제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\sqrt[3]{24} \times 3^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\sqrt[3]{2^3 \times 3} \times 3^{\frac{2}{3}}$

$= 2 \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = \boxed{6}$

2. 함수 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 6x^2 - 10x$

$f'(2) = 24 - 20 = \boxed{4}$

3. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 인 θ 에 대하여 $\sin(-\theta) = \frac{1}{3}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\sin\theta = -\frac{1}{3}$ (−)

$\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (+)

$\tan\theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4}}$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & (x < 2) \\ x^2 + a & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$6 - a = 4 + a$

$\boxed{a = 1}$

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x(x-2),\quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x)=x^3-3x^2+8$

$f(2)=8-12+8=\boxed{4}$

6. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_4-S_2=3a_4,\quad a_5=\frac{3}{4}$$

일 때, a_1+a_2의 값은? [3점]

① 27 ② 24 ③ 21 ④ 18 ⑤ 15

$a_4+a_3=3a_4$

$a_3=2a_4,\quad r=\frac{1}{2}.$

$a_1+a_2=(16+8)a_5=\boxed{18}$

7. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, α와 β는 상수이다.) [3점]

① -4 ② -1 ③ 2 ④ 5 ⑤ 8

$f'(x)=x^2-4x-12$

$=(x-6)(x+2)$

$\alpha=-2,\quad \beta=6$

$\beta-\alpha=\boxed{8}$

8. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$$

를 만족시킬 때, $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ 의 값은? [3점]

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

$$x f(x) = 3x^4 + 3x^3 + 3x^2$$
$$-f(x) = -3x^3 - 3x^2 - 3x$$
$$3x^4 \qquad -3x$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_0^2 3x^2\,dx$$
$$= 2\left[x^3\right]_0^2 = \boxed{16}$$

9. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1일 때, 4^m의 값은? (단, m은 $0<m<1$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

내분점 : $m\log_5 12 + (1-m)\log_5 3 = \log_5 5$

$m\log_5 4 = \log_5 \frac{5}{3}$

$m = \log_4 \frac{5}{3}$, $\boxed{4^m = \frac{5}{3}}$

10. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=t^2-6t+5, \quad v_2(t)=2t-7$$

이다. 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[0, a]$에서 증가하고, 구간 $[a, b]$에서 감소하고, 구간 $[b, \infty)$에서 증가한다. 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0<a<b$) [4점]

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{17}{2}$ ③ $\frac{19}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{23}{2}$

$x_1(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t$

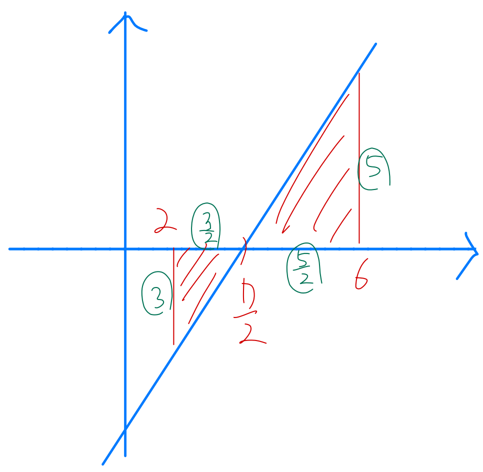
$x_2(t) = t^2 - 7t$

$f(t) = \left|\frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 12t\right|$

↑ 미분해보면 $t>0$에서 양수이므로, 절댓값 벗기기 가능.

$f'(t) = t^2 - 8t + 12 = (t-2)(t-6)$

$a=2, \ b=6$



이동거리는 넓이 → $\frac{9}{4} + \frac{25}{4} = \frac{17}{2}$

11. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$|a_6| = a_8, \quad \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은? [4점]

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

$a_6 \quad a_7 \quad a_8$

$-d \quad 0 \quad d$

($a_8>0$ 이므로 $d>0$)

$$\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_6}\right)$$

$$= \frac{1}{d}\left(-\frac{1}{6d} + \frac{1}{d}\right)$$

$$= \frac{5}{6d^2} = \frac{5}{96}$$

$$\boxed{d=4}$$

$$\sum_{k=1}^{15} a_k = 15a_8 = 15d = \boxed{60}$$

12. 함수 $f(x) = \frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 $t\,(0<t<6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

