2024 EBS 수능특강 수학Ⅱ 7. 정적분의 활용

p089 예제1 단순변형

1. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 곡선$y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

(가) 방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 실수 x의 값은 $0,1,2$이다. (나) $\int_{-1}^{1} f(x)dx=-6$

1)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{2}{5}$

p089 유제1 단순변형

2.다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+6x-4$이고 $f(0)=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? 2)

① $\frac{131}{4}$ ② $\frac{133}{4}$ ③ $\frac{135}{4}$ ④ $\frac{137}{4}$ ⑤ $\frac{139}{4}$

p091 유제3 단순변형

3. 곡선 $y=-x^3+2x^2+3x$ 위의 점 $(2,6)$에서의 접선을 l이라 할 때, 곡선 $y=-x^3+2x^2+3x$와 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이는? 3)

① $\frac{47}{3}$ ② $\frac{53}{3}$ ③ $\frac{59}{3}$ ④ $\frac{64}{3}$ ⑤ $\frac{71}{3}$

p091 유제4 단순변형

4.두 함수 $f(x)=\begin{cases} x+2 & (x<0) \\ -x^2+2 & (x \geq 0) \end{cases}$과 $g(x)=x^2$에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? 4)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 5

p093 유제5 단순변형

5. 곡선 $y=(x+a)(x+1)^2$ $(x \geq -a)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가
곡선 $y=(x+a)(x+1)^2$ 과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 서로 같을 때, 상수 a의 값은? (단, $0<a<1$) 5)

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

p095 예제4 단순변형

7.수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=2t+a$ 이다.
시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량이 2일 때, 시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, a는 상수이다.)7)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

p093 006 단순변형

6. 함수 $f(x)=x^2+2$ $(x \geq 0)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x-2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)6)

p095 유제7 단순변형

8. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=t^2-6t$ 이다.$t=0$에서의 점 P의 위치와 $t=a$에서의 점 P의 위치가 서로 같을 때, 양수 a의 값은? 8)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

p096 002 단순변형

9. 곡선 $y=x^3-2x^2+x$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?9)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{5}{12}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

p096 003 단순변형

10. $y=-x^3-x^2$과 직선 $y=-2x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오10)

p096 004 단순변형

11. $y=ax^2$, $y=-ax^2+8a$로 둘러싸인 부분의 넓이가 64일 때, 양수 a의 값은?11)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

p097 005 단순변형

12. 곡선 $y=x^2-2x-3$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y=x^2-2x-3$ $(x \geq 3)$와 x축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같을 때, 상수 k의 값은?(단, $k>3$) 12)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

p097 007단순변형

13. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도$v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases} 3t^2+3 & (0 \leq t < 1) \\ -2t^2+8 & (t \geq 1) \end{cases}$$ 이다.

점 P가 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리는? 13)

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

p097 008단순변형

14. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 할 때,

$v_1(t)=3t^2-4t$, $v_2(t)=8t+2$ 이다.

출발한 후 두 점 P, Q의 가속도가 서로 같아지는 순간 두 점 P, Q의 위치는 각각 x_1, x_2이다. x_1+x_2의 값을 구하시오. 14)

p098 003단순변형

15. 양수 a에 대하여 곡선$y=x(x-a)$ $(x \geq a)$와 x축 및 직선 $x=3a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=x(x-a)$ $(x \geq 0)$ 과 y축 및 직선 $y=6a^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $S_2-S_1=\dfrac{53}{48}$ 일 때, a의 값은?15)

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{2}{5}$

p098 003단순변형

16.다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^2}{x}=-2$
(나) 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 -7이다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=f'(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?16)

① 30 ② 33 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

p99 007단순변형

17.함수$f(x)=x^3-3x^3+3x-6$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때,

$S-\int_0^3 g(x)dx$의 값을 구하시오.17)

p99 008단순변형

18. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 할 때,

$v_1(t)=4t^3+4t$, $v_2(t)=6t^2+2t$ 이다.

시각 $(0\leq t\leq 2)$에서의 두 점P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 할 때, $|x_1(t)-x_2(t)|$의 최댓값은?18)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

p100 001 단순변형

19. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=f(x)-|f(x)|$

라 하고, 함수 $h(x)=\int_{0}^{x} g(t)dt$라 할 때, 두 함수 $g(x)$와 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.[19)]

(가) $g(0)=0$
(나) 방정식 $h(x)=0$의 실근은 $x=0$뿐이다.

$f(1)=-2$일 때 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{25}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{29}{4}$
④ $\frac{31}{4}$ ⑤ $\frac{33}{4}$

p101 004 단순변형

20. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(1)=0$, $f'(-1)=0$
(나) $f(1)f(-1)\le 0$
(다) $f(1)f(-1)<0$이면 $f(0)=0$이다.

두곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 54일 때, $f(2)$의 최댓값은?[20)]

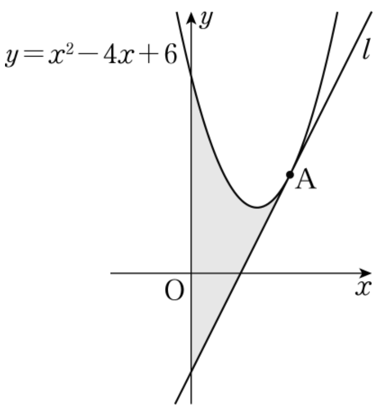
① 16 ② 32 ③ 64
④ 128 ⑤ 256

p096 002 응용변형

21. 곡선 $y=-x^2+4x-4$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $12S$의 값을 구하시오.21)

p096 003 응용변형

22. 그림과 같이 곡선 $y=x^2-4x+6$ 위의 점 $\mathrm{A}(3,\ 3)$에서의 접선을 l이라 할 때, 곡선 $y=x^2-4x+6$과 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? 22)



① $\frac{26}{3}$ ② 9 ③ $\frac{28}{3}$

④ $\frac{29}{3}$ ⑤ 10

p091 유제 4 응용변형

23. 두 함수

$$f(x)=x^2-4x,\quad g(x)=\begin{cases}-x^2+2x & (x<2)\\ -x^2+6x-8 & (x\geq 2)\end{cases}$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? 23)

① $\frac{40}{3}$ ② 14 ③ $\frac{44}{3}$

④ $\frac{46}{3}$ ⑤ 16

p095 유제 7 응용변형

24. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는

점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2+6t-a$$

이다. 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치가 6일 때, 상수 a의 값을 구하시오. 24)

p095　　유제 8 응용변형

25. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 4t^3 - 48t$$

이다. 시각 $t = k\,(k > 0)$에서 점 P의 가속도가 0일 때, 시각 $t = 0$에서 $t = k$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. (단, k는 상수이다.) 25)

p098　　001 응용변형

26. 두 양수 a, $b(a < b)$에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x) = (x-a)(x-b)$라 하자.

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{11}{6},\ \int_0^b f(x)dx = -\frac{8}{3}$$

일 때, 곡선 $y = f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? 26)

① 4　② $\frac{9}{2}$　③ 5　④ $\frac{11}{2}$　⑤ 6

p099 006 응용변형

27.최고차항의 계수가 -3인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$와 원점에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는? 27)

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4

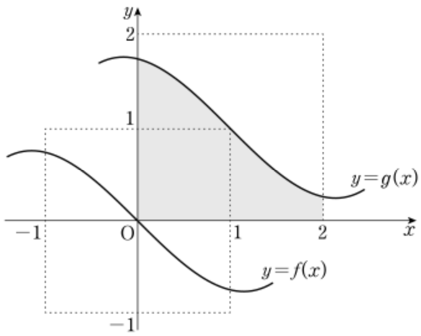
④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

p100 003 응용변형

28. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)=-f(1+x)$를 만족시킨다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=-6x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오.28)

p098 002 응용변형

29. 그림은 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$인 연속함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 함수 $y=g(x)$의 그래프이다. $\int_0^2 g(x)\,dx$의 값은?29)

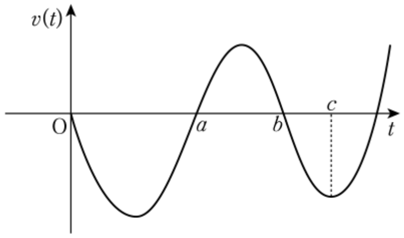


① $\frac{7}{4}$ ② 2 ③ $\frac{9}{4}$

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

p101 005 응용변형

30. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같다.



점 P가 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꿀 때의 위치는 -8이고 점 P의 시각 $t=c$에서의 위치는 -6이다.

$\int_0^b v(t)dt = \int_b^c v(t)dt$일 때, 점 P가 $t=a$부터 $t=b$까지 움직인 거리는? 30)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

정답 및 해설

1	③	2	①	3	④	4	②	5	②
6	7	7	②	8	⑤	9	②	10	$\frac{37}{12}$
11	③	12	⑤	13	⑤	14	20	15	①
16	③	17	$\frac{45}{4}$	18	④	19	②	20	①
21	32	22	②	23	①	24	16	25	80
26	②	27	③	28	2	29	②	30	③

1) 정답 ③

[출제범위] 곡선과 x축 사이의 넓이

[해설]

조건 (가)에서

$f(x)=ax(x-1)(x-2)=a(x^3-3x^2+2x)$ (a는 0이 아닌 상수)로 놓을 수 있다.

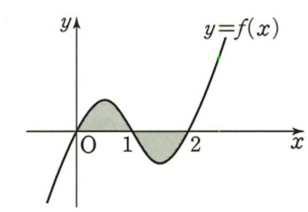
조건 (나)에서

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1} a(x^3-3x^2+2x)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(-3ax^2)dx=2\left[-ax^3\right]_0^1=-2a=-6$$

이므로 $a=3$, $f(x)=3(x^3-3x^2+2x)$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$$\int_{0}^{2}|f(x)|dx$$

$$=\int_{0}^{1}(3x^3-9x^2+6x)dx+\int_{1}^{2}(-3x^3+9x^2-6x)dx$$

$$=\left[\frac{3}{4}x^4-3x^3+3x^2\right]_0^1+\left[-\frac{3}{4}x^4+3x^3-3x^2\right]_1^2$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$$

필수 개념

▸ 곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{a}^{b}|f(x)|dx$$

2) 정답 ①

[출제범위] 곡선과 x축 사이의 넓이

[해설]

$$f(x)=\int(3x^2+6x-4)dx$$

$$=x^3+3x^2-4x+C$$

(단, C는 적분상수)

$f(x)=x^3+3x^2-4x=x(x+4)(x-1)$이므로

$f(x)=0$에서 $x=-4$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$을 근으로 갖는다.

