Show and Prove

1

수리논술을 위한 Basic logic & 수학 1

저자 소개

SaP 시리즈 저자

김기대 T

- 고려대학교 수학과
- 2015~ 기대모의고사 저자
- 2023~ 기대 N제 저자
- 2023~ Show and Prove 1편~4편 저자
- 現) 오르비, 이투스, 대치명인 수능수학 & 수리논술 강의

1편 자문

한도현　경희대학교 의예과 장학생 (메디컬 논술 성적 상위 3등 이내)

1편 검토진

김기준	서울대학교 수학교육과	박도형	경희대학교 치의학과 (논술전형)
이재윤	한양대 공과대학 (한양대 입학처 모범답안 선정)	정소흔	이화여대학교 수학과 학사 고려대학교 수학교육과 석사

기대T 2024학년도 교재 커리큘럼

<table>
<tr><th>교재명</th><th>3월</th><th>4월</th><th>5월</th><th>6월</th><th>7월</th><th>8월</th><th>9월</th><th>10월</th><th>11월</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Show and Prove
수리논술 실전개념서</td><td colspan="4">1편 (교재 난이도 下~中)</td><td colspan="4"></td><td rowspan="3">학교별
Final
수업</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">2편 (교재 난이도 中~中上)</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="5">3편 (교재 난이도 上)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">기대 N제
수능수학 문제집</td><td></td><td colspan="6">시즌1</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="4">시즌2 (미정)</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>기대모의고사
수능수학 모의고사</td><td colspan="3"></td><td colspan="3">시즌1</td><td colspan="3">시즌2 (미정)</td></tr>
<tr><td colspan="10">- 학습기간은 책을 편 시점부터 3주를 넘기지 않는 것이 좋습니다. (한 권 기준)
- 음영구간은 ‘출판시기와 권장학습시즌’을 의미합니다.</td></tr>
</table>

교재 사용법

1. 학습 전 사전공부 권장량

1편 수리논술을 위한 Basic logic & 수학 1
고1 수학 학습 + 수학1 학습 + 수학2 기본개념 1회독

2편 수리논술을 위한 수학 2 & 미적분
본 시리즈 1편 학습 + 1편 누적 + 수학2 학습 + 미적분 학습

3편 수리논술을 위한 Advanced 미적분 & Advanced Theme
본 시리즈 2편 학습 + 2편 누적

4편 수리논술을 위한 기하와 확통 *(현강전용 교재)*
고1 수학 학습 + 수학1 학습 + 미적분 학습 + (본인 필요에 따라 선택) 확통, 기하 과목이수
(오르비, 포만한, 수만휘에 후기 작성시 추첨을 통해 4편(선택기하+선택확통)을 8월에 보내드립니다.
show and prove 검색시 나오는 게시글 기준이며, 쪽지를 통해 당첨안내 드립니다.)

2. 예제와 실전논제 활용법

예제와 실전논제에 대한 해설 전부는 해설집에 수록돼있으나, 일부는 문제집에도 동시 수록돼있습니다.
해설이 없는 문제는 없으니, 항상 해설집을 옆에 두고 공부하시기 바랍니다.
(Chapter별로 나뉘어져있는 예제해설모음 뒤에 논제해설모음이 있습니다.)

또한 예제와 실전논제에 있는 별표는 다음과 같이 활용하면 됩니다.

별표	설명	고민 정도	고민 시간
★☆☆☆☆	직전에 배운 개념을 가볍게 확인하기 위한 쉬운 문제	매우 빠르게	3분~5분 이내
★★☆☆☆	빈출하는 주제, 평이한 난이도의 문제	적당히	10분~15분 이내
★★★☆☆	실전 문제로 나오는 수준의 난이도이며, 고민에 가치가 있는 고난도 문제 (Like 준킬러문제)	넉넉히	15분~20분 이내
★★★★☆	합격자도 승률이 반반 정도인 문제 (Like 수능킬러문제)		20분~25분 이내
★★★★★	못 풀고도 합격이 가능할 만큼, 도전과 배움에 의의를 둔 초고난도 문제. 적당한 고민 후 해설로 빠른 학습 권장	빠르게	15분~20분 이내
꼭 고민시간을 지키지 않아도 됩니다. 풀릴 것 같다면 더 고민해도 됩니다.			