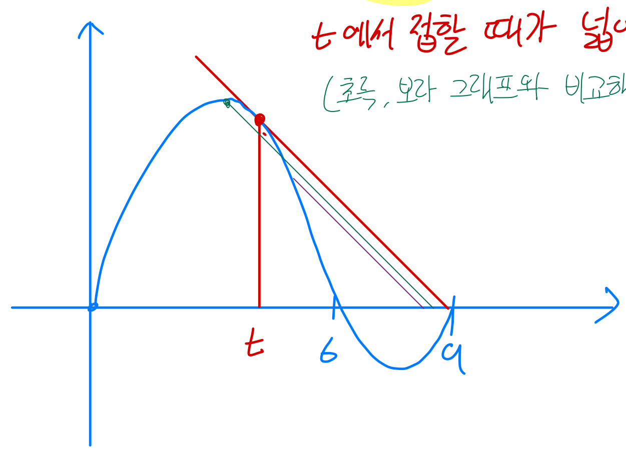
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x<t) \\ -(x-t)+f(t) & (x \ge t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은? [4점]

① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$ ④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

t에서 접할 때가 넓이 최대!

(초록, 보라 그래프와 비교해보기)



$$f(x) = \frac{1}{9}(x^3-15x^2+54x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{9}(3x^2-30x+54)$$

$f'(t)=-1$ 에서 $\quad t^2-10t+18=-3, \quad \boxed{t=3}$

$f(3)=6$.

구하는 넓이 :

$$\frac{1}{9}\int_0^3 x^3-15x^2+54x\,dx + 18$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{1}{4}x^4-5x^3+27x^2\right]_0^3 + 18$$

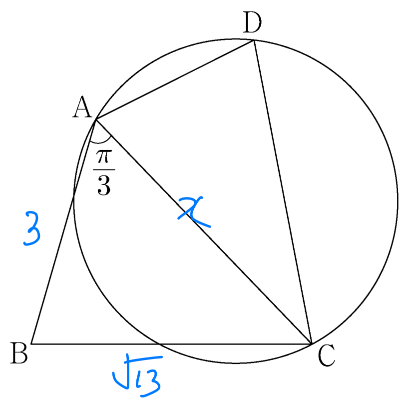
$$= \frac{9}{4} - 15 + 27 + 18 = \boxed{\frac{129}{4}}$$

13. 그림과 같이

$$\overline{AB}=3,\quad \overline{BC}=\sqrt{13},\quad \overline{AD}\times\overline{CD}=9,\quad \angle BAC=\frac{\pi}{3}$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

$S_2=\frac{5}{6}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$의 값은? [4점]



① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$ ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

△ABC 코사인 법칙

$9+x^2-3x=13$, $\boxed{x=4}$

△ABC 사인법칙

$\frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{\sin B}$, $\boxed{\sin B=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}}$

$S_1=3\times\sqrt{13}\times\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\times\frac{1}{2}=3\sqrt{3}$

$S_2=9\times\sin D\times\frac{1}{2}=\frac{5}{6}S_1=\frac{5}{2}\sqrt{3}$

$\boxed{\sin D=\frac{5\sqrt{3}}{9}}$

△ABC 사인법칙,

$\frac{4}{\sin D}=2R$, $\boxed{R=\frac{2}{\sin D}}$

$\frac{R}{\sin D}=\frac{2}{\sin^2 D}=2\times\frac{81}{75}=\boxed{\frac{54}{25}}$

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}2x^3-6x+1 & (x\le 2)\\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2)\end{cases}$$

