수학 I 2024 기출문제

고3 23년 9월 ~ 고3 23년 6월

playing math club soma

2023.10.16 | 92문제 | 수능날먹 이름 ______________

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

| 지수법칙(3) : 지수가 실수일 때 | 정답률 88%

01

[2023년 9월 고3 1번/2점]

$3^{1-\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}$의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1
④ 3 ⑤ 9

| 미분계수를 이용한 극한값의 계산(2) : f(x)-f(a)/x-a 꼴의 극한 | 정답률 89%

02

[2023년 9월 고3 2번/2점]

함수 $f(x)=2x^2-x$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

| 식의 값 구하기 (1) : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 | 정답률 88%

03

[2023년 9월 고3 3번/3점]

$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$인 θ에 대하여 $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은?

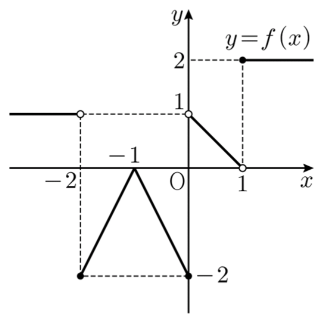
① $-\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

| 함수의 우극한과 좌극한(2) : 그래프가 주어진 경우 | 정답률 88%

04

[2023년 9월 고3 4번/3점]

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -2+} f(x) + \lim_{x\to 1-} f(x)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

| 등비수열의 일반항 구하기(3) : a_i+a_j=k 형태(a_i와 a_j의 사칙연산 형태)로 주어진 경우 | 정답률 80%

05

[2023년 9월 고3 5번/3점]

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\frac{a_3 a_8}{a_6}=12$, $a_5+a_7=36$일 때, a_{11}의 값은?

① 72 ② 78 ③ 84
④ 90 ⑤ 96

| 함수의 극대 · 극소를 이용한 미정계수의 결정 | 정답률 87%

06 [2023년 9월 고3 6번/3점]

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$은 $x=-1$에서 극대이고, $x=3$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 0 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

| 조건을 이용하여 식의 값 구하기 | 정답률 80%

07 [2023년 9월 고3 7번/3점]

두 실수 a, b가 $3a+2b=\log_3 32$, $ab=\log_9 2$를 만족시킬 때, $\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}$의 값은?

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{25}{12}$

| 미분의 항등식에의 활용 | 정답률 71%

08 [2023년 9월 고3 8번/3점]

다항함수 $f(x)$가 $f'(x)=6x^2-2f(1)x$, $f(0)=4$를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

| 삼각함수가 포함된 부등식(1) : 일차식 꼴 | 정답률 69%

09 [2023년 9월 고3 9번/4점]

$0 \le x \le 2\pi$일 때, 부등식 $\cos x \le \sin\frac{\pi}{7}$를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha \le x \le \beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은?

① $\frac{8}{7}\pi$ ② $\frac{17}{14}\pi$ ③ $\frac{9}{7}\pi$ ④ $\frac{19}{14}\pi$ ⑤ $\frac{10}{7}\pi$

| 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식의 활용 | 정답률 67%

10 [2023년 9월 고3 10번/4점]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선이 점 $(1, 3)$에서 만날 때, $f(0)$의 값은?

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

| 움직인 거리(1) : 직선 운동에서의 위치와 움직인 거리 | 정답률 68%

11 [2023년 9월 고3 11번/4점]

두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 $\mathrm{A}(1)$과 점 $\mathrm{B}(8)$에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 t $(t \ge 0)$에서의 속도는 각각 $v_1(t)=3t^2+4t-7$, $v_2(t)=2t+4$이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 될 때까지 점 P가 움직인 거리는?

① 10 ② 14 ③ 19 ④ 25 ⑤ 32

| 수열의 귀납적 정의 | 정답률 55%

12 [2023년 9월 고3 12번/4점]

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$
를 만족시킬 때,

$a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① 172 ② 175 ③ 178
④ 181 ⑤ 184

| 삼차함수의 증가 · 감소의 조건(1) : 실수 전체의 구간에서 | 정답률 52%

13 [2023년 9월 고3 13번/4점]

두 실수 a, b에 대하여

함수 $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \frac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\geq 0) \end{cases}$이

구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고 구간 $[-1, \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은?

① $\frac{3}{2}+3\sqrt{2}$ ② $3+3\sqrt{2}$ ③ $\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$
④ $6+3\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}+3\sqrt{2}$

| 지수함수의 그래프에서의 함숫값 | 정답률 53%

14 [2023년 9월 고3 14번/4점]

두 자연수 a, b에 대하여

함수 $f(x)=\begin{cases} 2^{x+a}+b & (x\leq -8) \\ -3^{x-3}+8 & (x>-8) \end{cases}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

> 집합 $\{f(x)\mid x\leq k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $3\leq k<4$이다.

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

| 다항함수의 결정 | 정답률 52%

15 [2023년 9월 고3 15번/4점]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\neq 0) \\ 3 & (f(x)=0) \end{cases}$$
이라 하자.

$\lim_{x\to 3}g(x)=g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은?

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

| 로그의 진수에 미지수를 포함하는 방정식 : 밑을 같게 할 수 있는 경우 | 정답률 88%

16 [2023년 9월 고3 16번/3점]

방정식 $\log_2(x-1)=\log_4(13+2x)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.

| Σ의 성질 | 정답률 80%

17 [2023년 9월 고3 17번/3점]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k - b_k) = 34$, $\sum_{k=1}^{10} a_k = 10$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k - b_k)$의 값을 구하시오.

| 곱의 미분법(1) : y=f(x)g(x) 꼴 | 정답률 80%

18 [2023년 9월 고3 18번/3점]

함수 $f(x) = (x^2+1)(x^2+ax+3)$에 대하여 $f'(1) = 32$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

| 두 곡선 사이의 넓이 | 정답률 72%

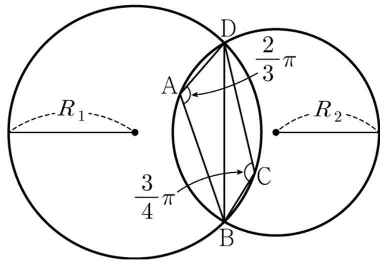
19 [2023년 9월 고3 19번/3점]

두 곡선 $y = 3x^3 - 7x^2$과 $y = -x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

| 사인법칙과 코사인법칙 | 정답률 55%

20 [2023년 9월 고3 20번/4점]

그림과 같이 $\overline{AB} = 2$, $\overline{AD} = 1$, $\angle DAB = \frac{2}{3}\pi$, $\angle BCD = \frac{3}{4}\pi$인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



다음은 $R_1 R_2$의 값을 구하는 과정이다.

> 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여
> $R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \overline{BD}$
> 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
> $R_2 = \boxed{(가)} \cdot \overline{BD}$
> 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여
> $\overline{BD}^2 = 2^2 + 1^2 - \left(\boxed{(나)}\right)$이므로
> $R_1 R_2 = \boxed{(다)}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $9(pqr)^2$의 값을 구하시오.

| 부분의 합이 주어진 등차수열의 합 | 정답률 54%

21 [2023년 9월 고3 21번/4점]

모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오.

| 정적분을 포함한 등식(2) : 적분구간에 변수가 있는 경우 | 정답률 54%

22

[2023년 9월 고3 22번/4점]

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모두 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x f(t)dt = xf(x) - 2x^2 - 1$

(나) $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\int_1^3 g(x)dx$의 값을 구하시오.

| 이항분포의 평균, 분산, 표준편차(1) : 이항분포가 주어진 경우 | 정답률 89%

23

[2023년 9월 고3 확률과 통계 23번/2점]

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(30, \frac{1}{5}\right)$을 따를 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은?

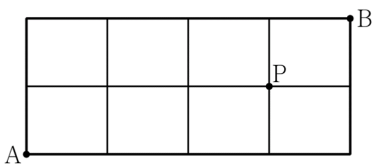
① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

| 최단 거리로 가는 경우의 수(2) : 반드시 지나거나 지나지 않는 지점이 있는 경우 | 정답률 79%

24

[2023년 9월 고3 확률과 통계 24번/3점]

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 거쳐 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는?



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

| 확률의 덧셈정리(2) : 배반사건인 경우 | 정답률 78%

25

[2023년 9월 고3 확률과 통계 25번/3점]

두 사건 A, B에 대하여 A와 B^C은 서로 배반사건이고

$\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \frac{7}{10}$ 일 때,

$\mathrm{P}(A^C \cap B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.)

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

| 정규분포의 활용(1) : 실생활 문제에서 확률 구하기 | 정답률 70%

26

[2023년 9월 고3 확률과 통계 26번/3점]

어느 고등학교의 수학 시험에 응시한 수험생의 시험 점수는 평균이 68점, 표준편차가 10점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 수학 시험에 응시한 수험생 중 임의로 선택한 수험생 한 명의 시험 점수가 55점 이상이고 78점 이하일 확률을 다음 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.1	0.3643
1.2	0.3849
1.3	0.4032

① 0.7262 ② 0.7445 ③ 0.7492 ④ 0.7675 ⑤ 0.7881

| 수학적 확률 구하기(5) : 조합 | 정답률 68%

27 [2023년 9월 고3 확률과 통계 27번/3점]

두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 X에서 Y로의 모든 일대일함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은?

(가) $f(2)=2$
(나) $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4)$는 4의 배수이다.

① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{3}{35}$ ③ $\frac{1}{10}$ ④ $\frac{4}{35}$ ⑤ $\frac{9}{70}$

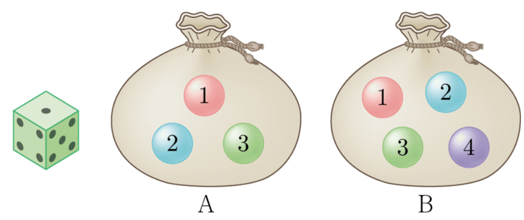
| 표본평균의 확률 구하기(1) | 정답률 53%

28 [2023년 9월 고3 확률과 통계 28번/4점]

주머니 A에는 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적힌 3개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4개의 공이 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져
나온 눈의 수가 3의 배수이면
주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고,
나온 눈의 수가 3의 배수가 아니면
주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다.
꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 차를 기록한 후,
공을 꺼낸 주머니에 이 2개의 공을 다시 넣는다.

이 시행을 2번 반복하여 기록한 두 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=2)$의 값은?



① $\frac{11}{81}$ ② $\frac{13}{81}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{17}{81}$ ⑤ $\frac{19}{81}$

| 독립시행의 확률 | 정답률 53%

29 [2023년 9월 고3 확률과 통계 29번/4점]

앞면에는 문자 A, 뒷면에는 문자 B가 적힌 한 장의 카드가 있다. 이 카드와 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 동전을 두 번 던져
> 앞면이 나온 횟수가 2이면 카드를 한 번 뒤집고,
> 앞면이 나온 횟수가 0 또는 1이면 카드를 그대로 둔다.

처음에 문자 A가 보이도록 카드가 놓여 있을 때, 이 시행을 5번 반복한 후 문자 B가 보이도록 카드가 놓일 확률은 p이다. $128p$의 값을 구하시오.

| 중복조합의 수 | 정답률 53%

30 [2023년 9월 고3 확률과 통계 30번/4점]

다음 조건을 만족시키는 13 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오.

> (가) $a \le b \le c \le d$
> (나) ad는 홀수이고, $b+c$는 짝수이다.

| 지수함수의 극한(1) : lim{x->0} e^x-1 /x 꼴의 극한 | 정답률 80%

31 [2023년 9월 고3 미적분 23번/2점]

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{7x}-1}{e^{2x}-1}$의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{5}{2}$
④ $\dfrac{7}{2}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

| 매개변수로 나타낸 함수의 미분법 | 정답률 79%

32 [2023년 9월 고3 미적분 24번/3점]

매개변수 t로 나타내어진

곡선 $x=t+\cos 2t,\ y=\sin^2 t$에서 $t=\dfrac{\pi}{4}$일 때,

$\dfrac{dy}{dx}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

| 치환적분을 이용한 정적분(5) : 로그함수 | 정답률 69%

33 [2023년 9월 고3 미적분 25번/3점]

함수 $f(x)=x+\ln x$에 대하여 $\displaystyle\int_1^e \left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)dx$의 값은?

① $\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{e}{2}$ ② $\dfrac{e^2}{2}+e$ ③ $\dfrac{e^2}{2}+2e$
④ e^2+e ⑤ e^2+2e

| 급수의 성질 | 정답률 54%

34 [2023년 9월 고3 미적분 26번/3점]

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여

$a_1=b_1=1,\ a_2b_2=1$이고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}}+b_n\right)=2$일

때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값은?

① $\dfrac{7}{6}$ ② $\dfrac{6}{5}$ ③ $\dfrac{5}{4}$
④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

| 곡선 y=f(x)의 길이 | 정답률 68%

35 [2023년 9월 고3 미적분 27번/3점]

$x=-\ln 4$에서 $x=1$까지의

곡선 $y=\frac{1}{2}\left(\left|e^x-1\right|-e^{|x|}+1\right)$의 길이는?

① $\frac{23}{8}$　② $\frac{13}{4}$　③ $\frac{29}{8}$

④ 4　⑤ $\frac{35}{8}$

| 정적분으로 정의된 함수(2) : 적분 구간이 변수 | 정답률 31%

36 [2023년 9월 고3 미적분 28번/4점]

실수 a $(0<a<2)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=\begin{cases} 2|\sin 4x| & (x<0) \\ -\sin ax & (x\geq 0)\end{cases}$ 이라 하자.

함수 $g(x)=\left|\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt\right|$가 실수 전체의 집합에서

미분가능할 때, a의 최솟값은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{4}$　③ 1

④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{3}{2}$

| 등비수열의 극한을 이용한 미정계수의 결정 | 정답률 55%

37 [2023년 9월 고3 미적분 29번/4점]

두 실수 a, b $(a>1,\ b>1)$이 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=a$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{9}{a}$를 만족시킬 때, $a+b$의 값을

구하시오.

| 음함수의 미분법의 응용 | 정답률 53%

38 [2023년 9월 고3 미적분 30번/4점]

길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 AB

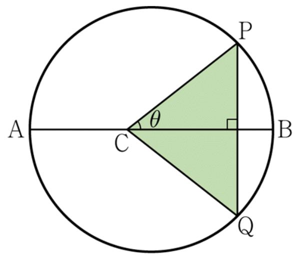
위에 $\overline{\mathrm{AC}}=4$인 점 C가 있다. 이 원 위의 점 P를

$\angle\mathrm{PCB}=\theta$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 선분 AB에

수직인 직선이 이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라

하자. 삼각형 PCQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $-7S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의

값을 구하시오. $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



| 좌표공간에서 두 점 사이의 거리 | 정답률 79%

39 [2023년 9월 고3 기하 23번/2점]

좌표공간의 점 $\mathrm{A}(8,\ 6,\ 2)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한

점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이는?

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

| 쌍곡선의 접선의 방정식(2) 접점의 좌표가 주어진 경우 | 정답률 89%

40 [2023년 9월 고3 기하 24번/3점]

쌍곡선 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(7,\ 6)$에서의 접선의

x절편은?

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

| 벡터의 크기 | 정답률 70%

41 [2023년 9월 고3 기하 25번/3점]

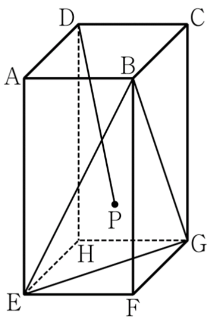
좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(4,\ 3)$에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.)

① 2π ② 4π ③ 6π ④ 8π ⑤ 10π

| 삼각형의 무게중심 | 정답률 79%

42 [2023년 9월 고3 기하 26번/3점]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AD}}=3$, $\overline{\mathrm{AE}}=6$인 직육면체 $\mathrm{ABCD-EFGH}$가 있다. 삼각형 BEG의 무게중심을 P라 할 때, 선분 DP의 길이는?



① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{7}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

| 포물선 정의의 활용(2) 초점을 지나는 직선이 주어질 때 | 정답률 70%

43 [2023년 9월 고3 기하 27번/3점]

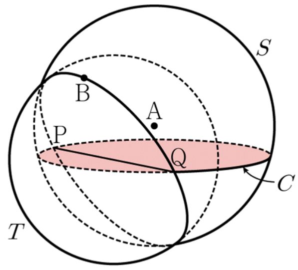
양수 p에 대하여 좌표평면 위에 초점이 F인 포물선 $y^2=4px$가 있다.
이 포물선이 세 직선 $x=p$, $x=2p$, $x=3p$와 만나는 제1사분면 위의 점을 각각 P_1, P_2, P_3이라 하자.
$\overline{\mathrm{FP}_1}+\overline{\mathrm{FP}_2}+\overline{\mathrm{FP}_3}=27$일 때, p의 값은?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

| 정사영의 넓이(2) 각의 크기가 주어지지 않은 경우 | 정답률 29%

44 [2023년 9월 고3 기하 28번/4점]

좌표공간에 중심이 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 있다. 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원을 C라 하고, 점 A에서 선분 PQ까지의 거리가 2가 되도록 원 C 위에 두 점 P, Q를 잡는다. 구 S가 선분 PQ를 지름으로 하는 구 T와 만나서 생기는 원 위에서 점 B가 움직일 때, 삼각형 BPQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은? (단, 점 B의 z좌표는 양수이다.)



① 6 ② $3\sqrt{6}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{10}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

| 타원의 정의의 활용(2) 최댓값, 최솟값 | 정답률 53%

45 [2023년 9월 고3 기하 29번/4점]

한 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$ $(c>0)$인 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$과 중심의 좌표가 $(2,\ 3)$이고 반지름의 길이가 r인 원이 있다. 타원 위의 점 P와 원 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{PF}}$의 최솟값이 6일 때, r의 값을 구하시오.

| 내적을 이용한 삼각형의 넓이/도형의 성질 | 정답률 53%

46 [2023년 9월 고3 기하 30번/4점]

좌표평면에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이고 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 APQ는 정삼각형이고,
$9|\overrightarrow{PQ}|\overrightarrow{PQ}=4|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AB}$이다.
(나) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ}<0$
(다) $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CB}=24$

선분 AQ 위의 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}|$의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오.

| 지수법칙(2) : 지수가 유리수일 때 | 정답률 89%

47 [2023년 6월 고3 1번/2점]

$\sqrt[3]{27}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

| 미분계수를 이용하여 극한값 구하기 | 정답률 83%

48 [2023년 6월 고3 2번/2점]

함수 $f(x)=x^2-2x+3$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

| Σ의 성질 | 정답률 81%

49 [2023년 6월 고3 3번/3점]

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=60$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값은?

① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

| 연속함수의 성질 | 정답률 81%

50 [2023년 6월 고3 4번/3점]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 1}f(x)=4-f(1)$을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

| 곱의 미분법(1) : y=f(x)g(x) 꼴 | 정답률 77%

51 [2023년 6월 고3 5번/3점]

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=(x^3+1)f(x)$라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=3$일 때, $g'(1)$의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

| 식의 값 구하기 (1) : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 | 정답률 76%

52 [2023년 6월 고3 6번/3점]

$\cos\theta<0$이고 $\sin(-\theta)=\frac{1}{7}\cos\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은?

① $-\frac{3\sqrt{2}}{10}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{2}}{10}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

| 로그함수의 그래프에서의 함숫값 | 정답률 71%

53 [2023년 6월 고3 7번/3점]

상수 a $(a>2)$에 대하여 함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프의 점근선이 두 곡선 $y=\log_2\frac{x}{4}$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=4$일 때, a의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

| 두 그래프의 교점의 개수 | 정답률 78%

54 [2023년 6월 고3 8번/3점]

두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

| Σ로 표현된 수열의 합과 일반항의 관계 | 정답률 69%

55 [2023년 6월 고3 9번/4점]

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

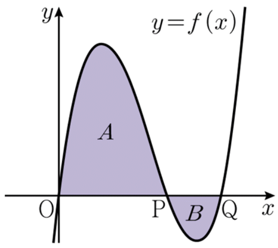
$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값은?

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

| 곡선과 x축 사이의 넓이 | 정답률 73%

56 [2023년 6월 고3 10번/4점]

양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는
$f(x)=kx(x-2)(x-3)$이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q $(\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}})$에서 만난다.
곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A,
곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자. (A의 넓이)$-$(B의 넓이)$=3$일 때, k의 값은?

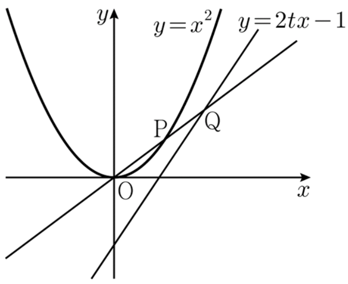


① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

| 곡선 위의 점과 직선 사이의 거리 | 정답률 58%

57 [2023년 6월 고3 11번/4점]

그림과 같이 실수 t $(0<t<1)$에 대하여
곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때,
$\lim_{t\to1-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

| 조건을 만족시키는 등차수열의 항 구하기(3) : 이외의 조건이 주어진 경우 | 정답률 64%

58 [2023년 6월 고3 12번/4점]

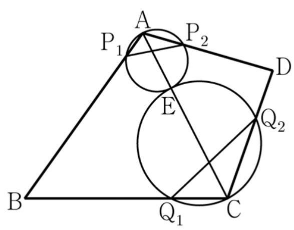
$a_2=-4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n+a_{n+1}$ $(n\ge 1)$이라 하고, 두 집합 A, B를 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$라 하자. $n(A\cap B)=3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은?

① 30 ② 34 ③ 38 ④ 42 ⑤ 46

| 삼각형의 넓이를 활용하는 문제 | 정답률 50%

59 [2023년 6월 고3 13번/4점]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\overline{\mathrm{CD}}=2$, $\cos(\angle\mathrm{BCD})=-\frac{1}{3}$, $\angle\mathrm{DAB}>\frac{\pi}{2}$인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자. $\overline{\mathrm{P_1P_2}}:\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AD}}$의 값은? (단, $\overline{\mathrm{AB}}>\overline{\mathrm{AD}}$)



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

| 위치와 위치의 변화량 | 정답률 37%

60 [2023년 6월 고3 14번/4점]

실수 a $(a\ge 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$를 $v(t)=-t(t-1)(t-a)(t-2a)$라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

| 수열의 귀납적 정의 | 정답률 36%

61 [2023년 6월 고3 15번/4점]

자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1=k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+2n-k & (a_n\le 0) \\ a_n-2n-k & (a_n>0)\end{cases}$$
> 이다.

$a_3a_4a_5a_6<0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은?

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

| 지수에 미지수를 포함하는 부등식(1) : 밑을 같게 할 수 있는 경우 | 정답률 88%

62 [2023년 6월 고3 16번/3점]

부등식 $2^{x-6}\le\left(\frac{1}{4}\right)^x$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오.

| 도함수가 주어진 경우의 부정적분 : f'(x)로부터 f(x)구하기 | 정답률 89%

63 [2023년 6월 고3 17번/3점]

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3-1$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

| 함수의 극대 · 극소를 이용한 미정계수의 결정 | 정답률 81%

64 [2023년 6월 고3 18번/3점]

두 상수 a, b에 대하여

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx+a$는 $x=1$에서 극소이다.

함수 $f(x)$의 극솟값이 -2일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오.

| 삼각함수의 미정계수의 결정(1) : 조건이 주어진 경우 | 정답률 56%

65 [2023년 6월 고3 19번/3점]

두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin bx+8-a$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이다.
(나) $0\leq x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

| 정적분으로 정의된 함수의 최대 · 최소 | 정답률 52%

66 [2023년 6월 고3 20번/4점]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$가 다음 조건을 만족시킬 때,

$f(9)$의 값을 구하시오.

$x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x)\geq g(4)$이고 $|g(x)|\geq |g(3)|$이다.

| 로그함수의 그래프에서의 함숫값 | 정답률 34%

67 [2023년 6월 고3 21번/4점]

실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.

<보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오. (단, $A+B+C\neq 0$)

- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

<보기>

ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.
ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.
ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t)\geq t$이다.

| 삼차함수의 극값(3) : 주어진 구간에서 삼차함수가 극값을 가질 조건 | 정답률 33%

68 [2023년 6월 고3 22번/4점]

정수 a $(a\neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=x^3-2ax^2$이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오.

함수 $f(x)$에 대하여

$$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$$을

만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이

열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

| 같은 것이 있는 순열 | 정답률 89%

69 [2023년 6월 고3 확률과통계 23번/2점]

5개의 문자 a, a, b, c, d를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는?

① 50 ② 55 ③ 60
④ 65 ⑤ 70

| 확률의 덧셈정리(2) : 배반사건인 경우 | 정답률 87%

70 [2023년 6월 고3 확률과통계 24번/3점]

두 사건 A, B에 대하여

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{9}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{7}{18}$일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.)

① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{11}{18}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{13}{18}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

| 여사건의 확률(2) : '이상', '이하', '아닌'의 조건이 있는 경우 | 정답률 79%

71 [2023년 6월 고3 확률과통계 25번/3점]

흰색 손수건 4장, 검은색 손수건 5장이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 4장의 손수건을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 4장의 손수건 중에서 흰색 손수건이 2장 이상일 확률은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{9}{14}$
④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{11}{14}$

| (a+b)^m(a+b)^n의 전개식 | 정답률 86%

72 [2023년 6월 고3 확률과통계 26번/3점]

다항식 $(x-1)^6(2x+1)^7$의 전개식에서 x^2의 계수는?

① 15 ② 20 ③ 25
④ 30 ⑤ 35

| 독립시행의 확률 | 정답률 69%

73 [2023년 6월 고3 확률과통계 27번/3점]

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. ab가 4의 배수일 때, $a+b\le 7$일 확률은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

| 함수의 개수(1) : 중복순열 | 정답률 52%

74 [2023년 6월 고3 확률과통계 28번/4점]

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X\rightarrow X$의 개수는?

(가) $f(1)f(3)f(5)$는 홀수이다.
(나) $f(2)<f(4)$
(다) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

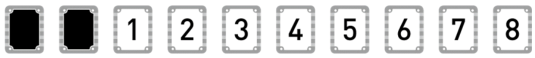
① 128 ② 132 ③ 136
④ 140 ⑤ 144

| 중복조합의 수 | 정답률 66%

75 [2023년 6월 고3 확률과통계 29번/4점]

그림과 같이 2장의 검은색 카드와 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 흰색 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 일렬로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 검은색 카드는 서로 구별하지 않는다.)

(가) 흰색 카드에 적힌 수가 작은 수부터 크기순으로 왼쪽에서 오른쪽으로 배열되도록 카드가 놓여 있다.
(나) 검은색 카드 사이에는 흰색 카드가 2장 이상 놓여 있다.
(다) 검은색 카드 사이에는 3의 배수가 적힌 흰색 카드가 1장 이상 놓여 있다.



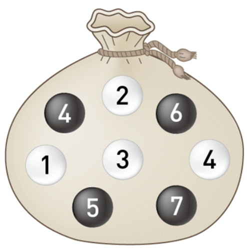
| 수학적 확률 구하기(5) : 조합 | 정답률 67%

76 [2023년 6월 고3 확률과통계 30번/4점]

주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 꺼낸 공이 서로 다른 색이면 12를 점수로 얻고, 꺼낸 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 두 공에 적힌 수의 곱을 점수로 얻는다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 24 이하의 짝수일 확률이 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



| ∞−∞ 꼴의 극한 | 정답률 89%

77 [2023년 6월 고3 미적분 23번/2점]

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}\right)$의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

| 매개변수로 나타낸 함수의 미분법 | 정답률 80%

78 [2023년 6월 고3 미적분 24번/3점]

매개변수 t로 나타내어진

곡선 $x=\dfrac{5t}{t^2+1}$, $y=3\ln(t^2+1)$에서 $t=2$일 때,

$\dfrac{dy}{dx}$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

| 지수, 로그함수의 극한 응용(1) : 미정계수의 결정 | 정답률 71%

79 [2023년 6월 고3 미적분 25번/3점]

$\lim_{x\to 0}\dfrac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$일 때, $a+b$의 값은?
(단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.)

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

| 방정식 f(x)=k가 실근을 가질 조건 | 정답률 70%

80 [2023년 6월 고3 미적분 26번/3점]

x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은?

① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8
④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

| 접선의 방정식(1) : 접점의 좌표가 주어진 경우 | 정답률 55%

81 [2023년 6월 고3 미적분 27번/3점]

실수 t $(0<t<\pi)$에 대하여 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때,

$\lim\limits_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$의 값은?

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

| 함수의 극대,극소를 이용한 미정계수의 결정 | 정답률 31%

82 [2023년 6월 고3 미적분 28번/4점]

두 상수 a $(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, ab의 값은?

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\cdot e^{\sin^2\pi x}+b$$
> (나) $f(0)=f(2)+1$

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$
④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

| 음함수의 미분법의 응용 | 정답률 53%

83 [2023년 6월 고3 미적분 29번/4점]

세 실수 a, b, k에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a,\ a+k)$, $\mathrm{B}(b,\ b+k)$가 곡선 $C: x^2-2xy+2y^2=15$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B에서의 접선이 서로 수직일 때, k^2의 값을 구하시오. (단, $a+2k\neq0$, $b+2k\neq0$)

| 합이 주어진 등비급수 | 정답률 31%

84 [2023년 6월 고3 미적분 30번/4점]

수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여 $b_n=\begin{cases}-1 & (a_n\le-1)\\ a_n & (a_n>-1)\end{cases}$이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.
>
> (나) 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다.

$b_3=-1$일 때, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$의 값을 구하시오.

| 포물선의 평행이동 | 정답률 89%

85 [2023년 6월 고3 기하 23번/2점]

포물선 $y^2=-12(x-1)$의 준선을 $x=k$라 할 때, 상수 k의 값은?

① 4 ② 7 ③ 10
④ 13 ⑤ 16

| 세 점이 한 직선 위에 있을 조건(1) | 정답률 69%

86 [2023년 6월 고3 기하 24번/3점]

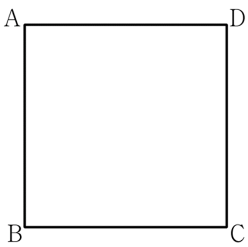
한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 $2\overrightarrow{AB}+p\overrightarrow{BC}=q\overrightarrow{CA}$일 때, $p-q$의 값은? (단, p와 q는 실수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

| 평면벡터의 내적 | 정답률 70%

87 [2023년 6월 고3 기하 25번/3점]

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 $(\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AC}+3k\overrightarrow{CD})=0$일 때, 실수 k의 값은?



① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

| 타원의 정의의 활용(3) 그 외의 경우 | 정답률 69%

88 [2023년 6월 고3 기하 26번/3점]

두 초점이 $F(12, 0)$, $F'(-4, 0)$이고, 장축의 길이가 24인 타원 C가 있다. $\overline{F'F}=\overline{F'P}$인 타원 C 위의 점 P에 대하여 선분 $F'P$의 중점을 Q라 하자. 한 초점이 F'인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 점 Q를 지날 때, $\overline{PF}+a^2+b^2$의 값은? (단, a와 b는 양수이다.)

① 46 ② 52 ③ 58 ④ 64 ⑤ 70

| 포물선, 타원, 쌍곡선의 정의를 모두 이용하는 문제 | 정답률 69%

89 [2023년 6월 고3 기하 27번/3점]

포물선 $(y-2)^2=8(x+2)$ 위의 점 P와 점 $A(0, 2)$에 대하여 $\overline{OP}+\overline{PA}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 P_0이라 하자. $\overline{OQ}+\overline{QA}=\overline{OP_0}+\overline{P_0A}$를 만족시키는 점 Q에 대하여 점 Q의 y좌표의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, M^2+m^2의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

| 원의 방정식 구하기 | 정답률 53%

90 [2023년 6월 고3 기하 28번/4점]

좌표평면의 네 점 $A(2, 6)$, $B(6, 2)$, $C(4, 4)$, $D(8, 6)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 점 X의 집합을 S라 하자.

(가) $\{(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OD})\cdot\overrightarrow{OC}\}\times\{|\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OC}|-3\}=0$
(나) 두 벡터 $\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OC}$가 서로 평행하도록 하는 선분 AB 위의 점 P가 존재한다.