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-4}^{1}|x^3+3x^2-4x|dx$$

$$=\int_{-4}^{0}(x^3+3x^2-4x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3-3x^2+4x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3-2x^2\right]_{-4}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3+2x^2\right]_0^1$$

$$=32+\frac{3}{4}=\frac{131}{4}$$

필수 개념

▸ 곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{a}^{b}|f(x)|dx$$

3) 정답 ④

[출제범위] 두 곡선 사이의 넓이

[해설]

$f(x)=-x^3+2x^2+3x$라 하면

$f'(x)=-3x^2+4x+3$

곡선 $y=-x^3+2x^2+3x$ 위의 점 $(2,6)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-1$이므로 접선 l의 방정식은

$y-6=-(x-2)$ 즉, $y=-x+8$

곡선 $y=-x^3+2x^2+3x$와 접선 l의 교점의 x좌표는

$-x^3+2x^2+3x=-x+8$
$x^3-2x^2-4x+8=0$
$(x-2)^2(x+2)=0$

$x=2$ 또는 $x=-2$

구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{2}|(-x+8)-(-x^3+2x^2+3x)|dx$$
$$=\int_{-2}^{2}\{(-x+8)-(-x^3+2x^2+3x)\}dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(x^3-2x^2-4x+8)dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(-2x^2+8)dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^2=\frac{64}{3}$$

필수 개념

▸ 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$$

4) 정답 ②

[출제범위] 두 곡선 사이의 넓이

[해설]

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는

(ⅰ) $x<0$ 인 경우

$x+2=x^2$에서

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x<0$이므로 $x=-1$

(ⅱ) $x\ge 0$ 인 경우

$-x^2+2=x^2$

$2x^2-2=0$
$2(x+1)(x-1)=0$

$x\ge 0$ 이므로 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x+2-x^2)dx+\int_{0}^{1}(-x^2+2-x^2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{2}{3}x^3+2x\right]_0^1$$
$$=\frac{7}{6}+\frac{4}{3}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$$

필수 개념

▸ 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$$

5) 정답 ②

[출제범위] 곡선과 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우

[해설]

$f(x)=(x+a)(x+1)^2$ 이라 하자.

곡선 $y=(x+a)(x+1)^2$ $(x\ge -a)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\int_{-a}^{0}|f(x)|dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx$$

곡선 $y=(x+a)(x+1)^2$ 과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_{-1}^{-a}|f(x)|dx=\int_{-1}^{-a}-f(x)dx$$

$S_1=S_2$이므로

$S_1-S_2=0$

$$S_1 - S_2 = \int_{-a}^{0} f(x)dx - \int_{-1}^{-a} -f(x)dx$$
$$= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{-1}^{-a} f(x)dx$$
$$= \int_{-1}^{0} f(x)dx$$

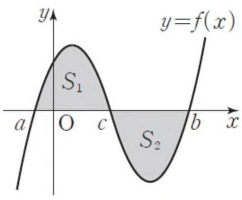
$$= \int_{-1}^{0} (x+a)(x+1)^2 dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (x^3 + (2+a)x^2 + (2a+1)x + a)dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{(2+a)}{3}x^3 + \frac{(2a+1)}{2}x^2 + ax\right]_{-1}^{0} = 0$$

따라서 $a = \frac{1}{4}$

필수 개념

▸ 곡선과 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, 그림과 같이 닫힌구간 $[a, c]$와 닫힌구간 $[c, b]$에서 곡선 $y = f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라고 할 때,



$S_1 = S_2$이면 $\int_{a}^{b} f(x)dx = 0$

6) 정답 7

[출제범위] 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 같은 경우

[해설]

함수 $y = x - 2$의 역함수는 $y = x + 2$이다.

함수 $y = f(x)$의 그래프와 $y = g(x)$의 그래프는 역함수 관계 이므로 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다. 곡선 $y = g(x)$와 직선 $y = x - 2$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = x + 2$으로 둘러싸인 넓이와 같다.

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = x + 2$의 교점의 x좌표는

$x^2 + 2 = x + 2$에서

$x^2 - x = 0 = x(x-1)$이므로

$x = 0$ 또는 $x = 1$

따라서 구하는 넓이는

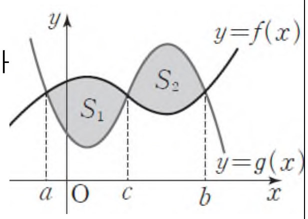
$$\int_{0}^{1} \{(x+2) - (x^2+2)\}dx = \int_{0}^{1} (-x^2 + x)dx$$
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1} = \frac{1}{6}$$

즉, $p = 6$, $q = 1$이므로 $p + q = 7$

필수 개념

▸ 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 같은 경우

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, 그림과 같이 닫힌구간 $[a, c]$와 닫힌구간 $[c, b]$에서 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라고 할 때,



$S_1 = S_2$이면 $\int_{a}^{b} \{f(x) - g(x)\}dx = 0$

7) 정답 ②

[출제범위] 속도와 거리

[해설]

시각 $t = 1$에서 $t = 2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_{1}^{2} v(t)dt = \int_{1}^{2} (2t + a)dt = \left[t^2 + at\right]_{1}^{2}$$
$$= 3 + a$$

$3 + a = 2$, $a = -1$

$v(t) = 2t - 1$

따라서 시각 $t = 1$에서 $t = 2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_{1}^{2} |v(t)|dt = \int_{1}^{2} (2t-1)dt = \left[t^2 - t\right]_{1}^{2} = 2$$

필수 개념

▸ 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 하자.

