01 수학 I

정답

01	8	11	41	21	6
02	512	12	6	22	63
03	8	13	7	23	11
04	33	14	30	24	8
05	81	15	45	25	75
06	9	16	5	26	220
07	100	17	143	27	23
08	12	18	32	28	11
09	24	19	63	29	150
10	4	20	11	30	3

01

$-m^2+5m+14$의 네제곱근 중 실수인 것이 존재하지 않으려면

$-m^2+5m+14<0$이어야 한다.

$-m^2+5m+14<0$에서 $(m-7)(m+2)>0$이므로

$m<-2$ 또는 $m>7$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은 8이다.

02

$f(x)=\sqrt[3]{x^4}=x^{\frac{4}{3}}$이므로 $f(f(n))=(n^{\frac{4}{3}})^{\frac{4}{3}}=n^{\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}}=n^{\frac{16}{9}}$

$n^{\frac{16}{9}}$의 값이 1보다 큰 자연수가 되려면 n은 1보다 큰 자연수 k에 대하여 $n=k^9$의 꼴이어야 한다. 즉, 자연수 n의 최솟값은 1보다 큰 자연수의 아홉제곱의 꼴로 표현되는 자연수 중 가장 작은 값이므로

$2^9=512$

03

$a=2^{m+2},\ b=3^{6n+3}$이므로

$$\begin{aligned}\log_3(\log_2 a)+\log_3(\log_3 b)&=\log_3(\log_2 2^{m+2})+\log_3(\log_3 3^{6n+3})\\&=\log_3(m+2)+\log_3(6n+3)\\&=\log_3(m+2)(6n+3)\end{aligned}$$

이므로 $\log_3(m+2)(6n+3)=4$에서

$(m+2)(6n+3)=81$

$6n+3$이 81의 양의 약수이어야 하므로 자연수 n의 값은 $1, 4, 13$이다.

$n=1$이면 $m=7$

$n=4$이면 $m=1$

$n=13$이면 자연수 m은 존재하지 않는다.

따라서 $m+n$의 최댓값은 8이다.

04

$\dfrac{1}{\log_4 8}=\dfrac{1}{\log_{2^2} 2^3}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$,

$\dfrac{1}{2}\log_a a^4=\dfrac{4}{2}\log_a a=2$,

$\log_a a^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}\log_a a=\dfrac{2}{3}$

이므로

$A=\left\{\log_a b,\ \dfrac{2}{3},\ 2\right\},\ B=\left\{4,\ \dfrac{2}{3},\ \log_3 a+\log_3 b\right\}$

$A=B$이기 위해서는 $\log_a b=4,\ \log_3 a+\log_3 b=2$이어야 한다.

$\log_a b=4$에서 $\dfrac{\log_3 b}{\log_3 a}=4$이므로

$\log_3 b=4\log_3 a\ \cdots$ ㉠

$\log_3 a+\log_3 b=2$에 ㉠을 대입하면

$\log_3 a=\dfrac{2}{5}$

㉠에서

$\log_3 b=\dfrac{8}{5}$

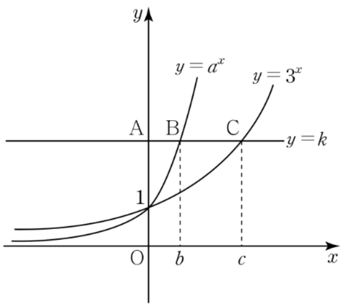
이때

$\log_a 3+\log_b 3=\dfrac{1}{\log_3 a}+\dfrac{1}{\log_3 b}=\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{8}=\dfrac{25}{8}$

따라서 $p=8,\ q=25$이므로

$p+q=33$

05



두 점 B, C의 x좌표를 각각 b, c $(0 < b < c)$라 하면 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} = 1 : 3$이므로

$$c = 4b \quad \cdots \text{㉠}$$

두 점 B, C의 y좌표는 서로 같으므로

$$a^b = 3^c \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$a^b = 3^{4b} = 81^b \quad \cdots \text{㉢}$$