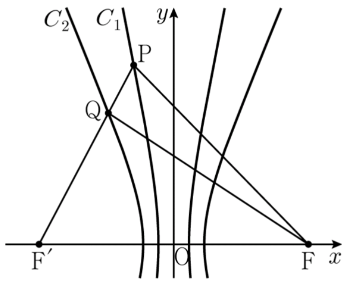
집합 S에 속하는 점 중에서 y좌표가 최대인 점을 Q, y좌표가 최소인 점을 R이라 할 때, $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

| 쌍곡선의 정의의 활용(1) 초점을 지나는 삼각형이 주어질 때 | 정답률 53%

91 [2023년 6월 고3 기하 29번/4점]

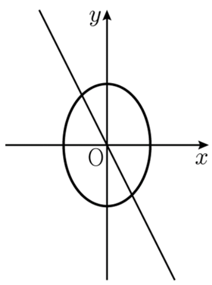
두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하는 두 쌍곡선 $C_1 : x^2-\dfrac{y^2}{24}=1$, $C_2 : \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{21}=1$이 있다. 쌍곡선 C_1 위에 있는 제2사분면 위의 점 P에 대하여 선분 PF'이 쌍곡선 C_2와 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}}$, $2\overline{\mathrm{PF}'}$, $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}$이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 직선 PQ의 기울기는 m이다. $60m$의 값을 구하시오.



| 벡터의 덧셈 | 정답률 53%

92 [2023년 6월 고3 기하 30번/4점]

직선 $2x+y=0$ 위를 움직이는 점 P와 타원 $2x^2+y^2=3$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$를 만족시키고, x좌표와 y좌표가 모두 0 이상인 모든 점 X가 나타내는 영역의 넓이는 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



수학 I 2024 기출문제

고3 23년 9월 ~ 고3 23년 6월

playing math club soma

QR을 스캔해 정답을 입력해 보세요!

2023.10.16 | 92문제 | 수능날먹 이름 ______________

빠른 정답

01 ⑤	02 ③	03 ②
04 ①	05 ⑤	06 ③
07 ④	08 ④	09 ③
10 ③	11 ⑤	12 ①
13 ③	14 ②	15 ④
16 6	17 24	18 5
19 4	20 98	21 19
22 10	23 ①	24 ③
25 ③	26 ②	27 ④
28 ⑤	29 62	30 336
31 ④	32 ②	33 ②
34 ⑤	35 ①	36 ②
37 18	38 32	39 ④
40 ①	41 ⑤	42 ②
43 ③	44 ①	45 17
46 27	47 ⑤	48 ④
49 ②	50 ②	51 ①
52 ④	53 ③	54 ③
55 ①	56 ②	57 ③
58 ⑤	59 ①	60 ③
61 ②	62 3	63 33
64 6	65 8	66 39
67 110	68 380	69 ③
70 ④	71 ③	72 ①
73 ②	74 ⑤	75 25
76 51	77 ⑤	78 ④
79 ①	80 ②	81 ③
82 ②	83 5	84 24
85 ①	86 ④	87 ②
88 ④	89 ③	90 ⑤
91 80	92 13	

수학 I 2024 기출문제

고3 23년 9월 ~ 고3 23년 6월

QR을 스캔해 정답을
입력해 보세요!

2023.10.16 | 92문제 | 수능날먹 이름 ______________

01 정답 ⑤

해설 지수법칙을 이용하여 값을 계산할 수 있는가?

$$3^{1-\sqrt{5}}\cdot 3^{1+\sqrt{5}}=3^{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}$$
$$=3^2=9$$

02 정답 ③

해설 미분계수를 구할 수 있는가?

$f(x)=2x^2-x$에서

$f'(x)=4x-1$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=f'(1)=3$$

03 정답 ②

해설 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

$\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$이고 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로

$$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}$$
$$=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

04 정답 ①

해설 그래프를 보고 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to -2+}f(x)=-2$, $\lim_{x\to 1-}f(x)=0$이므로

$$\lim_{x\to -2+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)=-2+0=-2$$

05 정답 ⑤

해설 주어진 조건을 만족시키는 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a>0$, $r>0$이다.

$\frac{a_3a_8}{a_6}=12$에서

$$\frac{ar^2\cdot ar^7}{ar^5}=12$$

$ar^4=12$, 즉 $a_5=12$

또, $a_5+a_7=36$에서 $a_7=24$이므로

$$r^2=\frac{a_7}{a_5}=\frac{24}{12}=2$$

따라서 $\frac{a_{11}}{a_7}=r^4=(r^2)^2=4$이므로

$$a_{11}=a_7\cdot 4$$
$$=24\cdot 4=96$$

06 정답 ③

해설 다항함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=3$에서 극소이므로

$$3x^2+2ax+b=3(x+1)(x-3)$$
$$=3x^2-6x-9$$

따라서 $a=-3$, $b=-9$이고,

$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$이므로

함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=-1-3+9+1=6$

07 정답 ④

해설 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

$3a+2b=\log_3 32,\ ab=\log_9 2$이므로

$$\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}=\frac{3a+2b}{6ab}=\frac{\log_3 32}{6\log_9 2}=\frac{\log_3 2^5}{6\log_{3^2} 2}=\frac{5\log_3 2}{3\log_3 2}=\frac{5}{3}$$

08 정답 ④

해설 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

$f'(x)=6x^2-2f(1)x$에서

$f(x)=2x^3-f(1)x^2+C$ (C는 적분상수)라 하면

$f(0)=4$이므로

$C=4$

즉, $f(x)=2x^3-f(1)x^2+4$

이 식에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2-f(1)+4$

$\therefore\ f(1)=3$

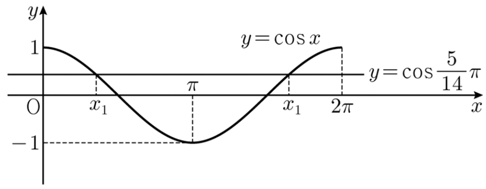
따라서 $f(x)=2x^3-3x^2+4$이므로

$f(2)=2\cdot 2^3-3\cdot 2^2+4=8$

09 정답 ③

해설 삼각함수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는가?

$\sin\frac{\pi}{7}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{5}{14}\pi$



그림과 같이 곡선 $y=\cos x\ (0\le x\le 2\pi)$와

직선 $y=\cos\frac{5}{14}\pi$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각

$x_1,\ x_2\ (x_1<x_2)$라 하면

$x_1=\frac{5}{14}\pi$이고, $\frac{x_1+x_2}{2}=\pi$이므로

$x_2=2\pi-x_1=\frac{23}{14}\pi$

따라서 $0\le x\le 2\pi$일 때, 부등식 $\cos x\le\sin\frac{\pi}{7}$를

족시키는 모든 x의 값의 범위는

$\frac{5}{14}\pi\le x\le\frac{23}{14}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{23}{14}\pi-\frac{5}{14}\pi=\frac{9}{7}\pi$

10 정답 ③

해설 삼차함수의 그래프의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$f(x)-3=(x-a)(x-2)^2$

$f(x)=(x-a)(x-2)^2+3$ (단, a는 상수)

이때 $f'(x)=(x-2)^2+2(x-a)(x-2)$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2,\ f(-2))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(-2)=f'(-2)(x+2)$

이 접선이 $(1,\ 3)$을 지나므로

$3-f(-2)=f'(-2)(1+2)$

$3-f(-2)=3f'(-2)$

$3-\{16(-2-a)+3\}=3\{16-8(-2-a)\}$

$3-(-29-16a)=3(32+8a)$

$32+16a=96+24a$

$8a=-64$

즉, $a=-8$이므로

$f(x)=(x+8)(x-2)^2+3$

$\therefore\ f(0)=8\cdot(-2)^2+3=35$

11 정답 ⑤

해설 적분을 이용하여 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

점 P가 점 $\mathrm{A}(1)$에서 출발하고,

속도가 $v_1(t)=3t^2+4t-7$이므로

시각 t에서의 위치를 $s_1(t)$라 하면

$$s_1(t)=1+\int_0^t (3t^2+4t-7)dt$$

$$=t^3+2t^2-7t+1 \quad \cdots ㉠$$

또, 점 Q가 점 $\mathrm{B}(8)$에서 출발하고,

속도가 $v_2(t)=2t+4$이므로

시각 t에서의 위치를 $s_2(t)$라 하면

$$s_2(t)=8+\int_0^t (2t+4)dt$$

$$=t^2+4t+8 \quad \cdots ㉡$$

이때 두 점 P, Q 사이의 거리가 4가 되는 시각은

$|s_1(t)-s_2(t)|=4$

㉠, ㉡에서

$|(t^3+2t^2-7t+1)-(t^2+4t+8)|=4$

$|t^3+t^2-11t-7|=4$

따라서 $t^3+t^2-11t-7=4$ 또는

$t^3+t^2-11t-7=-4$

즉, $t^3+t^2-11t-11=0$ 또는 $t^3+t^2-11t-3=0$

(i) $t^3+t^2-11t-11=0$일 때,

$t^2(t+1)-11(t+1)=0$

$(t+1)(t^2-11)=0$

$t>0$이므로

$t=\sqrt{11}$

(ii) $t^3+t^2-11t-3=0$일 때,

$(t-3)(t^2+4t+1)=0$

$t>0$이므로

$t=3$

(i), (ii)에 의하여 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 되는 시각은

$t=3$

한편, $v_1(t)=3t^2+4t-7=(3t+7)(t-1)$이므로

$0\le t<1$일 때, $v_1(t)<0$

$t\ge 1$일 때, $v_1(t)\ge 0$

따라서 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=3$까지 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v_1(t)|dt$$

$$=-\int_0^1 v_1(t)dt+\int_1^3 v_1(t)dt$$

$$=-\int_0^1 (3t^2+4t-7)dt+\int_1^3 (3t^2+4t-7)dt$$

$$=-\Big[t^3+2t^2-7t\Big]_0^1+\Big[t^3+2t^2-7t\Big]_1^3$$

$$=-(-4)+28=32$$

12 정답 ①

해설 귀납적으로 정의된 수열의 항을 구할 수 있는가?

자연수 k에 대하여

(i) $a_1=4k$일 때,

a_1은 짝수이므로

$$a_2=\frac{a_1}{2}=2k$$

a_2도 짝수이므로

$$a_3=\frac{a_2}{2}=k$$

(a) k가 홀수인 경우

$a_4=a_3+1=k+1$

이때 $a_2+a_4=2k+(k+1)=3k+1$이므로

$3k+1=40$에서

$k=13$

$\therefore a_1=4k=52$

(b) k가 짝수인 경우

$$a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{k}{2}$$

이때 $a_2+a_4=2k+\dfrac{k}{2}=\dfrac{5}{2}k$이므로

$\dfrac{5}{2}k=40$에서

$k=16$

$\therefore a_1=4k=64$

(ii) $a_1=4k-1$일 때,

a_1은 홀수이므로

$a_2=a_1+1=4k$

a_2는 짝수이므로

$$a_3=\frac{a_2}{2}=2k$$

a_3도 짝수이므로

$$a_4=\frac{a_3}{2}=k$$

이때 $a_2+a_4=4k+k=5k$이므로

$5k=40$에서

$k=8$

$\therefore a_1=4k-1=31$

(iii) $a_1=4k-2$일 때,

a_1은 짝수이므로

$$a_2=\frac{a_1}{2}=2k-1$$

a_2는 홀수이므로

$a_3=a_2+1=2k$

a_3은 짝수이므로

$$a_4=\frac{a_3}{2}=k$$

이때 $a_2+a_4=(2k-1)+k=3k-1$이므로

$3k-1=40$에서

$k=\dfrac{41}{3}$이고, 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $a_1=4k-3$일 때,

a_1은 홀수이므로

$a_2=a_1+1=4k-2$

a_2는 짝수이므로

$a_3=\dfrac{a_2}{2}=2k-1$

a_3은 홀수이므로

$a_4=a_3+1=2k$

이때 $a_2+a_4=(4k-2)+2k=6k-2$이므로

$6k-2=40$에서

$k=7$

$\therefore a_1=4k-3=25$

(i)~(iv)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값은

52, 64, 31, 25이므로 그 합은

$52+64+31+25=172$

13 정답 ③

해설 도함수를 활용하여 함수가 주어진 증가, 감소에 대한 조건을 만족시키도록 하는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \dfrac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\ge 0)\end{cases}$ 에서

$f'(x)=\begin{cases} -x^2-2ax-b & (x<0) \\ x^2+2ax-b & (x>0)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=-1$의 좌우에서 감소하다가 증가하고,

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로

$f'(-1)=0$

$-1+2a-b=0,\ b=2a-1$

$x<0$일 때,

$f'(x)=-x^2-2ax-2a+1$

$\quad=-(x+1)(x+2a-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=-2a+1$이다.

이때 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하고,

구간 $[-1,\ 0)$에서 증가하므로 $(-\infty,\ -1)$에서

$f'(x)\le 0$, $(-1,\ 0)$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

즉, $f'(-2a+1)=0$에서 $-2a+1\ge 0$이어야 한다.

$\therefore a\le \dfrac{1}{2}$ $\quad\cdots$ ㉠

한편, $x>0$일 때

$f'(x)=x^2+2ax-b$

$\quad=x^2+2ax-2a+1$

$\quad=(x+a)^2-a^2-2a+1$

함수 $f(x)$가 구간 $[0,\ \infty)$에서 증가하므로 $(0,\ \infty)$에서

$f'(x)\ge 0$이어야 한다.

(i) $-a<0$, 즉 $a>0$인 경우

$(0,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이려면

$f'(0)=-2a+1\ge 0$이면 된다.

$\therefore 0<a\le \dfrac{1}{2}$

(ii) $-a\ge 0$, 즉 $a\le 0$인 경우

$(0,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이려면

$f'(-a)=-a^2-2a+1\ge 0$이면 된다.

$a^2+2a-1\le 0$

$-1-\sqrt{2}\le a\le -1+\sqrt{2}$

$\therefore -1-\sqrt{2}\le a\le 0$

(i), (ii)에서

$-1-\sqrt{2}\le a\le \dfrac{1}{2}$ $\quad\cdots$ ㉡

즉, ㉠, ㉡에서 구하는 a의 값의 범위는

$-1-\sqrt{2}\le a\le \dfrac{1}{2}$이므로

$a+b=3a-1$의 최댓값은 $a=\dfrac{1}{2}$일 때 $\dfrac{1}{2}$,

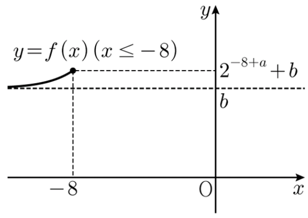
최솟값은 $a=-1-\sqrt{2}$일 때, $-4-3\sqrt{2}$이다.

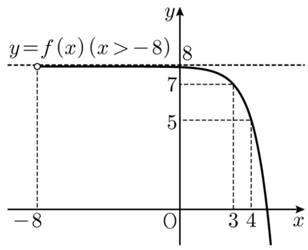
$\therefore M-m=\dfrac{9}{2}+3\sqrt{2}$

14 정답 ②

해설 지수함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 지수함수를 구할 수 있는가?

$x\le -8$과 $x>-8$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 그림과 같다.





또한, 주어진 조건에서 $3\le k<4$이므로 $x>-8$인 경우에 정수 $f(x)$는 $f(x)=6$ 또는 $f(x)=7$

따라서 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $x\le -8$인 경우에 정수 $f(x)$는 6뿐이어야 한다.

즉, $b=5$이고 $6\le f(-8)<7$이어야 하므로

$6\le 2^{-8+a}+5<7$

$1\le 2^{-8+a}<2$

$0\le -8+a<1$

$\therefore 8\le a<9$

이때 a는 자연수이므로 $a=8$

$\therefore a+b=13$

15 정답 ④

해설 함수의 극한과 연속을 이해하고 있는가?

$\lim_{x\to3}g(x)=g(3)-1$이므로 $x=3$일 때, $f(3)$의 값에 따라 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $f(3)\neq0$일 때,

$x=3$에 가까운 x의 값에 대하여 $f(x)\neq0$이므로

$g(x)=\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$

이때 함수 $f(x)$는 다항함수이므로

$f(x)$, $f(x+3)$, $f(x)+1$은 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to3}g(x)=g(3)$

이 식을 $\lim_{x\to3}g(x)=g(3)-1$에 대입하면 성립하지 않는다.

(ii) $f(3)=0$일 때,

함수 $f(x)$가 삼차함수이므로 방정식 $f(x)=0$은 많아야 서로 다른 세 실근을 갖는다.