(1) 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x=x(t)$라고 하면 $x(t)=x(a)+\int_a^t v(t)dt$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a \le b)$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a \le b)$까지 점 P의 움직인 거리 s는 $s=\int_a^b |v(t)|dt$

8) 정답 ⑤

[출제범위] 속도와 거리

[해설]

시각 t $(t \ge 0)$에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)dt$

시각 $t=a$에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} x(a) &= x(0)+\int_0^a v(t)dt \\ &= x(0)+\int_0^a (t^2-6t)dt \\ &= x(0)+\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2\right]_0^a \\ &= x(0)+\frac{1}{3}a^3-3a^2 \end{aligned}$$

$x(a)=x(0)$에서

$\frac{1}{3}a^3-3a^2=0$

$\frac{1}{3}a^2(a-9)=0$

$a>0$이므로 $a=9$

필수 개념

▸ 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 하자.

(1) 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x=x(t)$라고 하면 $x(t)=x(a)+\int_a^t v(t)dt$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a \le b)$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a \le b)$까지 점 P의 움직인 거리 s는 $s=\int_a^b |v(t)|dt$

9) 정답 ②

[출제범위] 곡선과 x축 사이의 넓이

[해설]

곡선 $y=x^3-2x^2+x$과 x축과 만나는 점의 x좌표는 $x^3-2x^2+x=0$에서

$x(x-1)^2=0$ $x=0$또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_0^1 |x^3-2x^2+x|dx \\ &= \int_0^1 (x^3-2x^2+x)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

필수 개념

▸ 곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=\int_a^b |f(x)|dx$

10) 정답 $\frac{37}{12}$

[출제범위] 곡선과 x축 사이의 넓이

[해설]

곡선 $y=-x^3-x^2$과 직선 $y=-2x$의 교점의 x좌

표는

$-x^3-x^2=-2x$

$x^3+x^2-2x=0$

$x(x+2)(x-1)=0$

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{1}\left|-x^3-x^2+2x\right|dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3-x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}$$

필수 개념

▸ 곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{a}^{b}|f(x)|dx$$

11) 정답 ③

[출제범위] 두 곡선 사이의 넓이

[해설]

두 곡선 $y=ax^2$, $y=-ax^2+8a$의 교점의 x좌표는 $ax^2=-ax^2+8a$, $2ax^2=8a$

$a>0$이므로 $x^2=4$

$x=-2$ 또는 $x=2$

두 곡선 $y=ax^2$, $y=-ax^2+8a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^{2}(-ax^2+8a-ax^2)dx=\int_{-2}^{2}(-2ax^2+8a)dx$$
$$=4\int_{0}^{2}(-ax^2+4a)dx$$
$$=4a\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{0}^{2}=\frac{64}{3}a$$

$\frac{64}{3}a=64$, 따라서 $a=3$

필수 개념

▸ 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{a}^{b}|f(x)-g(x)|dx$$

12) 정답 ⑤

[출제범위] 두 곡선 사이의 넓이

[해설]

곡선 $y=x^2-2x-3$과 x축이 만나는 점의 좌표를 $x^2-2x-3=0$에서

$(x+1)(x-3)=0$ $x=-1$ 또는 $x=3$

$\int_{-1}^{3}-(x^2-2x-3)dx=\int_{3}^{k}(x^2-2x-3)dx$이므로

$$\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)dx+\int_{3}^{k}(x^2-2x-3)dx=0$$
$$\int_{-1}^{k}(x^2-2x-3)dx=0$$

$\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-1}^{k}=(\frac{1}{3}k^3-k^2-3k)-\frac{5}{3}$에서

$k^3-3k^2-9k-5=0$

$(k+1)^2(k-5)=0$ 이때, $k>3$이므로 $k=5$

필수 개념

▸ 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{a}^{b}|f(x)-g(x)|dx$$

13) 정답 ⑤

[출제범위] 속도와 거리

[해설]

점 P가 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)|dt$$
$$= \int_0^1 (3t^2+3)dt + \int_1^2 (-2t^2+8)dt + \int_2^3 (2t^2-8)dt$$
$$= \left[t^3+3t\right]_0^1 + \left[-\frac{2}{3}t^3+8t\right]_1^2 + \left[\frac{2}{3}t^3-8t\right]_2^3$$
$$= 12$$

필수 개념
▸ 속도와 거리
수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 하자.
(1) 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x=x(t)$라고 하면 $x(t)=x(a)+\int_a^t v(t)dt$
(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a \le b)$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$
(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a \le b)$까지 점 P의 움직인 거리 s는 $s=\int_a^b |v(t)|dt$