따라서 $a > 3$, $b > 0$이므로 ㉢에서

$$a = 81$$

06

부등식 $3^{x^2-2x+7} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{-7x+11}$에서 $3^{x^2-2x+7} \le 3^{7x-11}$이고 밑 3이 1보다 크므로

$$x^2 - 2x + 7 \le 7x - 11$$

$$x^2 - 9x + 18 \le 0,\ (x-3)(x-6) \le 0,\ 3 \le x \le 6$$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x의 값은 3, 4, 5, 6이므로

$$A = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

$a \in A$에 대하여 $x = 2^{a^2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{8a-7-k} = 2^{a(a-8)+7+k}$이므로

$a = 3$일 때, $x = 2^{-8+k}$

$a = 4$일 때, $x = 2^{-9+k}$

$a = 5$일 때, $x = 2^{-8+k}$

$a = 6$일 때, $x = 2^{-5+k}$

집합 $B = \{2^{-5+k},\ 2^{-8+k},\ 2^{-9+k}\}$이므로

집합 B의 모든 원소의 곱은

$$2^{-5+k} \times 2^{-8+k} \times 2^{-9+k} = 2^{-22+3k}$$

즉, $2^{-22+3k} = 2^5$에서 $-22 + 3k = 5$이므로

$$k = 9$$

07

곡선 $y = \log_a x$와 직선 $x = n$이 만나는 점의 x좌표가 n이므로 점 P_n의 좌표는 $(n,\ \log_a n)$이고 점 P_{n+1}의 좌표는 $(n+1,\ \log_a(n+1))$이다.

주어진 직각삼각형은 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$을 빗변으로 하고 다른 두 변이 x축 또는 y축과 평행하므로 그 넓이 $f(n)$은

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2}\{(n+1) - n\} \times \{\log_a(n+1) - \log_a n\} \\ &= \frac{1}{2}\{\log_a(n+1) - \log_a n\} = \frac{1}{2}\log_a \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned} & f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(199) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\log_a \frac{3}{2} + \log_a \frac{4}{3} + \log_a \frac{5}{4} + \cdots + \log_a \frac{200}{199}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\log_a\left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{200}{199}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log_a 100 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서

$$a = 100$$

08

사각형 ABDC는 두 변 AB와 CD가 평행한 사다리꼴이다.

$$\overline{\mathrm{AB}} = \log_9 n - \log_{\frac{1}{3}} n = \frac{1}{2}\log_3 n + \log_3 n = \frac{3}{2}\log_3 n$$

$$\overline{\mathrm{CD}} = \log_9 m - \log_{\frac{1}{3}} m = \frac{1}{2}\log_3 m + \log_3 m = \frac{3}{2}\log_3 m$$

사다리꼴 ABDC의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2}\log_3 m + \frac{3}{2}\log_3 n\right) \times (m-n)$이므로

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2}\log_3 m + \frac{3}{2}\log_3 n\right) \times (m-n) = \frac{27}{2}$$

$$\frac{3}{4}(m-n)\log_3 mn = \frac{27}{2}$$

$$\log_3 mn = \frac{18}{m-n}$$

$$mn = 3^{\frac{18}{m-n}} \cdots ㉠$$

이때 m, n이 1이 아닌 20 이하의 자연수이고 $m > n$이므로 $m-n$은 자연수이다

.

mn은 자연수이므로 ㉠을 만족시키기 위해서는 $m-n$이 18의 양의 약수이어야 한다.

(i) $m-n=1$일 때, $m=n+1$이고

$mn = 3^{18}$에서 $n(n+1) = 3^{18}$, $n^2+n-3^{18}=0$

이때 이를 만족시키는 20 이하의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $m-n=2$일 때, $m=n+2$이고

$mn = 3^{9}$에서 $n(n+2) = 3^{9}$, $n^2+2n-3^{9}=0$

이때 이를 만족시키는 20 이하의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(iii) $m-n=3$일 때, $m=n+3$이고

$mn = 3^{6}$에서 $n(n+3) = 3^{6}$, $n^2+3n-3^{6}=0$

이때 이를 만족시키는 20 이하의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(iv) $m-n=6$일 때, $m=n+6$이고

$mn=27$에서

$$n(n+6)=27,\ n^2+6n-27=0,\ (n-3)(n+9)=0$$

이때 n은 20 이하의 자연수이므로 $n=3$이고 $m=9$

(v) $m-n=9$일 때, $m=n+9$이고

$mn = 9$에서 $n(n+9) = 9$, $n^2+9n-9=0$

이때 이를 만족시키는 20 이하의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(vi) $m-n=18$일 때, $m=n+18$이고

$mn = 3$에서 $n(n+18) = 3$, $n^2+18n-3=0$

이때 이를 만족시키는 20 이하의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i) ~ (vi)에 의하여 $m=9$, $n=3$이므로

$$m+n=9+3=12$$

09

곡선 $y=2^{x-2}-2$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 곡선 $y=2^x$가 되고, 점 $(6,\ 14)$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 점 $(4,\ 16)$이 되며 이 점은 직선 l 위의 점이다.

