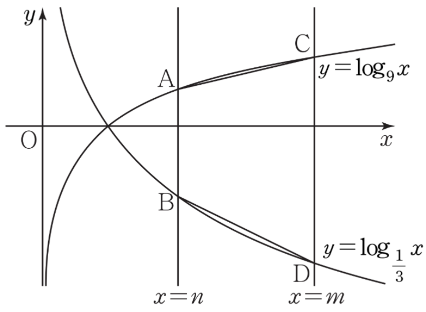
001

그림과 같이 1이 아닌 20 이하의 두 자연수 m, n $(m > n)$에 대하여 두 곡선 $y = \log_9 x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$가 직선 $x = n$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고 두 곡선 $y = \log_9 x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$가 직선 $x = m$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ABDC의 넓이가 $\frac{27}{2}$일 때, $m+n$의 값을 구하시오.

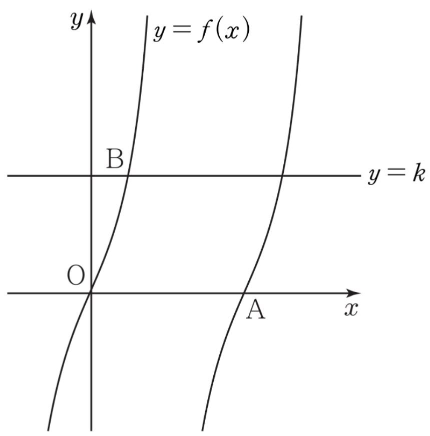


002

두 양수 a, b에 대하여 주기가 4인 함수 $f(x) = a\tan bx$가 있다. $0 < x < 6$에서 함수 $y = f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 A, $0 < x < 4$에서 함수 $y = f(x)$의 그래프가 직선 $y = k$ $(k > 0)$과 만나는 점을 B, 동경 OB가 나타내는 각의 크기를 θ라 하자.

$\tan\theta = 3$, $\angle \mathrm{BAO} = \frac{\pi}{4}$일 때, $f(k) + \overline{\mathrm{OB}}^2$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이다.)



003

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - ax^2}{x-3} = -2$

(나) $\lim_{x\to -3} \frac{f(x)}{x+3} = -2$

$f(2)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

004

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x) = 2x+1$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다.

(나) 함수 $|f(x) - g(x)|$는 $x = 6$에서만 미분가능하지 않다.

(다) 함수 $|f(x) - g(x)|$는 $x = 3$에서 극댓값을 갖는다.

$f(7)$의 값을 구하시오.

001

사각형 ABDC는 두 변 AB와 CD가 평행한 사다리꼴이다.

$$\overline{\mathrm{AB}}=\log_9 n-\log_{\frac{1}{3}} n=\frac{1}{2}\log_3 n+\log_3 n=\frac{3}{2}\log_3 n$$

$$\overline{\mathrm{CD}}=\log_9 m-\log_{\frac{1}{3}} m=\frac{1}{2}\log_3 m+\log_3 m=\frac{3}{2}\log_3 m$$

사다리꼴 ABDC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\log_3 m+\frac{3}{2}\log_3 n\right)\times(m-n)$이므로

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\log_3 m+\frac{3}{2}\log_3 n\right)\times(m-n)=\frac{27}{2}$$

$$\frac{3}{4}(m-n)\log_3 mn=\frac{27}{2}$$

$$\log_3 mn=\frac{18}{m-n}$$

$$mn=3^{\frac{18}{m-n}}\ \cdots\ ㉠$$

이때 m, n이 1이 아닌 20 이하의 자연수이고 $m>n$이므로 $m-n$은 자연수이다.

mn은 자연수이므로 ㉠을 만족시키기 위해서는 $m-n$이 18의 양의 약수이어야 한다.

(i) $m-n=1$일 때, $m=n+1$이고

$mn=3^{18}$에서 $n(n+1)=3^{18}$, $n^2+n-3^{18}=0$

이때 이를 만족시키는 20 이하의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $m-n=2$일 때, $m=n+2$이고

$mn=3^9$에서 $n(n+2)=3^9$, $n^2+2n-3^9=0$

이때 이를 만족시키는 20 이하의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(iii) $m-n=3$일 때, $m=n+3$이고

$mn=3^6$에서 $n(n+3)=3^6$, $n^2+3n-3^6=0$

이때 이를 만족시키는 20 이하의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(iv) $m-n=6$일 때, $m=n+6$이고