교재 소개

1. 수리논술을 지원하는 누구나 학습해야 하는 필독서

고난도 메디컬 수리논술 지원자부터 중위권 대학 수리논술 지원자까지!
최근 5개년 대한민국 수리논술 문제풀이를 위해 누구에게나 필요한 수리논술 필수실전개념과 문제해결 테크닉을 이 시리즈에 담았습니다.

2. 친절한 설명

10년 가까이 수리논술을 가르치면서, 학생들이 수리논술에서 어려워하는 포인트들을 캐치했습니다.
또한 강사에게 당연한 내용이 독자에겐 당연하지 않을 수 있음도 누구보다 잘 이해하고 있습니다.
책에 수록된 친절한 설명은 난해한 포인트에서도 독자의 원활한 수학적 이해를 돕습니다.

3. 수리논술 교육의 '잃어버린 10년'

전반적인 패치가 이루어진 2014년 부터의 현시대 수리논술은 '응용'이라는 이름으로 교육과정의 선을 교묘하게만 넘나들 뿐, 2013년 이전의 구시대 수리논술처럼 그 선을 화끈하게 넘기는 일은 절대 없었습니다.

하지만, 전반적으로 상향평준화된 수능교육과는 달리 논술교육에는 여전히 '구시대 수리논술 대비용' 교재와 강의들이 남아있습니다.
적합하지 않은 학습으로 낭비되는 학생들의 시간을 Save 하기 위한 수업구상과 교재집필을 위해 수년간 많은 고민을 했었고, 이번에 태어난 본 시리즈의 내용을 최근 수리논술 기출문제에 직접 적용해보면서 학생들이 안심하며 공부할 수 있도록 책을 구성했습니다.

4. 입시수학 끝판왕의 다양한 문제접근 Idea

대수능 (평가원) 수학영역 현장응시 5회 연속 100점, 수리논술 수학과 6회 합격(이공계 전체수석 포함)을 한 저자가 알려주는 문제접근 Idea는 독보적이고 창의적인 풀이에 도움을 줍니다.

5. 독보적인 교재 커리큘럼

대부분의 교재와 강의들은 시작부터 미적분을 안다는 전제로 시작하기 때문에
수리논술은 재수생이나 이미 유베이스인 수학 고수들의 전유물처럼 보이는 착시현상에 가려져 왔습니다.
하지만 본 시리즈는 상위수학과목의 개념 개입을 최소화할 수 있도록 내용을 나누어 1편~3편을 설계했기 때문에, 보다 빠른 시기에 수리논술 공부를 학생들이 시작할 수 있고 내용을 이해하기에도 수월하게 설계됐습니다.

수리논술 칼럼.1
왜 대학교 벽돌 쌓아주는 호구가 되려고 해.... :(

수리논술러들의 로망인 연세/한양을 지원하는 이유가 단지 '내가 가고 싶은 학교여서'면, 십중팔구 탈락한다.
마치 수능 All 2등급을 받고서 '난 의대 가고 싶으니까 정시 의대 넣을래!' 라고 하는 것과 다르지 않다.
후자는 미친 짓이라 하면서, 수리논술 지원자의 95%는 그 미친 짓을 똑같이 따라한다. Just 벽돌 기부.

'단순히 가고 싶은' 희망학교가 아닌 '그 중 내가 합격할 수 있는 학교' 혹은 '수리논술 대비를 해서 문제를 풀어낼 가능성이 있는 희망학교'를 탐색해서 영리하게 지원해야한다.
'출제 운에 따라 합격과 불합격이 갈리는 학교'를 지원하는 건, 책을 수능 전에 사서 미리 공부하고 있는 당신과 수능 후 논술벼락치기를 하는 학생과의 격차를 자체적으로 없애버리는 '셀프 페널티'를 지는 것과 같다.
진지하게 공부한 후, 9월쯤 본인의 수학성향과 아래 자료를 참고하여 충분히 고민한 후 맞는 학교에 지원하자. 장담컨대, 이 고민을 해보는 것만으로 합격확률이 20% 이상 올라간다. (아래 학교 대부분은 시험직전에 Final 수업 개강, 추후공지)

연세대						출제경향 유지	1	**2**	3	4	5
문제 순수 난이도	1	2	3	**4**	**5**	합격기대치	**1**	**2**	3	4	5
확통/기하 의존	1	2	3	4	**5**	지원매력	1	2	3	**4**	**5**