곡선 $y=\log_2 x$와 곡선 $y=2^x$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 직선 l과 곡선 $y=\log_2 x$가 만나는 점의 좌표는 $(16,\ 4)$이다.

따라서 $a=16$, $b=4$이므로

$$a+2b=16+8=24$$

10

$0<a<1$이므로 두 함수 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$, $\log_a(x+3)$은 모두 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

$-2 \le x_1 < x_2$이면 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+3} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2+3}$, $\log_a(x_1+3) > \log_a(x_2+3)$이므로 $f(x_1) > f(x_2)$이다. 즉, 함수 $f(x)$도 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값을 갖고, $x=2$에서 최솟값을 갖는다.

$$f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \log_a 1 = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \log_a 5 = \frac{1}{32} + \log_a 5$$

$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{32} + \log_a 5\right) = -\frac{15}{32}$에서

$$\log_a 5 = -1$$

따라서 $a=\frac{1}{5}$이므로

$$20a = 20 \times \frac{1}{5} = 4$$

11

부채꼴 OAB의 중심각의 크기는 $\frac{8}{45}\pi$이고 호의 길이는 $\frac{16}{9}\pi$이므로

$$\overline{OB}\times\frac{8}{45}\pi=\frac{16}{9}\pi,\ \overline{OB}=10$$

부채꼴 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times10^2\times\frac{8}{45}\pi=\frac{80}{9}\pi$$

한편, 선분 OB의 중점이 C이므로

$$\overline{OC}=\frac{1}{2}\times10=5$$

부채꼴 OCD에서 $\angle COD=\theta$라 하면 부채꼴 OCD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times5^2\times\theta=\frac{25}{2}\theta$$

부채꼴 OAB의 넓이와 부채꼴 OCD의 넓이가 같으므로 $\frac{80}{9}\pi=\frac{25}{2}\theta$에서

$$\theta=\frac{32}{45}\pi$$

부채꼴 OCD에서 호 CD의 길이는

$$5\times\frac{32}{45}\pi=\frac{32}{9}\pi$$

따라서 $p=9,\ q=32$이므로

$$p+q=9+32=41$$

12

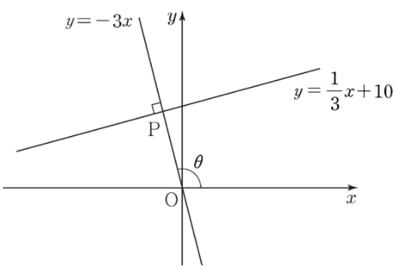
직선 OP의 기울기를 m이라 하면 직선 $y=\frac{1}{3}x+10$과 직선 OP가 서로 수직이므로

$$m\times\frac{1}{3}=-1,\ m=-3$$

직선 $y=\frac{1}{3}x+10$과 직선 $y=-3x$가 만나는 점의 x좌표는 $\frac{1}{3}x+10=-3x$에서

$$x=-3$$

이때 $y=-3\times(-3)=9$이므로 점 P의 좌표는 $(-3,\ 9)$이다.



$$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+9^2}=3\sqrt{10}$$

$$\sin\theta=\frac{9}{3\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10},\ \cos\theta=\frac{-3}{3\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

따라서

$$-20\sin\theta\cos\theta=-20\times\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=6$$

13

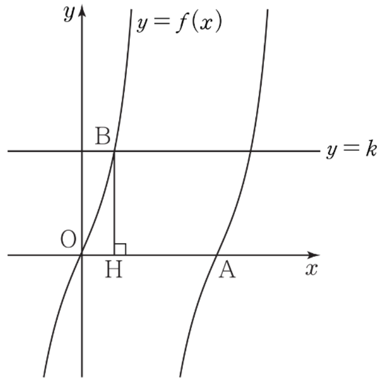
함수 $y=f(x)$의 주기가 4이므로 $\frac{\pi}{b}=4$, 즉

$$b=\frac{\pi}{4}$$

$\overline{OA}=4$이므로 점 A의 좌표는 $(4,\ 0)$이다.