14) 정답 20

[출제범위] 속도와 거리

[해설]

두 점 P, Q 의 가속도를 각각 $a_1(t)$, $a_2(t)$라 하면 $a_1(t)=6t-4$, $a_2(t)=8$

$a_1(t)=a_2(t)$에서 $6t-4=8$, $t=2$

시각 $t=0$에서의 두 점 P, Q 의 위치가 모두 원점이므로 시각 $t=2$에서의 두 점 P, Q 의 위치는 각각

$$x_1 = \int_0^2 (3t^2-4t)dt = \left[t^3-2t^2\right]_0^2 = 0$$

$$x_2 = \int_0^2 (8t+2)dt = \left[4t^2+2t\right]_0^2 = 20$$

$$x_1+x_2 = 20$$

필수 개념
▸ 속도와 거리
수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 하자.
(1) 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x=x(t)$라고 하면 $x(t)=x(a)+\int_a^t v(t)dt$
(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a \le b)$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$
(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a \le b)$까지 점 P의 움직인 거리 s는 $s=\int_a^b |v(t)|dt$

15) 정답 ①

[출제범위] 곡선과 x축 사이의 넓이

[해설]

곡선 $y=x(x-a)$ $(x \ge a)$와 x축 및 직선 $x=3a$로 둘러싸인 부분의 넓이 S_1은

$$S_1 = \int_a^{3a} (x^2-ax)dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2\right]_a^{3a}$$
$$= \frac{9}{2}a^3 + \frac{1}{6}a^3 = \frac{14}{3}a^3$$

곡선 $y=x(x-a)$와 직선 $y=6a^2$이 만나는 점의 x좌표는 $x^2-ax=6a^2$,

$x^2-ax-6a^2=0$

$(x+2a)(x-3a)=0$

곡선 $y=x(x-a)$ $(x \ge 0)$ 과 y축 및 직선 $y=6a^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2은

$$S_2 = \int_0^{3a} (6a^2-x^2+ax)dx$$
$$= \left[6a^2x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2\right]_0^{3a}$$
$$= \frac{27}{2}a^3$$

$$S_2 - S_1 = \frac{27}{2}a^3 - \frac{14}{3}a^3 = \frac{53}{48}$$

따라서 $a^3 = \frac{1}{8}$이므로 $a = \frac{1}{2}$

필수 개념

▸ 곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=\int_a^b |f(x)|dx$

16) 정답 ③

[출제범위] 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 같은 경우

[해설]

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=-2$이므로

$f(x)=x^2-2x+a$ (a는 상수)로 놓을 수 있다,

방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^2-2x+a=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여 $\alpha\beta=-7$ 이므로 $a=-7$

$f(x)=x^2-2x-7$이므로 $f'(x)=2x-2$

두 함수가 $y=f(x)$, $y=f'(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표는 $f(x)=f'(x)$에서

$x^2-2x-7=2x-2$, $x^2-4x-5=0$

$(x-5)(x+1)=0$

$x=-1$ 또는 $x=5$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{5}\{(2x-2)-(x^2-2x-7)\}$

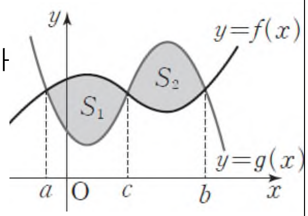
$=\int_{-1}^{5}(-x^2+4x+5)dx$

$\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x\right]_{-1}^{5}=\frac{100}{3}+\frac{8}{3}$

$=\frac{108}{3}=36$

필수 개념

▸ 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 같은 경우



두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, 그림과 같이 닫힌구간 $[a, c]$와 닫힌구간 $[c, b]$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라고 할 때,

$S_1=S_2$이면 $\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx=0$

17) 정답 $\frac{45}{4}$

[출제범위] 역함수와 넓이의 관계

[해설]

$f(x)=x^3-3x^2+3x-6$에서

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3-3x^2+3x-6=x$에서

$x^3-3x^2+2x-6=0$

$(x-3)(x^2+2)=0$ 따라서 $x=3$

곡선 $y=g(x)$와 x축 및 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라고 하면 구하는 넓이 S는

$S=S_1+S_2$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$S_1=\int_0^3\{x-f(x)\}dx$

$=\int_0^3(x-x^3+3x^2-3x+6)dx$

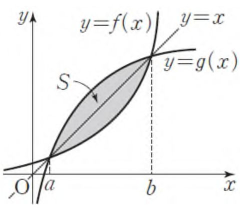
$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2+6x\right]_0^3=\frac{63}{4}$

$S_2=\int_0^3\{g(x)-x\}dx$

$$= \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 xdx$$
$$= \int_0^3 g(x) - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3$$
$$= \int_0^3 g(x) - \frac{9}{2}$$
$$S = S_1 + S_2 = \frac{63}{4} + \int_0^3 g(x)dx - \frac{9}{2}$$
$$= \frac{45}{4} + \int_0^3 g(x)dx$$
따라서 $S - \int_0^3 g(x)dx = \frac{45}{4}$

