제 2 교시

2024학년도 머스크N제

수 학 영 역

홀수형

성명		수험 번호					–				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

화성간다.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

문제제작에 도움을 주신
대성이정환T,
소우주T(오르비ID: 소우주),
김형주T
세 분께 진심으로 감사드립니다.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

17학번머스크

제 2 교시

문제 + 해설

(일부문항은 손해설로 대체합니다.)

수1

[머스크제공]

1. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여

$$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{8}$$

일 때, $\sin\theta-\cos\theta$의 값은?

① $\frac{\sqrt{5}}{2}$　② $\frac{\sqrt{3}}{2}$　③ 1

④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

[정답] ①

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$(\sin\theta-\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=\frac{5}{4}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta>0$

$\therefore\ \sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$

[머스크제공]

2. 공차가 2 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 부등식

$$|a_n| \le a_{10} + 3$$

을 만족시키는 자연수 n 의 개수가 8 일 때, a_1 의 최솟값은?

① $-\frac{27}{2}$ ② -13 ③ $-\frac{25}{2}$

④ -12 ⑤ $-\frac{23}{2}$

$|a_n| \le a_{10} + 3$, $|2n+a-2| \le 21+a$

$-21-a \le 2n+a-2 \le 21+a$

$-19-2a \le 2n \le 23$

$-\frac{19}{2} - a \le n \le \frac{23}{2}$ 11.5

$3 < -\frac{19}{2} - a \le 4$

$\frac{25}{2} < -a \le \frac{27}{2}$

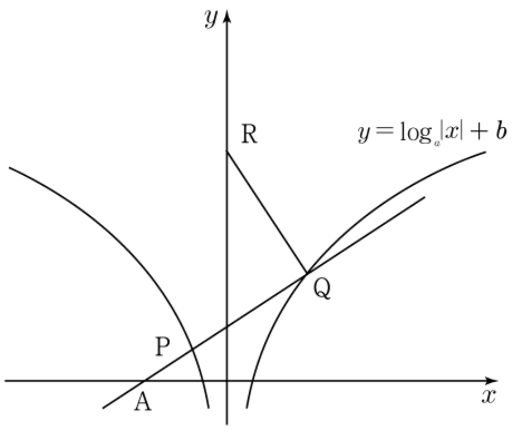
$a \ge -\frac{27}{2}$

[이정환T제공]

3. 그림과 같이 함수 $y=\log_a|x|+b$ $(a>1,\ b>0)$의 그래프 위의 두 점 P, Q와 점 $\mathrm{R}\left(0,\ \frac{17}{2}\right)$가 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$를 만족시키고, 두 직선 PQ, RQ가 서로 수직이다. 직선 PQ가 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$을 지나고,

$$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PQ}} = 1 : 3$$

일 때, a의 값은? (단, P와 Q는 각각 제2사분면과 제1사분면 위의 점이다.)



① $2^{\frac{1}{6}}$ ② $2^{\frac{1}{3}}$ ③ $2^{\frac{1}{2}}$ ④ $2^{\frac{2}{3}}$ ⑤ $2^{\frac{5}{6}}$

[정답] ②

[해설]

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(-3+\alpha,\ \beta)$라 할 때

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PQ}} = 1 : 3$이므로

점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(-3+4\alpha,\ 4\beta)$,

점 R의 좌표는 $\mathrm{R}(-3+4\alpha-3\beta,\ 3\alpha+4\beta)$

따라서 $4\alpha-3\beta=3$, $3\alpha+4\beta=\frac{17}{2}$이고

두 식을 연립하면 $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=1$

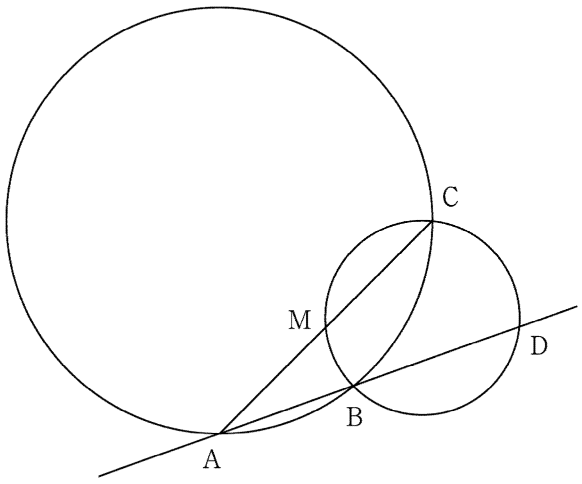
$\mathrm{P}\left(-\frac{3}{2},\ 1\right)$, $\mathrm{Q}(3,\ 4)$이므로 이를 $y=\log_a|x|+b$에 대입하면

$\log_a\frac{3}{2}+b=1$, $\log_a 3+b=4$

따라서 $\log_a 2=3$, 즉 $a=2^{\frac{1}{3}}$

[이정환T제공]

4. 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 원 위에 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=6\sqrt{2}$, $\angle\mathrm{BAC}<\frac{\pi}{2}$를 만족시키는 세 점 A, B, C가 있다. 직선 AB 위의 점 D에 대하여 세 점 B, C, D를 지나는 원이 선분 AC의 중점 M을 지날 때, 선분 DM의 길이가 $p\sqrt{2}-q$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 자연수이다.)



[정답] 9

[해설]

점 M이 선분 AC의 중점이므로 $\overline{\mathrm{AM}}=3\sqrt{2}$

원의 성질에 의하여 $\overline{\mathrm{AM}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}$이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=9$, $\overline{\mathrm{BD}}=5$

삼각형 ABC는 반지름의 길이가 6인 원에 내접하는 삼각형이므로 sin 법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle\mathrm{BCA})}=12$, $\sin(\angle\mathrm{BCA})=\frac{1}{3}$,

$\cos(\angle\mathrm{BCA})=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

원주각의 성질에 의하여 $\angle\mathrm{BCM}=\angle\mathrm{BDM}$이므로

$\cos(\angle\mathrm{BDM})=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

선분 DM의 길이를 k라 할 때 삼각형 ADM에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AM}}^2=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{MD}}^2-2\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{MD}}\times\cos(\angle\mathrm{BDM})$

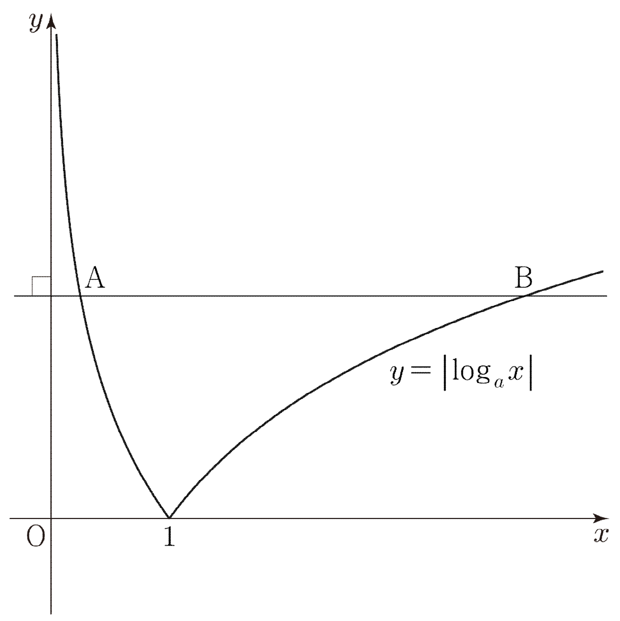
$\Leftrightarrow\ k^2-12\sqrt{2}k+63=0$

$\therefore\ k=6\sqrt{2}-3\ (\because\ \overline{\mathrm{DM}}<\overline{\mathrm{AD}})$

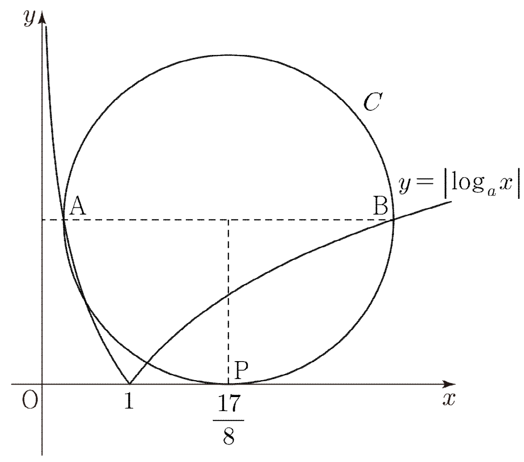
$\therefore\ p+q=9$

[머스크제공]

5. 그림과 같이 곡선 $y=|\log_a x|$ $(a>1)$ 위의 y좌표가 같은 서로 다른 두 점 A, B가 있다. x축 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{APB}=\frac{\pi}{2}$인 점 P가 $\left(\frac{17}{8}, 0\right)$뿐일 때, $(\sqrt{a})^{15}$의 값을 구하시오.



정답 256



문제의 조건을 만족시키려면 선분 AB를 지름으로 하는 원 C가 x축과 접해야 하고, 원 C와 x축의 접점이 P이다.
점 A의 x좌표를 α, 점 B의 x좌표를 $\beta\,(\beta>\alpha)$라 하면 점 P의 x좌표는 원 C의 중심의 x좌표와 같으므로

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{17}{8} \qquad \therefore\ \alpha+\beta=\frac{17}{4} \qquad \cdots ㉠$$

또한 점 A와 점 B의 y좌표가 같으므로 $-\log_a\alpha=\log_a\beta$에서

$$\frac{1}{\alpha}=\beta \qquad \therefore\ \alpha\beta=1 \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여 α와 β는 t에 대한 이차방정식 $t^2-\frac{17}{4}t+1=0$, 즉 $4t^2-17t+4=0$의 서로 다른 두 실근이므로

$$\alpha=\frac{1}{4},\ \beta=4\ (\because\ \alpha<\beta)$$

한편, 원 C의 반지름의 길이를 r라 할 때, $\beta-\alpha=\frac{15}{4}=2r$이므로

$r=\frac{15}{8}$

따라서 점 A와 점 B의 y좌표는 반지름의 길이 r와 동일하므로

$$\log_a 4=\frac{15}{8} \qquad \therefore\ a^{\frac{15}{8}}=4$$

$$\therefore\ (\sqrt{a})^{15}=a^{\frac{15}{2}}=4^4=256$$

[이정환T제공]

6. $a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n} < a_{2n+1}$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{A}_n(a_n,\ (a_n)^2)$과 점 $\mathrm{B}_n(6n,\ n)$에 대하여 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n$의 무게중심의 좌표가 직선 $y=x$ 위에 있을 때, a_{44}의 값은? (단, 모든 자연수 n에 대하여 세 점 A_n, A_{n+1}, B_n은 한 직선 위에 있지 않다.)

① -10　② -3　③ 4　④ 11　⑤ 18

[정답] ①

[해설]

세 점 $\mathrm{A_n}(\mathrm{a_n}, (\mathrm{a_n})^2)$, $\mathrm{A_{n+1}}(\mathrm{a_{n+1}}, (\mathrm{a_{n+1}})^2)$, $\mathrm{B_n}(6\mathrm{n}, \mathrm{n})$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{a_n+a_{n+1}+6n}{3}, \frac{(a_n)^2+(a_{n+1})^2+n}{3}\right)$이다.

이 점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $\frac{a_n+a_{n+1}+6n}{3}=\frac{(a_n)^2+(a_{n+1})^2+n}{3}$

$\Leftrightarrow 5n=(a_n)^2-a_n+(a_{n+1})^2-a_{n+1}$

$(a_n)^2-a_n=b_n$이라 하면, $5n=b_n+b_{n+1}$ ⋯ ㉠

이고 $b_1=0$이다.

㉠에 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$를 대입하면

$5=b_1+b_2$이고, $b_1=0$이므로 $b_2=5$

$10=b_2+b_3$이고, $b_2=5$이므로 $b_3=5$

$15=b_3+b_4$이고, $b_3=5$이므로 $b_4=10$

$20=b_4+b_5$이고, $b_4=10$이므로 $b_5=10$

⋮

따라서,

$b_1=0,\ b_2=b_3=5,\ b_4=b_5=10,\ \cdots,\ b_{2n}=b_{2n+1}=5n$

$n=22$를 대입하면 $b_{44}=b_{45}=110$이고, $b_n=(a_n)^2-a_n$이므로

$110=(a_{44})^2-a_{44}=(a_{45})^2-a_{45}$이다.

즉, a_{44}와 a_{45}는 x에 대한 방정식 $x^2-x=110 \Leftrightarrow (x-11)(x+10)=0$의 실근이고, $a_{2n}<a_{2n+1}$에서 $a_{44}<a_{45}$이므로 $a_{44}=-10$, $a_{45}=11$이다.