따라서 $x=3$에 가까우며 $x\neq3$인 x의 값에 대하여 $f(x)\neq0$

이때 $\lim_{x\to3}g(x)=\lim_{x\to3}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$에서

$x\to3$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to3}f(x+3)\{f(x)+1\}=0$

$f(6)\{f(3)+1\}=0$

$\therefore f(6)=0$

$f(x)=(x-3)(x-6)(x-k)$ (k는 상수)

이 식을 $\lim_{x\to3}g(x)=\lim_{x\to3}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$에 대입하면

$$\lim_{x\to3}g(x)$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x(x+3-k)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-6)(x-k)}$$
$$=\frac{3(6-k)}{-3(3-k)}$$
$$=\frac{6-k}{k-3}$$

이 값을 $\lim_{x\to3}g(x)=g(3)-1$에 대입하면

$g(3)=3$이므로

$\frac{6-k}{k-3}=3-1$

$6-k=2k-6$, $3k=12$

$\therefore k=4$

따라서 $f(x)=(x-3)(x-4)(x-6)$이고,

$f(5)\neq0$이므로

$$g(5)=\frac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}$$
$$=\frac{5\cdot4\cdot2\cdot\{2\cdot1\cdot(-1)+1\}}{2\cdot1\cdot(-1)}$$
$$=20$$

16 정답 6

해설 로그방정식을 풀 수 있는가?

로그의 진수 조건에 의하여

$x-1>0$에서 $x>1$ ⋯ ㉠

$13+2x>0$에서 $x>-\frac{13}{2}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $x>1$

$\log_2(x-1)=\log_4(13+2x)$에서

$\log_2(x-1)=\frac{1}{2}\log_2(13+2x)$

$2\log_2(x-1)=\log_2(13+2x)$

$\log_2(x-1)^2=\log_2(13+2x)$

$(x-1)^2=13+2x$

$x^2-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$

$x>1$이므로 $x=6$

17 정답 24

해설 합의 기호 $\sum$의 성질을 이해하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있는가?

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{10}\{(2a_k-b_k)-a_k\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)-\sum_{k=1}^{10}a_k$$
$$=34-10=24$$

18 정답 5

해설 곱의 미분법을 이용하여 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

$f(x)=(x^2+1)(x^2+ax+3)$에서

$f'(x)=2x(x^2+ax+3)+(x^2+1)(2x+a)$이므로

$f'(1)=2(a+4)+2(a+2)$

$=4a+12=32$

$\therefore a=5$

19 정답 4

해설 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있는가?

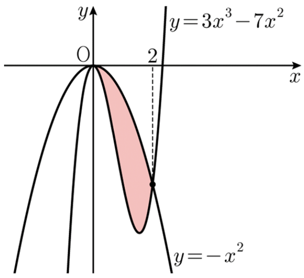
두 곡선 $y=3x^3-7x^2$, $y=-x^2$이 만나는 점의 x좌표는

$3x^3-7x^2=-x^2$

$3x^2(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

이때 두 함수 $y=3x^3-7x^2$, $y=-x^2$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 \{(-x^2)-(3x^3-7x^2)\}dx$$

$$=\int_0^2 (-3x^3+6x^2)dx$$

$$=\left[-\frac{3}{4}x^4+2x^3\right]_0^2$$

$$=(-12+16)-0$$

$$=4$$

20 정답 98

해설 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{3}{4}\pi}=2R_1,\ \frac{\overline{BD}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R_1$$

$$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\overline{BD}$$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2R_2,\ \frac{\overline{BD}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R_2$$

$$R_2=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}\cdot\overline{BD}$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=2^2+1^2-2\cdot2\cdot1\cdot\cos\frac{2}{3}\pi$$

$$=2^2+1^2-\boxed{(-2)}=7$$

이므로

$$R_1R_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\overline{BD}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\overline{BD}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\overline{BD}^2$$

$$=\boxed{\frac{7\sqrt{6}}{6}}$$

따라서 $p=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $q=-2$, $r=\frac{7\sqrt{6}}{6}$이므로

$$9(pqr)^2=9\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot(-2)\cdot\frac{7\sqrt{6}}{6}\right\}^2$$

$$=9\cdot\frac{98}{9}$$

$$=98$$

21 정답 19

해설 등차수열의 일반항과 합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 수열의 항을 구할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로

a는 자연수이고 d는 0 이상의 정수이다.

$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)n$이므로

$$\sum_{k=1}^{7}S_k=\sum_{k=1}^{7}\left\{\frac{d}{2}k^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)k\right\}$$

$$=\frac{d}{2}\cdot\sum_{k=1}^{7}k^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)\cdot\sum_{k=1}^{7}k$$

$$=\frac{d}{2}\cdot\frac{7\cdot8\cdot15}{6}+\left(a-\frac{d}{2}\right)\cdot\frac{7\cdot8}{2}$$

$$=70d+28\left(a-\frac{d}{2}\right)$$

$$=28a+56d$$

즉, $28a+56d=644$에서
$a+2d=23$ $\cdots$ ㉠
또, a_7이 13의 배수이므로 자연수 m에 대하여
$a+6d=13m$ $\cdots$ ㉡
㉡－㉠에서 $4d=13m-23$
$4d+23+13=13m+13$
$4(d+9)=13(m+1)$
$d+9=\frac{13(m+1)}{4}$
이 값이 자연수가 되어야 하므로 $m+1$의 값은 4의 배수이어야 한다.
즉, m이 될 수 있는 값은 $3, 7, 11, 15, \cdots$
한편, $d=\frac{13m-23}{4}$이므로 ㉡에서
$a=13m-6d$
$=13m-6\cdot\left(\frac{13m-23}{4}\right)$
$=13m-\frac{39}{2}m+\frac{69}{2}$
$=-\frac{13}{2}m+\frac{69}{2}$
이 값이 양수이어야 하므로
$-\frac{13}{2}m+\frac{69}{2}>0$
$\therefore m<\frac{69}{13}$
따라서 $m=3$이고 $d=4$이므로
$a=23-12d=15$
$\therefore a_2=a+d=15+4=19$

22 정답 10

해설 곱의 미분법과 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구하고, 그 정적분을 구할 수 있는가?
조건 (가)에 $x=1$을 대입하면
$0=f(1)-3$이므로
$f(1)=3$ $\cdots$ ㉠
조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x$
이때 $f(x)$는 다항함수이므로
$f'(x)=4$
즉, $f(x)=4x+C_1$ (C_1은 적분상수)로 놓을 수 있다.
이때 ㉠에서 $f(1)=3$이므로
$f(1)=4+C_1=3$
$\therefore C_1=-1$
즉, $f(x)=4x-1$이므로
$F(x)=2x^2-x+C_2$ (C_2는 적분상수)
한편, 조건 (나)에서
$f(x)G(x)+F(x)g(x)=\{F(x)G(x)\}'$이므로
양변을 x에 대하여 적분하면
$F(x)G(x)=2x^4+x^3+x+C_3$ (C_3은 적분상수)로 놓을 수 있다.
이때 $F(x)=2x^2-x+C_2$이고
$G(x)$도 다항함수이므로 $G(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.
$G(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)로 놓으면
$(2x^2-x+C_2)(x^2+ax+b)=2x^4+x^3+x+C_3$
양변의 x^3의 계수를 비교하면
$2a-1=1$
즉, $a=1$이므로
$G(x)=x^2+x+b$
$\therefore \int_1^3 g(x)dx=\left[G(x)\right]_1^3$
$=G(3)-G(1)$
$=(3^2+3+b)-(1^2+1+b)$
$=10$

23 정답 ①

해설 이항분포의 평균을 구할 수 있는가?
이항분포 $\mathrm{B}\left(30, \frac{1}{5}\right)$을 따르는 확률변수 X의 평균은
$\mathrm{E}(X)=30\cdot\frac{1}{5}=6$

24 정답 ③

해설 같은 것이 있는 순열을 이용하여 도로망에서 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있는가?
A지점에서 P지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\frac{4!}{3!\cdot1!}=4$
P지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\frac{2!}{1!\cdot1!}=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$4\cdot2=8$

25 정답 ③

해설 두 사건의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

두 사건 A, B^C이 서로 배반사건이므로

$A \subset B$

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) = \frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(B) = \frac{7}{10} - \mathrm{P}(A)$

$= \frac{7}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$

따라서 $A \subset B$이므로

$\mathrm{P}(A^C \cap B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{5}$

$= \frac{3}{10}$

26 정답 ②

해설 표준정규분포표를 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

시험 점수를 확률변수 X라 하면

X는 정규분포 $\mathrm{N}(68,\ 10^2)$을 따르고

$Z = \frac{X-68}{10}$으로 놓으면

확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(55 \le X \le 78)$

$= \mathrm{P}\left(\frac{55-68}{10} \le Z \le \frac{78-68}{10}\right)$

$= \mathrm{P}(-1.3 \le Z \le 1)$

$= \mathrm{P}(-1.3 \le Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.3) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$

$= 0.4032 + 0.3413$

$= 0.7445$

27 정답 ④

해설 확률의 덧셈정리를 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

X에서 Y로의 일대일함수 f의 개수는

${}_7\mathrm{P}_4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

(ⅰ) 함수 f의 치역에 4가 포함되고 6이 포함되지 않는 경우

함숫값이 4인 정의역의 원소를 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1 = 3$

함숫값이 2, 4가 아닌 경우, 함숫값이 홀수이어야 하므로 나머지 두 함숫값을 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_2 = 4 \cdot 3 = 12$

따라서 이 경우의 확률은

$\frac{3 \cdot 12}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{3}{70}$

(ⅱ) 함수 f의 치역에 6이 포함되고 4가 포함되지 않는 경우

(ⅰ)과 같은 방법으로 이 경우의 확률은

$\frac{3 \cdot 12}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{3}{70}$

(ⅲ) 함수 f의 치역에 4와 6이 모두 포함되는 경우

함숫값이 4, 6인 정의역의 원소와 함숫값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2 = 3 \cdot 2 = 6$

함숫값이 2, 4, 6이 아닌 경우, 함숫값이 홀수이어야 하므로

나머지 함숫값을 정하는 경우의 수는 4

따라서 이 경우의 확률은

$\frac{6 \cdot 4}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{35}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$\frac{3}{70} + \frac{3}{70} + \frac{1}{35} = \frac{4}{35}$

28 정답 ⑤

해설 주어진 시행과 표본평균의 의미를 이해하고 확률을 구할 수 있는가?

주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가

1일 확률은 $\frac{2}{3}$

주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가

2일 확률은 $\frac{1}{3}$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가

1일 확률은 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가

2일 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가

3일 확률은 $\frac{1}{6}$

첫 번째 시행에서 기록한 수를 X_1, 두 번째 시행에서 기록한 수를 X_2라 하면 구하는 확률은 $X_1+X_2=4$일 확률이다.

(i) $(X_1,\ X_2)=(1,\ 3)$인 경우

첫 번째 시행에서 3의 배수의 눈이 나온 경우의 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{81}$$

첫 번째 시행에서 3의 배수가 아닌 눈이 나온 경우의 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{27}$$

따라서 이 경우의 확률은

$$\frac{2}{81}+\frac{1}{27}=\frac{5}{81}$$

(ii) $(X_1,\ X_2)=(3,\ 1)$인 경우

(i)과 같은 방법으로 이 경우의 확률은

$$\frac{2}{81}+\frac{1}{27}=\frac{5}{81}$$

(iii) $(X_1,\ X_2)=(2,\ 2)$인 경우

(a) 주머니 A에서만 공을 꺼내는 경우

이 경우의 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{81}$$

(b) 주머니 B에서만 공을 꺼내는 경우

이 경우의 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{81}$$

(c) 주머니 A와 주머니 B에서 한 번씩 공을 꺼내는 경우

이 경우의 확률은

$$2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{81}$$

따라서 이 경우의 확률은

$$\frac{1}{81}+\frac{4}{81}+\frac{4}{81}=\frac{1}{9}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{5}{81}+\frac{5}{81}+\frac{1}{9}=\frac{19}{81}$$

29 정답 62

해설 독립시행의 확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

동전을 두 번 던져 앞면이 나온 횟수가 2일 확률은 $\frac{1}{4}$

앞면이 나온 횟수가 0 또는 1일 확률은

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

문자 B가 보이도록 카드가 놓이려면 뒤집는 횟수가 홀수이어야 한다.

따라서 구하는 확률은 5번의 시행 중 앞면이 나온 횟수가 2인 횟수가 1 또는 3 또는 5인 확률이므로

$$p={}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4+{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$$=\frac{405+90+1}{4^5}$$

$$=\frac{31}{64}$$

$$\therefore\ 128p=128\cdot\frac{31}{64}=62$$

30 정답 336

해설 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

조건 (나)에서 ad가 홀수이므로 a와 d는 모두 홀수이고 $b+c$가 짝수이므로 b와 c가 모두 홀수이거나 b와 c가 모두 짝수이다.

(i) b와 c가 모두 홀수인 경우

$a,\ b,\ c,\ d$가 모두 13 이하의 홀수이다.

13 이하의 홀수의 개수는 7이고,

조건 (가)에서 $a\le b\le c\le d$이므로 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 서로 다른 7개에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수 ${}_7\mathrm{H}_4$와 같다.

$${}_7\mathrm{H}_4={}_{10}\mathrm{C}_4=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$$

(ii) b와 c가 모두 짝수인 경우

a와 d가 모두 홀수, b와 c가 모두 짝수,

$a\le b\le c\le d$이므로 $d-a$의 값은 12 이하의 자연수이다.

(a) $d-a=12$인 경우

순서쌍 $(a,\ d)$의 개수는 1이고, 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 서로 다른 짝수 6개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_6\mathrm{H}_2$이므로

구하는 순서쌍의 개수는

$$1\cdot{}_6\mathrm{H}_2=1\cdot{}_7\mathrm{C}_2=1\cdot\frac{7\cdot6}{2\cdot1}=21$$

(b) $d-a=10$인 경우

순서쌍 $(a,\ d)$의 개수는 2이고, 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 서로 다른 짝수 5개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_5\mathrm{H}_2$이므로

구하는 순서쌍의 개수는

$$2\cdot{}_5\mathrm{H}_2=2\cdot{}_6\mathrm{C}_2=2\cdot\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=30$$

(c) $d-a=8$인 경우
순서쌍 $(a,\ d)$의 개수는 3이고, 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 서로 다른 짝수 4개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_4\mathrm{H}_2$이므로
구하는 순서쌍의 개수는

$$3\cdot{}_4\mathrm{H}_2=3\cdot{}_5\mathrm{C}_2=3\cdot\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=30$$

(d) $d-a=6$인 경우
순서쌍 $(a,\ d)$의 개수는 4이고, 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 서로 다른 짝수 3개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_3\mathrm{H}_2$이므로
구하는 순서쌍의 개수는

$$4\cdot{}_3\mathrm{H}_2=4\cdot{}_4\mathrm{C}_2=4\cdot\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=24$$

(e) $d-a=4$인 경우
순서쌍 $(a,\ d)$의 개수는 5이고, 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 서로 다른 짝수 2개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_2\mathrm{H}_2$이므로
구하는 순서쌍의 개수는

$$5\cdot{}_2\mathrm{H}_2=5\cdot{}_3\mathrm{C}_2=5\cdot\frac{3\cdot2}{2\cdot1}=15$$

(f) $d-a=2$인 경우
순서쌍 $(a,\ d)$의 개수는 6이고, 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 $a+1=b=c$에서 1이므로
구하는 순서쌍의 개수는
$6\cdot1=6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 순서쌍의 개수는
$210+21+30+30+24+15+6=336$

31 정답 ④

해설 지수함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{7x}-1}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{7x}-1}{7x}\cdot\frac{2x}{e^{2x}-1}\cdot\frac{7}{2}\right)$$
$$=\frac{7}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{e^{7x}-1}{7x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2x}{e^{2x}-1}$$
$$=\frac{7}{2}\cdot1\cdot1=\frac{7}{2}$$

32 정답 ②

해설 매개변수로 나타내어진 함수의 미분을 할 수 있는가?