필수 개념

▸ 역함수와 넓이의 관계



역함수가 존재하는 연속인 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 두 점 (a, a), (b, b)에서만 만날 때, 닫힌구간 $[a, b]$에서 두 곡선 $y=f(x)$,
$y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는
$$S = 2\int_a^b |x - f(x)|dx$$

18) 정답 ④

[출제범위] 속도와 거리

[해설]

시각 $t=0$에서의 두 점 P, Q의 위치가 모두 원점이므로 시각 t $(0 \le t \le 2)$에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각
$$x_1(t) = \int_0^t (4t^3+4t)dt = \left[t^4+2t^2\right]_0^t = t^4+2t^2$$
$$x_2(t) = \int_0^t (6t^2+2t)dt = \left[2t^3+t^2\right]_0^t = 2t^3+t^2$$
$$|x_1(t) - x_2(t)| = |t^4+2t^2-2t^3-t^2|$$
$$= |t^4-2t^3+t^2|$$
$f(t) = t^4-2t^3+t^2$이라 하면
$$f'(t) = 4t^3-6t^2+2t = 2t(2t^2-3t+1)$$
$$= 2t(2t-1)(t-1)$$
$0 \le t \le 2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값 최솟값을 구하면 $f(t) = t^4-2t^3+t^2$
$$f(0) = 0$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}$$
$$f(1) = 1-2+1 = 0$$
$$f(2) = 16-16+4 = 4$$
$|x_1(t) - x_2(t)|$의 최댓값은 4이다.

필수 개념

▸ 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 하자.

(1) 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x = x(t)$라고 하면 $x(t) = x(a) + \int_a^t v(t)dt$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a \le b)$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a \le b)$까지 점 P의 움직인 거리 s는 $s = \int_a^b |v(t)|dt$

19) 정답 ②

[출제범위] 곡선과 x축 사이의 넓이

[해설]

$$g(x) = \begin{cases} 2f(x) & (f(x) < 0) \\ 0 & (f(x) \ge 0) \end{cases}$$
조건 (가)에서 $g(0) = 0$이므로 $f(0) \ge 0$

$f(0) > 0$이라 하면 열린구간 $(0, c)$에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) > 0, g(x) = 0$인 양수 c가 존재한다.

이때 열린구간 $(0, c)$에 속하는 모든 x에 대하여 $\int_0^x g(t)dt = 0$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 못하다.

따라서 $f(0) = 0$이어야 한다.

한편, $a < 0 < b$인 어떤 두 실수 a, b에 대하여

(i) $a < x < 0$에서 $f(x) < 0$,
$0 < x < b$에서 $f(x) > 0$이면 열린구간 $(0, b)$에 속하는 모든 x에 대하여

$g(x) = 0$이고 $\int_0^x g(t)dt = 0$이 되므로 조건 (나)를

만족시키지 못한다.
(ii) $a<x<0$에서 $f(x)>0$,
$0<x<b$에서 $f(x)<0$이면 열린구간 $(0,a)$에 속하는 모든 x에 대하여
$g(x)=0$이고 $\int_0^x g(t)dt=0$되므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.
(iii) $a<x<0$에서 $f(x)>0$,
$0<x<b$에서 $f(x)>0$이면 열린구간 (a,b)에 속하는 모든 x에 대하여
$g(x)=0$이고 $\int_0^x g(t)dt=0$ 되므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.
따라서 $a<x<0$에서 $f(x)<0$,
$0<x<b$에서 $f(x)<0$이어야 한다.
즉, 삼차함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 가지므로 $f(x)=x^2(x-p)$ (p는 양수)로 놓을 수 있다. $f(1)=-2$에서 $1^2(1-p)=-2$이므로
$p=3$
즉, $f(x)=x^2(x-3)$
곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 좌표는
$x^2(x-3)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=3$
따라서 구하는 넓이는
$$\int_0^3 |f(x)|dx=\int_0^3(-x^3+3x^2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_0^3=\frac{27}{4}$$

필수 개념

▸ 곡선과 x축 사이의 넓이
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는
$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

20) 정답 ①
[출제범위] 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 같은 경우
[해설]
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a $(a>0)$이라 하면 조건 (가)에서
$f'(x)=3a(x+1)(x-1)=3ax^2-3a$
로 나타낼 수 있다.
$f(x)=\int f'(x)dx=ax^3-3ax+C$ (단, C는 적분상수) ……㉠
두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자.
(i) $f(1)f(-1)<0$일 때
조건 (다)에서 $f(0)=C=0$
$f(x)=ax^3-3ax=ax(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
$$S=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}|f(x)-\{-f(x)\}|dx$$
$$=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}2|f(x)|dx$$
$$=2\int_0^{\sqrt{3}}\{-2f(x)\}dx$$
$$=4\int_0^{\sqrt{3}}(-ax^3+3ax)dx$$
$$=4\left[-\frac{a}{4}x^4+\frac{3a}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}=9a$$
$9a=54$이므로 $a=6$
따라서 $f(x)=6(x^3-3x)$ 이므로
$f(2)=6(8-6)=12$
(ii) $f(1)=0$ 인 경우
㉠에서 $f(1)=a-3a+C=0$ 이므로 $C=2a$
$f(x)=ax^3-3ax+2a=a(x-1)^2(x+2)$
$$S=\int_{-2}^{1}|f(x)-\{-f(x)\}|dx$$
$$=\int_{-2}^{1}2f(x)dx$$
$$=2\int_{-2}^{1}(ax^3-3ax+2a)dx$$
$$=2a\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{2}a$$
$\frac{27}{2}a=54$ 이므로 $a=4$
따라서 $f(x)=4(x^3-3x+2)$이므로
$f(2)=4(8-6+2)=16$
(iii) $f(-1)=0$ 인 경우
㉠에서 $f(-1)=-a+3a+C=0$ 이므로 $C=-2a$