[머스크제공]

7. 닫힌구간 $[0, 6]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

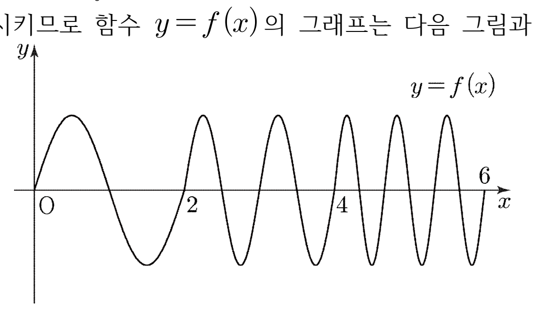
> 3 이하의 자연수 n에 대하여
> $2n-2 \le x < 2n$일 때, $f(x)=\sin(n\pi x)$이다.

$0<k<1$인 상수 k에 대하여 방정식 $f(x)=k$의 실근 중 가장 작은 값을 a, 가장 큰 값을 b라 할 때, $b-a=\frac{11}{2}$이다. 방정식 $f(x)=-k$의 실근 중 가장 작은 값을 c, 가장 큰 값을 d라 할 때, $d-c$의 값은?

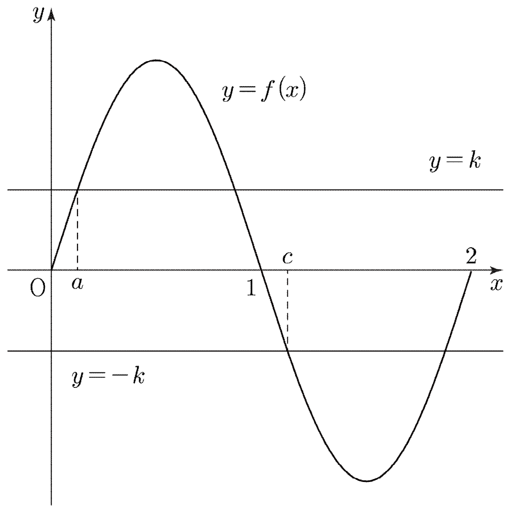
① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{14}{3}$ ③ $\frac{29}{6}$ ④ 5 ⑤ $\frac{31}{6}$

정답 ③

주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$는
$0 \le x < 2$에서 $f(x)=\sin(\pi x)$,
$2 \le x < 4$에서 $f(x)=\sin(2\pi x)$,
$4 \le x < 6$에서 $f(x)=\sin(3\pi x)$
를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



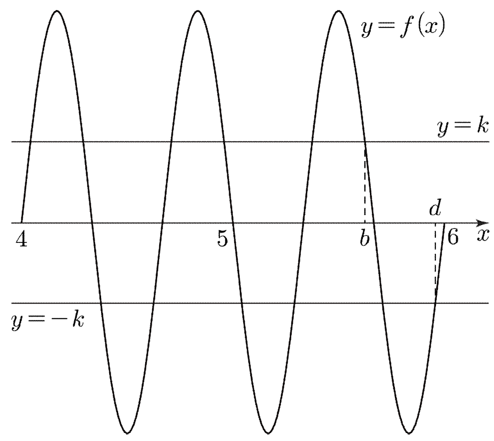
$0 \le x < 2$에서 $f(x)=\sin(\pi x)$이므로 $0 \le x < 2$에서 함수 $f(x)$는 주기가 2인 사인함수의 일부이다.



이때 $c-a$의 값은 주기의 절반과 같으므로

$$c-a=\frac{1}{2}\times 2=1$$

$4 \le x < 6$에서 $f(x)=\sin(3\pi x)$이므로 $4 \le x < 6$에서 함수 $f(x)$는 주기가 $\frac{2}{3}$인 사인함수의 일부이다.



이때 $d-b$의 값은 주기의 절반과 같으므로

$$d-b=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

이때 $b-a=\frac{11}{2}$이므로

$$\begin{aligned} d-c &= \left(b+\frac{1}{3}\right)-(a+1) \\ &= (b-a)-\frac{2}{3} \\ &= \frac{11}{2}-\frac{2}{3}=\frac{29}{6} \end{aligned}$$

[머스크제공]

8. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 집합 $\{0, 1\}$의 원소이다.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(k-4)a_k$$

라 할 때, 수열 $\{S_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $S_n \geq 0$이다. (나) 4 이상의 모든 자연수 m에 대하여 $S_{2m+1} = S_{2m-1} + 2m - 4$이다.

$S_6 = 0$일 때, $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 최댓값을 구하시오.

정답 14

a_k는 집합 $\{0, 1\}$의 원소이므로 $a_k = 0$ 또는 $a_k = 1$이다.

주어진 식에 n을 1부터 순서대로 대입하면

$S_1 = -3a_1$

$S_2 = -3a_1 - 2a_2$

$S_3 = -3a_1 - 2a_2 - a_3$

$S_4 = -3a_1 - 2a_2 - a_3$

$\vdots$

조건 (가)에 의하여 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$이어야 하고 a_4의 값은 결정되지 않는다.

$S_5 = a_5$

$S_6 = a_5 + 2a_6$

$S_7 = a_5 + 2a_6 + 3a_7$

$\vdots$

이고, 4 이상의 자연수 m에 대하여

$S_{2m+1} - S_{2m-1} = 2m - 4$이므로

$$\begin{aligned} S_{2m+1} - S_{2m-1} &= \sum_{k=1}^{2m+1}(k-4)a_k - \sum_{k=1}^{2m-1}(k-4)a_k \\ &= (2m-3)a_{2m+1} + (2m-4)a_{2m} \\ &= 2m-4 \end{aligned}$$

이다. 모든 자연수 n에 대하여 a_n의 값은 0 또는 1이므로

4 이상의 자연수 m에 대하여 $a_{2m} = 1$, $a_{2m+1} = 0$

따라서 $a_8 = a_{10} = \cdots = a_{30} = 1$, $a_9 = a_{11} = \cdots = a_{29} = 0$이다.

$S_6 = 0$이므로 $S_6 = a_5 + 2a_6 = 0$에서 $a_5 = a_6 = 0$이고

$S_7 = a_5 + 2a_6 + 3a_7 = 3a_7$이므로 a_7 또한 결정되지 않는다.

$$\sum_{n=1}^{30} a_n = a_4 + a_7 + \sum_{n=8}^{30} a_n = a_4 + a_7 + 12$$

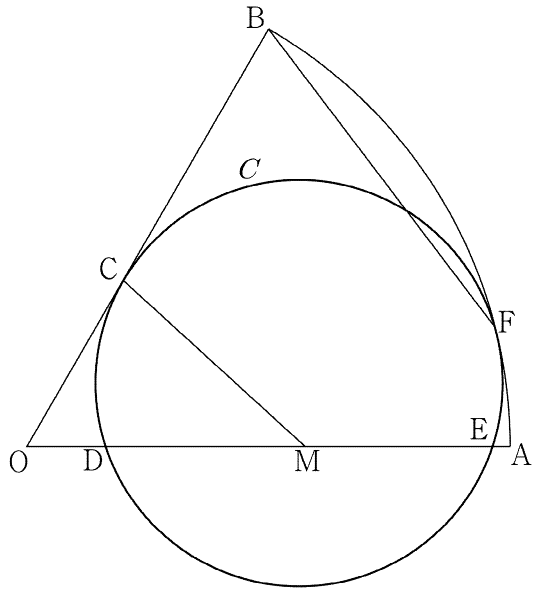
따라서 구하는 최댓값은 $a_4 = a_7 = 1$일 때

$$\sum_{n=1}^{30} a_n = 14$$

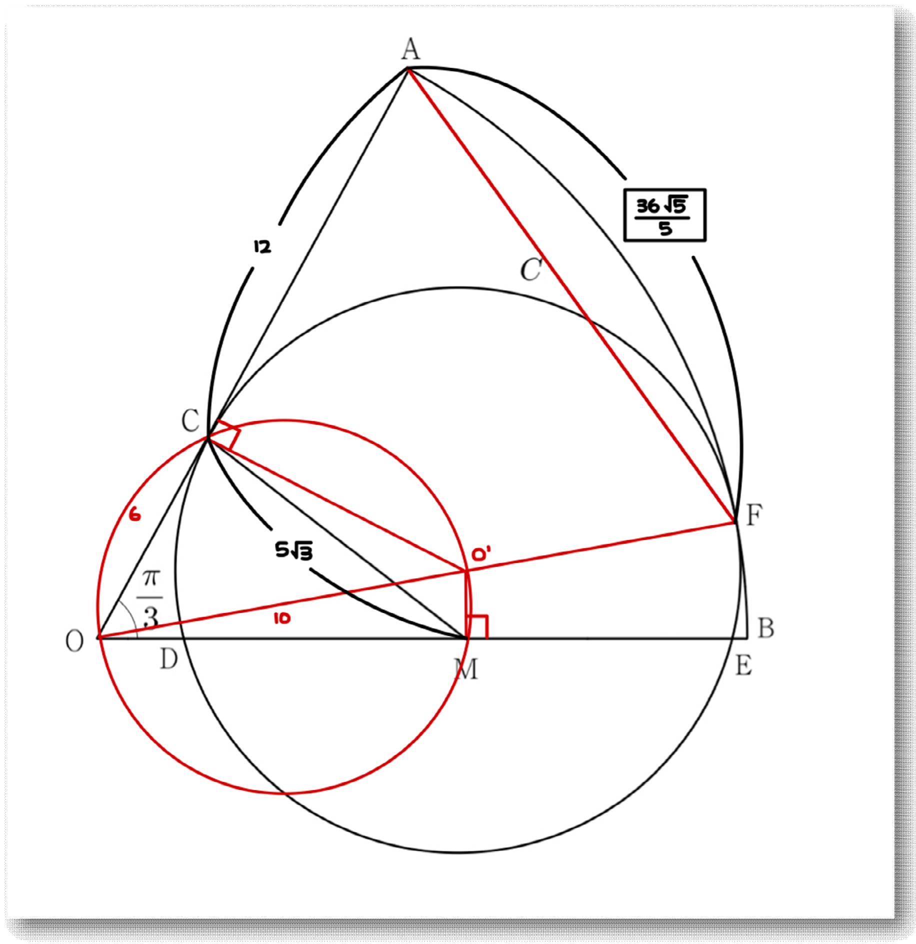
[소우주T]

9. 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB가 있다.

선분 OB 위의 점 C에서 접하고 선분 OA 위의 두 점 D, E를 지나는 원 C가 호 AB와 호 AB 위의 점 F에서 접한다. $\overline{BC}=12$이고 선분 DE의 중점을 M이라 할 때, $\overline{CM}=5\sqrt{3}$이다. $\overline{BF}$의 값은?



① $\frac{30\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{33\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{36\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{39\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{42\sqrt{5}}{5}$



-> A와 B 위치가 바뀌어 있습니다

[소우주T제공]

10. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

(가) $a_1 = 1$

(나) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}S_n & (S_n > 1) \\ k \times S_n & (S_n \le 1) \end{cases}$$

이다.

$\sum_{n=1}^{7} a_n = 1$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하시오.

1) 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 활용하여 (나)의 주어진 식의 좌변을 S_n으로 나타내 주어 정리합시다.

$$S_{n+1} - S_n = \begin{cases} -\frac{1}{2}S_n & (S_n > 1) \\ kS_n & (S_n \le 1) \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$S_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}S_n & (S_n > 1) \\ (k+1)S_n & (S_n \le 1) \end{cases}$$

2) S_{n+1}은 S_n에 따라 결정되므로, 주기성을 고려할 수 있습니다.

$S_1 = 1$, $S_2 = k+1$, $S_3 = \frac{k+1}{2}$, $\cdots$ $S_{1+T} = 1$, $S_{1+T+1} = k+1$, $\cdots$ $S_{1+2T} = 1$

(T 는 $S_{1+T} = 1$인 가장 작은 자연수)

이므로, $k+1$ 은 2만을 소인수로 가질 수 있고, T에 대하여

$k+1 = 2^{T-1}$

로 나타낼 수 있습니다. 수열의 주기성에 의하여 T는 6의 약수인 1, 2, 3, 6이 될 수 있습니다.

$k = 2^{T-1} - 1$ $(T = 1, 2, 3, 6)$

$\downarrow$

$k = 1, 3, 31$

$\therefore$ $1 + 3 + 31 = \boxed{35}$

정답 35 로 수정

수학2

[머스크제공]

11. 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$g(x)=\int_{-x}^{x}f(t)\,dt$$

이다. $f(0)=4$, $g(1)=10$일 때, $\int_0^2 g(x)dx$의 값을 구하시오.

정답 24

$f(0)=4$이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+4$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)이라 하면

$g(x)=\int_{-x}^{x}f(t)dt=\int_{-x}^{x}(at^3+bt^2+ct+4)dt$

$=2\int_0^x(bt^2+4)dt=2\left[\frac{b}{3}t^3+4t\right]_0^x=\frac{2b}{3}x^3+8x$

$g(1)=10$이므로

$\frac{2b}{3}+8=10$, $b=3$

따라서 $g(x)=2x^3+8x$이므로

$\int_0^2(2x^3+8x)dx=\left[\frac{1}{2}x^4+4x^2\right]_0^2=8+16=24$

[머스크제공]

12. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, 6)$에서 그은 접선이 원점을 지나고 점 $(-1, f(-1))$ 에서 그은 접선과 서로 평행할 때, $f(4)$의 값은?