$\dfrac{dx}{dt}=1-2\sin2t,\ \dfrac{dy}{dt}=2\sin t\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\sin t\cos t}{1-2\sin2t}\qquad\cdots\text{㉠}$$

(단, $1-2\sin2t\neq0$)

㉠의 우변에 $t=\dfrac{\pi}{4}$를 대입하면

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}{1-2\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-2\cdot1}$$
$$=\frac{1}{1-2}=-1$$

33 정답 ②

해설 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$f'(x)=1+\dfrac{1}{x}$이므로

$$\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)dx=\int_1^e f'(x)f(x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}\{f(x)\}^2\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{2}\{f(e)\}^2-\frac{1}{2}\{f(1)\}^2$$
$$=\frac{1}{2}(e+1)^2-\frac{1}{2}(1+0)^2$$
$$=\frac{e^2}{2}+e$$

34 정답 ⑤

해설 급수의 합을 구할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\ (d>0)$이라 하면

$$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$$
$$=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\qquad\cdots\text{㉠}$$

이때 $a_n=a_1+(n-1)d=dn+1-d$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(dn+1-d)=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=0$$

㉠에서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\\ &= \frac{1}{d}\left(\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}\right)\\ &= \frac{1}{d}(1-0)=\frac{1}{d}\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}}+b_n\right)=2$에서

$\dfrac{1}{a_na_{n+1}}+b_n=c_n$이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=2$$

$b_n=c_n-\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$이므로 급수의 성질에 의하여

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}b_n &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n-\frac{1}{a_na_{n+1}}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}c_n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}\\ &= 2-\frac{1}{d} \qquad \cdots ㉡\end{aligned}$$

따라서 등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

$-1<r<1$이고 $a_2b_2=(1+d)r=1$에서

$$r=\frac{1}{1+d}$$

이때 $d>0$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}b_n &= \frac{b_1}{1-r}\\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{1+d}}\\ &= \frac{1+d}{d} \qquad \cdots ㉢\end{aligned}$$

이므로 ㉡, ㉢에서

$$2-\frac{1}{d}=\frac{1+d}{d},\ \frac{2d-1}{d}=\frac{1+d}{d}$$

$\therefore\ d=2$

따라서 ㉡ 또는 ㉢에서

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{3}{2}$$

35 정답 ①

해설 정적분을 이용하여 곡선의 길이를 구할 수 있는가?

$$y=\begin{cases}-\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+1 & (x<0)\\ 0 & (x\ge 0)\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=\begin{cases}-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2} & (x<0)\\ 0 & (x\ge 0)\end{cases}$$

이므로 $x<0$일 때

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2$$

에서

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} &= \sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\\ &= \left|\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right|=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\end{aligned}$$

이고 $x\ge 0$일 때

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+0=1$$

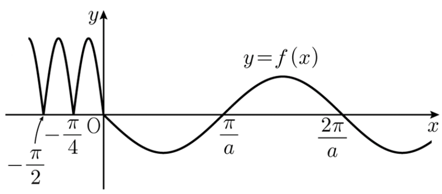
따라서 $-\ln 4\le x\le 1$에서의 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}&\int_{-\ln 4}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\\ &=\int_{-\ln 4}^{0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx+\int_0^1 1dx\\ &=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_{-\ln 4}^{0}+\Big[x\Big]_0^1\\ &=\left(\frac{e^0-e^0}{2}-\frac{e^{-\ln 4}-e^{\ln 4}}{2}\right)+(1-0)\\ &=\left(0-\frac{\frac{1}{4}-4}{2}\right)+1\\ &=\frac{15}{8}+1=\frac{23}{8}\end{aligned}$$

36 정답 ②

해설 정적분과 절댓값이 포함된 함수가 미분가능할 조건을 구할 수 있는가?

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$F(x)=\displaystyle\int_{-a\pi}^{x}f(t)dt$라 하자.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $F(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

이때 정적분의 성질에 의하여

$F'(x)=f(x)$이고

$$g(x)=\begin{cases} -F(x) & (F(x)<0) \\ F(x) & (F(x)\geq 0) \end{cases}$$

이므로

$$g'(x)=\begin{cases} -f(x) & (F(x)<0) \\ f(x) & (F(x)>0) \end{cases}$$

따라서 함수 $g(x)=|F(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$F(k)=0$인 실수 k가 존재하지 않거나 $F(k)=0$인 모든 실수 k에 대하여 $F'(k)=f(k)=0$이어야 한다.

(i) 함수 $g(x)$가 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 미분가능할 조건

$-a\pi<0$이고 모든 음의 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이므로

$F(k)=\displaystyle\int_{-a\pi}^{k} f(t)dt=0$인 음의 실수 k의 값은 $-a\pi$뿐이다.

이때 $f(k)=f(-a\pi)=2|\sin(-4a\pi)|=0$이어야 하므로

$-4a\pi=-n\pi$, 즉 $a=\dfrac{n}{4}$ (n은 자연수) $\cdots$ ㉠

(ii) 함수 $g(x)$가 구간 $[0,\ \infty)$에서 미분가능할 조건

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(-2\sin 4t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}\cos 4t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}$$
$$=\frac{1}{2}\cos 0-\frac{1}{2}\cos(-\pi)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

이고 모든 음의 실수 x에 대하여

$f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=f(x)$가 성립하므로 ㉠에서

$$\int_{-a\pi}^{0} f(t)dt=\int_{-\frac{n}{4}\pi}^{0} f(t)dt=n\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt=n$$

따라서 양의 실수 x에 대하여

$$F(x)=\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$$
$$=\int_{-\frac{n}{4}\pi}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt$$
$$=n+\int_{0}^{x}(-\sin at)dt$$
$$=n+\left[\frac{1}{a}\cos at\right]_{0}^{x}$$
$$=n+\left(\frac{1}{a}\cos ax-\frac{1}{a}\cos 0\right)$$
$$=n+\frac{1}{a}\cos ax-\frac{1}{a}$$
$$=n+\frac{4}{n}\cos\frac{n}{4}x-\frac{4}{n}$$

이때 $F(k)=0$인 양수 k가 존재하면

$n=\dfrac{4}{n}\left(1-\cos\dfrac{n}{4}k\right)$에서

$\cos\dfrac{n}{4}k=1-\dfrac{n^2}{4}$ $\cdots$ ㉡

이때 $f(k)=-\sin ak=-\sin\dfrac{n}{4}k=0$이어야 하므로

$\dfrac{n}{4}k=m\pi$ (m은 자연수)에서

㉡에서 $\cos m\pi=1-\dfrac{n^2}{4}$

이때 $m,\ n$은 자연수이므로

$\cos m\pi=1-\dfrac{n^2}{4}=-1$, 즉 $n^2=8$을 만족시키는

자연수 n은 존재하지 않는다.

따라서 함수 $g(x)$가 구간 $[0,\ \infty)$에서

미분가능하려면 모든 양의 실수 x에 대하여

$F(x)=n+\dfrac{4}{n}\cos\dfrac{n}{4}x-\dfrac{4}{n}>0$

즉, $\cos\dfrac{n}{4}x>1-\dfrac{n^2}{4}$이어야 한다.

따라서 $1-\dfrac{n^2}{4}<-1$이어야 하므로

$n^2>8$

따라서 자연수 n의 최솟값은 3이므로 ㉠에서 a의 최솟값은 $\dfrac{3}{4}$이다.

37 정답 18

해설 등비수열의 극한을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

(i) $1<a<3$인 경우

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{3}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+a\left(\frac{a}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{a}{3}\right)^n}$$
$$=\frac{1+a\cdot 0}{3+0}=\frac{1}{3}=a$$
$$a=\frac{1}{3}<1$$

이므로 모순이다.

(ii) $a=3$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+3^{n+1}}{3^{n+1}+3^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}1=1=a$$

이므로 모순이다.

(iii) $a>3$인 경우

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{a}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{a}\right)^n+a}{3\left(\frac{3}{a}\right)^n+1}$$
$$=\frac{0+a}{3\cdot 0+1}=a$$

이므로 등식을 만족시킨다.

(a) $3<a<b$일 때

같은 방법으로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=b>3=\frac{9}{3}>\frac{9}{a}$$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(b) $3<b<a$일 때

같은 방법으로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{1}{a}\neq\frac{9}{a}$$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(c) $3<a=b$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+a^{n+1}}{a^{n+1}+a^n}=1=\frac{9}{a}$$

에서 $a=9$, $b=9$

따라서 $a=9$, $b=9$이므로

$a+b=18$

38 정답 32

해설 삼각함수의 미분법과 음함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

선분 AB의 중점을 O라 하면

$\overline{OP}=5$

$\overline{OC}=\overline{AO}-\overline{AC}=5-4=1$

삼각형 PCO에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{OP}^2=\overline{CP}^2+\overline{OC}^2-2\cdot\overline{CP}\cdot\overline{OC}\cdot\cos\theta$

$\overline{CP}=x$라 하면

$5^2=x^2+1^2-2\cdot x\cdot 1\cdot\cos\theta$

$x^2-2x\cos\theta-24=0 \qquad \cdots ㉠$

$\theta=\frac{\pi}{4}$를 ㉠에 대입하면

$x^2-\sqrt{2}x-24=0$

$x>0$이므로 $x=4\sqrt{2}$

㉠을 θ에 대하여 미분하면

$$2x\frac{dx}{d\theta}-2\cos\theta\frac{dx}{d\theta}+2x\sin\theta=0$$

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{x\sin\theta}{\cos\theta-x}$$

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, $\frac{dx}{d\theta}$의 값은

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{4\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}-4\sqrt{2}}=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

선분 PQ의 중심을 M이라 하면

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{CM}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2x\sin\theta\cdot x\cos\theta$$
$$=x^2\sin\theta\cos\theta$$

이 식의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$$\frac{dS(\theta)}{d\theta}=2x\frac{dx}{d\theta}\sin\theta\cos\theta+x^2\cos^2\theta-x^2\sin^2\theta$$

이 식에 $\theta=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$$S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=2\cdot 4\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4}+(4\sqrt{2})^2\cos^2\frac{\pi}{4}-(4\sqrt{2})^2\sin^2\frac{\pi}{4}$$
$$=-\frac{32}{7}$$

$$\therefore\ -7S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-7\cdot\left(-\frac{32}{7}\right)=32$$

39 정답 ④

해설 좌표공간의 점을 대칭이동한 점의 좌표와 선분의 길이를 구할 수 있는가?

좌표공간의 점 A$(8,\ 6,\ 2)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 B$(8,\ 6,\ -2)$

따라서 선분 AB의 길이는

$$\overline{AB}=\sqrt{(8-8)^2+(6-6)^2+(-2-2)^2}$$
$$=\sqrt{16}$$
$$=4$$

40 정답 ①

해설 쌍곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

쌍곡선 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(7,\ 6)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{7x}{7}-\frac{6y}{6}=1$, 즉 $y=x-1$

직선 $y=x-1$에서 $y=0$일 때,

$0=x-1$

$\therefore\ x=1$

따라서 구하는 x절편은 1이다.

41 정답 ⑤

해설 벡터의 성질을 이용하여 점 P가 나타내는 도형의 길이를 구할 수 있는가?

A$(4,\ 3)$이므로

$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OA}|$이므로

$|\overrightarrow{OP}|=5$

점 P가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5인 원이다.

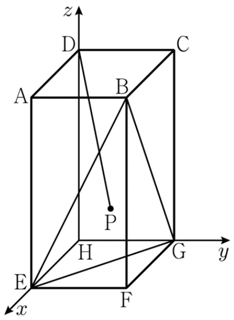
따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는

$2\pi\cdot 5=10\pi$

42 정답 ②

해설 공간도형에 공간좌표를 적용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

점 H를 원점이라 하고
반직선 HE가 x축의 양의 방향,
반직선 HG가 y축의 양의 방향,
반직선 HD가 z축의 양의 방향이 되도록
직육면체 ABCD−EFGH를 놓으면 그림과 같다.

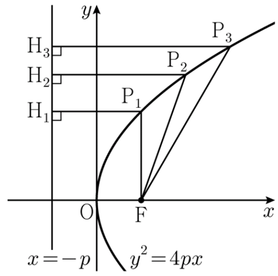


$\overline{HE}=\overline{AD}=3$, $\overline{HG}=\overline{AB}=3$, $\overline{HD}=\overline{AE}=6$이므로
$B(3, 3, 6)$, $E(3, 0, 0)$, $G(0, 3, 0)$이다.
삼각형 BEG의 무게중심 P의 좌표는
$\left(\frac{3+3+0}{3}, \frac{3+0+3}{3}, \frac{6+0+0}{3}\right)$, 즉 $(2, 2, 2)$
따라서 $D(0, 0, 6)$이므로
$$\overline{DP}=\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(2-6)^2}$$
$$=\sqrt{4+4+16}$$
$$=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

43 정답 ③

해설 포물선의 성질을 이용하여 포물선의 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

포물선 $y^2=4px$에서 초점 F의 좌표는 $(p, 0)$이고,
준선의 방정식은 $x=-p$이다.
포물선 위에 세 점 P_1, P_2, P_3에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, H_3이라 하자.



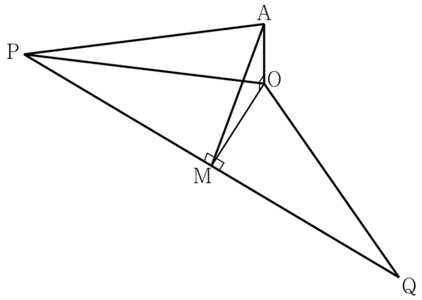
세 점 P_1, P_2, P_3의 x좌표가 각각 p, $2p$, $3p$이므로
포물선의 성질에 의하여
$\overline{FP_1}=\overline{H_1P_1}=p+p=2p$,
$\overline{FP_2}=\overline{H_2P_2}=p+2p=3p$,
$\overline{FP_3}=\overline{H_3P_3}=p+3p=4p$
이때 $\overline{FP_1}+\overline{FP_2}+\overline{FP_3}=27$에서
$2p+3p+4p=27$, $9p=27$
$\therefore\ p=3$

44 정답 ①

해설 정사영의 성질을 이용하여 정사영시킨 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

좌표공간에서 원점을 O라 하자.
점 P는 중심이 $A(0, 0, 1)$이고 반지름의 길이가 4인 구 위의 점이므로
$\overline{AP}=4$
$\overline{OA}\perp(xy$평면$)$이고 점 P가 xy평면 위에 있으므로
$\overline{OA}\perp\overline{OP}$
직각삼각형 AOP에서 $\overline{OA}=1$이므로
$$\overline{OP}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{OA}^2}$$
$$=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$$
원점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 M이라 하면
$\overline{PM}=\overline{QM}$
$\overline{OA}\perp(xy$평면$)$, $\overline{OM}\perp\overline{PQ}$이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{AM}\perp\overline{PQ}$
점 A에서 선분 PQ까지의 거리가 2이므로
$\overline{AM}=2$
직각삼각형 OAM에서
$$\overline{OM}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{OA}^2}$$
$$=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$
직각삼각형 OPM에서

$$\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{15})^2-(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$$
$$\overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PM}}=4\sqrt{3}$$



또, 선분 PQ를 지름으로 하는 구 T는 중심이 M이고 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$ 이다.
구 S와 구 T가 만나서 생기는 원을 C_1이라 하고, 원 C_1을 포함하는 평면을 α라 하면

$\alpha\perp\overline{\mathrm{AM}}$

삼각형 OAM에서 $\angle\mathrm{AMO}=\theta$라 하면

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{OM}}}{\overline{\mathrm{AM}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

이때 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기는 $\dfrac{\pi}{3}$이다.
점 B에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\mathrm{BH}}\le 2\sqrt{3}$ 이므로
삼각형 BPQ의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}\cdot\overline{\mathrm{BH}}$$
$$\le\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}$$
$$=12$$

삼각형 BPQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면

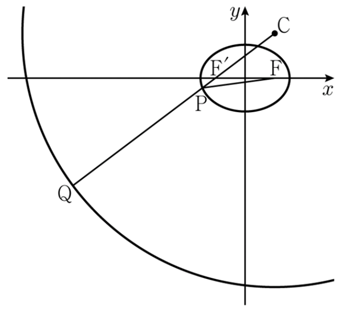
$$S'=S\cdot\cos\frac{\pi}{3}\le 12\cdot\frac{1}{2}=6$$

따라서 삼각형 BPQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 6이다.

45 정답 17

해설 타원의 성질을 이용하여 세 점 P, Q, F 사이의 관계를 파악한 후, 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$의 한 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)\ (c>0)$이므로
타원의 성질에 의하여
$c^2=9-5=4$
$c>0$이므로 $c=2$
타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$의 다른 한 초점을 F$'$이라 하면
$\mathrm{F}'(-2,\ 0)$이다.
점 P가 타원 위의 점이므로 타원의 성질에 의하여
$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}=6$ … ㉠
이때 $\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{PF}}\ge 6$ … ㉡
이므로 ㉠, ㉡에서
$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF}'}\ge 12$ … ㉢
또, 원의 중심을 C라 하면 C(2, 3)이므로
$\overline{\mathrm{CF}'}=\sqrt{(-2-2)^2+(0-3)^2}=5$
이때 주어진 조건을 만족시키는 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$과 중심이 C(2, 3)이고 반지름의 길이가 r인 원은 다음 그림과 같다.