$f(x)=ax^3-3ax-2a=a(x+1)^2(x-2)$

$S=\int_{-1}^{2}|f(x)-\{-f(x)\}|dx$

$=\int_{-1}^{2}\{-2f(x)\}dx$

$=2\int_{-1}^{2}(-ax^3+3ax+2a)dx$

$=2a\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{2}a$

$\frac{27}{2}a=54$ 이므로 $a=4$

따라서 $f(x)=4(x^3-3x-2)$이므로

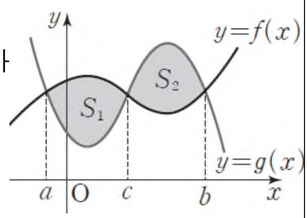
$f(2)=4(x^3-3x-2)=0$

(i),(ii),(iii)에서 $f(2)$의 최댓값은 16이다.

필수 개념

▸ 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이가 같은 경우

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고, 그림과 같이 닫힌구간 $[a,c]$와 닫힌구간 $[c,b]$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라고 할 때,



$S_1=S_2$이면 $\int_{a}^{b}\{f(x)-g(x)\}dx=0$

21) 정답 32

[출제범위] 곡선과 x축 사이의 넓이

[해설]

곡선 $y=-x^2+4x-4$와 x축 및 y축으로 둘러싸인
부분의 넓이 S는

$S=\int_{0}^{2}|-x^2+4x-4|dx$

$=\int_{0}^{2}(x^2-4x+4)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{0}^{2}=\frac{8}{3}$

따라서 $12S=32$

필수 개념

▸ 곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=\int_{a}^{b}|f(x)|dx$

22) 정답 ②

[출제범위] 곡선과 x축 사이의 넓이

[해설]

$f(x)=x^2-4x+6$이라 하면

$f'(x)=2x-4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(3,\ 3)$에서의 접선의 기울기가 $f'(3)=2$이므로 접선 l의 방정식은

$y-3=2(x-3)$, $y=2x-3$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{0}^{3}\{x^2-4x+6-(2x-3)\}dx$

$=\int_{0}^{3}(x^2-6x+9)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_{0}^{3}=9$

필수 개념

▸ 곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=\int_{a}^{b}|f(x)|dx$

23) 정답 ①

[출제범위] 두 곡선 사이의 넓이

[해설]

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분에서 $0\le x\le 2$인 부분과 $2\le x\le 4$인 부분의
넓이가 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^4 \{g(x)-f(x)\}dx$

$=2\int_0^2 (-2x^2+6x)dx$

$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_0^2=\frac{40}{3}$

필수 개념
▸ 두 곡선 사이의 넓이 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는 $S=\int_a^b \lvert f(x)-g(x)\rvert dx$

24) 정답 16

[출제범위] 속도와 거리

[해설]

시각 t에서의 점 P 의 위치를 $x(t)$라 하면

시각 $t=3$에서의 점 P 의 위치는

$x(3)=x(0)+\int_0^3 v(t)dt=\int_0^3 (3t^2+6t-a)dt$

$=[t^3+3t^2-at]_0^3=54-3a=6$

$a=16$

필수 개념
▸ 속도와 거리 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 하자. (1) 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x=x(t)$라고 하면 $x(t)=x(a)+\int_a^t v(t)dt$ (2) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a\le b)$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$ (3) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a\le b)$까지 점 P의 움직인 거리 s는 $s=\int_a^b \lvert v(t)\rvert dt$

25) 정답 80

[출제범위] 속도와 거리

[해설]

점 P 의 시각 t에서의 가속도 $a(t)$는

$a(t)=v'(t)=12t^2-48$

$a(k)=12(k^2-4)=0$에서 $k>0$이므로 $k=2$이다.

$0\le t\le 2$일 때 $v(t)\le 0$이므로

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P 가 움직인 거리는

$\int_0^2 \lvert v(t)\rvert dt=\int_0^2 (-4t^3+48t)dt$

$=\left[-t^4+24t^2\right]_0^2=-16+96=80$

필수 개념
▸ 속도와 거리 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 하자. (1) 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x=x(t)$라고 하면 $x(t)=x(a)+\int_a^t v(t)dt$ (2) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a\le b)$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$ (3) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a\le b)$까지 점 P의 움직인 거리 s는 $s=\int_a^b \lvert v(t)\rvert dt$

26) 정답 ②

[출제범위]곡선과 x축 사이의 넓이

[해설]

함수 $f(x)=(x-a)(x-b)$에 대하여

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_a^b \lvert f(x)\rvert dx=-\int_a^b f(x)dx$