$mn=27$에서

$n(n+6)=27$, $n^2+6n-27=0$, $(n-3)(n+9)=0$

이때 n은 20 이하의 자연수이므로 $n=3$이고 $m=9$

(v) $m-n=9$일 때, $m=n+9$이고

$mn=9$에서 $n(n+9)=9$, $n^2+9n-9=0$

이때 이를 만족시키는 20 이하의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(vi) $m-n=18$일 때, $m=n+18$이고

$mn=3$에서 $n(n+18)=3$, $n^2+18n-3=0$

이때 이를 만족시키는 20 이하의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i) ~ (vi)에 의하여 $m=9$, $n=3$이므로

$$m+n=9+3=12$$

002

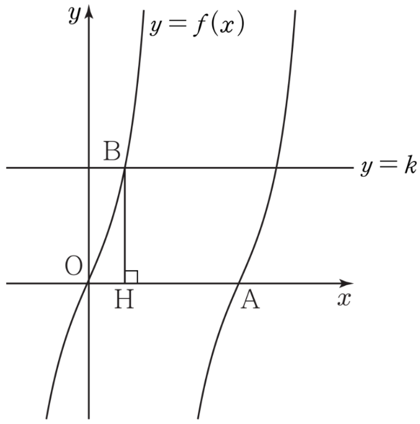
함수 $y=f(x)$의 주기가 4이므로 $\frac{\pi}{b}=4$, 즉

$$b=\frac{\pi}{4}$$

$\overline{\mathrm{OA}}=4$이므로 점 A의 좌표는 $(4,\ 0)$이다.

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle\mathrm{BAO}=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}=k,\ \overline{\mathrm{OH}}=4-k$$



직각삼각형 BOH에서 $\tan\theta=\tan(\angle\mathrm{BOH})=3$이므로

$$\frac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{OH}}}=\frac{k}{4-k}=3,\ k=3$$

점 B의 좌표가 $(1,\ 3)$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 B를 지나므로

$$f(1)=a\tan\left(\frac{\pi}{4}\times 1\right)=a\tan\frac{\pi}{4}=a=3$$

따라서 $f(x)=3\tan\frac{\pi x}{4}$이다.

$$f(k)=f(3)=3\tan\frac{3\pi}{4}=-3$$

$$\overline{\mathrm{OB}}^2=1^2+3^2=10$$

따라서

$$f(k)+\overline{\mathrm{OB}}^2=-3+10=7$$

003

조건 (가)에서 $f(x)-ax^2$은 일차항의 계수가 -2인 일차함수이므로

$f(x)-ax^2=-2x+b$ (b는 상수)라 하자.

조건 (나)에서 $x \longrightarrow -3$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\longrightarrow 0$이므로

(분자) $\longrightarrow 0$이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x\to-3} f(x)=\lim_{x\to-3}(ax^2-2x+b)=9a+6+b=0$$

에서

$$b=-9a-6 \cdots ㉠$$

$$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{ax^2-2x-9a-6}{x+3}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(ax-3a-2)}{x+3}$$

$$=\lim_{x\to-3}(ax-3a-2)=-6a-2=-2$$

에서

$$a=0$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$b=-6$$

따라서 $f(x)=-2x-6$이므로

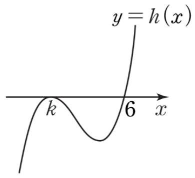
$$f(2)=-4-6=-10$$

004

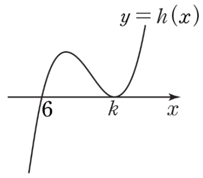
$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 조건 (가)에 의하여 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 또 조건 (나)에 의하여 $h(6)=0$이므로

$h(x)=(x-6)(x-k)^2$ (단, k는 6이 아닌 상수)로 놓을 수 있다.

즉, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음 두 가지 중 하나이다.



[그림 1]



[그림 2]

이때 조건 (다)를 만족시키려면 함수 $y=h(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같아야 하며 함수 $h(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가져야 한다.

$$h'(x)=(x-k)^2+2(x-6)(x-k)$$

$$=(x-k)(3x-k-12)$$

이고 $h'(x)=0$에서 $x=k$ 또는 $x=\frac{k+12}{3}$이므로

$$\frac{k+12}{3}=3$$

$$k=-3$$

따라서 $h(x)=(x-6)(x+3)^2$이고

$f(x)=h(x)+g(x)=(x-6)(x+3)^2+2x+1$이므로

$$f(7)=1\times 100+15=115$$