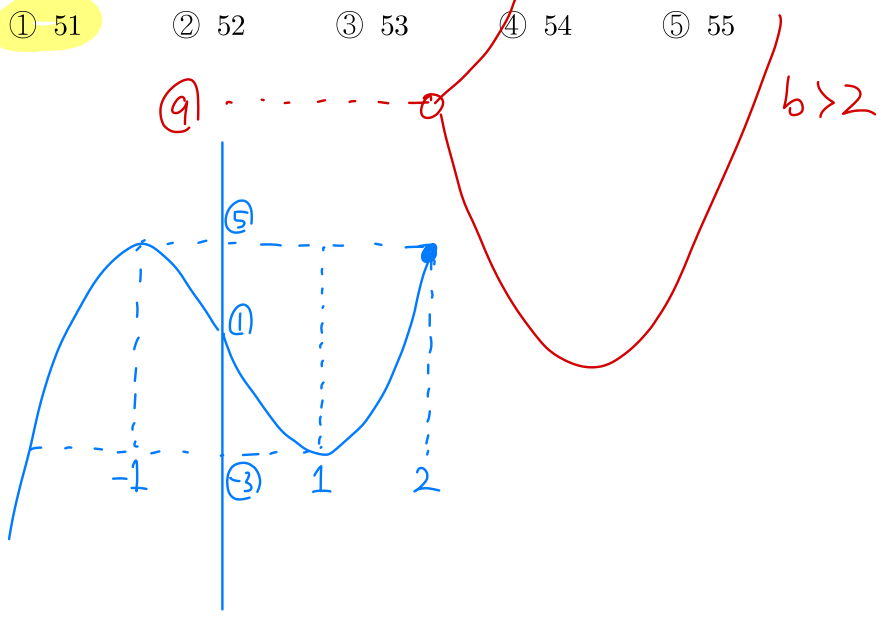
이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

b≤2

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55



만약 ∪ 그래프가 아래로 안내려온다면,

$-3<t<3$ 에서 모두 조건 만족

따라서 ∪ 그래프가 $y=-3$에 접해야 함!!

(이때 $g(t)=3$, $g(t+)=5$, $g(t-)=1$ 나옴)

$a(x-2)(x-b)+9$ 의 최솟값은 $x=\frac{b+2}{2}$일 때,

$-a\left(\frac{b-2}{2}\right)^2+9=-3$,

$\boxed{a(b-2)^2=48}$

b가 커지면 a가 급격히 작아지므로,

$\boxed{b=3,\ a=48}$ 일 때 최대.

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

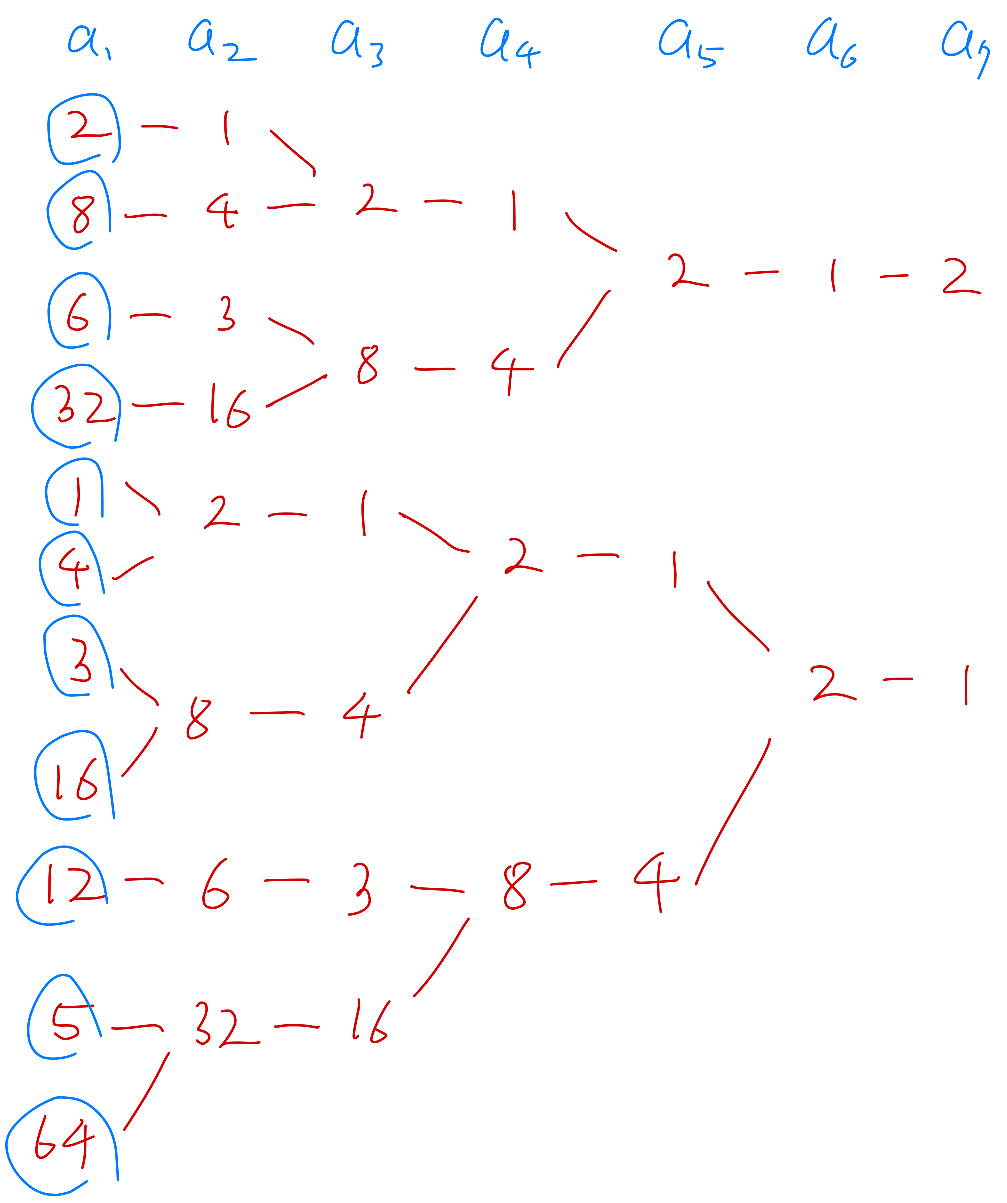
$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