㉢에서 세 점 P, Q, F$'$이 일직선 위에 있을 때 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF}'}$의 값이 최소이고, $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF}'}$의 값의 최솟값은 12이다.
따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF}'}$의 값이 최소일 때 원의 반지름의 길이 r의 값은
$r=\overline{\mathrm{CF}'}+\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{PQ}}$
$=5+12=17$

46 정답 27

해설 벡터의 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최솟값을 구할 수 있는가?

조건 (가)에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$는 방향이 같다. … ㉠

$$9|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=9|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\times\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}$$
$$4|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}=4|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\times\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}$$

㉠에서 $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}$ 이므로

$9|\overrightarrow{PQ}|^2 = 4|\overrightarrow{AB}|^2$

$|\overrightarrow{PQ}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|$ $\cdots$ ㉡

조건 (나)에서 $\frac{\pi}{2} < \angle CAQ < \pi$

조건 (다)와 ㉠에서

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{CB}|\cos(\angle ABC)$

$= |\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{CB}|\cos\frac{\pi}{4}$

$|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{2}|\overrightarrow{AB}|$이므로

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CB} = \left(\frac{2}{3} \times |\overrightarrow{AB}|\right) \times (\sqrt{2}|\overrightarrow{AB}|)\cos\frac{\pi}{4}$

$= \frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|^2$

$= 24$

$|\overrightarrow{AB}| = 6$

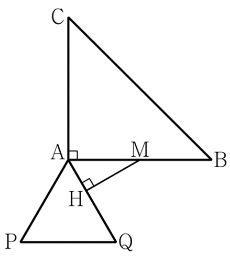
㉡에서

$|\overrightarrow{PQ}| = \frac{2}{3} \times 6 = 4$

삼각형 APQ는 정삼각형이므로

$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AQ}| = 4$

$\angle BAQ = \frac{\pi}{3}$



선분 AB의 중점을 M, 점 M에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$|\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}| = |2\overrightarrow{XM}|$

$\geq |2\overrightarrow{HM}|$

$= 2 \times |\overrightarrow{AM}| \times \frac{\pi}{3}$

$= 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 3\sqrt{3}$

따라서 $m = 3\sqrt{3}$ 이므로

$m^2 = 27$

47 정답 ⑤

해설 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

$\sqrt[3]{27} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} \cdot (2^2)^{-\frac{1}{2}}$

$= 3 \cdot 2^{-1}$

$= 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

48 정답 ④

해설 다항함수의 미분과 미분계수의 정의를 이해하고 있는가?

$f(x) = x^2 - 2x + 3$에서

$f'(x) = 2x - 2$이므로

$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3)$

$= 2 \cdot 3 - 2 = 4$

49 정답 ②

해설 합의 기호 $\sum$의 성질을 이해하고 있는가?

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k + 3) = 2\sum_{k=1}^{10}a_k + \sum_{k=1}^{10}3$

$= 2\sum_{k=1}^{10}a_k + 3 \cdot 10$

$= 2\sum_{k=1}^{10}a_k + 30$

이때 $2\sum_{k=1}^{10}a_k + 30 = 60$이므로

$2\sum_{k=1}^{10}a_k = 30$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k = 15$

50 정답 ②

해설 함수가 연속일 조건을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x = 1$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$이므로

$\lim_{x \to 1} f(x) = 4 - f(1)$에서

$f(1) = 4 - f(1)$

$2f(1) = 4$

$\therefore f(1) = 2$

51 정답 ①

해설 함수의 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$g(x) = (x^3 + 1)f(x)$이므로

$g'(x) = 3x^2 f(x) + (x^3 + 1)f'(x)$

이때 $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$이므로

$g'(1) = 3f(1) + 2f'(1)$

$= 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$

52 정답 ④

해설 삼각함수 사이의 관계를 이해하여 사인함수의 값을 구할 수 있는가?

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$이므로

$\sin(-\theta)=\frac{1}{7}\cos\theta$에서 $\cos\theta=-7\sin\theta$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta+49\sin^2\theta=1$

$\sin^2\theta=\frac{1}{50}$

또, $\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\frac{1}{7}\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

53 정답 ③

해설 로그함수의 점근선을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프의 점근선은

직선 $x=a$이다.

곡선 $y=\log_2\frac{x}{4}$와 직선 $x=a$가 만나는 점 A의

좌표는 $\left(a, \log_2\frac{a}{4}\right)$

곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 직선 $x=a$가 만나는 점 B의

좌표는 $\left(a, \log_{\frac{1}{2}}a\right)$

또, $a>2$에서 $\log_2\frac{a}{4}>\log_2\frac{2}{4}=-1$,

$\log_{\frac{1}{2}}a<\log_{\frac{1}{2}}2=-1$이므로

$\log_2\frac{a}{4}>\log_{\frac{1}{2}}a$

이때

$\overline{AB}=\log_2\frac{a}{4}-\log_{\frac{1}{2}}a$

$=(\log_2a-2)+\log_2a=2\log_2a-2$

이고 $\overline{AB}=4$이므로

$2\log_2a-2=4$

$\log_2a=3$

$\therefore a=2^3=8$

54 정답 ③

해설 함수의 그래프의 개형을 이용하여 두 곡선이 두 점에서 만나도록 하는 조건을 구할 수 있는가?

두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되려면

방정식 $2x^2-1=x^3-x^2+k$

즉, $-x^3+3x^2-1=k$ $\cdots$ ㉠

이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면

곡선 $y=-x^3+3x^2-1$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=-x^3+3x^2-1$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

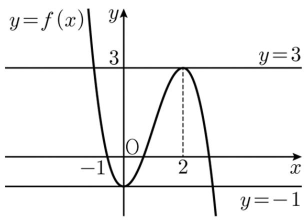
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $f(0)=-1$을 갖고, $x=2$에서 극댓값 $f(2)=3$을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 양수 k의 값은 3이다.

55 정답 ①

해설 주어진 조건을 이용하여 분수꼴로 나타낸 수열의 합을 구할 수 있는가?

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$에서

$n=1$일 때

$\dfrac{1}{a_1}=3$이므로

$a_1=\dfrac{1}{3}$

$n\geq 2$일 때

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2n-1)a_n}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(2k-1)a_k}\\&=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}\\&=2n+1\end{aligned}$$

이므로 $(2n-1)a_n=\dfrac{1}{2n+1}$에서

$a_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

이때 $n=1$일 때, $a_1=\dfrac{1}{3}$이므로

$a_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\ (n\geq 1)$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\sum_{n=1}^{10}a_n\\&=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{20}{21}=\frac{10}{21}\end{aligned}$$

56 정답 ②

해설 정적분을 이용하여 곡선과 좌표축으로 둘러싸인 두 영역의 넓이를 구할 수 있는가?

$f(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$이므로

두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(2,0)$, $(3,0)$이다.

이때 (A의 넓이)$=\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$,

(B의 넓이)$=\displaystyle\int_2^3\{-f(x)\}dx$이므로

(A의 넓이)$-$(B의 넓이)

$$\begin{aligned}&=\int_0^2 f(x)dx-\int_2^3\{-f(x)\}dx\\&=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx\\&=\int_0^3 f(x)dx=3\end{aligned}$$

이어야 한다.

이때

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(x)dx&=k\int_0^3(x^3-5x^2+6x)dx\\&=k\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^3\\&=k\left(\frac{81}{4}-45+27\right)=\frac{9}{4}k\end{aligned}$$

이므로 $\dfrac{9}{4}k=3$

$\therefore\ k=\dfrac{4}{3}$

57 정답 ③

해설 도함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

점 P의 좌표를 (s, s^2)이라 하면 점 P에서 곡선 $y=x^2$에 접하는 직선이 기울기가 $2t$가 되어야 한다.

$f(x)=x^2$이라 하면

$f'(x)=2x$이므로

$2s=2t$에서 $s=t$, 즉 $\mathrm{P}(t, t^2)$

이때 직선 OP의 방정식은 $y=tx$이므로

$tx=2tx-1$에서 $x=\dfrac{1}{t}$

즉, 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t}, 1\right)$

$$\therefore \lim_{t\to1-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}=\lim_{t\to1-}\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-t\right)^2+(1-t^2)^2}}{1-t}$$
$$=\lim_{t\to1-}\frac{(1-t^2)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}{1-t}$$
$$=\lim_{t\to1-}(1+t)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}$$
$$=2\sqrt{2}$$

58 정답 ⑤

해설 등차수열의 정의와 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 등차수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d\neq0)$이라 하자.

$b_n=a_n+a_{n+1}$이므로

$b_{n+1}-b_n=(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})$
$=a_{n+2}-a_n=2d$

수열 $\{b_n\}$은 공차가 $2d$인 등차수열이다.

(i) $d>0$일 때

$a_1=a_2-d=-4-d<0$

$a_2=-4<0$이므로

$b_1=a_1+a_2=-8-d<a_1$

$n(A\cap B)=3$이려면

$b_2=a_1$ 또는 $b_3=a_1$이어야 한다.

(a) $b_2=a_1$일 때

$b_3=a_3$, $b_4=a_5$이므로

$n(A\cap B)=3$

또, $b_2=b_1+2d=-8+d$이므로

$b_2=a_1$에서 $-8+d=-4-d$

$2d=4$, $d=2$

$\therefore a_{20}=a_2+18d=-4+18\cdot2=32$

(b) $b_3=a_1$일 때

$b_4=a_3$, $b_5=a_5$이므로

$n(A\cap B)=3$

또, $b_3=b_1+4d=-8+3d$이므로

$b_3=a_1$에서 $-8+3d=-4-d$

$4d=4$, $d=1$

$\therefore a_{20}=a_2+18d=-4+18\cdot1=14$

(ii) $d<0$일 때

(a) $a_1>0$이면 $a_2<b_1<a_1$이므로

$n(A\cap B)=0$

(b) $a_1=0$이면 $b_1=a_2$, $b_2=a_4$이므로

$n(A\cap B)=2$

(c) $a_1<0$이면 $b_1<a_2$이므로

$n(A\cap B)\leq2$

(a), (b), (c)에서 $d<0$이면 주어진 조건을 만족하지 못한다.

(i), (ii)에서 $a_{20}=32$ 또는 $a_{20}=14$

따라서 a_{20}의 값의 합은

$32+14=46$

59 정답 ①

해설 사인법칙, 코사인법칙과 삼각형의 넓이를 이용하여 조건을 만족시키는 사각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

$\angle BCD=\alpha$, $\angle DAB=\beta$ $\left(\frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$,

$\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$라 하자.

삼각형 BCD에서

$\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=2$, $\cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3}$이므로

코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=9+4-2\cdot3\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=17$

따라서 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$a^2+b^2-2ab\cos\beta=17$ … ㉠

또, 점 E가 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이므로 두 삼각형 AP_1P_2, CQ_1Q_2의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, $2r$로 놓을 수 있다.

이때 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{P_1P_2}}{\sin\beta}=r$, $\frac{\overline{Q_1Q_2}}{\sin\alpha}=2r$이므로

$$\sin\alpha:\sin\beta=\frac{\overline{Q_1Q_2}}{2r}:\frac{\overline{P_1P_2}}{r}=\frac{5\sqrt{2}}{2}:3$$

즉, $\sin\beta=\frac{6\sin\alpha}{5\sqrt{2}}$

이때 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이므로

$\sin\beta=\frac{6}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4}{5}$

$\cos\beta<0$이므로

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

삼각형 ABD의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2}ab\sin\beta=2$에서

$\frac{1}{2}ab\cdot\frac{4}{5}=2$, $ab=5$

㉠에서 $a^2+b^2-2\cdot5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=17$

$a^2+b^2=11$

따라서

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=11+2\cdot5=21$이므로

$a+b=\sqrt{21}$

60 정답 ③

해설 정적분을 활용하여 위치의 변화량의 최댓값을 구할 수 있는가?

$a\neq0$, $a\neq\frac{1}{2}$, $a\neq1$이면 점 P는 출발 후 운동 방향을 세 번 바꾼다.

따라서 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $a=0$일 때

$v(t)=-t^3(t-1)$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=1$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

따라서 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t^3(t-1)dt=\int_0^2(-t^4+t^3)dt=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{4}t^4\right]_0^2=-\frac{32}{5}+4=-\frac{12}{5}$$

(ii) $a=\frac{1}{2}$일 때

$v(t)=-t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=\frac{1}{2}$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

따라서 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2dt$$
$$=\int_0^2-\left(t^2-\frac{1}{2}t\right)(t^2-2t+1)dt$$
$$=\int_0^2\left(-t^4+\frac{5}{2}t^3-2t^2+\frac{1}{2}t\right)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{5}{8}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t^2\right]_0^2$$
$$=-\frac{32}{5}+10-\frac{16}{3}+1$$
$$=-\frac{32}{5}-\frac{16}{3}+11$$
$$=\frac{(-96)+(-80)+165}{15}=-\frac{11}{15}$$

(iii) $a=1$일 때

$v(t)=-t(t-1)^2(t-2)$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=2$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

따라서 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)dt$$
$$=\int_0^2 -t(t^2-2t+1)(t-2)dt$$
$$=\int_0^2(-t^4+4t^3-5t^2+2t)dt$$

$=\left[-\frac{1}{5}t^5+t^4-\frac{5}{3}t^3+t^2\right]_0^2$

$=-\frac{32}{5}+16-\frac{40}{3}+4$

$=-\frac{32}{5}-\frac{40}{3}+20$

$=\frac{(-96)+(-200)+300}{15}=\frac{4}{15}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은 $\frac{4}{15}$이다.

61 정답 ②

해설 귀납적으로 정의된 수열을 이해하고 주어진 조건을 만족시키는 수열의 항을 구할 수 있는가?

$a_3a_4a_5a_6<0$이므로 a_3, a_4, a_5, a_6은 어느 것도 0이 될 수 없다.

$a_1=k>0$이므로

$a_2=a_1-2-k=-2<0$

$a_3=a_2+4-k=2-k$

(ⅰ) $a_3=2-k>0$인 경우

$2-k>0$에서 $k<2$, 즉 $k=1$이므로

$a_4=a_3-6-k=-6<0$

$a_5=a_4+8-k=1>0$

$a_6=a_5-10-k=-10<0$

따라서 $a_3a_4a_5a_6>0$이므로

주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅱ) $a_3=2-k<0$인 경우

즉, $k>2$이므로

$a_4=a_3+6-k=8-2k$

(a) $a_4=8-2k>0$인 경우

즉, $k<4$이므로 $2<k<4$에서 $k=3$일 때

$a_4=8-6=2$

$a_5=a_4-8-k=-9<0$

$a_6=a_5+10-k=-2<0$

따라서 $a_3a_4a_5a_6<0$이므로

주어진 조건을 만족시킨다.

(b) $a_4=8-2k<0$인 경우

즉, $k>4$이므로

$a_5=a_4+8-k=16-3k$

(ㄱ) $a_5=16-3k>0$인 경우

즉, $k<\frac{16}{3}$에서 $4<k<\frac{16}{3}$이므로

$k=5$

$a_5=16-15=1$

$a_6=a_5-10-k=-14<0$

따라서 $a_3a_4a_5a_6<0$이므로

주어진 조건을 만족시킨다.

(ㄴ) $a_5=16-3k<0$인 경우

즉, $k>\frac{16}{3}$이므로 $k\geq 6$인 경우이다.

이때 $a_6=a_5+10-k=26-4k$이고

$a_3a_4a_5a_6<0$이기 위해서는

$a_6>0$이어야 하므로

$a_6=26-4k>0$

$\therefore k<\frac{13}{2}$

즉, $6\leq k<\frac{13}{2}$에서 $k=6$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 k의 값의 합은

$3+5+6=14$

62 정답 3

해설 지수부등식을 만족시키는 자연수의 합을 구할 수 있는가?