'확통/기하 자주 내고, 미적분도 어렵고, 문제를 다양하게 내서 출제경향성 없음.'
성향만 보면 절대 쓰면 안되는 학교지만, '최저등급없이 1번의 시험만으로 연대' 라는 압도적 리워드만으로 많은 학생들에게 지원 매력도가 높은 학교. 원서가 남는다면 지원해도 좋지만, 연세대에 붙고 싶다면 다음이 필수적으로 선행돼야 한다.
1) 과학논술 연대기출을 충분히 풀어보는 시간을 가질 것 (수능과 아예 다름)
2) 다양한 문제경험과 Idea 습득 (강의수강 여력 안되면 M사/D사 Pass라도 활용)

서울시립대						출제경향 유지	1	2	3	**4**	5
문제 순수 난이도	1	2	**3**	**4**	5	합격기대치	1	2	3	**4**	5
확통/기하 의존	1	2	3	**4**	5	지원매력	1	2	3	**4**	**5**

수능 전 시험이라 대부분 학생들이 준비가 되지 않은 상태로 시험을 보기 때문에, 미리 수리논술을 준비하고 있는 당신에게 유리한 학교가 될 수 있다. 출제경향성은 유지하는 편이지만 시험마다 체감 난이도 편차가 꽤 있다. 개수세기 문제의 풀이패턴 등 서울시립대 특유의 출제방향 파훼법을 익히면 극복이 가능한 편.
준비여부에 따라 체감난이도가 많이 차이 나는 학교이니 Final 수강 추천
(시립대 수리논술 전체수석출신 기대T의 시그니처 Final 중 하나)

한양대						출제경향 유지	1	**2**	**3**	4	5
문제 순수 난이도	1	2	**3**	**4**	**5**	합격기대치	1	2	**3**	4	5
확통/기하 의존	1	2	3	4	**5**	지원매력	1	2	3	**4**	**5**

연세대보다는 쉬운 문제들이 나오지만 (최근 쉬워지는 추세) 마찬가지로 한양대를 노리는 학생들이 상당히 많기 때문에, 붙고 싶다면 연세대 수리논술처럼 진지한 노력이 필요한 학교. 일본 본고사 문항 변형을 상당히 좋아하는 편이라, 일본 본고사 문항 수천문제 중 한양대 입맛에 맞는 문항들을 Final에서 다뤄보는게 좋다.
(본고사 문항 적중사례도 교재 2편에서 확인할 수 있다.)

이화여대 (약학과 포함)						출제경향 유지	1	2	**3**	**4**	5
문제 순수 난이도	1	**2**	**3**	**4**	5	합격기대치	1	2	**3**	**4**	5
확통/기하 의존	1	**2**	3	4	5	지원매력	1	2	3	4	**5**

과거엔 한양대 준비생에게 이화여대 기출문제를 숙제로 낼 만큼, 꽤 난이도 있는 문제들이 나왔으나, 최근 쉬워지고 있는 추세이다. 매년 입학처에서 진행하는 모의고사에서 출제된 소재들을 새로 조합하여 본 시험에서 내는 등 연계성이 돋보이는 학교이다. 이런 학교를 '대비하기 좋은 학교' 라 한다. 심지어 23년엔 약학과 논술이 신설됐는데, 정말 좋은 기회라 생각된다. 지원매력 5!!

서강대						출제경향 유지	1	2	3	**4**	**5**
문제 순수 난이도	1	2	**3**	**4**	5	합격기대치	1	2	**3**	4	5
확통/기하 의존	**1**	**2**	3	4	5	지원매력	1	2	**3**	**4**	5

미적분을 미친 듯이 좋아하는 학교. 기하가 시험범위에 있으나 기하를 잘 출제하지 않는다. (2019~2021년 아예 미출제) 확통문제도 출제되더라도 가벼운 문제며, 엔딩은 결국 미적분인 경우가 많다. 따라서 확통/기하 준비가 느슨한 학생들에게 지원 추천. 선발인원이 적다는 것이 표면적으론 단점처럼 보일 수 있지만, 경쟁률 보며 논술 지원하는건 어리석은 짓이다.