a_n은 모두 자연수.

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

(1, 2)
(2, 1)

① 139 ② 146 ③ 153 ④ 160 ⑤ 167



⇒ $\boxed{153}$

단답형

16. 방정식 $3^{x-8}=\left(\frac{1}{27}\right)^{x}$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$3^{x-8}=3^{-3x}$

$4x=8$, $\boxed{x=2}$

17. 함수 $f(x)=(x+1)(x^2+3)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

x $2x$

$2\cdot 2+1\cdot 4=\boxed{8}$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10}(2b_k - 1),\quad \sum_{k=1}^{10}(3a_k + b_k) = 33$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값을 구하시오. [3점]

$$\sum_{k=1}^{10}(7b_k - 3) = 33,$$

$$7\sum_{k=1}^{10} b_k = 63,$$

$\boxed{9}$

19. 함수 $f(x) = \sin\frac{\pi}{4}x$라 할 때, $0 < x < 16$에서 부등식

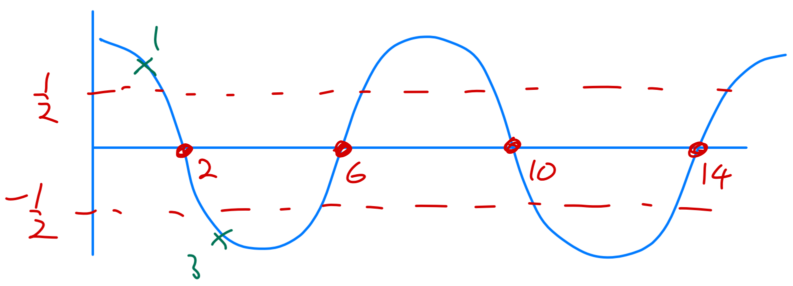
$$f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right) < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\frac{\pi}{4}x < \frac{1}{4}$$