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle BAO=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\overline{AH}=\overline{BH}=k,\ \overline{OH}=4-k$$



직각삼각형 BOH에서 $\tan\theta=\tan(\angle BOH)=3$이므로

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{OH}}=\frac{k}{4-k}=3,\ k=3$$

점 B의 좌표가 $(1,\ 3)$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 B를 지나므로

$$f(1)=a\tan\left(\frac{\pi}{4}\times1\right)=a\tan\frac{\pi}{4}=a=3$$

따라서 $f(x)=3\tan\frac{\pi x}{4}$이다.

$$f(k)=f(3)=3\tan\frac{3\pi}{4}=-3$$

$$\overline{OB}^2=1^2+3^2=10$$

따라서

$$f(k)+\overline{OB}^2=-3+10=7$$

14

$\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta$

이므로

$\cos(2\pi-\theta)+\sin(\pi-\theta)+2\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=2\cos\theta$에서

$$\cos\theta+\sin\theta-2\cos\theta=2\cos\theta$$

$$\sin\theta=3\cos\theta\ \cdots\ ㉠$$

한편, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$9\cos^2\theta+\cos^2\theta=1,\ \cos^2\theta=\frac{1}{10}$$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{10}}{10}\ \cdots\ ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\sin\theta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

따라서

$$100\sin\theta\cos\theta=100\times\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=30$$

15

$\cos(2\pi-x)=\cos x,\ \cos(\pi+x)=-\cos x,$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=-\sin x$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\cos(2\pi-x)\cos(\pi+x)-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+5\\&=-\cos^2x+\sin x+5\\&=-(1-\sin^2x)+\sin x+5\\&=\sin^2x+\sin x+4=\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\end{aligned}$$

$-1\le\sin x\le1$이므로 $\sin x=1$일 때 함수 $f(x)$는 최댓값을 갖고,

$\sin x=-\frac{1}{2}$일 때 함수 $f(x)$는 최솟값을 갖는다.

따라서

$$M=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}=6$$

$$m=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}=\frac{15}{4}$$

따라서 $2Mm=2\times6\times\frac{15}{4}=45$이다.

16

이차방정식 $x^2+(2\sqrt{2}\sin\theta)x+3-5\sin\theta=0$의 판별식을 D라 하면 이차방정식 $x^2+(2\sqrt{2}\sin\theta)x+3-5\sin\theta=0$이 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=(\sqrt{2}\sin\theta)^2-(3-5\sin\theta)\ge0$이어야 한다.

$$2\sin^2\theta+5\sin\theta-3\ge0$$

$$(2\sin\theta-1)(\sin\theta+3)\ge0$$

$0\le\theta<2\pi$에서 $-1\le\sin\theta\le1$이므로

$$\sin\theta+3>0$$

즉, $2\sin\theta-1\ge0$에서 $\sin\theta\ge\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{5}{6}\pi$$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{6},\ \beta=\frac{5}{6}\pi$이므로

$$\beta-\alpha=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$$

따라서 $p=3,\ q=2$이므로

$$p+q=5$$

17

직각삼각형 ABC에서

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{AB}}^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$이므로

$$\sin(\angle\mathrm{CAB})=\frac{3}{5}$$

점 D는 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$$\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{4}\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{4}\times4=1$$

직각삼각형 DBC에서

$$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BD}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$$

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle\mathrm{CAD})}=2R$에서

$$\frac{\sqrt{10}}{\frac{3}{5}}=2R,\ R=\frac{5\sqrt{10}}{6}$$

삼각형 ADC의 외접원의 넓이는

$$\pi\times\left(\frac{5\sqrt{10}}{6}\right)^2=\frac{125}{18}\pi$$

따라서 $p=18,\ q=125$이므로

$$p+q=18+125=143$$

18

삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{CAB} = \theta \ \left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$라 하면 사인법칙에 의하여