인하대 (의예과 포함)						출제경향 유지	1	2	3	**4**	**5**
문제 순수 난이도	1	2	**3**	**4**	5	합격기대치	1	2	3	4	**5**
확통/기하 의존	**1**	2	3	4	5	지원매력	1	2	3	4	**5**

인하대는 신이고, 수리논술계의 평가원이다. 문제간의 연계성을 깨닫는 순간, 체감난이도가 Hard에서 So so~Easy 까지 확 떨어지는 학교. 심지어 확/기 미출제 !!
넘치는 창의력을 조절 못하고 참신한 문제를 내곤 하지만, 나 말고도 모두가 처음보는 문제이므로 걱정할 필요없다. 출제 컨디션에 따른 운에 맡기는게 아닌 실력으로 당당히 합격하고 싶다면, 인하대 지원할 것! (Final 수강 개강추)

경희/중앙/과기대						출제경향 유지	1	2	3	**4**	5
문제 순수 난이도	1	**2**	**3**	4	5	합격기대치	1	2	3	**4**	5
확통/기하 의존	**1**	2	3	4	5	지원매력	1	2	3	**4**	**5**

서울과기대) 꽤나 수리논술다운 출제를 하나, 난이도는 높은 편이 아니다.
수리논술을 각잡고 공부했다면 매우 유리한 학교가 되겠다.
경희) '다 풀린거 같은데 마지막(혹은 계산)이 안돼요' 라 하지만, 마지막 한 끗 때문에 합불이 나뉘는 학교. 기출중심학습으로 그 한 끗을 넘는 훈련 필수!!
중앙) 적분이 자주 출제되는 학교이며, 전반적인 난이도가 쉬운 편이라서 합격컷이 80 중후반으로 형성되는 경우가 많다. 따라서 작성에서의 감점을 최소화해야 한다.

건국/세종/광운/숭실						출제경향 유지	1	2	**3**	**4**	5
문제 순수 난이도	1	**2**	**3**	4	5	합격기대치	1	2	**3**	**4**	5
확통/기하 의존	**1**	2	3	4	5	지원매력	1	2	3	**4**	5

건국) 기하가 범위에 없는데, 기하학 출제에 진심인 학교. 수학1 도형파트 학습이 핵심이며, 삼각함수 공식과의 콜라보도 준비하자. Final에서 여러 도형 상황 연습!
세종) 응시자의 수학실력 대비 어려운 미적분 문제를 즐겨 출제하나, 이 역시 핵심 Tip을 알고 있으면 문제풀이가 용이하다. Final 추천.
광운) 비교적 쉬운 출제인 편이며, 증명문제가 합불을 가르는 핵심문제로 출제된다.
숭실) 비교적 쉬운 무색무취의 출제를 하는 편. 경희대처럼 기출에 충실할 것!

Warning) 모든 민감정보(ex. 확통/기하 출제여부, 경향성, 수능 전/후 시험 등)는 2023년 초 기준이므로,
반드시 매년 5~6월에 각 학교 입학처 홈페이지에서 나오는 새로운 당해 전형확정안을 확인하도록 하자.

목차

CHAPTER.1
수리논술의 기본
12P

1. 답안작성법과 기호
2. 답안작성 Tip
3. 수리논술 공부 Tip

CHAPTER.2
증명법
28P

1. 직접증명법
2. 간접증명법
3. 기본적인 수학적 귀납법
4. 강한 수학적 귀납법
5. 귀류법
6. 대우법
7. 실전논제 풀어보기

CHAPTER.3
도형
56P

1. 사인법칙과 코사인법칙 증명
2. 사인법칙 활용
3. 코사인법칙 활용
4. 사인법칙과 코사인법칙의 사용 타이밍
5. 코사인 법칙 단골 삼각형
6. 중학도형 성질 총정리
7. 실전논제 풀어보기

CHAPTER.4
삼각함수와 수열
98P

1. 삼각함수 기본공식
2. 삼각함수 특수각의 확장
3. 점화식에서 수열 일반항 유도
4. 삼각함수 배각공식과 수열의 일반항 연계플레이
5. 수열의 최대최소 판별법
6. 자연수 거듭제곱의 합
7. 망원급수
8. 실전논제 풀어보기

CHAPTER.5
최근 기출 갈무리
124P

Show and Prove

1-3

Chapter 1. 수리논술의 기본

수리논술 공부 Tip

1. 본 시리즈에 나오는 기본공식 증명들은 다 외우자.

수리논술이 어렵다고 생각하는 이유가 '내가 그런 생각을 어떻게 해?' 라는 생각이 자주 들기 때문일 것이다.
하지만 이러한 생각이 드는 이유는 수리논술이 터무니없이 어렵게 출제돼서가 아닌,
암기에만 의존한 지금까지의 수능공부 때문이다.