$$\boxed{-\frac{1}{2} < \cos\frac{\pi}{4}x < \frac{1}{2}}$$



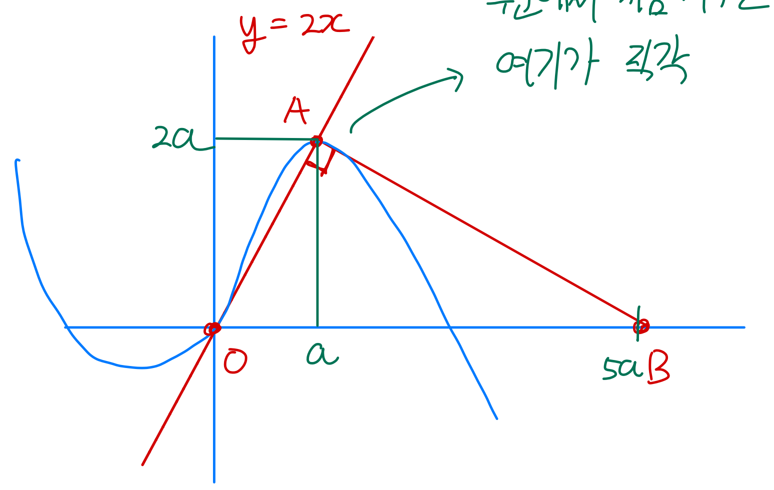
$8 \times 4 = \boxed{32}$

20. $a > \sqrt{2}$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 2x$$

라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0, 0)$에서의 접선이 곡선 $y = f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오. [4점]

원에서 지름 지나는 삼각형이면
여기가 직각



$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + 2,$$

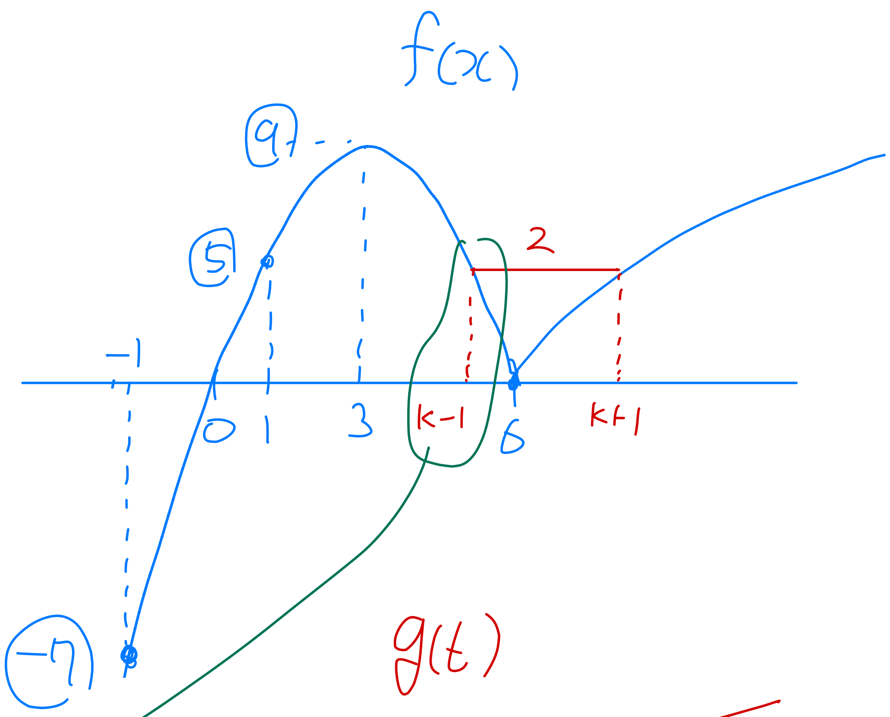
$$f'(a) = -a^2 + 2 = -\frac{1}{2}, \quad \boxed{a^2 = \frac{5}{2}}$$

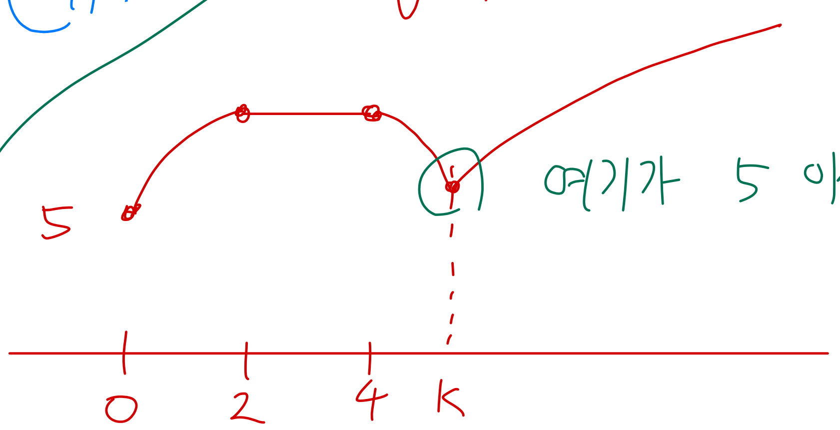
$$\overline{OA} \times \overline{AB} = \sqrt{5}a \times 2\sqrt{5}a = 10a^2 = \boxed{25}$$

21. 양수 a에 대하여 $x \ge -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & (-1 \le x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \ge 6) \end{cases}$$

이다. $t \ge 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0,\, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]





즉, $k-1 \le 5$ 에서 $\boxed{k \le 6}$

한편, a가 줄어들수록 k 값이 커지므로

$k=6$ 일 때 a가 최소.

