^2+t}{t}\right) = 0.682$

$t-1$ $t+1$

② 구간의 길이가 일정한 확률 최대 ⇒ 평균에 대해 대칭

③ $t \ge \frac{1}{5}$ ⇒ $t = \frac{1}{5}$에서 최대

$\mathrm{P}\left(-\frac{4}{5} \le Z \le \frac{6}{5}\right) = 0.288 + 0.385$
$= 0.673$

673

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

24. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x=\ln(t^3+1),\quad y=\sin\pi t$$

에서 $t=1$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}\pi$ ② $-\frac{2}{3}\pi$ ③ $-\pi$ ④ $-\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $-\frac{5}{3}\pi$

$x' = \dfrac{3t^2}{t^3+1}$, $y' = \pi\cos\pi t$

$A = \dfrac{-\pi}{\frac{3}{2}}$

25. 양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이고, $g'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.
모든 양수 a에 대하여

$$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx = 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$$

이고 $f(1) = 8$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

① 역함수 미분법 이용

$\int_1^a \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln f(x) \Big|_1^a$

$\ln f(a) - \ln f(1) = \ln a^2(a+1) - \ln 2$

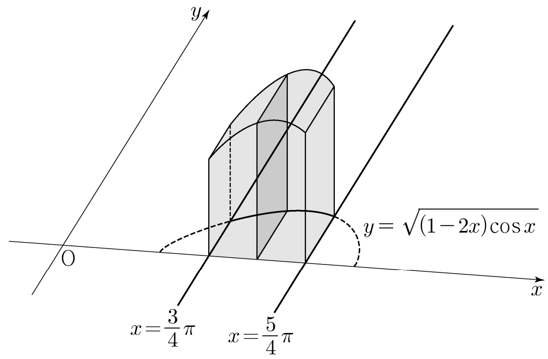
$\ln f(1) = 3\ln 2$

$\ln f(a) = \ln a^2(a+1) + 2\ln 2$

$\ln f(2) = \ln 12 + 2\ln 2$

$f(2) = 48$

26. 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{(1-2x)\cos x}$ $\left(\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi\right)$와 x축 및 두 직선 $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{5}{4}\pi$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}\pi - 1$ ③ $2\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}\pi - 1$ ⑤ $2\sqrt{2}\pi$

① 단면적 넓이 구하기

$S(x) = (1-2x)\cos x$

$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (1-2x)\cos x\, dx$

② 부분적분 이용하기

$= (1-2x)\sin x \Big|_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} + \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} 2\sin x\, dx$

③ $\sin x$는 $(\pi, 0)$ 대칭으로 정적분값 0

$A = \left(1-\frac{5}{2}\pi\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(1-\frac{3}{2}\pi\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= 2\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}$

27. 실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$　② $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$　③ $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$　④ $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$　⑤ $-e\sqrt{e}$

① 원점에서 그은 접선

$$\frac{\frac{1}{e^x}+e^t}{x}=-e^{-x}=f(t)$$

$$-f(t)+e^t=xf(t)$$

② $-x=\ln(-f(t))$

$$-f(t)+e^t=f(t)(-\ln(-f(t)))$$

$\Rightarrow e\sqrt{e}+e^a=e\sqrt{e}\cdot\frac{3}{2}$; $e^a=\frac{1}{2}\cdot e\sqrt{e}$

③ 양변을 미분하여 $f'(t)$ 구하기

$$-f'(t)+e^t=f'(t)(-\ln(-f(t)))+f(t)\left(-\frac{f'(t)}{f(t)}\right)$$

$-A+\frac{1}{2}e\sqrt{e}=A\left(-\frac{3}{2}\right)-A$;

$$\frac{3}{2}A=-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$$

28. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이고, $x<0$일 때 $f(x)=-4xe^{4x^2}$이다. 모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자.
두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여

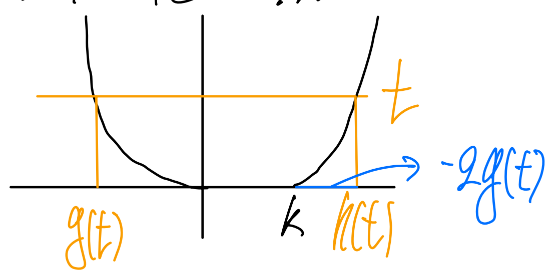
$$2g(t)+h(t)=k \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x)dx=e^4-1$일 때, $\frac{f(9)}{f(8)}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}e^5$　② $\frac{4}{3}e^7$　③ $\frac{5}{4}e^9$　④ $\frac{6}{5}e^{11}$　⑤ $\frac{7}{6}e^{13}$