아래 문제를 풀어본 후 다음 페이지의 해설을 봐보자.

예제 4 ★★★☆☆ 2022 인하대 모의논술

서로 다른 두 실수 a, b와 $f(a)=f(b)=0$인 임의의 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)f''(x)dx \cdots ①$$

를 만족시키는 이차함수 $g(x)$는 $g(x)=\frac{1}{2}(x-a)(x-b)$ 임이 알려져있다. 이를 이용하여

임의의 다항함수 $h(x)$와 $g(x)=\frac{1}{2}(x-a)(x-b)$에 대하여

$$\int_a^b h(x)dx=\frac{(h(a)+h(b))(b-a)}{2}+\int_a^b g(x)h''(x)dx$$

임을 보이시오. (제시문 생략 버전)

연습지

해설
4

$f(x)=h(x)-\left\{\frac{h(b)-h(a)}{b-a}(x-a)+h(a)\right\}$ 라 하면 $f(a)=f(b)=0$ 이므로, 문제의 ① 식에 밑줄 식과 $f''(x)=h''(x)$를 대입하여 계산하면

(계~산~과~정)

(계~산~과~정)

이므로 $\int_a^b h(x)dx=\frac{(h(a)+h(b))(b-a)}{2}+\int_a^b g(x)h''(x)dx$ 임을 알 수 있다.

이 문제는 ①식에 대입하는 것이 어렵다기보다는, $f(x)=h(x)-\left\{\frac{h(b)-h(a)}{b-a}(x-a)+h(a)\right\}$ 임을 떠올리는게 어려웠을텐데 이 Idea는 어떻게 떠올릴 수 있을까??

이 Idea는 이미 교과서에서 평균값의 정리를 증명하면서 제시된 Idea이다. 다음 증명에서 확인해보자.

증명

평균값의 정리

롤의 정리를 이용하여 평균값 정리를 증명해보자.

두 점 $\mathrm{A}(\mathrm{a},\ \mathrm{f}(\mathrm{a}))$, $\mathrm{B}(\mathrm{b},\ \mathrm{f}(\mathrm{b}))$를 지나는 직선의 방정식을 $y=g(x)$라고 하면

$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

이다.

이때 $i(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right\}$ 라고 하면

함수 $i(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하며 $i(a)=i(b)=0$ 이다.

따라서 롤의 정리에 의하여

$$i'(c)=f'(c)-g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다. 즉,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

앞선 해설과 본 증명을 비교해보면 함수치환 뿐만 아니라 그 이후의 결과 ($i(a)=i(b)=0$) 까지도 완전한 판박이 Idea임을 알 수 있다.

우리가 낯설게 느끼는 대부분의 Idea나 증명은 이미 우리가 교과서나 기출에서 경험해봤던 Idea나 증명에서부터 시작되므로, 본 시리즈에서 제공하는 기본공식증명은 전부 흡수하도록 하자.

2. 제시문은 너무 소중한 Hint

제시문 없는 학교

문제만 덜렁 던져주고 '어디 한 번 풀어봐!' Style 이기 때문에, 까다롭다고 평가되는 학교들의 특징이다.
문항에 대한 Hint은 적지만, 학교별로 출제스타일이나 자주 출제하는 문제풀이 Idea 유형이 분명히 있기 때문에 이를 잘 짚어주는 후반기 학교별 Final을 수강하는게 좋다.

제시문 있는 학교

문제풀이에 사용되는 교과개념이나 문제풀이의 핵심 Key를 알려준다. 하지만 대부분의 학생들은 제시문을 너무 쉽게 무시해버리는 경우가 있는데, 이는 주어진 Hint를 직접 걷어차는 꼴이다.

전 페이지에서 본 〈예제 4〉는 제시문 삭제버전인데, 원래 제시문은 아래와 같다. 제시문이 〈예제 4〉와 같이 붙어있다고 생각하고 문제를 다시 봐보자.

제시문

$x_1 \neq x_2$일 때, 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

뜬금없이 제시문에 직선의 방정식이 주어졌다.

과연, 출제진은 학생들이 직선의 방정식을 모를 것 같아서 제시해준 걸까?