$\left(\frac{1}{4}\right)^x=(2^{-2})^x=2^{-2x}$이므로 주어진 부등식은

$2^{x-6}\leq 2^{-2x}$

양변의 밑 2가 1보다 크므로

$x-6\leq -2x$

$3x\leq 6$

$\therefore\ x\leq 2$

따라서 모든 자연수 x의 값의 합은

$1+2=3$

63 정답 33

해설 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int (8x^3-1)dx$

$=2x^4-x+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서 $f(x)=2x^4-x+3$이므로

$f(2)=32-2+3=33$

64 정답 6

해설 도함수를 활용하여 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -2를 가지므로

$f(1)=-2$에서 $a+b+a=-2$

$2a+b=-2$ $\cdots$ ㉠

또, $f'(x)=3ax^2+b$이고 $f'(1)=0$이어야 하므로

$3a+b=0$ $\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$a=2,\ b=-6$

따라서 $f(x)=2x^3-6x+2$이고

$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

이때 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-2	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 6을 갖는다.

65 정답 8

해설 사인함수의 최댓값, 최솟값 및 주기를 이해하고, 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

함수 $f(x)$의 최솟값이 $-a+8-a=8-2a$이므로

조건 (가)를 만족시키려면 $8-2a\geq 0$

즉, $a\leq 4$이어야 한다.

$a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$일 때는 함수 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크므로 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.

$\therefore\ a=4$

이때 $f(x)=4\sin bx+4$이고

이 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이므로

$0\leq x\leq\frac{2\pi}{b}$일 때

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

따라서 $0\leq x<2\pi$일 때, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되려면

$\frac{15\pi}{2b}<2\pi\leq\frac{19\pi}{2b}$이어야 한다.

즉, $\frac{15}{4}<b\leq\frac{19}{4}$이고 b는 자연수이므로

$b=4$

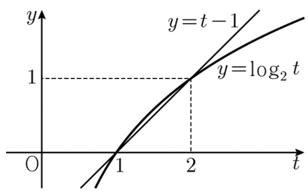
$\therefore\ a+b=8$

66 정답 39

해설 정적분의 성질을 활용하여 함숫값을 구할 수 있는가?
최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라 하면
$F'(x)=f(x)$이고
$g(x)=\int_0^x f(t)dt=F(x)-F(0)$이므로
$g'(x)=f(x)$
따라서 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수이다.
조건에서 $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x) \geq g(4)$이므로 삼차함수 $g(x)$는 구간 $[1, \infty)$에서 $x=4$일 때 최소이자 극소이다. … ㉠
즉, $g'(4)=f(4)=0$이므로
$f(x)=(x-4)(x-a)$ (a는 상수) … ㉡
로 놓을 수 있다.
(ⅰ) $g(4) \geq 0$인 경우
$x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x) \geq g(4) \geq 0$이므로 이 범위에서
$|g(x)|=g(x)$
조건에서 $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
$|g(x)| \geq |g(3)|$
즉, $g(x) \geq g(3)$이어야 한다. … ㉢
이때 ㉠에서 $g(3)>g(4)$이므로 ㉢을 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $g(4)<0$인 경우
$x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
$|g(x)| \geq |g(3)|$이려면 $g(3)=0$ … ㉣
이어야 한다.
㉡에서 $f(x)=x^2-(a+4)x+4a$이므로
$F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+4}{2}x^2+4ax+C$
(단, C는 적분상수)
따라서
$g(x)=F(x)-F(0)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+4}{2}x^2+4ax$
㉣에서 $g(3)=9-\frac{9}{2}(a+4)+12a=0$
$\frac{15}{2}a=9$
$\therefore a=\frac{6}{5}$
따라서 $f(x)=(x-4)\left(x-\frac{6}{5}\right)$이므로
$f(9)=(9-4)\left(9-\frac{6}{5}\right)=5 \cdot \frac{39}{5}=39$

67 정답 110

해설 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해하고 활용할 수 있는가?
ㄱ. 곡선 $y=t-\log_2 x$는 곡선 $y=\log_2 x$를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 t만큼 평행이동한 것이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
또, 곡선 $y=2^{x-t}$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 것이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^{x-t}$은 한 점에서 만난다.
$t=1$일 때, 곡선 $y=1-\log_2 x$은 $x=1$일 때 $y=1$이므로 점 $(1, 1)$을 지난다.
또, 곡선 $y=2^{x-1}$은 $x=1$일 때 $y=1$이므로 점 $(1, 1)$을 지난다.
$\therefore f(1)=1$
$t=2$일 때, 곡선 $y=2-\log_2 x$는 $x=2$일 때, $y=1$이므로 점 $(2, 1)$을 지난다.
또, 곡선 $y=2^{x-2}$은 $x=2$일 때, $y=1$이므로 점 $(2, 1)$을 지난다.
$\therefore f(2)=2$
따라서 이 명제가 참이므로
$A=100$
ㄴ. 곡선 $y=t-\log_2 x$는 곡선 $y=-\log_2 x$를 y축의 방향으로 t만큼 평행이동한 것이다.
이때 t의 값이 증가하면 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^x$의 교점의 x좌표는 증가한다.
이때 곡선 $y=2^{x-t}$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 것이므로
t의 값이 증가하면 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^{x-t}$의 교점의 x좌표는 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^x$의 교점의 x좌표보다 커진다.
따라서 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.
즉, 이 명제가 참이므로
$B=10$
ㄷ. $g(x)=t-\log_2 x$, $h(x)=2^{x-t}$이라 하면
함수 $y=g(x)$는 감소함수이고, 함수 $y=h(x)$는 증가함수이므로 $f(t) \geq t$이기 위해서는
$g(t) \geq h(t)$이어야 한다.
즉, $t-\log_2 t \geq 2^{t-t}$
$t-1 \geq \log_2 t$ … ㉠
이때 두 함수 $y=\log_2 t$, $y=t-1$의 그래프는 두 점 $(1, 0)$, $(2, 1)$에서 만나고 다음 그림과 같다.



위에서 $1<t<2$일 때는 함수 $y=\log_2 t$의 그래프가 직선 $y=t-1$보다 위쪽에 있으므로 ㉠을 만족시키지 못한다.
즉, $1<t<2$일 때는 부등식 $f(t) \geq t$를 만족시키지 못한다.
이 명제가 거짓이므로 $C=0$

따라서 $A=100$, $B=10$, $C=0$이므로
$A+B+C=110$

68 정답 380

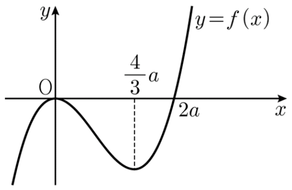
해설 도함수를 활용하고 함수의 극대, 극소를 고려하여 조건을 만족시키는 삼차함수를 찾아 미분계수를 구할 수 있는가?

주어진 조건을 만족시키려면 열린구간 $\left(k,\ k+\dfrac{3}{2}\right)$에 두 점 $(x_1,\ f(x_1))$, $(x_2,\ f(x_2))$를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(x_2,\ f(x_2))$, $(x_3,\ f(x_3))$을 지나는 직선의 기울기의 부호가 다른 세 실수 x_1, x_2, x_3이 존재해야 하므로

극대 또는 극소가 되는 점이 구간 $\left(k,\ k+\dfrac{3}{2}\right)$에 존재해야 한다.

이때 $f(x)=x^3-2ax^2$에서
$f'(x)=3x^2-4ax$이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 a의 값의 범위에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $a>0$일 때



$k=-1$일 때 $x=0$이 구간 $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$에 존재하므로 조건을 만족시킨다.

또, $x=\dfrac{4}{3}a$가 구간 $\left(k,\ k+\dfrac{3}{2}\right)$에 존재하려면

$k<\dfrac{4}{3}a<k+\dfrac{3}{2}$이므로

$\dfrac{4}{3}a-\dfrac{3}{2}<k<\dfrac{4}{3}a$이어야 한다.

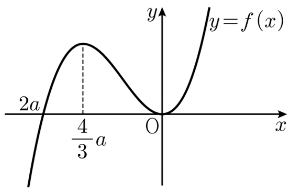
이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되려면 이 구간에 $k=3$, $k=4$가 존재해야 하므로

$\dfrac{4}{3}a-\dfrac{3}{2}<3$, $\dfrac{4}{3}a>4$

$3<a<\dfrac{27}{8}$

이때 이 부등식을 만족시키는 정수 a는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a<0$일 때



$k=-1$일 때 $x=0$이 구간 $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$에 존재하므로 조건을 만족시킨다.

또, $x=\dfrac{4}{3}a$가 구간 $\left(k,\ k+\dfrac{3}{2}\right)$에 존재하려면

$k<\dfrac{4}{3}a<k+\dfrac{3}{2}$이므로

$\dfrac{4}{3}a-\dfrac{3}{2}<k<\dfrac{4}{3}a$이어야 한다.

이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되려면 이 구간에 $k=-4$, $k=-3$이 존재해야 하므로

$\dfrac{4}{3}a-\dfrac{3}{2}<-4$, $\dfrac{4}{3}a>-3$

$-\dfrac{9}{4}<a<-\dfrac{15}{8}$

$\therefore\ a=-2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=-2$이므로
$f(x)=x^3+4x^2$
$f'(x)=3x^2+8x$
$\therefore\ f'(10)=3\cdot 10^2+8\cdot 10=380$

69 정답 ③

해설 같은 것이 있는 순열의 수를 구할 수 있는가?

구하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!}=5\cdot4\cdot3=60$$

70 정답 ④

해설 주어진 조건을 만족시키는 두 사건에 대하여 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=1-\mathrm{P}(B^C)\\&=1-\frac{7}{18}\\&=\frac{11}{18}\end{aligned}$$

따라서 두 사건 $A\cap B^C$과 B는 서로소이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(B)\\&=\frac{1}{9}+\frac{11}{18}\\&=\frac{13}{18}\end{aligned}$$

71 정답 ③

해설 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

흰색 손수건이 2장 이상인 사건을 A라 하면 A^C은 흰색 손수건이 없거나 1장인 사건이다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C)&=\frac{{}_4\mathrm{C}_0\cdot{}_5\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}+\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_4}\\&=\frac{1\cdot5}{126}+\frac{4\cdot10}{126}\\&=\frac{5}{14}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(A)&=1-\mathrm{P}(A^C)\\&=1-\frac{5}{14}\\&=\frac{9}{14}\end{aligned}$$

72 정답 ①

해설 이항정리를 이용하여 다항식의 계수를 구할 수 있는가?

$(x-1)^6(2x+1)^7$의 전개식에서 x^2의 계수는 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(i) $(x-1)^6$의 전개식에서 x^2항은

$${}_6\mathrm{C}_2\cdot x^2\cdot(-1)^4=15x^2$$

$(2x+1)^7$의 전개식에서 상수항은

$$1^7=1$$

(ii) $(x-1)^6$의 전개식에서 x항은

$${}_6\mathrm{C}_1\cdot x\cdot(-1)^5=-6x$$

$(2x+1)^7$의 전개식에서 x항은

$${}_7\mathrm{C}_1\cdot(2x)\cdot1^6=14x$$

(iii) $(x-1)^6$의 전개식에서 상수항은

$$(-1)^6=1$$

$(2x+1)^7$의 전개식에서 x^2항은

$${}_7\mathrm{C}_2\cdot(2x)^2\cdot1^5=84x^2$$

(i), (ii), (iii)에서 $(x-1)^6(2x+1)^7$의 전개식에서 x^2의 계수는

$$\begin{aligned}&15x^2\cdot1+(-6x)\cdot14x+1\cdot84x^2\\&=15x^2-84x^2+84x^2\\&=15x^2\end{aligned}$$

따라서 x^2의 계수는 15이다.

73 정답 ②

해설 독립시행의 확률을 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 ab가 4의 배수인 사건을 A, $a+b \leq 7$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

(i) a, b가 모두 짝수일 확률은

$$ {}_2\mathrm{C}_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} $$

(ii) a, b 중 하나는 4이고 다른 하나는 홀수일 확률은

$$ {}_2\mathrm{C}_1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} $$

(i), (ii)에서

$$ \mathrm{P}(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} $$

한편, 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는

$6 \cdot 6 = 36$

(iii) a, b가 모두 짝수인 동시에 $a+b \leq 7$인 순서쌍 (a, b)는 $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$의 3개이다.

(vi) a, b 중 하나는 4이고 다른 하나는 홀수인 동시에 $a+b \leq 7$인 순서쌍 (a, b)는 $(4, 1)$, $(4, 3)$, $(1, 4)$, $(3, 4)$의 4개이다.

(iii), (iv)에서

$$ \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{3+4}{36} = \frac{7}{36} $$

따라서 구하는 확률은

$$ \mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{7}{36}}{\frac{5}{12}} = \frac{7}{15} $$

74 정답 ⑤

해설 중복순열을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있는가?

조건 (가)에서 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값은 모두 홀수이다.

(i) 함수 f의 치역에 홀수가 1개 포함된 경우

홀수를 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1 = 3$

이때 $f(2) = 2$, $f(4) = 4$이므로

구하는 함수 f의 개수는 3이다.

(ii) 함수 f의 치역에 홀수가 2개 포함된 경우

홀수를 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2 = 3$

(a) 집합 $\{f(1), f(3), f(5)\}$의 원소의 개수가 1이면 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2이다.

또, $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 2이다.

(b) 집합 $\{f(1), f(3), f(5)\}$의 원소의 개수가 2이면 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_3 - 2 = 6$

또, $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2 \cdot 2 = 4$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$3 \cdot (2 \cdot 2 + 6 \cdot 4) = 84$

(iii) 함수 f의 치역에 홀수가 3개 포함된 경우

홀수를 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_3 = 1$

(a) 집합 $\{f(1), f(3), f(5)\}$의 원소의 개수가 1이면

$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 3이다.

또, $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 1이다.

(b) 집합 $\{f(1), f(3), f(5)\}$의 원소의 개수가 2이면

$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2 \cdot ({}_2\Pi_3 - 2) = 18$

또, $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 2이다.

(c) 집합 $\{f(1), f(3), f(5)\}$의 원소의 개수가 3이면

$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3! = 6$

또, $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2 = 3$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$1 \cdot (3 \cdot 1 + 18 \cdot 2 + 6 \cdot 3) = 57$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$3 + 84 + 57 = 144$

75 정답 25

해설 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

검은색 카드의 왼쪽에 있는 흰색 카드의 장수를 a,
두 검은색 카드의 사이에 있는 흰색 카드의 장수를 b,
검은색 카드의 오른쪽에 있는 흰색 카드의 장수를 c라 하면
$a+b+c=8$
조건 (나)와 조건 (다)에서
$b \geq 2$이고, 검은색 카드 사이의 흰색 카드에 적힌 수가 모두 3의 배수가 아닌 경우를 제외해야 한다.
음이 아닌 정수 b'에 대하여
$b=b'+2$로 놓으면
$a+(b'+2)+c=8$
$a+b'+c=6$
방정식 $a+b'+c=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b', c의 모든 순서쌍 $(a,\ b',\ c)$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=28$
이때 검은색 카드 사이의 흰색 카드에 적힌 수가 1, 2인 경우, 4, 5인 경우, 7, 8인 경우를 제외해야 한다.
따라서 구하는 경우의 수는
$28-3=25$

76 정답 51

해설 경우의 수를 이용하여 수학적 확률을 구할 수 있는가?