① 교점 개수 ⇒ 그래프 그리기

$$f'(x)=-4e^{4x^2}-32x^2e^{4x^2}$$



② x좌표가 함수로 ⇒ 합성함수 활용

$$f(h(t))=t=f(k-2g(t))$$

③ k이후로 $-4xe^{4x^2}$ 좌우반전 + 가로 2배

$$2\int_\alpha^0 -4xe^{4x^2}dx=e^4-1$$

$$2\left(-\frac{1}{2}e^{4x^2}\right)\Big|_\alpha^0=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{4\alpha^2}\right)\times 2$$

$\alpha=-1$

④ $k+2=7 \Rightarrow k=5$

⑤ $f(9)$, $f(8)$와 대응되는 함숫값 찾기

$f(9)=f(-2)$, $f(8)=f\left(-\frac{3}{2}\right)$

$=8\cdot e^{16}$　　$=6e^9$

$$A=\frac{4}{3}e^7$$

단답형

29. 첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right),$$

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$$

이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n} = S$일 때, $120S$의 값을 구하시오. [4점]

① 등비급수로 표현하기

$\frac{\cancel{a_1 b_1}}{1-r_1 r_2} = \frac{\cancel{a_1}}{1-r_1} \times \frac{\cancel{b_1}}{1-r_2}$

$3 \times \frac{\cancel{|a_1|}}{1-r^2} = 7 \times \frac{\cancel{|a_1|}\,|r|}{1-|r|^3}$

$3(1-|r|^3) = 7|r|(1-r^2)$

$4r^3-7r+3=0$

② 방정식 실근 구하기

$1\ |\ 4\quad 0\quad -7\quad 3$
$\quad\ \ 4\quad 4\quad -3$
$\quad 4\quad 4\quad -3$

$4r^2+4r-3=0$

$2\quad 3$
$2\quad -1$ $|r|=\frac{1}{2}$

③ 급수가 수렴 ⇒ $-1<r<1$

$1-\frac{1}{2}r_2 = \frac{1}{2}\cdot(1-r_2)$ or $1+\frac{1}{2}r_2 = \frac{3}{2}(1-r_2)$ ✱

$2+r_2 = 3-3r_2$

$r_2 = \frac{1}{4}$

④ $\frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n}$ 일반항 구하기

$\frac{b_1 r^{2n-2} + b_1 r^{3n}}{b_1 r^{n-1}}$ $= b\cdot r^{3n+3}$

$= r^{n-1} + r^{2n+1} \rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{16}}$ $\frac{4}{3}+\frac{1}{15\cdot 4}$ $= \frac{81}{60}$

A=162

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = |\sin x|\cos x$$

이다. 양수 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 함수

$$h(x) = \int_0^x \{f(t)-g(t)\}\,dt$$

가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\frac{100}{\pi}\times(a_6-a_2)$의 값을 구하시오. [4점]

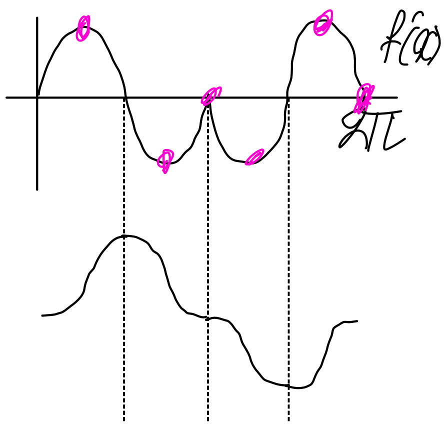
① $h'(x)$ 부호 변하는 순간 구하기

$f(x)-g(x)=0$

② 접선의 통과값 ⇒ 변곡접선

③ 절댓값 제거하기

$f'(x)=$ $\sin x\cos x$ $\sin x \geq 0$ $\frac{1}{2}\sin 2x$
$-\sin x\cos x$ $\sin x<0$
$-\frac{1}{2}\sin 2x$



$a_2 = \frac{3}{4}\pi$ $a_6 = 2\pi$

$100\times\frac{5}{4}=125$

> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.