당연히 아니다. 그럼에도 제시문을 준 이유는??
〈해설 4〉의 핵심 Idea였던 $\underline{f(x) = h(x) - \left\{\frac{h(b) - h(a)}{b - a}(x - a) + h(a)\right\}}$ 에서 직선의 방정식 part인 $\frac{h(b) - h(a)}{b - a}(x - a) + h(a)$를 떠올리는 데에 도움이 되라고 준 출제진의 배려[11]이다.

이 배려를 눈치채고 잘 활용하는 것 역시 수리논술 실력이라 할 수 있다.

cf. '난 하드코어모드로 공부하겠어. 제시문이 나와도 공부할 땐 우선 무시!!' 하는 자세 역시 좋지 않다.
제시문을 문제에 맞게 잘 성형해서 생각의 물꼬를 트는 연습도 필요하기 때문이다.
반대로, '내가 지원하는 학교들은 다 제시문 주더라. 제시문 없는 어려운 문제 안풀겠어.' 역시 좋지 않다.
평소엔 제시문이 친절하다가 당해 시험에서는 친절하지 않을 수도 있기 때문이다.
수능이든 논술이든 '배제'는 좋지 않다. 모든 Case에 대비해서 공부하도록 하자.

11) 학교별성향에 따라 제시문 제공여부 혹은 배려의 깊이 정도가 다 다름을 인지하자.

예제 5 ★★★☆☆ 2020 숙명여대 기출

제시문 일부

〈나〉 함수 $g(x)=\begin{cases} x\ (x \geq 0) \\ 0\ (x<0) \end{cases}$와 함수 f, $a<b$인 실수 a,b가 있다. 이 때, 모든 실수 x에 대하여

$$g(f(x)-a)+a \leq g(f(x)-b)+b \cdots ②$$

가 성립한다. 이는 다음과 같이 보일 수 있다.
먼저, $f(x) \geq b$이면 $f(x) \geq b > a$이므로,
$g(f(x)-a)+a=f(x)-a+a=f(x)$이고 $g(f(x)-b)+b=f(x)-b+b=f(x)$이다.
이제 $a \leq f(x)<b$이면,
$g(f(x)-a)+a=f(x)-a+a=f(x)$ 이고 $g(f(x)-b)+b=b$이다.
마지막으로 $f(x)<a$이면 $f(x)<a<b$이므로,
$g(f(x)-a)+a=a$이고 $g(f(x)-b)+b=b$이다.
따라서, ②는 성립한다.

한편, 아래의 명제를 생각하자. 함수 f가 모든 실수 x에 대하여

$$g(f(x)-2)+2 \leq g(f(x)-1)+1$$

을 만족시키는 것은 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 2$이기 위한 필요충분조건이다. ⋯ ③

명제 ③은 ②를 이용하여 다음과 같이 보일 수 있다. 함수 f가 모든 실수 x에 대하여

$$g(f(x)-2)+2 \leq g(f(x)-1)+1 \quad \cdots ④$$

을 만족시킨다고 하자. 결론을 부정하여 어떤 실수 c에 대하여 $f(c)<2$라고 가정하자.
④에 의하여 $g(f(c)-2)+2 \leq g(f(c)-1)+1$이고, ②에 의하여
$g(f(c)-1)+1 \leq g(f(c)-2)+2$이므로, $g(f(c)-2)+2=g(f(c)-1)+1$이다.
이것은 모순임을 보일 수 있다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 2$이다.
역으로 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 2$이면, 모든 실수 x에 대하여
$g(f(x)-2)+2 \leq g(f(x)-1)+1$이 성립함도 보일 수 있다.

제시문 〈나〉를 읽고 함수 $h(x)=\begin{cases} 0\ (x>0) \\ x\ (x \leq 0) \end{cases}$에 대한 다음 문제에 답하시오.

[5-1] 임의의 함수 f와 임의의 실수 a,b에 대하여, $a<b$이면 모든 실수 x에 대하여

$$h(f(x)-a)+a \leq h(f(x)-b)+b$$

가 성립함을 보이시오.

[5-2] 함수 f가 모든 실수 x에 대하여

$$h(f(x)-7)+7 \leq h(f(x)-5)+5$$

를 만족시키는 것은 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \leq 5$이기 위한 필요충분조건임을 보이시오.

해설
5

[5-1]
먼저 $f(x)>b$이면, $f(x)>b>a$ 이므로, $h(f(x)-a)+a=a$이고, $h(f(x)-b)+b=b$이다.
따라서 부등식이 성립한다.