$\Rightarrow a\log_4(7-5)=5$, $\frac{a}{2}=5$,

$\boxed{a=10}$

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
>
> $f(k-1)f(k+1)<0$
>
> 을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

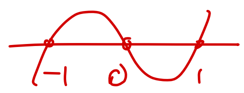
$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

삼차함수이므로, 정수점의 부호는 반드시 바뀜.
해당 지점에서 조건을 만족하려면 0 이 상쇄시켜야 함. 따라서 정수점의 부호는,

$\cdots\ \ominus\ \ominus\ \ominus\ 0\ 0\ \oplus\ \oplus\ \oplus\ \cdots$

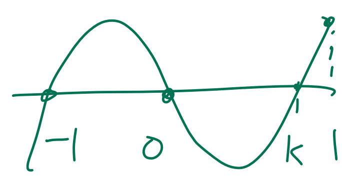
또는

$\cdots\ \ominus\ \ominus\ \ominus\ 0\ 0\ 0\ \oplus\ \oplus\ \oplus\ \cdots$



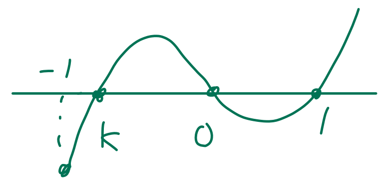
인데, $f'(-\frac{1}{4}) \ne -\frac{1}{4}$.

$(0<k<1)$



또는

$(-1<k<0)$



$f(x)=x(x+1)(x-k)$
$\quad = x^3+(1-k)x^2-kx$
$f'(x)=3x^2+2(1-k)x-k$
$f'(-\frac{1}{4})=-\frac{5}{16}-\frac{1}{2}k<-\frac{1}{4}$, 모순!

$f(x)=x(x-1)(x-k)$
$\quad = x^3-(k+1)x^2+kx$
$f'(x)=3x^2-2(k+1)x+k$
$f'(-\frac{1}{4})=\frac{11}{16}+\frac{3}{2}k=-\frac{1}{4}$,

$\boxed{k=-\frac{5}{8}}$

(계산해보면 $f'(\frac{1}{4})<0$)

$f(8)=8\cdot7\cdot\left(8+\frac{5}{8}\right)=7\cdot69=\boxed{483}$

> ∗ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

24. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x = \ln(t^3+1), \quad y = \sin \pi t$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}\pi$ ② $-\frac{2}{3}\pi$ ③ $-\pi$ ④ $-\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $-\frac{5}{3}\pi$

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\pi \cos \pi t}{\frac{3t^2}{t^3+1}}$$

$t=1$ 대입, $-\frac{2}{3}\pi$

25. 양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이고, $g'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.
모든 양수 a에 대하여

$$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}\,dx = 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$$

이고 $f(1)=8$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

$$\frac{1}{g'(f(x))} = f'(x).$$

$$\int_1^a \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \Big[\ln|f(x)|\Big]_1^a$$

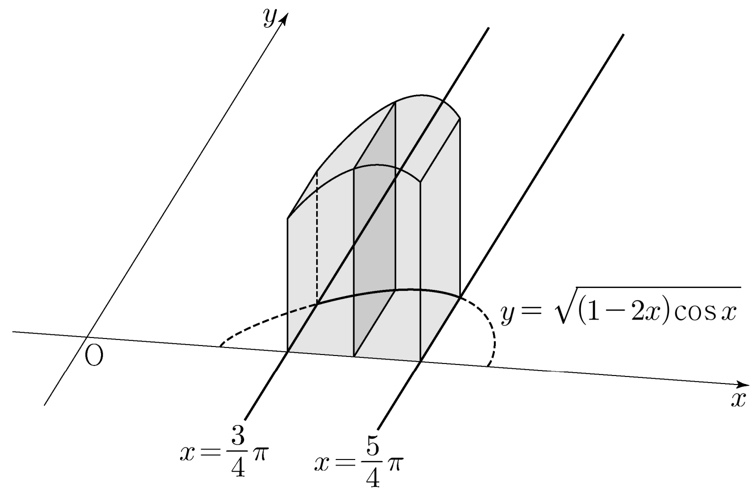
$$= \ln\left|\frac{f(a)}{f(1)}\right| = \ln\left|\frac{f(a)}{8}\right|$$