① 15　② 16　③ 17　④ 18　⑤ 19

정답 ①

$f(3)=6$이고 직선 $y=f'(3)(x-3)+6$이 원점을 지나므로

$-3f'(3)+6=0 \quad \therefore\ f'(3)=2$

또한 두 직선

$y=f'(3)(x-3)+6$,

$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

이 서로 평행하므로

$f'(3)=f'(-1)=2$

따라서 $f'(x)=3(x-3)(x+1)+2$이고

$f(x)=x^3-3x^2-7x+C$ (단, C는 적분상수)

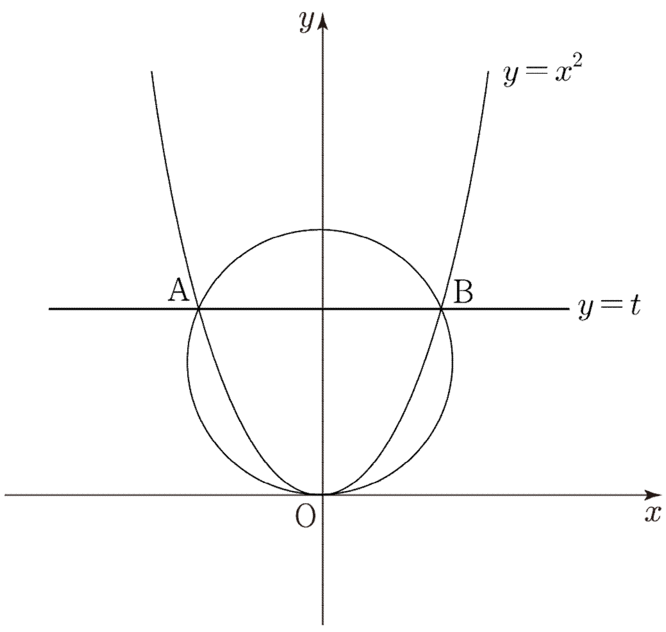
$f(3)=6$이므로

$C-21=6 \quad \therefore\ C=27$

$\therefore\ f(4)=4^3-3\times4^2-7\times4+27=15$

[머스크제공]

13. 그림과 같이 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. 세 점 O, A, B를 지나는 원의 넓이를 $S(t)$, 선분 OB의 길이를 $l(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{S(t)}{l(t)\times t}$의 값은? (단, O는 원점이고, 점 A의 x좌표는 음수이다.)



① $\dfrac{\pi}{3}$　② $\dfrac{\pi}{4}$　③ $\dfrac{\pi}{5}$　④ $\dfrac{\pi}{6}$　⑤ $\dfrac{\pi}{7}$

정답 ②

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t$가 만나는 두 점 A, B의 좌표는

$\mathrm{A}(-\sqrt{t},\, t)$, $\mathrm{B}(\sqrt{t},\, t)$

세 점 O, A, B를 지나는 원의 중심은 y축에 있고 x축과 접하는 원이므로

$x^2+(y-r)^2=r^2$

이고, 두 점 A, B가 원 위의 점이므로

$t+(t-r)^2=r^2 \quad \therefore\ r=\dfrac{t+1}{2}$

즉, $S(t)=\left(\dfrac{t+1}{2}\right)^2\pi$이다.

선분 OB의 길이는

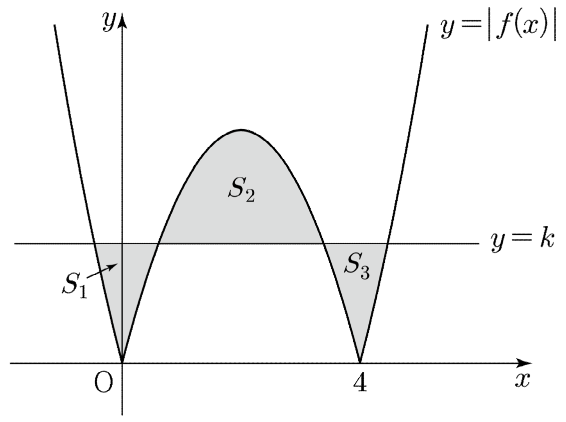
$l(t)=\sqrt{(\sqrt{t})^2+t^2}=\sqrt{t^2+t}$

따라서

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2\pi}{t\sqrt{t^2+t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2+2t+1)\pi}{4t\sqrt{t^2+t}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\pi}{4\sqrt{1+\frac{1}{t}}}$$
$$=\frac{\pi}{4}$$

[머스크제공]

14. 그림과 같이 좌표평면에 함수 $f(x)=x^2-4x$ 에 대하여 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=k\,(0<k<4)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 차례로 S_1, S_2, S_3 이라 하자. $S_2=S_1+S_3$ 일 때, k의 값은?



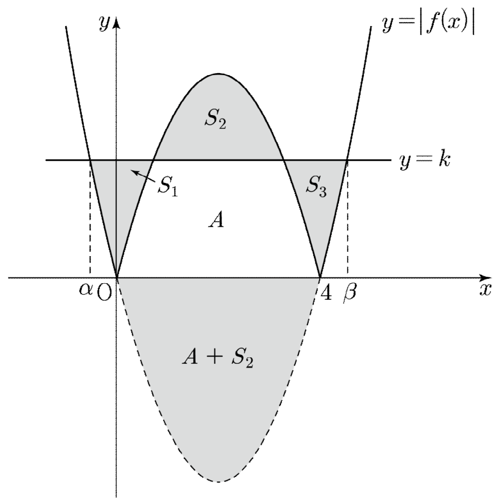
① $2^{\frac{17}{3}}-2^2$　② 2^5-2^2　③ $2^{\frac{13}{3}}-2^2$
④ $2^{\frac{11}{3}}-2^2$　⑤ $2^{\frac{8}{3}}-2^2$

정답 ⑤

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표를 α, $\beta\,(\alpha<\beta)$ 라 하면

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=2 \quad \therefore\ \alpha+\beta=4 \quad \cdots ㉠$$

이고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $A+S_2$ 라 하자.



따라서

$$S_1+S_3+A=\int_\alpha^\beta \{k-f(x)\}dx-\int_0^4\{-f(x)\}dx$$

$$S_2+A=\int_0^4\{-f(x)\}dx$$

이고, $S_2=S_1+S_3$ 이므로

$$\int_\alpha^\beta\{k-f(x)\}dx=2\int_0^4\{-f(x)\}dx$$

$$\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=2\times\frac{1}{6}\times(4-0)^3$$

$$(4-2\alpha)^3=2^7\ (\because ㉠)$$

$$\therefore\ \alpha=2-2^{\frac{4}{3}}$$

이때 $k=\alpha^2-4\alpha$ 이므로

$$\begin{aligned}k&=\alpha(\alpha-4)\\&=\left(2-2^{\frac{4}{3}}\right)\left(-2-2^{\frac{4}{3}}\right)\\&=\left(2^{\frac{4}{3}}-2\right)\left(2^{\frac{4}{3}}+2\right)\\&=2^{\frac{8}{3}}-2^2\end{aligned}$$

[이정환T제공]

15. 다항함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 a, b $(a \le b)$에 대하여

$$a-b \le \int_a^b f(x)dx \le 2b^3-2a^3$$

을 만족시킨다. $f(-1)=-1$일 때, $f'(13)$의 최댓값을 구하시오.

[정답] 24

[해설]

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때,

$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$이므로 $a-b \le \int_a^b f(x)dx \le 2b^3-2a^3$은

$a-b \le F(b)-F(a) \le 2b^3-2a^3$이다. 즉, 임의의 두 실수

a, b $(a \le b)$에 대하여 $F(a)+a \le F(b)+b$이고,

$2a^3-F(a) \le 2b^3-F(b)$이므로 함수 $F(x)+x$와 $2x^3-F(x)$가 모두 증가함수이다.

따라서 $(F(x)+x)' \ge 0$이고 $(2x^3-F(x))' \ge 0$이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)+1 \ge 0$이고 $6x^2-f(x) \ge 0$이므로

$-1 \le f(x) \le 6x^2$이다. $f(x)$의 차수가 3 이상이면 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le 6x^2$일 수 없고, $f(x)$라 일차함수라면 모든 실수 x에 대하여 $-1 \le f(x)$일 수 없다.

따라서 $f(x)$는 이차함수이고, $f(x)=px^2+qx+r$이라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge -1$인데 $f(-1)=-1$이므로

$f'(-1)=0$이다.

따라서 $f(x)=px^2+qx+r=p(x+1)^2-1$이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le 6x^2 \Leftrightarrow p(x+1)^2-1 \le 6x^2$이므로

$6x^2-p(x+1)^2+1 \ge 0 \Leftrightarrow (6-p)x^2-2px-p+1 \ge 0$이다. 이차식

$(6-p)x^2-2px-p+1$의 판별식 $p^2-(p-1)(p-6)$이 0보다

작거나 같아야 $(6-p)x^2-2px-p+1 \ge 0$을 만족시킬 수 있다.

따라서 $p^2-(p-1)(p-6) \le 0 \Leftrightarrow 7p-6 \le 0$이고, $p \le \frac{6}{7}$이다.

$f'(x)=2px+2p$이므로 $f'(13)=28p$이다. 따라서 $28p \le 24$이고,

$f'(13)$의 최댓값은 24

〔머스크제공〕

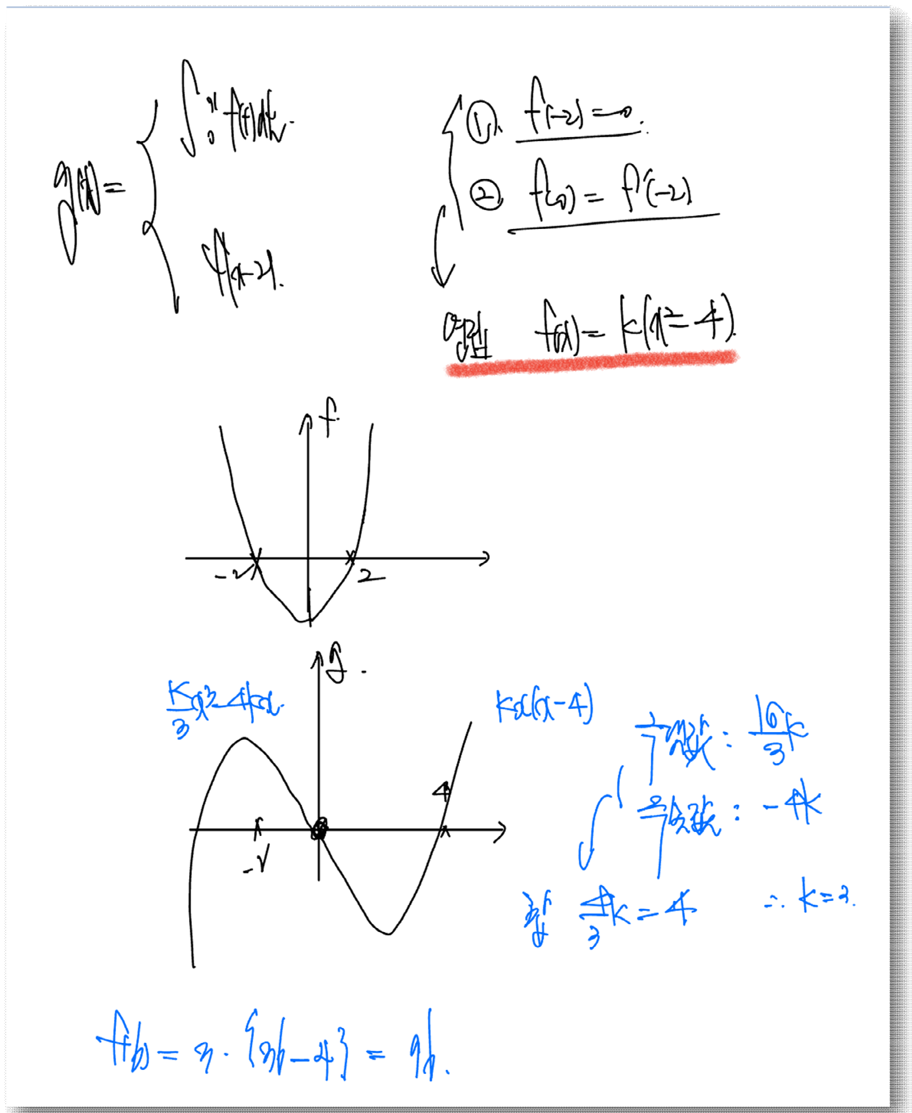
16. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수

$$g(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x f(t)dt & (x\le 0)\\ f(x-2) & (x>0)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(6)$의 값은?

> 집합
> $\{g(a)\,|\,$함수 $g(x)$가 $x=a$에서 극대 또는 극소이다.$\}$
> 의 모든 원소의 합은 4이다.