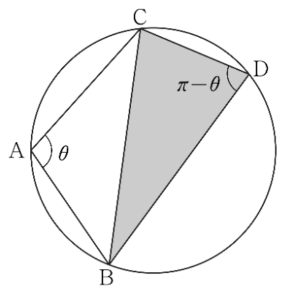
$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta} = 2\times 3,\ \frac{4\sqrt{2}}{\sin\theta} = 2\times 3,\ \sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이때

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$에서 $\cos\theta < 0$이므로

$$\cos\theta = -\frac{1}{3}$$



삼각형 BDC에서 $\angle\mathrm{BDC} = \pi - \theta$이므로

$$\cos(\angle\mathrm{BDC}) = \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta = \frac{1}{3}$$

$\overline{\mathrm{CD}} = k\ (k>0)$이라 하면

$$\overline{\mathrm{BD}} = 3k$$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{BD}}^2 + \overline{\mathrm{CD}}^2 - 2\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\cos(\angle\mathrm{BDC})$$

$$(4\sqrt{2})^2 = (3k)^2 + k^2 - 2\times 3k\times k\times\frac{1}{3}$$

$$32 = 8k^2,\ k^2 = 4$$

$k>0$이므로

$$k = 2$$

$$\overline{\mathrm{CD}} = 2,\ \overline{\mathrm{BD}} = 6$$

$\sin(\angle\mathrm{BDC}) = \sin(\pi-\theta) = \sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$이므로 삼각형 BDC의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\sin(\angle\mathrm{BDC})$$

$$= \frac{1}{2}\times 6\times 2\times\frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$$

따라서

$$S^2 = 32$$

19

4로 나눈 나머지가 2인 자연수를 나열하면 2, 6, 10, 14, 18, $\cdots$이므로 첫째항이 2이고 공차가 4인 등차수열이다.

즉,

$$a_n = 4n-2$$

5로 나눈 나머지가 3인 자연수를 나열하면 3, 8, 13, 18, 23, $\cdots$이므로 첫째항이 3이고 공차가 5인 등차수열이다.

즉,

$$b_n = 5n-2$$

$a_k = b_m$에서

$$4k-2 = 5m-2,\ 4k = 5m$$

즉, k는 5의 배수이고 m은 4의 배수이므로

$$k = 5k',\ m = 4m'\ (\text{단, } k'\le 6,\ m'\le 7\text{인 자연수})$$

이를 대입하면 $4\times 5k' = 5\times 4m'$에서 $k' = m'$이다.

k와 m은 30 이하의 자연수이므로 $k+m$의 최솟값은 $k'=m'=1$, 즉 $k=5,\ m=4$일 때 9이고, $k+m$의 최댓값은 $k'=m'=6$, 즉 $k=30,\ m=24$일 때 54이다.

따라서 $k+m$의 최댓값과 최솟값의 합은

$$54+9=63$$

20

$b_n = (a_{n+1})^2 - (a_n)^2 = (a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\ (a>0)$, 공차를 $d\ (d>0)$이라 하면

$a_n = a+(n-1)d$에서 $a_{n+1}-a_n = d$이고 $a_{n+1}+a_n = 2a+(2n-1)d$

$$b_n = d(2dn+2a-d)$$

즉,

$$b_1 = d(2a+d) = 8\ \cdots\ ㉠$$

한편, $b_2 = d(2a+3d)$이고 $S_4 = \frac{4(2a+3d)}{2} = 2(2a+3d)$이므로

$b_2 = S_4$에서

$$d(2a+3d) = 2(2a+3d)$$

$a>0,\ d>0$에서 $2a+3d\neq 0$이므로

$$d = 2\ \cdots\ ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $2(2a+2) = 8$이므로

$$a = 1$$

따라서 $a_n = 2n-1$이므로

$$a_6 = 2\times 6-1 = 11$$

21

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\ (r>0)$이라 하면

$a_1+a_3=a_1(1+r^2),\ a_5+a_7=a_5(1+r^2)$이므로

$\dfrac{a_1+a_3}{a_5+a_7}=\dfrac{1}{3}$에서

$$\frac{a_1}{a_5}=\frac{1}{3}$$

즉, $a_5=3a_1$이므로

$$r^4=3$$

$a_{13}=a_1\times r^{12}=a_1\times(r^4)^3=27a_1$이므로

$$27a_1\le 81,\ a_1\le 3$$

따라서 자연수 a_1의 값은 $1,\ 2,\ 3$이고 그 합은 6이다.