$$= \ln\frac{a^2(a+1)}{2}.$$

$f(a) = 4a^2(a+1)$ (a>0 이므로 절댓값 벗김.)

$f(2) = 4\cdot4\cdot3 = 48$

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{(1-2x)\cos x}\ \left(\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi\right)$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}\pi-1$ ③ $2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}\pi-1$ ⑤ $2\sqrt{2}\pi$

$$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (1-2x)\cos x\,dx$$

$x = \pi + t$ 치환

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1-2\pi-2t)(-\cos t)\,dt$$

tcost 기함수라 사라짐

$$= (2\pi-1)\cdot 2\cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\,dt$$

$[\sin t]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$= \boxed{2\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}}$$

27. 실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$ ② $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$ ③ $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$ ④ $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$ ⑤ $-e\sqrt{e}$

$x=k$ 에서 접선 :

$-e^{-k}(x-k)+e^{-k}+e^{t}$.

원점 지나므로 $(k+1)e^{-k}+e^{t}=0$,

$\boxed{t=\ln(-k-1)-k}$

$\boxed{\frac{dt}{dk}=\frac{1}{k+1}-1}$

한편 $f(t)=-e^{-k}$,

$\boxed{t=a \text{ 에서 } k=-\frac{3}{2}}$

$f'(t)=e^{-k}\cdot\frac{dk}{dt}$.

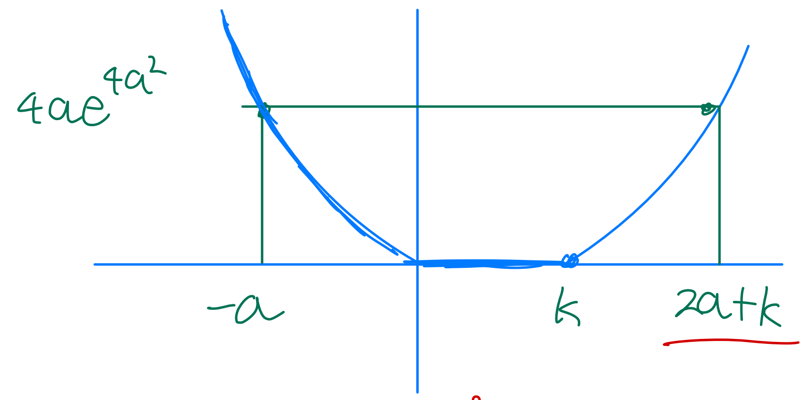
$k=-\frac{3}{2}$ 대입, $e^{\frac{3}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\boxed{-\frac{1}{3}e\sqrt{e}}$

28. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이고, $x<0$일 때 $f(x)=-4xe^{4x^2}$이다. 모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자.
두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여

$$2g(t)+h(t)=k\ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x)\,dx=e^4-1$일 때, $\frac{f(9)}{f(8)}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}e^5$ ② $\frac{4}{3}e^7$ ③ $\frac{5}{4}e^9$ ④ $\frac{6}{5}e^{11}$ ⑤ $\frac{7}{6}e^{13}$



$x=2a+k$ 일때 $4ae^{4a^2}$가 나와야 하므로,

$x>k$ 일 때 $f(x)=2(x-k)e^{(x-k)^2}$

$\int_0^7 f(x)dx=\int_0^{7-k}2xe^{x^2}dx=\left[e^{x^2}\right]_0^{7-k}$

$=e^{(7-k)^2}-1=e^4-1$, $\boxed{k=5}$

$\frac{f(9)}{f(8)}=\frac{2\cdot 4\cdot e^{16}}{2\cdot 3\cdot e^{9}}=\boxed{\frac{4}{3}e^{7}}$

단답형

29. 첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right),$$

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$$

이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1} + b_{3n+1}}{b_n} = S$일 때, $120S$의 값을 구하시오. [4점]

$a_n = ar^{n-1}$
$b_n = bk^{n-1}$

$3 \cdot \frac{|a||r|}{1-|r|^2} = 7 \cdot \frac{|a| \cdot |r|^2}{1-|r|^3}$

$\to \frac{3}{1+|r|} = \frac{7|r|}{1+|r|+|r|^2}$

$\to 3|r|^2 + 3|r| + 3 = 7|r|^2 + 7|r|$.