① 84 ② 88 ③ 92 ④ 96 ⑤ 100



[머스크제공]

17. 상수 a와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

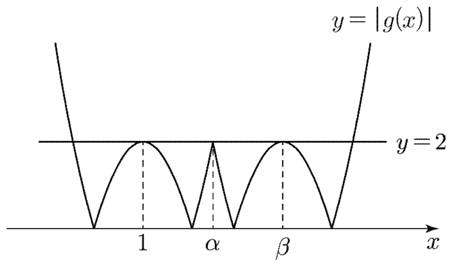
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ f(2a-x) & (x \ge a) \end{cases}$$

이다. 함수 $|g(x)|$가 $x=1$, $x=\alpha$, $x=\beta\,(1<\alpha<\beta)$에서 극댓값 2를 가질 때, $f(2a)$의 값은? [4점]

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

정답 ①

함수 $g(x)$는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.
한편, 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $|f(x)|$가 극대가 되는 x의 값의 개수는 0 또는 1이다.
함수 $|g(x)|$가 극대가 되는 x의 값의 개수가 3이므로 $x=a$에서 극댓값을 가진다.



따라서 $1<\alpha<\beta$에서

$\alpha=a$, $\beta=2a-1$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 -2를 가지므로

$f(x)=(x-1)^2-2$

$f(a)=2$이므로

$(a-1)^2=4$ $\therefore\ a=3\ (\because\ a>1)$

$\therefore\ f(2a)=f(6)=23$

[이정환T제공]

18. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f'(0)=0$을 만족시키고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 함수 $y=|f(x)|-4|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

[정답] 19

[해설]

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극대 또는 극소를 갖는다면, $g(x)=f(-1)$이고, $f(x)$가 $x=-1$에서 극대 또는 극소를 갖기 때문에 $x=0$에서 또한 극대 또는 극소를 갖는다. 따라서 함수 $y=|f(x)|-4|g(x)|$는 적어도 한 점에서 미분가능하지 않다.

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대 또는 극소를 갖지 않고, 직선 $y=g(x)$는 x축과 한 점에서 만난다. 직선 $y=g(x)$가 x축과 만나는 점의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면, 함수 $|g(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다. 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하다면, 함수 $|f(x)|-4|g(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않으므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

따라서 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않고,

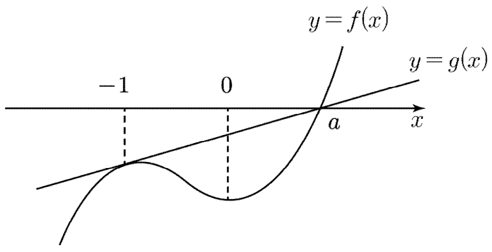
$f(a)=0$ ⋯ (＊)

함수 $|g(x)|$는 $x=a$가 아닌 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로, 함수 $|f(x)|$가 $x=b$ $(b \neq a)$에서 미분가능하지 않다면, 함수 $|f(x)|-4|g(x)|$는 $x=b$ $(b \neq a)$에서 미분가능하지 않다. 이는 주어진 조건에 모순이므로, 함수 $|f(x)|$ 또한 $x=a$에서만 미분가능하지 않다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선이 $y=g(x)$이고, (＊)에 의하여 $f(a)=g(a)=0$이므로 $f(x)-g(x)=(x+1)^2(x-a)$ ⋯ ㉠

방정식 $f(x)=0$의 실근이 $x=a$로 유일하므로, $f'(a)>0$이다.

따라서 다음 그림과 같이 직선 $y=g(x)$의 기울기가 양수이다.



$x<a$일 때, $f(x)<0$, $g(x)<0$이므로

$|f(x)|-4|g(x)|=-f(x)+4g(x)$이고,

$x>a$일 때 $f(x)>0$, $g(x)>0$이므로 $|f(x)|-4|g(x)|=f(x)-4g(x)$이다.

따라서 함수 $|f(x)|-4|g(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하기 위해서는

$-f'(a)+4g'(a)=f'(a)-4g'(a)$

$\Leftrightarrow f'(a)=4g'(a)$ ⋯ ㉡

이다.

㉠에서 $f(x)-g(x)=(x+1)^2(x-a)$이므로

$f'(x)-g'(x)=(x+1)(3x+1-2a)$이고, 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)-g'(0)=1-2a$이다. 주어진 조건에 의하여 $f'(0)=0$이므로

$g'(0)=2a-1$이고, $y=g(x)$가 직선의 방정식이므로 임의의 실수 x에 대하여 $g'(x)=g'(0)=2a-1$ ⋯ ㉢

$f'(x)-g'(x)=(x+1)(3x+1-2a)$에 $x=a$를 대입하면

$f'(a)-g'(a)=(a+1)^2$이고, ㉡에 의하여 $f'(a)=4g'(a)$이므로

$f'(a)-g'(a)=3g'(a)=(a+1)^2$이다. ㉢에 의하여

$g'(0)=g'(a)=2a-1$이므로 $6a-3=(a+1)^2$, $a=2$

따라서 $g(x)=g'(x)(x-a)=3(x-2)$이므로 ㉠에 의하여

$f(x)=(x+1)^2(x-2)+3(x-2)=x^3-8$이다. 따라서 $f(3)=19$

[소우주T제공]

19. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(3)>0$
(나) 모든 실수 a, b에 대하여 $f(a)<f(b)$이면 $a>b$이다.

함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x-3) & (x<3) \\ |f(x)| & (x\geq 3) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 최고차항의 계수가 3인 사차함수일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄴ. $f(0)\leq f(1)$
ㄷ. $f(2)>16$이면 $f(-1)>30$이다.

① ㄴ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1) 주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서

$f'(x)\leq 0$

을 만족시킵니다.

2) 주어진 항등식에 의하여,

$x<0$일 때, $f(x)=g(x+3)$, $x\geq 3$일 때, $|f(x)|=g(x)$

가 성립합니다.

3) 1)에 의하여, 함수 $f(x)$는 충분히 큰 실수 x에 대하여

$f'(x)<0$, $f'(x)<0$

임을 알 수 있고, 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로,

$g(\alpha)=g'(\alpha)=f(\alpha)=f'(\alpha)=0$

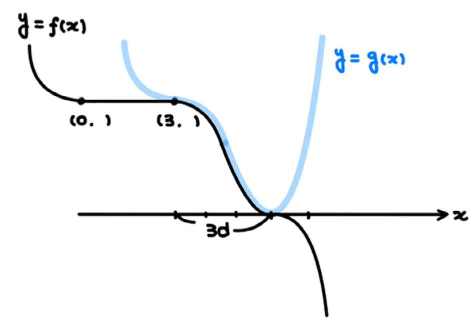
인 실수 α가 존재함을 알 수 있습니다.

4) 2)에 의하여

$f(0)=f(3)=g(3)>0$

임을 알 수 있고, 함수 $g(x)$가 양수인 극값을 가지면 함수 $f(x)$도 동일한 극값을 가지므로, 함수 $g(x)$는 극댓값을 갖지 않으며, $g'(3)=0$ 임을 알 수 있습니다.

따라서 두 함수의 그래프는 다음 그림과 같이 그려집니다.



5) 다음과 같이 진위 여부를 판단할 수 있습니다.

ㄱ. OUT!
ㄴ. $f(0)=f(1)$ ok!

ㄷ. $27\cdot 3\cdot d^4>16$

$d>\frac{2}{3}$

$f(-1)=g(2)=\underbrace{\boxed{3\cdot(-1)^3\cdot(-4d)}}_{=12d}+f(2)>24$ OUT!

이상에서 옳은 것은 $\boxed{\text{ㄴ}}$뿐입니다. 죄송합니다.

[김형주T제공]

20. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le 0$이다.
>
> (나) 닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 그래프는 최고차항의 계수가 3인 이차함수의 그래프의 일부이다.

함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_{10}^{x} f(t)dt$$

라 하자. 모든 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$에서 x의 값이 t에서 $t+4$까지 변할 때의 평균변화율이 -1일 때, 함수 $g(x)$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

1) 주어진 조건에서 모든 실수 t에 대하여

$$\int_{t}^{t+4} f(t)\,dt = 4$$

임을 알 수 있고, 이를 미분하여

$$f(t) = f(t+4)$$

를 얻을 수 있습니다.

2) 이차함수의 넓이 공식에 의하여

$$\int_{1}^{3} |f(t)|dt$$

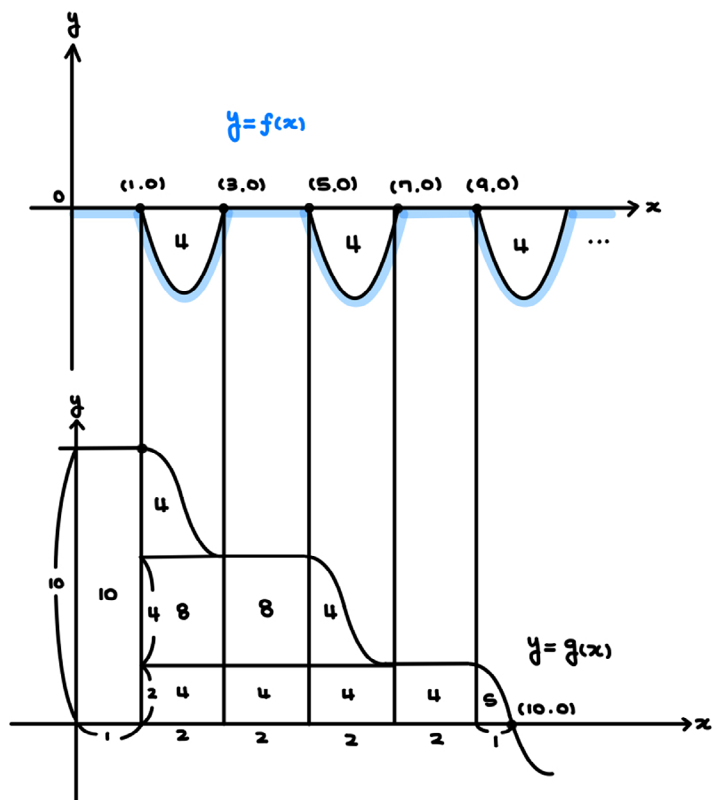
의 최솟값이 4임을 대충 눈치껏 파악할 수 있습니다.

따라서 함수 $f(x)$는

$0 \le x \le 1$, $3 \le x \le 4$일 때, $f(x) = 0$

을 만족시킴을 알 수 있습니다.

3) $g(10) = 0$ 이므로 두 함수의 그래프를 다음과 같이 그릴 수 있습니다.



$$S = \left| \int_0^1 x^3 - 3x\,dx \right|$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{5}{4}$$

$$42 + \frac{5}{4} = \boxed{\frac{173}{4}}$$

4) 둘러싸인 부분의 넓이를 잘 구하면 답은 $\boxed{\frac{173}{4}}$ 임을 알 수 있습니다.

미적분

[머스크제공]

21. 두 양수 a, b에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+an+3}-\sqrt{bn^2-bn+2}\right)=3$$

일 때, $a+b$의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

정답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+an+3}-\sqrt{bn^2-bn+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b)n^2+(a+b)n+1}{\sqrt{an^2+an+3}+\sqrt{bn^2-bn+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b)n+(a+b)+\frac{1}{n}}{\sqrt{a+\frac{a}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{b-\frac{b}{n}+\frac{2}{n^2}}}$$

이때 $a\neq b$이면 극한값이 존재하지 않으므로 $a=b$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a+\frac{1}{n}}{\sqrt{a+\frac{a}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{a-\frac{a}{n}+\frac{2}{n^2}}}=\frac{2a}{2\sqrt{a}}=\sqrt{a}=3$$

$\therefore\ a=b=9$

따라서 $a+b=18$이다.

[머스크제공]

22. 함수 $f(x)=x^3+3x+1$의 역함수를 $g(x)$라 하고,

함수 $h(x)=g(\tan x)$라 할 때, $h'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

정답 ③

$h'(x)=(\sec^2 x)g'(\tan x)$ 이므로

$h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2g'(1)$

$f(x)=x^3+3x+1=1$을 만족시키는 실수 x의 값이 0이므로

$f(0)=1$, $g(1)=0$

$\therefore\ g'(1)=\frac{1}{f'(0)}$

한편, $f'(x)=3x^2+3$에서 $f'(0)=3$이므로

$g'(1)=\frac{1}{3}$

$\therefore\ h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2g'(1)=\frac{2}{3}$

[머스크제공]

23. 상수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}+kx}{(x+1)x^{2n}-1}$$

라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(k)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

정답 ①

함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+1} & (x<-1)\\ k-1 & (x=-1)\\ -kx & (-1<x<1)\\ k+1 & (x=1)\\ \frac{1}{x+1} & (x>1)\end{cases}$$

이므로 $x=-1$ 또는 $x=1$에서 불연속인지 확인한다.
함수 $h(x)=f(x)g(x)$라 하면
함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-1-}h(x)=\lim_{x\to-1+}h(x)=h(-1)$$

$$\lim_{x\to-1-}\frac{g(x)}{x+1}=kg(-1)=(k-1)g(-1) \quad \cdots ㉠$$

$kg(-1)=(k-1)g(-1)$이므로 $g(-1)=0$
함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로
$g(x)=(x+1)(x-a)$라 하면 ㉠에서

$$\lim_{x\to-1-}\frac{(x+1)(x-a)}{x+1}=0$$

$$\lim_{x\to-1-}(x-a)=0$$

$\therefore\ a=-1,\ g(x)=(x+1)^2$

즉, 함수 $h(x)$는 다음과 같다.

$$h(x)=\begin{cases}x+1 & (x<-1)\\ 0 & (x=-1)\\ -kx(x+1)^2 & (-1<x<1)\\ 4k+4 & (x=1)\\ x+1 & (x>1)\end{cases}$$

함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1+}h(x)=h(1)$$

$$-k(1+1)^2=1+1=4k+4$$

$$-4k=2=4k+4$$

$$\therefore\ k=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ g(k)=g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

[이정환T제공]

24. 상수 a $(a>0)$, b에 대하여 연속함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ \infty)$에서 $f(x)=a\cos^3 x+b\cos x$이다. 연속함수 $g(x)$가 $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$인 모든 실수 x에 대하여

$$\sin x\times\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$$

을 만족시키고, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx=-4$이다. $a-b$의 값을 구하시오.