22

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\ (a>0)$, 공비를 $r\ (r>0)$이라 하면

$$\frac{a_1a_4}{a_2}=\frac{a\times ar^3}{ar}=ar^2=12\ \cdots\ ㉠$$

$$a_3+a_6=ar^2+ar^5=ar^2(1+r^3)=108\ \cdots\ ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$1+r^3=9,\ r^3=8$$

$r>0$이므로

$$r=2$$

㉠에 의하여

$$a=3$$

즉, $a_n=3\times 2^{n-1}$이므로

$$b_n=\frac{a_{3n}}{2a_{2n+1}}=\frac{3\times 2^{3n-1}}{2\times 3\times 2^{2n}}=2^{n-2}$$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{2}$이고 공비가 2인 등비수열이므로 첫째항부터 제6항까지의 합은

$$\frac{\frac{1}{2}(2^6-1)}{2-1}=\frac{63}{2}$$

따라서 $S=\dfrac{63}{2}$이므로

$$2S=63$$

23

$\mathrm{P}(n,\ \sqrt{n}),\ \mathrm{Q}(n,\ \sqrt{3n}),\ \mathrm{R}(n,\ \sqrt{mn})$이므로

$$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{n},\ \overline{\mathrm{QA}}=\sqrt{3n},\ \overline{\mathrm{RA}}=\sqrt{mn}$$

$\overline{\mathrm{PA}},\ \overline{\mathrm{QA}},\ \overline{\mathrm{RA}}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$\overline{\mathrm{QA}}^2=\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{RA}}$$

즉, $(\sqrt{3n})^2=\sqrt{n}\times\sqrt{mn}$에서 $n>0$이므로 $3n=n\sqrt{m}$이고,

$$\sqrt{m}=3,\ m=9$$

또 $\overline{\mathrm{OP}}^2+2=n^2+n+2,\ \overline{\mathrm{OQ}}^2+7=n^2+3n+7,$

$\overline{\mathrm{OR}}^2+4=n^2+9n+4$

$\overline{\mathrm{OP}}^2+2,\ \overline{\mathrm{OQ}}^2+7,\ \overline{\mathrm{OR}}^2+4$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(\overline{\mathrm{OQ}}^2+7)=(\overline{\mathrm{OP}}^2+2)+(\overline{\mathrm{OR}}^2+4)$$

즉, $2(n^2+3n+7)=(n^2+n+2)+(n^2+9n+4)$에서

$$n=2$$

따라서

$$m+n=9+2=11$$

24

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\ (a>0)$, 공비를 r라 하자.

$$S_{10}-S_7=a_{10}+a_9+a_8=ar^9+ar^8+ar^7=ar^7(r^2+r+1)$$

$$S_7-S_4=a_7+a_6+a_5=ar^6+ar^5+ar^4=ar^4(r^2+r+1)$$

$\dfrac{S_{10}-S_7}{S_7-S_4}=\dfrac{ar^7(r^2+r+1)}{ar^4(r^2+r+1)}=r^3$이므로 $\dfrac{S_{10}-S_7}{S_7-S_4}=2$에서

$$r^3=2\ \cdots\ ㉠$$

또 $S_3-S_2=a_3=ar^2$이므로 $(S_3-S_2)^3=32$에서

$$(ar^2)^3=32$$

즉,

$$a^3r^6=32\ \cdots\ ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$a^3\times 4=32,\ a^3=8$$

$a>0$이므로

$$a=2$$

따라서

$$a_7=ar^6=2\times 2^2=8$$

25

$\sum_{k=1}^{10}\{(k+1)a_k - ka_{k+1}\} = -35$에서

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{10}\{(k+1)a_k - ka_{k+1}\}\\&= (2a_1 - a_2) + (3a_2 - 2a_3) + (4a_3 - 3a_4) +\\&\quad \cdots + (11a_{10} - 10a_{11})\\&= 2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}) - 10a_{11}\\&= 2\sum_{k=1}^{10} a_k - 10a_{11}\end{aligned}$$