$=-\left(\int_0^b f(x)dx-\int_0^a f(x)dx\right)$

$=-\left(-\frac{8}{3}-\frac{11}{6}\right)$

$=\frac{9}{2}$

필수 개념

▸ 곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

27) 정답 ③

[출제범위] 두 곡선 사이의 넓이

[해설]

구하고자 하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^2 |f(x)-g(x)|dx$$

$$=\int_0^2 \{g(x)-f(x)\}dx$$

$g(x)-f(x)$는 최고차항의 계수가 3이고

삼차방정식 $g(x)-f(x)=0$은 한 실근 0과 중근 2를 가지므로 $g(x)-f(x)=3x(x-2)^2$

따라서 $S=\int_0^2 3x(x-2)^2dx$

$$=\int_0^2 (3x^3-12x^2+12x)dx$$

$$=\left[\frac{3}{4}x^4-4x^3+6x^2\right]_0^2$$

$$=12-32+24=4$$

필수 개념

▸ 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

28) 정답 2

[출제범위] 두 곡선 사이의 넓이

[해설]

$f(1-x)=-f(1+x)$에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$f(1)=-f(1)$에서

$f(1)=0$, $f(0)=-f(2)$에서 $f(2)=0$

삼차함수 $f(x)$는 $f(0)=f(1)=f(2)=0$이고 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=x(x-1)(x-2)$

방정식 $f(x)=-6x^2$에서

$x^3+3x^2+2x=0$이므로

$x(x+1)(x+2)=0$, $x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-2$

$-2\le x\le -1$에서 $x^3+3x^2+2x\ge 0$이고

$-1\le x\le 0$에서 $x^3+3x^2+2x\le 0$이므로

$$S=\int_{-2}^0 \left|x^3+3x^2+2x\right|dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+2x)dx$$

$$+\int_{-1}^0 \{-(x^3+3x^2+2x)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3-x^2\right]_{-1}^0=\frac{1}{2}$$

따라서 $4S=2$

필수 개념

▸ 두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

29) 정답 ②

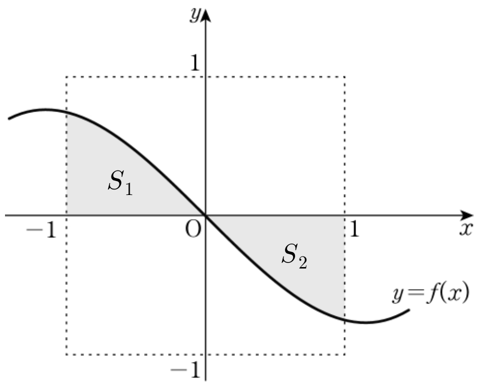
[출제범위] 두 곡선 사이의 넓이

[해설]

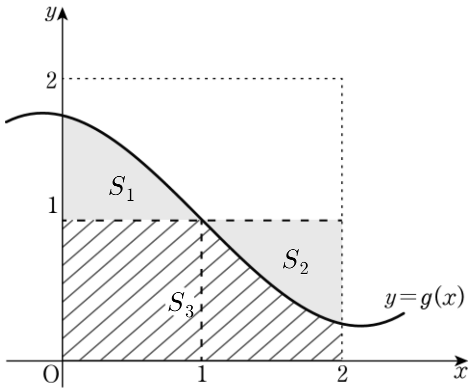
모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

그림과 같이 색칠된 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면 $S_1=S_2$



함수 $y=g(x)$의 그래프에서 빗금 친 부분의 넓이를 S_3이라 하면 $\int_0^2 g(x)dx = S_1+S_3 = S_2+S_3 = 2\times1=2$



필수 개념
▸ 두 곡선 사이의 넓이 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는 $S=\int_a^b \lvert f(x)-g(x)\rvert dx$

30) 정답 ③

[출제범위] 속도와 거리

[해설]

$\int_0^a \lvert v(t)\rvert dt = s_1$, $\int_a^b \lvert v(t)\rvert dt = s_2$,

$\int_b^c \lvert v(t)\rvert dt = s_3$이라 하자.

점 P는 출발한 후 시각 $t=a$에서 처음으로 운동 방향을 바꾸므로 $-8=\int_0^a v(t)dt = -s_1$에서

$s_1=8$

점 P의 시각 $t=c$에서의 위치가 -6이므로

$-6=\int_0^c v(t)dt = (-8)+s_2-s_3$

에서 $s_2-s_3=2$ …… ㉠

$\int_0^b v(t)dt = \int_b^c v(t)dt$이므로

$-8+s_2=-s_3$, 즉 $s_2+s_3=8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $s_2=5$, $s_3=3$

따라서 구하는 거리는 5이다.

필수 개념
▸ 속도와 거리 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 하자. (1) 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x=x(t)$라고 하면 $x(t)=x(a)+\int_a^t v(t)dt$ (2) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a \le b)$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$ (3) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a \le b)$까지 점 P의 움직인 거리 s는 $s=\int_a^b \lvert v(t)\rvert dt$

서지정보

저자 김유정

발행처 나무아카데미

isbn 979-11-377-4298-7

제본형태 hwp pdf 파일

발행일 2023.02.28

가격 1,500원

값 1500 원

55710

ISBN 979-11-377-4298-7 (PDF)