[정답] 28

[해설]

$\{g(x)\}^2=\sin x\times\{f(x)\}^2\ge 0$이고

$-\frac{\pi}{2}\le x\le 0$에서 $\sin x\le 0$이므로

$-\frac{\pi}{2}\le x\le 0$에서 $f(x)=0$

$f(0)=a+b=0$이므로 $b=-a$

따라서

$$\begin{aligned}f(x)&=a\cos^3 x-a\cos x\\&=a\cos x(\cos^2 x-1)\\&=-a\sin^2 x\cos x\end{aligned}$$

$\{g(x)\}^2=a^2\sin^5 x\cos^2 x$이고 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx<0$이므로

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $g(x)=-a\sqrt{\sin^5 x}\cos x$

따라서

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(x)dx&=-a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^5 x}\cos x\,dx\\&=-a\int_0^1\sqrt{t^5}\,dt\\&=-a\left[\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}\right]_0^1\\&=-\frac{2}{7}a=-4,\end{aligned}$$

따라서 $a=14$이고 $a-b=2a=28$

[머스크제공]

25. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_1+a_5의 값은?

(가) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$

(나) 모든 자연수 p에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+p} = \frac{4}{p(p+1)}$ 이다.

① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{13}{15}$ ③ $\frac{14}{15}$ ④ 1 ⑤ $\frac{16}{15}$

정답 ⑤

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+p} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{k+p} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^{p} a_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n+p} a_k - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{p} a_k \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{k=1}^{p} a_k \\ &= 3 - \sum_{k=1}^{p} a_k\end{aligned}$$

$\therefore\ 3-\sum_{k=1}^{p} a_k = \frac{4}{p(p+1)}$ ⋯ ㉠

이때 p 대신 $p-1$을 대입하면

$3-\sum_{k=1}^{p-1} a_k = \frac{4}{(p-1)p}$ $(p \ge 2)$ ⋯ ㉡

㉠에서 ㉡을 빼면 2 이상의 자연수 p에 대하여

$-a_p = \frac{4}{p(p+1)} - \frac{4}{(p-1)p}$

$a_p = \frac{4}{p}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right)$

$p=5$를 대입하면

$a_5 = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{15}$

㉠에서 $p=1$을 대입하면

$3-a_1 = \frac{4}{1+1} = 2$ $\therefore\ a_1 = 1$

$\therefore\ a_1 + a_5 = 1 + \frac{1}{15} = \frac{16}{15}$

[이정환T제공]

26. 임의의 실수 a에 대하여 x에 대한 방정식

$$k\left(1+e^{-x}\right)=\frac{1}{x-a}\ (k>0)$$

의 실근의 개수가 1일 때, k의 최솟값이 $\frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[정답] 17

[해설]

$k\left(1+e^{-x}\right)$에 $x=a$를 대입하면 $k\left(1+e^{-a}\right)\neq 0$이다.

따라서 방정식 $k\left(1+e^{-x}\right)=\frac{1}{x-a}$ $(k>0)$의 실근은 방정식 $\frac{1}{k\left(1+e^{-x}\right)}=x-a$의 실근과 같다.

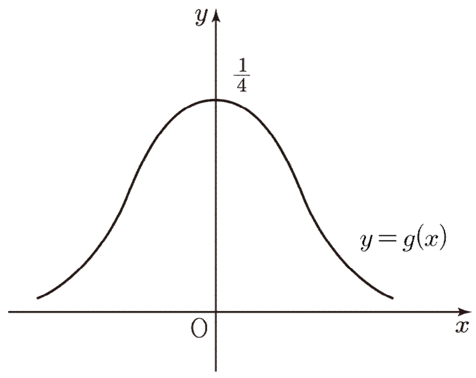
$\frac{1}{k\left(1+e^{-x}\right)}=\frac{e^x}{k\left(e^x+1\right)}$이므로 방정식 $\frac{1}{k\left(1+e^{-x}\right)}=x-a$은 $\frac{e^x}{k\left(e^x+1\right)}=x-a$, $x-\frac{e^x}{k\left(e^x+1\right)}=a$이다.

임의의 실수 a에 대하여 방정식 $x-\frac{e^x}{k\left(e^x+1\right)}=a$의 실근의 개수가 1이기 위해서는 함수 $f(x)=x-\frac{e^x}{k\left(e^x+1\right)}$이라 할 때, $f(x)$가 극값을 갖지 않아야 하고, $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 부호가 일정해야 한다.

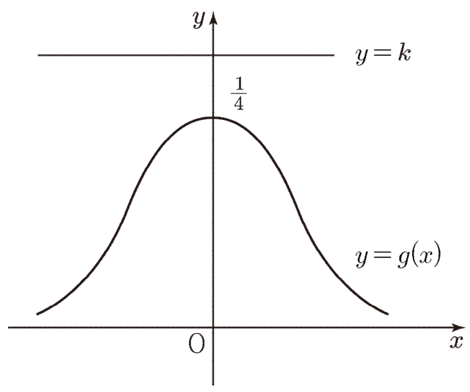
$f'(x)=1-\frac{e^x}{k\left(e^x+1\right)^2}=\frac{1}{k}\left\{k-\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\right\}$이다. $k>0$이므로 함수 $f'(x)$의 부호는 $k-\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$의 부호와 같다. 함수 $g(x)=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$이라 할 때,

$g'(x)=\frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^3}\times\left(1-e^x\right)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$일 때 극대이자 최대를 갖는다. 또한

$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)\times\left(\frac{1}{e^x+1}\right)=0$, $\lim_{x\to-\infty}g(x)=0$이므로 곡선 $y=g(x)$의 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 양수 k에 대하여 함수 $k-\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=k-g(x)$의 부호가 일정하기 위해서는 다음 그림과 같이 $k\geq g(0)=\frac{1}{4}$이어야 한다.



k의 최솟값이 $\frac{1}{4}$이므로 $p=4$, $q=1$이다. $p^2+q^2=17$

[다른 해설1]

$k(1+e^{-x})$에 $x=a$를 대입하면 $k(1+e^{-a})\neq 0$이다.

따라서 방정식 $k(1+e^{-x})=\dfrac{1}{x-a}$은 $x=a$를 실근으로 가질 수 없고, 방정식 $k(1+e^{-x})=\dfrac{1}{x-a}$의 실근은 방정식 $k(1+e^{-x})(x-a)=1$의 실근과 같다.

함수 $f(x)=k(1+e^{-x})(x-a)$라 하면,

$$\begin{aligned} f'(x)&=k(-e^{-x})(x-a)+k(1+e^{-x}) \\ &=k\{1+e^{-x}(-x+1+a)\} \\ &=ke^{-x}\{e^{x}-(x-1-a)\} \end{aligned}$$

모든 실수 x에 대하여 $ke^{-x}>0$이므로 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 부호의 변화는

함수 $e^{x}-(x-1-a)=(e^{x}-x+1)+a$의 부호변화와 같다.

함수 $g(x)=e^{x}-x+1$이라 하면, $g'(x)=e^{x}-1$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 최솟값 2를 갖는다.

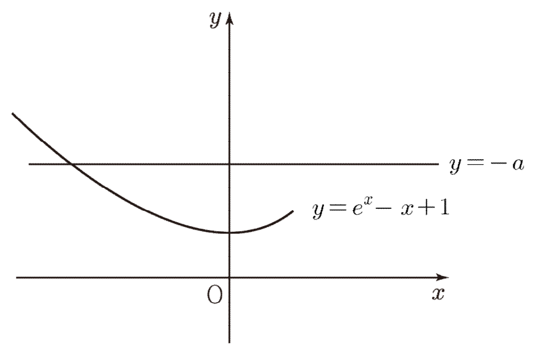
따라서 함수 $(e^{x}-x+1)+a$의 최솟값은$2+a$이다.

(ⅰ) $a\geq -2$일 때

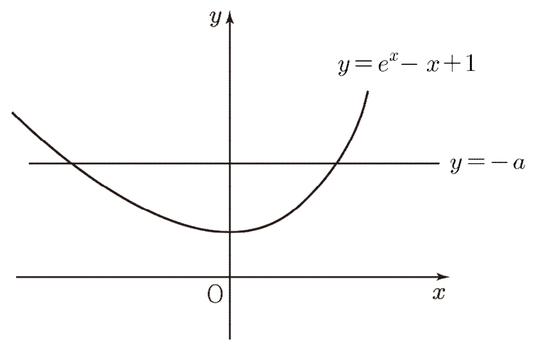
함수 $(e^{x}-x+1)+a$의 최솟값이 0보다 크거나 같으므로
모든 실수 x에 대하여 함수 $(e^{x}-x+1)+a\geq 0$이다.
따라서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이다.
함수 $f(x)=k(1+e^{-x})(x-a)$에 대하여 $x\to\infty$일 때 $f(x)\to\infty$이고, $x\to-\infty$일 때 $f(x)\to-\infty$이다.
따라서 k의 값에 관계없이 방정식 $f(x)=1$은 단 하나의 실근을 갖는다.

(ⅱ) $a<-2$일 때

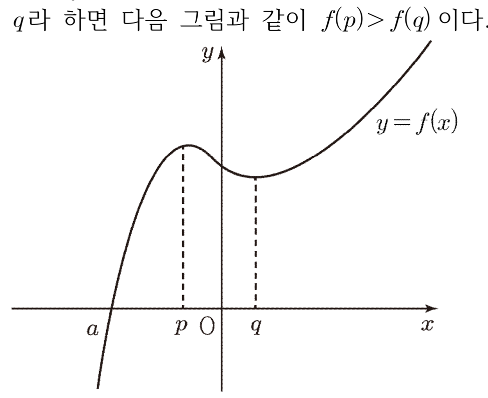
$x\to-\infty$일 때 $(e^{x}-x+1)\to\infty$이므로
곡선 $y=e^{x}-x+1$과 직선 $y=-a$의 위치관계는 다음과 같다.



따라서 함수 $y=e^{x}-x+1-(-a)=e^{x}-x+1+a$의 부호가 (양) → (음)으로 변하는 지점이 한 점 존재한다.
따라서 함수 $f'(x)$의 부호가 (양) → (음)으로 변하는 지점이 한 점 존재하고, 함수 $f(x)$가 극대를 갖는 x가 한 개 존재한다. 또한 $x\to\infty$일 때 $f(x)\to\infty$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 극솟값을 가져야 하므로
곡선 $y=e^{x}-x+1$과 직선 $y=-a$의 위치 관계는 다음과 같다.



함수 $f(x)$가 극대를 갖는 x의 값을 p, 극소를 갖는 x의 값을 q라 하면 다음 그림과 같이 $f(p)>f(q)$이다.



p, q는 각각 방정식 $e^{x}-x+1=-a$의 실근이므로

$e^{p}-p+1=-a \Leftrightarrow p-a=e^{p}+1$이고,
$e^{q}-q+1=-a \Leftrightarrow q-a=e^{q}+1$이다.

따라서

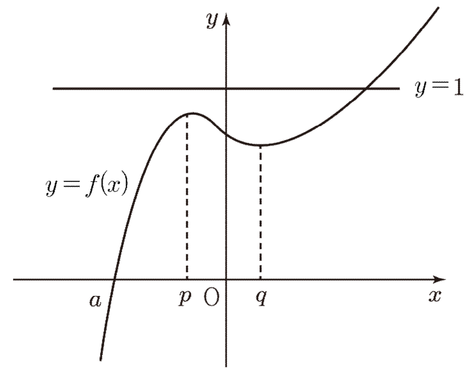
$$\begin{aligned} f(p)&=k(1+e^{-p})(p-a) \\ &=k(1+e^{-p})(1+e^{p}) \\ &=k(2+e^{p}+e^{-p}) \end{aligned}$$

이고,

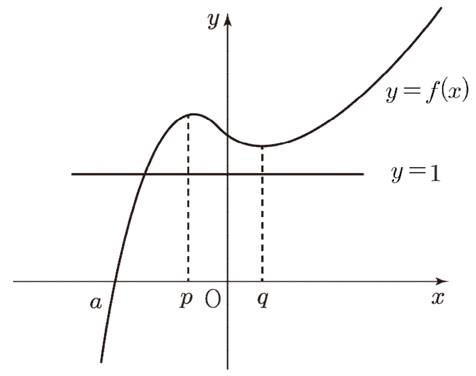
$$\begin{aligned} f(q)&=k(1+e^{-q})(q-a) \\ &=k(1+e^{-q})(1+e^{q}) \\ &=k(2+e^{q}+e^{-q}) \end{aligned}$$

이다.