이제 $a<f(x)\le b$이면, $h(f(x)-a)+a=a$이고, $h(f(x)-b)+b=f(x)-b+b=f(x)$이다.
따라서 부등식은 성립한다.

마지막으로 $f(x)\le a$이면, $f(x)\le a<b$이므로 $h(f(x)-a)+a=f(x)-a+a=f(x)$이고,
$h(f(x)-b)=b=f(x)-b+b=f(x)$이다. 따라서 부등식은 성립한다.

[5-2]
(i) 명제 : '함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $h(f(x)-7)+7\le h(f(x)-5)+5$이면 $f(x)\le 5$'
임을 귀류법을 이용하여 보이자.

결론을 부정하여 어떤 실수 c에 대하여 $f(c)>5$라고 가정하자. 그러면 $h(f(c)-5)+5=5$이다.
한편, $5<f(c)\le 7$일 때 $h(f(c)-7)+7=f(c)$이고 $f(c)>7$일 때, $h(f(c)-7)+7=7$ 인데
$f(c)$, 7 모두 5보다 큰 수이므로 $h(f(c)-7)+7>h(f(c)-5)+5$ 임을 알 수 있다.
이는 위 명제의 전제에 $x=c$를 대입한 식 $h(f(c)-7)+7\le h(f(c)-5)+5$ 과 모순이므로,
귀류법에 의하여 위 명제를 증명할 수 있었다.

(ii) 명제 : '함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le 5$이면 $h(f(x)-7)+7\le h(f(x)-5)+5$'
임을 보이자.

$f(x)\le 5<7$이므로, 모든 실수 x에 대하여 $h(f(x)-7)+7=f(x)=h(f(x)-5)+5$가 성립한다.
따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le 5$일 때 $h(f(x)-7)+7\le h(f(x)-5)+5$가 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 '모든 실수 x에 대하여 $h(f(x)-7)+7\le h(f(x)-5)+5$'와 '모든 실수 x에 대하여
$f(x)\le 5$'가 서로 필요충분조건임을 보였다.

예제 5번은 제시문과 해설을 비교해서 읽어보면 완벽히 제시문과 문제접근방식이 판박이인 문제임을 알 수 있다.[12)]
이렇게 친절한 제시문이 나왔을 경우는 무작정 문제에 머리부터 박지 말고

'이걸 어떻게 활용해서 문제를 풀까?'

란 고민을 꼭 해보기 바란다.

12) 물론, 제시문처럼 보이는 것보단 해설답안처럼 보이는 것이 더 증명문법에 어울리는 답안이긴 하다. 둘의 차이를 느껴보면 좋을 듯 :)

수열의 최대최소 판별법

수열의 정의는 ‘자연수 집합을 정의역으로 하고 실수 집합을 공역으로 하는 함수’ 이다.
함수에서 최대최소 판별은 일반적으로 미분을 활용하기 때문에, 수열 역시 미분을 활용하면 된다.

1. 미분을 활용한 수열의 최대최소 판별

예를 들어 수열 $a_n = n^4 - 3n^3 + 9$의 최솟값을 찾는 문제가 있다고 하자.

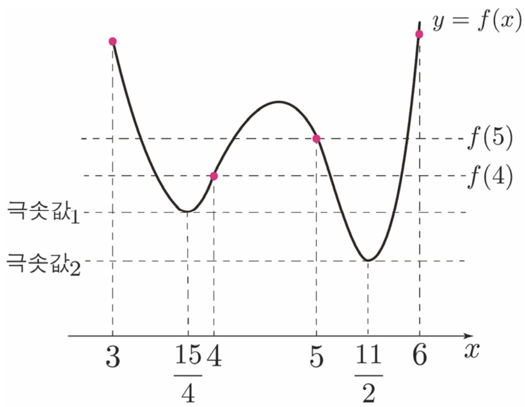
$f(x) = x^4 - 3x^3 + 9$을 미분하여 $4x^3 - 9x^2 = 0$, $x = \frac{9}{4}$에서 유일한 극소니까 최소!!

라고 하고 싶은데, 수열에서의 n은 자연수라는 점이 문제가 된다. 수열의 정의 때문에 $a_{\frac{9}{4}}$ or a_0가 최솟값이라고 주장할 수 없기 때문이다.

물론 해결법은 있다. $x = \frac{9}{4}$ 주변의 자연수 $x = 2,\ 3$에서의 수열값을 계산한 후 제일 작은 것을 정답으로 채택하면 된다.