$4|r|^2 + 4|r| - 3 = 0$ $\boxed{|r| = \frac{1}{2}}$

$\frac{ab}{1-rk} = \frac{a}{1-r} \times \frac{b}{1-k}$,

$1 - rk = (1-r)(1-k)$.

만약 $r = \frac{1}{2}$ 이면 $1 - \frac{k}{2} = \frac{1}{2} - \frac{k}{2}$, 모순!

$\boxed{r = -\frac{1}{2}}$, $1 + \frac{k}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}k$, $\boxed{k = \frac{1}{4}}$

$b_{2n-1} = b \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2}$
$b_{3n+1} = b \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{3n}$ $\Rightarrow$
$b_n = b \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

구하는 값 :

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}$

$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{16}}$

$= \frac{4}{3} + \frac{1}{60} = \frac{81}{60}$

$120S = \boxed{162}$

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = |\sin x| \cos x$$

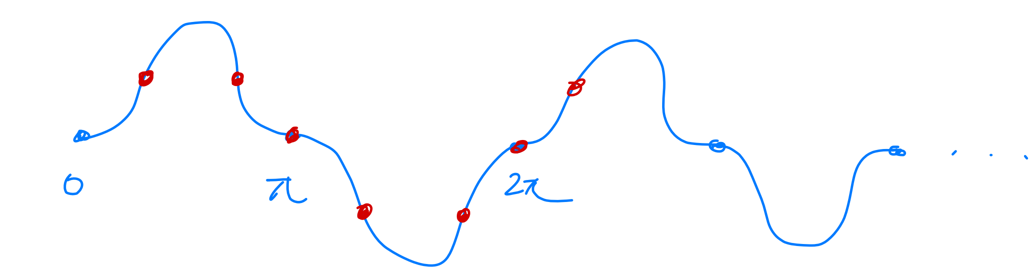
이다. 양수 a에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y = g(x)$라 하자. 함수

$$h(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\} dt$$

가 $x = a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\frac{100}{\pi} \times (a_6 - a_2)$의 값을 구하시오. [4점]

$f'(x) = \begin{cases} \sin x \cos x & (\sin x \geq 0) \\ -\sin x \cos x & (\sin x < 0) \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin^2 x + C_1 & (\ {}'' \ ) \\ -\frac{1}{2}\sin^2 x + C_2 & (\ {}'' \ ) \end{cases}$



$h'(x) = f(x) - g(x)$. 즉, $x = a$에서 $f(x) - g(x)$의 부호가 바뀜. $\to$ $g(x)$는 변곡접선.

$a_2 = \frac{3}{4}\pi$, $a_6 = 2\pi$

$\frac{100}{\pi}\left(2\pi - \frac{3}{4}\pi\right) = \boxed{125}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2024학년도 대학수학능력시험

수학 영역 정답표

(홀수)형

공통 과목						선택 과목								
						확률과 통계			미적분			기하		
문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점	문항번호	정답	배점
1	①	2	12	③	4	23	③	2	23	③	2	23	④	2
2	④	2	13	①	4	24	④	3	24	②	3	24	③	3
3	②	3	14	①	4	25	⑤	3	25	④	3	25	②	3
4	①	3	15	③	4	26	②	3	26	③	3	26	⑤	3
5	④	3	16	2	3	27	②	3	27	①	3	27	③	3
6	④	3	17	8	3	28	④	4	28	②	4	28	⑤	4
7	⑤	3	18	9	3	29	196	4	29	162	4	29	11	4
8	②	3	19	32	3	30	673	4	30	125	4	30	147	4
9	④	4	20	25	4									
10	②	4	21	10	4									
11	①	4	22	483	4									