$a\to-\infty$일 때, $p\to-\infty$, $q\to\infty$이므로
$f(p)\to\infty$, $f(q)\to\infty$이다.
$a\to-\infty$일 때 $f(p)\to\infty$이므로 임의의 실수 a에 대하여 (다음 그림과 같이) $f(x)$의 극댓값이 1보다 작아서 방정식 $f(x)=1$의 실근의 개수가 1일 수 없다.



따라서 방정식 $f(x)=1$의 실근의 개수가 1이기 위해서는 다음 그림과 같이 $f(q)>1$을 만족시켜야 한다.



$f(q)=k(2+e^{q}+e^{-q})$에서 $q>0$이므로 $f(q)>4k$이고,
$4k\geq 1$이면 방정식 $f(x)=1$의 실근의 개수가 1이다.

따라서 k의 범위는 $k\geq\dfrac{1}{4}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 a의 값에 관계없이 방정식 $f(x)=1$의 실근의 개수가 1이기 위해서는 $k\geq\dfrac{1}{4}$이다.

$p=4$, $q=1$이므로 $p^{2}+q^{2}=17$

[다른 해설2]

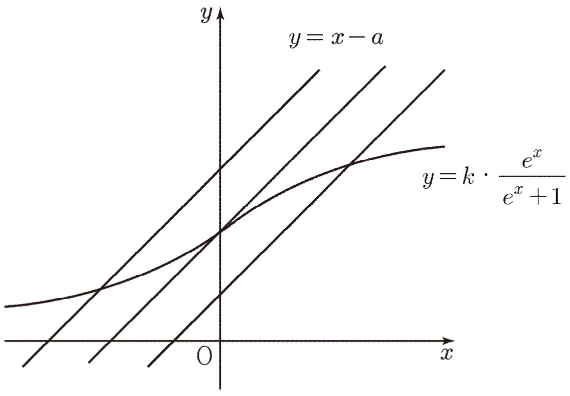
방정식 $k(1+e^{-x})=\dfrac{1}{x-a}$ $(k>0)$의 실근은

방정식 $\dfrac{1}{k(1+e^{-x})}=x-a$의 실근과 같다.

$\dfrac{1}{k(1+e^{-x})}=\dfrac{e^{x}}{k(e^{x}+1)}$이므로 방정식 $\dfrac{1}{k(1+e^{-x})}=x-a$의 실근의 개수는 곡선 $y=\dfrac{e^{x}}{k(e^{x}+1)}$과 직선 $y=x-a$가 만나는 점의 개수와 같다.

임의의 실수 a에 대하여 곡선 $y=\dfrac{e^{x}}{k(e^{x}+1)}$과 직선 $y=x-a$가 한 점에서만 만나기 위해서는

다음 그림과 같이 곡선 $y=\dfrac{e^{x}}{k(e^{x}+1)}$의 변곡점에서의 접선의 기울기가 1보다 작거나 같아야 한다.



곡선 $y=\dfrac{e^x}{k(e^x+1)}$ 은 $x=0$ 에서 변곡점을 갖는다.

곡선 $y=\dfrac{e^x}{k(e^x+1)}$ 의 $x=0$ 에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{4k}$ 이므로

주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $\dfrac{1}{4k}\geq 1$ 이고, $k\leq\dfrac{1}{4}$ 이므로 k 의 최댓값은 $\dfrac{1}{4}$ 이다.

$p=4$, $q=1$ 이므로 $p^2+q^2=17$

[머스크제공]

27. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x \le 4$ 에서 $f(x)$는 일차함수이다.
> (나) $x > 4$ 에서 함수 $y=f(x)$를 매개변수 $t\ (t>1)$로 나타내면 $\begin{cases} x=4t \\ y=\dfrac{1}{2}t^2-4\ln t \end{cases}$ 이다.

곡선 $f(x)$의 $x=0$에서 $x=4e$까지의 길이는?

① $\dfrac{e^2+13}{2}$ ② $\dfrac{e^2+15}{2}$ ③ $\dfrac{e^2+17}{2}$
④ $\dfrac{e^2+15}{4}$ ⑤ $\dfrac{e^2+17}{4}$

정답 : ③

도함수가 연속이므로 $x=4$에서 함수 $f(x)$는 연속이고 좌미분계수와 우미분계수가 같다.

(1) 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 연속이므로 $f(1)=\lim_{x\to4-}f(x)=\lim_{x\to4+}f(x)$에서

$t\to1+$ 일 때, $x\to4+$이므로

$\lim_{x\to4+}f(x)=\lim_{t\to1+}\left(\frac{1}{2}t^2-4\ln t\right)=\frac{1}{2}$, 따라서 $f(x)$는 $\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$를 지난다.

(2) 도함수 $f'(x)$의 $x=1$에서의 연속성
$f'(4)=\lim_{x\to4-}f'(x)=\lim_{x\to4+}f'(x)$에서

$$\lim_{x\to4+}f'(x)=\lim_{t\to1+}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to1+}\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\lim_{t\to1+}\frac{t-\frac{4}{t}}{4}=-\frac{3}{4}$$

(1), (2)에 의하여 $x<4$에서 함수 $f(x)$는 기울기가 $-\frac{3}{4}$이고

점$\left(4,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나는 직선이므로 $f(x)=-\frac{3}{4}(x-4)+\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}$

문제에서는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 $x=0$에서 $x=4e$의 길이를 묻고있으므로
$x<4$에서는 직선의 길이를 묻고 $x>4$에서는 매개변수를 이용한 곡선의 길이의 값을 구하여 더한다.

$$\int_0^4\sqrt{1+\{f(x)\}^2}\,dx+\int_1^e\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=5+\int_1^e\sqrt{4^2+\left(t-\frac{4}{t}\right)^2}\,dt=5+\int_1^e t+\frac{4}{t}\,dt$$
$$=5+\left[\frac{1}{2}t^2+4\ln t\right]_1^e=\frac{e^2+17}{2}$$

[이정환T제공]

28. 함수 $f(x)=\dfrac{x}{e^{x-1}}$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서

$$f(f'(x)) \geq t \times ef'(x) \ (0<t<1)$$

를 만족시킬 때, $a-b$의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$에 대하여 $g\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\ln 2$일 때, $g'\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{2}{p+\ln q}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 자연수이다.)

[정답] 3

[해설]

$f(x)=xe^{1-x}$, $f'(x)=(1-x)e^{1-x}$이므로 주어진 부등식은

$f'(x)e^{1-f'(x)} \geq t \times ef'(x)$

$x \leq 1$에서 $f'(x) \geq 0$이므로 위 부등식은

$e^{-f'(x)} \geq t$, $f'(x) \leq -\ln t$

$f'(x)=-\ln t$를 만족시키는 x를 $h(t)$라 할 때

$f'(h(t))=-\ln t$이고 주어진 부등식의 해는 $h(t) \leq x \leq 1$

$x>1$에서 $f'(x)<0$이므로 위 부등식은

$e^{-f'(x)} \leq t$, $f'(x) \geq -\ln t$

$f'(x)<0$이고 $-\ln t>0$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

따라서 함수 $g(t)=h(t)-1$이고 $g\left(\dfrac{1}{4}\right)=h\left(\dfrac{1}{4}\right)-1=-\ln 2$,

$h\left(\dfrac{1}{4}\right)=1-\ln 2$

$f'(h(t))=-\ln t$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$h'(t)f''(h(t))=-\dfrac{1}{t}$

$f''(x)=(x-2)e^{1-x}$이므로

$f''\left(h\left(\dfrac{1}{4}\right)\right)=f''(1-\ln 2)=-2(1+\ln 2)$

따라서 $h'\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{-4}{-2(1+\ln 2)}=\dfrac{2}{1+\ln 2}$이고

$g'(t)=h'(t)$이므로 $g'\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{2}{1+\ln 2}$

확통

확통 / 기하는 전부 “17학번머스크” 문항입니다.

29. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 에서 집합 $B=\{1,\ 2,\ 3\}$ 으로의 함수 중에서 치역의 원소의 개수가 2인 함수의 개수는?

① 14 ② 28 ③ 42 ④ 56 ⑤ 70

정답 ③

${}_3\mathrm{C}_2 \times (2^4-2)=42$

30. 어느 출판사에서 인쇄하는 책 1권의 무게는 모평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 출판사에서 인쇄하는 책 25권을 임의추출하여 책의 무게를 측정한 결과 표본평균이 300이었다. 이 회사에서 인쇄한 책 1권의 무게의 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $296.08 \le m \le a$일 때, $a+\sigma$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.4750$이고, 책의 무게의 단위는 g이다.)

① 306.96　② 308.92　③ 310.88

④ 311.96　⑤ 313.92

정답 ⑤

표본평균 300에 대하여 모평균 m에 대한 신뢰고 95%의 신뢰구간은

$300-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{25}} \le m \le 300+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{25}}$ 이므로

$300-1.96\times\frac{\sigma}{5}=296.08$, $\sigma=10$

따라서 $a=300+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{25}}=303.92$이고 $a+\sigma=313.92$

31. 세 명의 학생 A, B, C를 포함하여 총 9명의 학생이 3명씩 조를 만들 때, A, B, C 중에서 두 명의 학생만 같은 조에 있을 확률은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{9}{14}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{11}{14}$

정답 ③

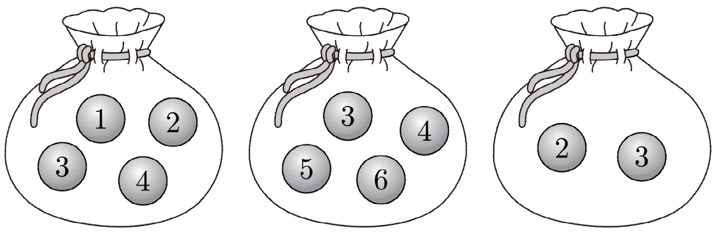
학생 9명을 3명씩 조로 나누는 방법의 수는 ${}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{3!}$

A, B, C 중 2명을 선택하여 한 조에 배치하고, 나머지 6명 중 1명을 선택하여 A, B, C 중 2명이 포함된 조에 배치하고
나머지 조에 5명의 학생을 나누어 배치하는 방법의 수는 ${}_3C_2 \times {}_6C_1 \times {}_5C_2$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{{}_3C_2 \times {}_6C_1 \times {}_5C_2}{{}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{3!}} = \dfrac{9}{14}$

32. 주머니 A에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 들어 있고, 주머니 C에는 숫자 2, 3이 하나씩 적혀 있는 2개의 공이 들어 있다. 세 주머니 A, B, C에서 각각 임의로 공을 한 개씩 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 수를 각각 a, b, c라 하자. $\frac{a}{c}$ 또는 $\frac{b}{c}$의 값이 자연수일 확률은?

① $\frac{9}{16}$ ② $\frac{19}{32}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{11}{16}$



A B C

정답 ⑤

세 주머니 A, B, C에서 각각 임의로 공을 한 개씩 꺼내는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_4C_1 \times {}_2C_1 = 32$$

세 주머니 A, B, C에서 각각 임의로 공을 한 개씩 꺼낼 때 $\frac{a}{c}$ 또는 $\frac{b}{c}$가 자연수인 사건을 E라 하면

여사건 E^C은 세 주머니 A, B, C에서 각각 임의로 공을 한 개씩 꺼낼 때 $\frac{a}{c}$와 $\frac{b}{c}$가 모두 자연수가 아닌 사건이다.

(ⅰ) $c=2$인 경우

사건 E^C은 a와 b가 2의 배수가 아닌 경우이므로 a의 값은 1, 3 중 하나이고, b의 값은 3, 5 중 하나이다.

즉, $c=2$일 때 $\frac{a}{c}$와 $\frac{b}{c}$가 모두 자연수가 아닐 확률은

$$\frac{2\times 2}{32}=\frac{1}{8}$$

(ⅱ) $c=3$인 경우

사건 E^C은 a와 b가 3의 배수가 아닌 경우이므로 a의 값은 1, 2, 4 중 하나이고, b의 값은 4, 5 중 하나이다.

즉, $c=3$일 때 $\frac{a}{c}$와 $\frac{b}{c}$가 모두 자연수가 아닐 확률은

$$\frac{3\times 2}{32}=\frac{3}{16}$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $P(E^C)=\frac{1}{8}+\frac{3}{16}=\frac{5}{16}$

따라서 구하는 확률은

$$P(E)=1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}$$

33. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 $f: X \to Y$의 개수는?