이고, $\sum_{k=1}^{10} a_k = 20$이므로

$$2 \times 20 - 10a_{11} = -35$$

따라서

$$10a_{11} = 75$$

26

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n = \frac{2}{n},\ b_n = \frac{2n^2 - 6n}{n} = 2n - 6$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} \frac{b_k}{a_k} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{2k-6}{\frac{2}{k}}\\&= \sum_{k=1}^{10}(k^2 - 3k)\\&= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 3 \times \frac{10 \times 11}{2} = 385 - 165 = 220\end{aligned}$$

27

등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 3이므로

$$a_{n+1} = 3a_n,\ S_n = \frac{a_1(3^n - 1)}{3-1} = \frac{a_1}{2}(3^n - 1)$$

이때 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_{n+2} = \frac{1}{3}(S_{n+2} - S_{n+1})$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+1}}{S_{k+2}S_{k+1}} &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{10} \frac{S_{k+2} - S_{k+1}}{S_{k+2}S_{k+1}}\\&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_{k+1}} - \frac{1}{S_{k+2}}\right)\\&= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3}\right) + \left(\frac{1}{S_3} - \frac{1}{S_4}\right) + \left(\frac{1}{S_4} - \frac{1}{S_5}\right) +\right.\\&\quad \left.\cdots + \left(\frac{1}{S_{11}} - \frac{1}{S_{12}}\right)\right\}\\&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_{12}}\right) = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{4a_1} - \frac{2}{a_1(3^{12} - 1)}\right\}\\&= \frac{3^{11} - 3}{4a_1(3^{12} - 1)}\end{aligned}$$

즉, $p = \frac{3^{11} - 3}{4a_1(3^{12} - 1)}$에서

$$4pa_1 = \frac{3^{11} - 3}{3^{12} - 1}$$

따라서 $m = 12,\ n = 11$이므로

$$m + n = 23$$

28

$a_1 = 3$이므로 $\log_3 3 \times \log_3 a_2 = 2$에서

$\log_3 a_2 = 2$, 즉

$$a_2 = 3^2$$

$a_2 = 3^2$이므로 $\log_3 3^2 \times \log_3 a_3 = 5$에서

$\log_3 a_3 = \frac{5}{2}$, 즉

$$a_3 = 3^{\frac{5}{2}}$$

$a_3 = 3^{\frac{5}{2}}$이므로 $\log_3 3^{\frac{5}{2}} \times \log_3 a_4 = 8$에서

$\log_3 a_4 = \frac{16}{5}$, 즉

$$a_4 = 3^{\frac{16}{5}}$$

그러므로

$$\log_3 \frac{a_4}{a_2} = \log_3 \frac{3^{\frac{16}{5}}}{3^2} = \log_3 3^{\frac{6}{5}} = \frac{6}{5}$$

따라서 $p = 5,\ q = 6$이므로

$$p + q = 11$$

29

조건 (가)에서 $a_{n+1}=a_n+5$, 즉 $a_{n+1}-a_n=5$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 5인 등차수열이다.

조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{10} a_k = a_1+a_2+a_3$이므로

$$\sum_{k=4}^{10} a_k = \frac{7(a_4+a_{10})}{2}=0$$

$a_4+a_{10}=(a_1+15)+(a_1+45)=0$에서

$$a_1=-30$$

$$a_2=-30+5=-25$$

따라서

$$\frac{a_1\times a_2}{5}=\frac{(-30)\times(-25)}{5}=150$$

30

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{28} a_k &= \sum_{k=1}^{14}(a_{2k-1}+a_{2k})\\ &= \sum_{k=1}^{14}\{8(2k-1)+2\} = \sum_{k=1}^{14}(16k-6)\\ &= 16\times\frac{14\times15}{2}-14\times6=1596 \ \cdots \ ㉠\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{29} a_k &= \sum_{k=1}^{14}(a_{2k}+a_{2k+1})\\ &= \sum_{k=1}^{14}(8\times2k+2) = \sum_{k=1}^{14}(16k+2)\\ &= 16\times\frac{14\times15}{2}+14\times2=1708 \ \cdots \ ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서

$$\sum_{k=2}^{29} a_k - \sum_{k=1}^{28} a_k = 1708-1596=112$$

즉,

$$a_{29}-a_1=112$$

따라서

$$a_1=a_{29}-112=115-112=3$$