위 문제에선 극소가 $x = \frac{9}{4}$에서만 극소이기 때문에 $a_2,\ a_3$만 비교하면 되지만, 극소가 여럿 존재하는 문제라면 조사해야하는 자연수의 개수가 2배씩 증가하고, 이것이 미분풀이의 최대약점이다.

이번엔 본 Part에서 생길 수 있는 오개념에 대해 알아보자.
어떤 수열 $a_n = f(n)$의 최솟값을 묻는 문제이고, 함수 $y = f(x)$의 그래프가 다음과 같다고 하자.



극솟값이 두 개가 있고 극소가 되는 x가 $\frac{15}{4},\ \frac{11}{2}$로 자연수가 아니므로 두 수의 주변에 있는 자연수인 3과 4, 그리고 5와 6에 대한 a_n 값을 조사해줘야 수열의 최솟값을 구할 수 있는데,[42] 이 4개 값의 비교가 귀찮은 어떤 학생이 다음과 같은 질문을 한다.

Q. a_n의 최솟값을 찾는 문제니까, 다 조사할 필요 없이 극솟값 중 제일 작은 극솟값을 갖는 수 주변의 자연수만 조사해도 충분하지 않을까요??

42) 이번엔 $2 \times 2 = 4$개의 수열값을 비교해야되므로, 이 문제 역시 미분풀이의 단점이 부각된다.

A. 그러면 안된다. 그 논리에 의하면 a_5, a_6 중에 최솟값이 있을 것 같지만 그래프에서 볼 수 있듯이 a_4가 제일 작은 값이다.

즉, 아무리 잔꾀를 굴려봐도 결국 최종적으로 수열값을 조사해야하는 n의 개수는 2X극소점개수.
으로 고정이고, 이게 미분풀이의 단점 (다수의 연산 동반)이다.

2. 부등식을 활용한 최대최소 판별

이러한 미분풀이를 대체[43)]하는 풀이는 일명 '전국 1등은 전교 1등 중에 있다.' 풀이이다. (???)

수열의 최댓값을 찾는 문제가 있을 때, a_n이 최대가 되는 n은 두 부등식 $a_{n-1} \leq a_n$과 $a_{n+1} \leq a_n$을 우선 만족시켜야 한다.
주변에 있는 a_{n-1}, a_{n+1} 보다 작으면서 어떻게 전체 1등값이 될 수 있겠는가??
즉, 저 부등식을 풀어 n을 얻어내는 것은 전교 1등들을 우선적으로 고르는 작업에 해당한다.
이렇게 얻어낸 n을 a_n에 대입한 후 그 중 제일 큰 값을 찾으면, 그게 a_n의 최댓값이 된다.
전교 1등들 중 전국 1등을 찾은 것이다.

반대로 a_n이 최소가 되는 n은 두 부등식 $a_{n-1} \geq a_n$과 $a_{n+1} \geq a_n$을 우선 만족시켜야 한다.
이전 그래프의 예로 본다면 이 부등식의 해는 $n=4$로 유일함을 알 수 있다.[44)]

단순히 생각하면 해야할 연산이 4배 줄어든 것이다![45)]

물론 저 부등식을 만족시키는 n 역시 여러 개가 있을 수 있지만, 미분풀이 때보다 그 개수가 덜 나온다는 것이 Fact!

따라서 미분풀이와 대체풀이 모두 숙지해두도록 하자.

43) 수열의 일반항이 미분 불가능한 식이 나올 때도 있다. 미분불능이 아니고 그냥 미분하기가 까다로운 식. 본 교재 뒤에서 곧 구경예정.
44) 대체풀이는 그래프 전부를 보는 것이 아닌 수열값이 찍힌 점(색점) 들만 비교하면 된다.
45) 정답이 특정되는 방법 vs 4개 값 비교해야하는 미분 방법

예제 9 ★★☆☆☆ 2021 한양대

자연수 n 에 대하여 한 변의 길이가 $n^2-12n+37$ 인 정사각형의 넓이를 a_n ,
한 변의 길이가 $2n+1$ 인 정사각형의 넓이를 b_n 이라고 하자.

$\dfrac{a_n}{b_n}$ 이 최소가 되는 n 을 구하고, 이 때 $\dfrac{a_n}{b_n}$ 의 값을 구하시오.

연습지