> (가) $a \times f(a)$의 값이 홀수가 되도록 하는 4 이하의 자연수 a가 존재한다.
> (나) $b+f(b)$의 값이 홀수가 되도록 하는 4 이하의 자연수 b가 존재한다.

① 485 ② 486 ③ 487 ④ 488 ⑤ 489

정답 ⑤

X에서 Y로의 모든 함수 f의 개수는

$${}_5\Pi_4 = 5^4 = 625$$

함수 f가 조건 (가)를 만족시키는 사건을 A,
함수 f가 조건 (나)를 만족시키는 사건을 B라 하면
함수 f가 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 사건은 $A \cap B$이다.
조건 (가)를 만족시키지 않는 함수 f는 4 이하의 모든 자연수 a에 대하여 $a \times f(a)$의 값이 짝수인 함수이다.
즉, a가 홀수일 때 $f(a)$의 값은 짝수이고, a가 짝수일 때 $f(a)$의 값에 관계없이 $a \times f(a)$의 값은 짝수이다.
사건 A^C에 속하는 함수 f는 $f(1)$과 $f(3)$의 값이 모두 짝수이므로

$$n(A^C) = {}_5\Pi_2 \times {}_2\Pi_2 = 5^2 \times 2^2 = 100$$

$$\therefore\ n(A) = 625 - 100 = 525$$

조건 (나)를 만족시키지 않는 함수 f는 4 이하의 모든 자연수 b에 대하여 $b+f(b)$의 값이 짝수인 함수이다.
즉, b가 홀수일 때 $f(b)$의 값이 홀수이고, b가 짝수일 때 $f(b)$의 값이 짝수이다.
이때의 함수 f는 조건 (가)를 만족시키므로 $B^C = A \cap B^C$이고,

$$n(A \cap B) = n(A) - n(A \cap B^C) = n(A) - n(B^C)$$

이다.
사건 B^C에 속하는 함수 f는 $f(1)$과 $f(3)$의 값이 모두 홀수이고, $f(2)$와 $f(4)$의 값이 모두 짝수이므로

$$n(B^C) = {}_2\Pi_2 \times {}_3\Pi_2 = 2^2 \times 3^2 = 36$$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$$n(A \cap B) = n(A) - n(B^C) = 525 - 36 = 489$$

34. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 Y로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은?

(가) 집합 X의 임의의 서로 다른 두 원소 x_1, x_2에 대하여 x_1x_2가 홀수이면 $f(x_1)f(x_2)$는 짝수이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 2이다.

① $\frac{45}{512}$ ② $\frac{3}{32}$ ③ $\frac{51}{512}$ ④ $\frac{27}{256}$ ⑤ $\frac{57}{512}$

정답 ①

두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f: X \to Y$의 개수는
$${}_4\Pi_5=4^5=1024$$
이고 조건 (가)에 의하여 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$가 모두 짝수이거나, $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$ 중 홀수가 오직 하나뿐이어야 한다.
함수 f의 치역을 A라 하자.
(ⅰ) $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$가 모두 짝수일 때
조건 (나)에 의하여 $A=\{$짝수, 짝수$\}$ 또는 $A=\{$짝수, 홀수$\}$이어야 한다.
$A=\{$짝수, 짝수$\}$이면 $A=\{2, 4\}$이고, 가능한 함수 f의 개수는
$${}_2\Pi_5-2=30$$
$A=\{$짝수, 홀수$\}$이면 집합 A의 개수는 ${}_2C_1\times{}_2C_1=4$이다.
예를 들어, $A=\{1, 2\}$이면 $f(1)=f(3)=f(5)=2$이고, $f(2)$와 $f(4)$를 정하는 방법의 수는 ${}_2\Pi_2-1=3$
즉, $A=\{$짝수, 홀수$\}$일 때 가능한 함수 f의 개수는
$$4\times3=12$$
따라서 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$가 모두 짝수일 때 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 $30+12=42$
(ⅱ) $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$ 중 홀수가 오직 하나뿐일 때
$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$ 중 홀수인 것을 고르는 방법의 수는 3
예를 들어, $f(1)$이 홀수라 하면 $f(1)$의 값을 정하는 방법의 수는 2
이때 조건 (나)에 의하여 $f(3)=f(5)$이고, 그 값을 정하는 방법의 수는 2
예를 들어, $f(1)=1$, $f(3)=f(5)=2$라 하면
$f(2)$와 $f(4)$의 값을 정하는 방법의 수는 ${}_2\Pi_2=4$
따라서 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$ 중 홀수가 오직 하나뿐일 때 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 $3\times2\times2\times4=48$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 $42+48=90$
따라서 구하는 확률은
$$\frac{90}{1024}=\frac{45}{512}$$

35. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르는 확률변수 X와 실수 a에 대하여 x에 대한 방정식

$$\mathrm{P}(X \le x) = a - \mathrm{P}(X \ge 4)$$

가 실근을 갖도록 하는 a의 값의 범위가 $0.0668 < a < b$일 때, 방정식

$$\mathrm{P}(X \le x) = 0.7583 - \mathrm{P}(X \ge 4)$$

의 실근을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, m과 b는 상수이다.)

z	$\mathrm{P}(Z \le z)$
0.5	0.6915
1.0	0.8413
1.5	0.9332
2.0	0.9772

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

정답 ④

$0 < \mathrm{P}(X \le x) < 1$이므로 방정식 $\mathrm{P}(X \le x) = a - \mathrm{P}(X \ge 4)$가 실근을 가지려면 $0 < a - \mathrm{P}(X \ge 4) < 1$,
$\mathrm{P}(X \ge 4) < a < 1 + \mathrm{P}(X \ge 4)$이므로 $\mathrm{P}(X \ge 4) = 0.0668$
$0.0668 = 1 - \mathrm{P}(Z \le 1.5) = \mathrm{P}(Z \ge 1.5)$이므로
$\frac{4-m}{\sigma} = \frac{4-m}{2} = 1.5,\ m = 1$

따라서 방정식
$\mathrm{P}(X \le x) = 0.7583 - \mathrm{P}(X \ge 4) = 0.7583 - 0.0668 = 0.6915$의 실근 $x = m + 0.5\sigma = 1 + 1 = 2$

36. -4보다 큰 세 정수 a, b, c에 대하여

$$|a|+|b|+|c|=9,\quad a\times b\times c>0$$

을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.

[정답] 55

-4보다 큰 세 정수 a, b, c가 $a\times b\times c>0$을 만족시키려면 (ⅰ) 세 수가 모두 양수이거나 (ⅱ) 세 수 중 하나만 양수이어야한다.

(ⅰ) 세 수 a, b, c가 모두 양수일 때

$|a|+|b|+|c|=a+b+c=9$이고 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_6=28$

(ⅱ) 세 수 a, b, c 중 하나가 양수이고 나머지 두 개는 음수일 때

세 수 중 a가 양수라고 가정하면 b, c를 결정하면 a의 값 또한 정해진다.
가능한 (b, c)의 순서쌍의 개수는 $3\times3=9$
따라서 세 수 중 하나가 양수이고 나머지 두 개는 음수인 경우의 수는 $3\times9=27$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$28+27=55$

기하

37. 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ 4)$에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

정답 ④

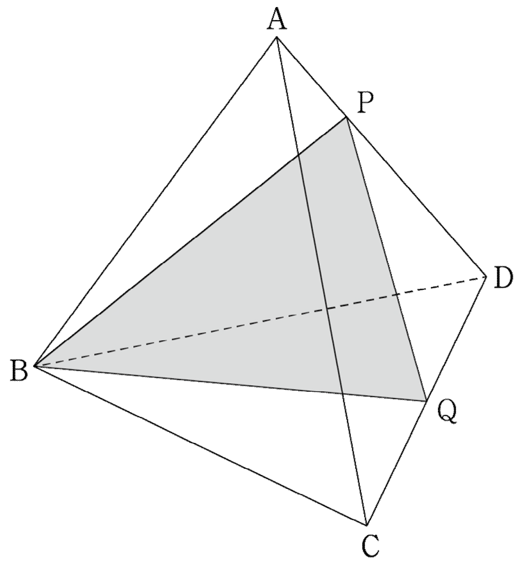
점 $\mathrm{P}(a,\ 4)$가 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로 $a=4$
따라서 접선의 방정식은

$$4y=2(x+4)$$

x절편과 y절편은 각각 -4, 2이므로 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$$

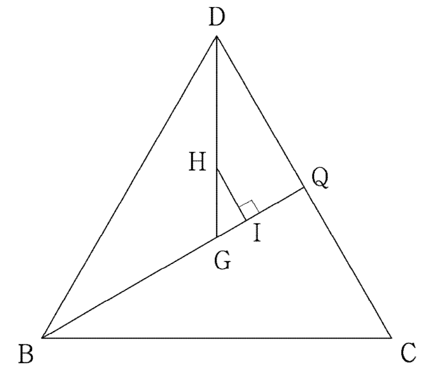
38. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사면체 ABCD가 있다. 선분 AD를 $1:2$로 내분하는 점 P와 선분 CD의 중점 Q에 대하여 평면 PQB와 평면 BCD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은?



① $\sqrt{6}$ ② $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{6}}{3}$

정답 ②

점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 G,
점 P에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 G는 삼각형 BCD의 무게중심이고, 점 H는 선분 GD를 $1:2$로 내분하는 점이다.



점 H에서 직선 BQ에 내린 수선의 발을 I라 할 때 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{IP}\perp\overline{BQ}$이고, $\angle HIP=\theta$이다.

$\overline{PH}=6\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$,

$\overline{GD}=2\sqrt{3}$, $\overline{GH}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\overline{IH}=\overline{GH}\times\sin\frac{\pi}{3}=1$

이므로

$\tan\theta=\frac{\overline{PH}}{\overline{IH}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

39. 좌표평면 위의 두 점 A(2, 0), B(0, 2)에 대하여 선분 AB의 중점을 M이라 하자.

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$$

을 만족시키는 점 P와

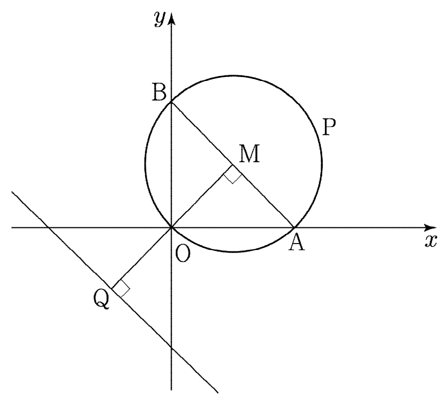
$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MQ} = -4$$

를 만족시키는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① 1 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

정답 ③

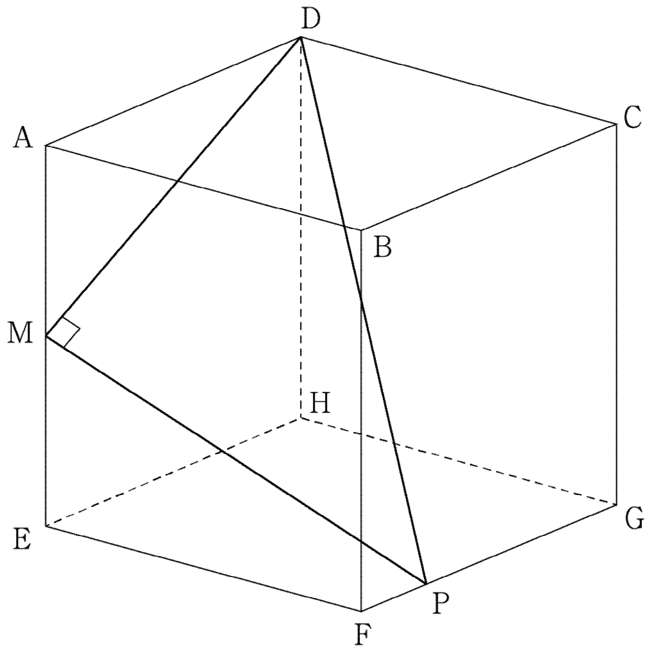
두 점 A, B에 대하여 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$이므로
점 P가 나타내는 도형은 선분 AB를 지름으로 하는 원이다.
점 M(1, 1)에 대하여 $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{2}$이므로 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MQ} = -4$를 만족시키는 점 Q는 선분 MQ를 직선 OM에 정사영한 길이가 $2\sqrt{2}$인, 즉 다음 그림과 같이 점 M으로부터의 거리가 $2\sqrt{2}$이고 직선 OM과 수직인 직선 중 제1사분면을 지나지 않는 직선 위의 점이다.



점 Q가 나타내는 직선과 점 P가 나타내는 원의 중심까지의 거리가 $2\sqrt{2}$이므로 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최솟값은

$$2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

40. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정육면체 ABCD−EFGH의 변 AE의 중점을 M이라 하자. 삼각형 DMP가 직각삼각형이 되도록 하는 선분 FG 위의 점 P에 대하여 두 평면 DMP와 ADHE가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은?



① $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{7\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

정답 ⑤

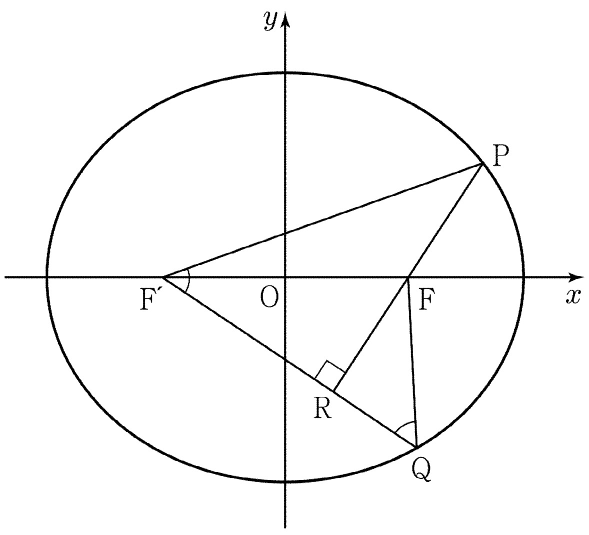
점 P에서 평면 AEHD에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 선분 PQ와 평면 AEHD는 수직이고
두 선분 DM과 PM이 서로 수직이므로 삼수선의 정리에 의하여 두 선분 DM과 MQ는 서로 수직이다.
즉, $\angle ADM = \angle EMQ$이고 $\overline{ME}=2$,
$\overline{AD} : \overline{AM} = \overline{ME} : \overline{EQ} = 2 : 1$이므로
$\overline{EQ}=1$, $\overline{MQ}=\sqrt{5}$

$\therefore \tan\theta = \frac{\overline{PQ}}{\overline{MQ}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

41. 그림과 같이 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\angle PF'Q = \angle FQF'$이다. 두 직선 PF와 $F'Q$가 만나는 점을 R라 할 때,

$$\angle PRF' = \frac{\pi}{2},\ \overline{PF} = \overline{RF} = 4$$

이다. 선분 PQ의 길이는? (단, 점 P와 점 Q의 x좌표는 모두 양수이다.)



① $\sqrt{67}$ ② $\sqrt{70}$ ③ $\sqrt{73}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{77}$

정답 ③

두 삼각형 $PF'R$와 FQR의 닮음비가 $2:1$이므로
점 R는 선분 QF'을 $2:1$로 내분하는 점이다. ⋯ ㉠
$\overline{FQ} = x$라 하면 $\overline{PF'} = 2x$
타원의 정의에 의하여
$\overline{PF} + \overline{PF'} = 4 + 2x$, $\overline{FQ} + \overline{F'Q} = 4 + 2x$
$\therefore\ \overline{F'Q} = 4 + x$
㉠에 의하여 $\overline{RQ} = \dfrac{x+4}{3}$이므로 직각삼각형 FRQ에서 피타고라스의 정리에 의하여
$x = 5$
따라서 $\overline{PR} = 8$, $\overline{RQ} = 3$이므로 삼각형 PRQ에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{PQ} = \sqrt{73}$

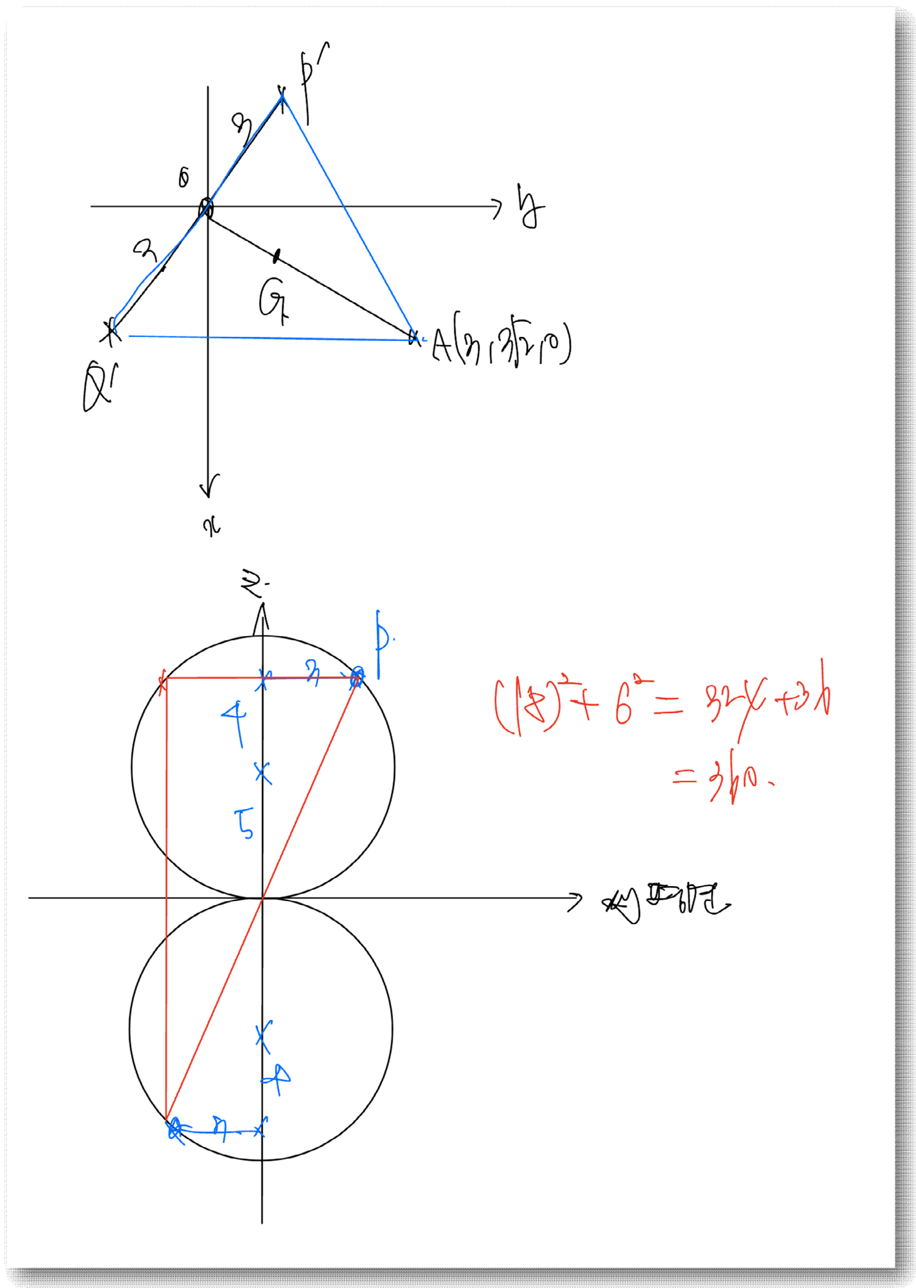
42. 좌표공간에서 xy평면 위의 점 $\mathrm{A}(3,\ 3\sqrt{2},\ 0)$과 두 구

$$S_1 : x^2+y^2+(z-5)^2=25$$
$$S_2 : x^2+y^2+(z+5)^2=25$$

이 있다. 구 S_1 위의 점 P와 구 S_2 위의 점 Q에 대하여 삼각형 APQ의 xy평면 위로의 정사영한 도형 S가 다음 조건을 만족시킨다.

> 도형 S는 정삼각형이고, 이 정삼각형의 무게중심의 좌표는 $(1,\ \sqrt{2},\ 0)$이다.

선분 PQ의 길이의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오.



43. 좌표평면에 점 $\mathrm{A}(-3, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C와 양수 k에 대하여 원점 O와 세 점 $\mathrm{B}(1, k)$, $\mathrm{C}(2, k)$, $\mathrm{D}(1, 0)$를 꼭짓점으로 하는 평행사변형 OBCD가 있다. 평행사변형 OBCD의 변 위를 움직이는 점 P에 대하여 선분 AP와 원 C의 교점을 Q라 하자.

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PD}}$$

가 되도록 하는 점 P가 오직 하나뿐일 때, 양수 k의 값은?

① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

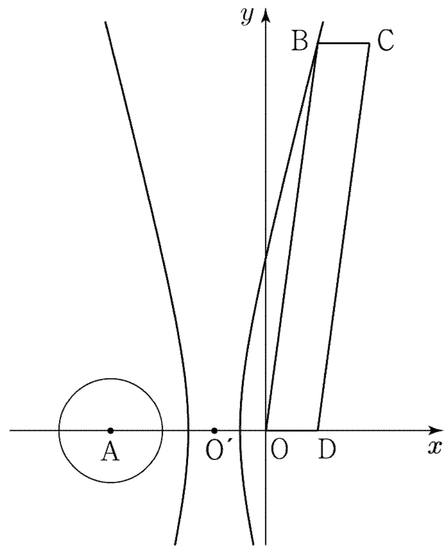
정답 ⑤

평행사변형 OBCD의 변 위를 움직이는 점 P에 대하여

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{PA}}-1$

이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PD}}$이려면 $\overline{\mathrm{PA}}-\overline{\mathrm{PD}}=1$이어야한다.

즉, $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PD}}$를 만족시키는 점 P는 두 점 A, D를 초점으로 하고 주축의 길이가 1인 쌍곡선 위의 점이어야하고, 이 쌍곡선과 평행사변형 OBCD의 교점의 개수가 1이어야하므로 그림과 같이 쌍곡선은 점 B를 지난다.



쌍곡선의 주축의 중점을 O′이라 하면

$\mathrm{A}(-3, 0)$, $\mathrm{D}(1, 0)$

이므로 $\mathrm{O}'(-1, 0)$이고, 주축의 길이가 1이고 두 초점 사이의 거리가 4이므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x+1)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{15}{4}}=1$$

점 $\mathrm{B}(1, k)$가 쌍곡선 위의 점이므로 대입하면

$$16-\frac{4k^2}{15}=1,\ 4k^2=225$$

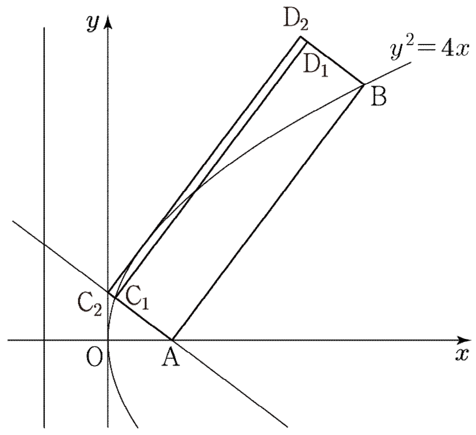
$$\therefore\ k=\frac{15}{2}$$

44. 좌표평면에서 두 점 A(1, 0), B(4, 4)를 꼭짓점으로 하는 사각형이 직사각형이 되도록 y좌표가 양수인 두 점 C, D를 잡을 때, 다음 조건을 만족시키는 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값과 최솟값의 차가 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

직사각형 ABCD 위를 움직이는 점 P를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원과 직선 $x=-1$이 한 점에서만 만나도록 하는 점 P의 개수가 3이다.

정답 61

점 P를 중심으로 하고 점 A(1, 0)을 지나는 원과 직선 $x=-1$이 한 점에서만 만나므로 점 P는 초점이 A(1, 0)이고 준선이 직선 $x=-1$인 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이다.
즉, 점 P는 포물선 $y^2=4x$와 직사각형 ABCD의 교점이고, 조건을 만족시키는 점 P의 개수가 3이 되려면 직사각형 ABCD의 넓이가 최소일 때에는 선분 AB와 수직이고 점 A를 지나는 직선과 포물선 $y^2=4x$의 교점이 점 C이어야하고, 최대일 때에는 선분 CD가 포물선 $y^2=4x$와 한 점에서 접해야한다.



직사각형 ABCD의 넓이가 최소일 때의 점 C, D를 각각 C_1, D_1이라 하자.
점 A를 지나는 직선과 포물선 $y^2=4x$의 교점 C_1에 대하여 직선 AC_1의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이므로 $\overline{AC_1}=5k$라 하고 점 C_1에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H, x축에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\overline{HC_1}=5k$, $\overline{H'A}=4k$

이고 $\overline{HC_1}+\overline{H'A}=9k=2$이므로

$\overline{AC_1}=\frac{10}{9}$

포물선 $y^2=4x$ 위의 점에서의 기울기가 $\frac{4}{3}$인 접선의 방정식은 $y=\frac{4}{3}x+\frac{3}{4}$이고 이 직선과 초점 A 사이의 거리는 $\frac{5}{4}$이다.
직사각형 ABCD의 넓이가 최대일 때의 점 C, D를 각각 C_2, D_2라 할 때 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값과 최솟값의 차는

$\overline{AB}\times\left(\overline{AC_2}-\overline{AC_1}\right)=5\left(\frac{5}{4}-\frac{10}{9}\right)=\frac{25}{36}$

$\therefore\ p+q=61$

2024학년도 대학수학능력시험대비
머스크N제

펴낸이 : 17학번머스크, 이정환(두각), 소우주, 김형주

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.