(ⅰ) 꺼낸 두 공이 서로 다른 색인 경우
얻는 점수가 12이므로 조건을 만족시킨다.
이 경우의 확률은
$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_4\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{16}{28}=\frac{4}{7}$$
(ⅱ) 꺼낸 두 공이 서로 같은 색인 경우
8개의 공 중에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는
${}_8\mathrm{C}_2=28$
(a) 꺼낸 두 공의 색이 모두 흰색인 경우
두 공에 적힌 수의 곱이 짝수이면 조건을 만족시키므로 이 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_2-{}_2\mathrm{C}_2=6-1=5$
(b) 꺼낸 두 공이 모두 검은색인 경우
두 공에 적힌 수의 집합이 $\{4,\ 5\}$, $\{4,\ 6\}$이어야 하므로 이 경우의 수는 2이다.
그러므로 꺼낸 두 공이 서로 같은 색이고 얻은 점수가 24 이하의 짝수일 확률은
$$\frac{5+2}{28}=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\frac{4}{7}+\frac{1}{4}=\frac{23}{28}$이므로
$p+q=28+23=51$

77 정답 ⑤

해설 수열의 극한값을 구할 수 있는가?
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{\left(\sqrt{n^2+9n}+\sqrt{n^2+4n}\right)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\left(\sqrt{1+\frac{9}{n}}+\sqrt{1+\frac{4}{n}}\right)}$$
$$=\frac{5}{2}$$

78 정답 ④

해설 매개변수로 나타내어진 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?
$$\frac{dx}{dt}=\frac{5(t^2+1)-5t\cdot 2t}{(t^2+1)^2}$$
$$=\frac{-5t^2+5}{(t^2+1)^2}$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{3}{t^2+1}\cdot 2t$$
$$=\frac{6t}{t^2+1}$$
이때 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$이므로
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{6t}{t^2+1}}{\frac{-5t^2+5}{(t^2+1)^2}}$$
$$=\frac{6t(t^2+1)}{-5t^2+5}$$
따라서 $t=2$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은
$$\frac{6\cdot 2\cdot(2^2+1)}{-5\cdot 2^2+5}=\frac{60}{-15}=-4$$

79 정답 ①

해설 지수함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$에서

$x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

이때 함수 $y=2^{ax+b}-8$은 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}(2^{ax+b}-8)=2^b-8=0,\ 2^b=8$

$\therefore\ b=3$

따라서 주어진 식에 $b=3$을 대입하여 정리하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+3}-8}{2^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{8(2^{ax}-1)}{2^{3x}-1}$$

$$=\frac{8a}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^{ax}-1}{ax}}{\frac{2^{3x}-1}{3x}}$$

$$=\frac{8a}{3}\cdot\frac{\ln 2}{\ln 2}=\frac{8a}{3}$$

따라서 $\frac{8a}{3}=16$에서

$a=6$

$\therefore\ a+b=6+3=9$

80 정답 ②

해설 미분법을 이용하여 방정식이 서로 다른 실근의 개수가 2일 조건을 구할 수 있는가?

$x^2-5x+2\ln x=t$에서

$f(x)=x^2-5x+2\ln x$라 하면

$$f'(x)=2x-5+\frac{2}{x}$$

$$=\frac{2x^2-5x+2}{x}$$

$$=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}$$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)		$\frac{1}{2}$		2	
$f'(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

이때 함수 $f(x)$의 극댓값은

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-5\cdot\frac{1}{2}+2\ln\frac{1}{2}$$

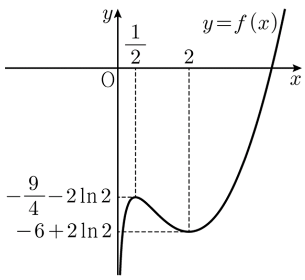
$$=-\frac{9}{4}-2\ln 2$$

극솟값은

$$f(2)=2^2-5\cdot 2+2\ln 2$$

$$=-6+2\ln 2$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 2가 되어야 하므로

$t=-\frac{9}{4}-2\ln 2$ 또는 $t=-6+2\ln 2$

따라서 모든 실수 t의 값의 합은

$$\left(-\frac{9}{4}-2\ln 2\right)+(-6+2\ln 2)=-\frac{33}{4}$$

81 정답 ③

해설 두 직선이 이루는 예각의 크기를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$y=\sin x$에서 $y'=\cos x$이므로 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$에서의 접선의 기울기는 $\cos t$이다.

따라서 점 P에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기가 θ이므로

$$\tan\theta=\left|\frac{\cos t-(-1)}{1+\cos t\cdot(-1)}\right|=\left|\frac{\cos t+1}{1-\cos t}\right|$$

이때 $0<t<\pi$이므로

$$\tan\theta=\frac{\cos t+1}{1-\cos t}$$

$$\therefore \lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}=\lim_{t\to\pi-}\frac{\frac{\cos t+1}{1-\cos t}}{(\pi-t)^2}=\lim_{t\to\pi-}\frac{\cos t+1}{(\pi-t)^2(1-\cos t)}$$

이때 $\pi-t=x$라 하면 $t\to\ \pi-$일 때 $x\to0+$이고

$\cos t=\cos(\pi-x)=-\cos x$이므로

$$\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}=\lim_{t\to\pi-}\frac{\cos t+1}{(\pi-t)^2(1-\cos t)}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)^2}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)^2}$$
$$=\lim_{x\to0+}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{(1+\cos x)^2}\right\}$$
$$=1^2\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$$

82 정답 ②

해설 함수의 그래프의 개형을 이용하여 $a,\ b$에 대한 관계식을 구한 후, 상수 $a,\ b$의 값을 구할 수 있는가?

조건 (가)에서 양변에 $x=0$을 대입하면

$\{f(0)\}^2+2f(0)=a+b$ … ㉠

또, 양변에 $x=2$를 대입하면

$\{f(2)\}^2+2f(2)=a+b$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$\{f(0)\}^2+2f(0)=\{f(2)\}^2+2f(2)$

$\{f(2)-f(0)\}\{f(2)+f(0)+2\}=0$

$\therefore\ f(2)=f(0)$ 또는 $f(2)+f(0)+2=0$

이때 $f(2)=f(0)$이면 조건 (나)를 만족시키지 못하므로

$f(2)+f(0)+2=0$ … ㉢

조건 (나)에서 $f(0)=f(2)+1$을 ㉢에 대입하면

$2f(2)+3=0$

$f(2)=-\dfrac{3}{2}$

또, 조건 (나)에서

$f(0)=f(2)+1=-\dfrac{3}{2}+1=-\dfrac{1}{2}$

$f(0)=-\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a+b$

$a+b=-\dfrac{3}{4}$ … ㉣

한편, 조건 (가)에서 양변에 1을 더하면

$\{f(x)\}^2+2f(x)+1=a\cos^3\pi x\cdot e^{\sin^2\pi x}+b+1$

$\{f(x)+1\}^2=a\cos^3\pi x\cdot e^{\sin^2\pi x}+b+1$

이때 $g(x)=a\cos^3\pi x\cdot e^{\sin^2\pi x}+b+1$이라 하면

$\{f(x)+1\}^2=g(x)$ … ㉤

에서 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge0$이므로

$f(x)=-1\pm\sqrt{g(x)}$

이때 $f(0)=-\dfrac{1}{2}>-1,\ f(2)=-\dfrac{3}{2}<-1$이고

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(c)=-1$인 상수 c가 열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(c)=-1\pm\sqrt{g(c)}=-1$에서

$g(c)=0$

이때 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=c\ (0<c<2)$에서 극소이다.

$g'(x)$

$=3a\cos^2\pi x\cdot(-\pi\sin\pi x)\cdot e^{\sin^2\pi x}$

$\quad+a\cos^3\pi x\cdot\sin\pi x\cdot e^{\sin^2\pi x}\cdot(-3+2\cos^2\pi x)$

$=a\pi\cos^2\pi x\cdot\sin\pi x\cdot e^{\sin^2\pi x}\cdot(-3+2\cos^2\pi x)$

열린구간 $(0,\ 2)$에서

$\cos^2\pi x\ge0,\ e^{\sin^2\pi x}>0,\ -3+2\cos^2\pi x<0$이고,

$\sin\pi x=0$에서

$x=1$

이때 $a>0$이므로 열린구간 $(0,\ 2)$에서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서만 극소이다.

따라서 $c=1$이므로

$g(1)=0$

이때 ㉤의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\{f(1)+1\}^2=g(1)$에서

$\{f(1)+1\}^2=0$

$\therefore\ f(1)=-1$

이때 조건 (가)에서 양변에 $x=1$을 대입하면

$\{f(1)\}^2+2f(1)=-a+b$

$(-1)^2+2\cdot(-1)=-a+b$

$-a+b=-1$ … ㉥

㉣, ㉥을 연립하면

$a=\dfrac{1}{8},\ b=-\dfrac{7}{8}$

$\therefore\ ab=\dfrac{1}{8}\cdot\left(-\dfrac{7}{8}\right)=-\dfrac{7}{64}$

83 정답 5

해설 음함수의 미분법을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

곡선 $x^2-2xy+2y^2=15$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-2y-2x\frac{dy}{dx}+4y\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x-2y}$ (단, $x\neq 2y$)

점 $\mathrm{A}(a,\ a+k)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{a-(a+k)}{a-2(a+k)}=\frac{k}{a+2k}$

점 $\mathrm{B}(b,\ b+k)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{b-(b+k)}{b-2(b+k)}=\frac{k}{b+2k}$

두 점 A, B에서의 접선이 서로 수직이므로

$\frac{k}{a+2k}\cdot\frac{k}{b+2k}=-1$

$ab+2(a+b)k+5k^2=0$ ⋯ ㉠

점 A가

곡선 $x^2-2xy+2y^2=15$, 즉 $(x-y)^2+y^2=15$ 위의 점이므로

$k^2+(a+k)^2=15$ ⋯ ㉡

점 B가 곡선 $x^2-2xy+2y^2=15$, 즉 $(x-y)^2+y^2=15$ 위의 점이므로

$k^2+(b+k)^2=15$ ⋯ ㉢

㉡, ㉢에서

$(a+k)^2=(b+k)^2$

$(a-b)(a+b+2k)=0$

이때 $a\neq b$이므로

$a+b=-2k$ ⋯ ㉣

㉣을 ㉠에 대입하면

$ab-4k^2+5k^2=0$

$\therefore\ k^2=-ab$ ⋯ ㉤

㉡에서

$2k^2+2ak+a^2=15$

㉣, ㉤을 위 식에 대입하면

$-2ab+a(-a-b)+a^2=15$

$\therefore\ ab=-5$

따라서 $k^2=-ab$이므로

$k^2=-(-5)=5$

84 정답 24

해설 조건을 만족시키는 급수의 합을 구할 수 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을 $a_n=a_1r^{n-1}$이라 하자.

이때 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $a_1\neq 0$이다.

(i) $r>1$인경우

a_n의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ii) $r=1$인 경우

a_n의 값이 일정한 값을 가지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(iii) $r=-1$인 경우

a_n의 값이 $a_1,\ -a_1,\ a_1,\ -a_1,\ a_1,\ \cdots$이 반복되므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(iv) $r<-1$인 경우

a_n의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(v) $r=0$인 경우

a_n의 값이 첫째항을 제외하고 모두 0이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

따라서 $-1<r<0$ 또는 $0<r<1$이다.

이때 $b_3=-1$이므로 $a_3\leq -1$이다.

즉, $a_1r^2\leq -1$

이때 $0<r^2<1$이므로

$a_1\leq -1$

$\therefore\ b_1=-1$

또, $a_1\leq -1$이므로 $0<r<1$이면 a_n의 모든 항은 음수이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

$\therefore\ -1<r<0$

(a) $a_2=a_1r\leq -1$일 때

$r\geq -\frac{1}{a_1}>0$이므로 모순이다.

따라서 $a_2=a_1r>-1$이므로

$b_2=a_2=a_1r$

(b) $b_3=-1$이므로

$a_3=a_1r^2\leq -1$

(c) $a_4=a_1r^3\leq -1$일 때

$a_4=a_1r^3=a_1r^2\cdot r\geq -r>0$이므로 모순이다.

즉, $a_4>-1$이므로

$b_4=a_4=a_1r^3$

(d) $a_5=a_1r^4\leq -1$일 때

$b_5=-1$이고 $b_1+b_3+b_5=-3$이므로 조건 (가)에 의하여 모순이다.

$b_5=a_5=a_1r^4$

(e) $a_6=a_4r^2$이고 $a_4>-1$이므로

$a_6>-r^2>-1$

$\therefore\ b_6=a_6=a_1r^5$

같은 방법으로 생각하면

$b_7=a_7,\ b_8=a_8,\ b_9=a_9,\ \cdots$이므로

$b_n=\begin{cases}-1 & (n=1,\ n=3)\\ a_1r^{n-1} & (n=2,\ n\geq 4)\end{cases}$

따라서 조건 (가)에서

$\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n-1}=-1+(-1)+a_1r^4+a_1r^6+a_1r^8+\cdots$

$=-2+\frac{a_1r^4}{1-r^2}=-3$

$\frac{a_1r^4}{1-r^2}=-1$

$\therefore\ a_1r^4=r^2-1$ ⋯ ㉠

또, 조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = a_1r + a_1r^3 + a_1r^5 + \cdots$$
$$= \frac{a_1r}{1-r^2} = 8$$

$a_1r = 8 - 8r^2 = 8(1-r^2)$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a_1r = -8a_1r^4$이므로

$r^3 = -\frac{1}{8}$

즉, $r = -\frac{1}{2}$이므로 ㉡에 대입하면

$-\frac{1}{2}a_1 = 6$

$\therefore a_1 = -12$

따라서 $a_n = -12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| -12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right|$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{12}{1-\frac{1}{2}} = 24$$

85 정답 ①

해설 포물선의 방정식으로부터 포물선의 준선을 구할 수 있는가?

포물선 $y^2 = -12x$의 준선의 방정식은

$x = 3$

포물선 $y^2 = -12(x-1)$은 포물선 $y^2 = -12x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 곡선이므로 포물선 $y^2 = -12(x-1)$의 준선은 직선 $x = 3$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선이다.

$\therefore k = 3 + 1 = 4$

86 정답 ④

해설 벡터의 연산을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

$2\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{BC} = q\overrightarrow{CA}$에서

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$이므로

$2\overrightarrow{AB} + p(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -q\overrightarrow{AC}$

$(2-p)\overrightarrow{AB} = -(p+q)\overrightarrow{AC}$

이때 A, B, C가 서로 다른 세 점이므로

$\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$

이때 A, B, C가 한 직선 위에 있지 않으므로

$2 - p = -(p+q) = 0$

따라서 $p = 2$, $q = -2$이므로

$p - q = 4$

87 정답 ②

해설 벡터의 내적을 이용하여 주어진 등식을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$이고 정사각형 ABCD에서

$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$이므로

$\overrightarrow{AC} + 3k\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + 3k(-\overrightarrow{AB})$
$= (1-3k)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\therefore (\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AC} + 3k\overrightarrow{CD})$
$= (\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}) \cdot \{(1-3k)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\}$
$= (1-3k)|\overrightarrow{AB}|^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
$+ (k-3k^2)\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + k|\overrightarrow{BC}|^2$

이때 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 1$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$이므로

$(\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AC} + 3k\overrightarrow{CD})$
$= (1-3k) + 0 + 0 + k = 1 - 2k$

따라서 $1 - 2k = 0$이므로

$k = \frac{1}{2}$

88 정답 ④

해설 타원의 초점과 장축의 길이를 이용하여 조건을 만족시키는 타원의 방정식을 구할 수 있는가?

타원 C의 장축의 길이가 24이고

$\overline{F'P} = \overline{F'F} = 12 - (-4) = 16$이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{FP} + \overline{F'P} = \overline{FP} + 16 = 24$

$\overline{FP} = 8$

점 $F'(-4, 0)$이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$의 한 초점이고 이 타원의 중심은 원점이므로 나머지 한 초점은 $A(4, 0)$이다.

또한, 타원의 방정식에서

$a^2 - b^2 = 4^2 = 16$ $\cdots$ ㉠

점 Q는 선분 $F'P$의 중점이므로

$\overline{F'Q} = 8$

이때 $\overline{AF'} : \overline{FF'} = \overline{QF'} : \overline{PF'}$ 이므로 삼각형 $QF'A$와 삼각형 $PF'F$는 닮음비가 $1:2$인 닮은 도형이다.

즉, $\overline{QA} : \overline{PF} = 1:2$이고, $\overline{PF} = 8$이므로

$\overline{QA} = 4$

즉, $\overline{F'Q} + \overline{QA} = 8 + 4 = 12$이므로

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$의 장축의 길이는 12이다.

$2a = 12$에서 $a = 6$이므로

$a^2 = 36$

㉠에 대입하면

$b^2 = 20$

$\therefore \overline{PF} + a^2 + b^2 = 8 + 36 + 20 = 64$

89 정답 ③

해설 포물선의 정의를 이용하여 거리의 합이 최소가 되는 점을 구할 수 있고 타원의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 점의 y좌표를 구할 수 있는가?

포물선 $(y-2)^2=8(x+2)$는 포물선 $y^2=8x$를 x축으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

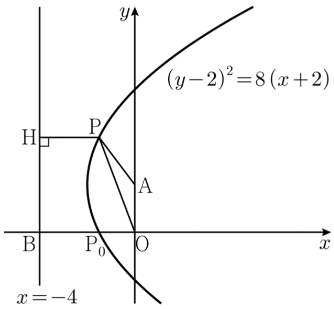
이때 포물선 $y^2=8x$의 초점이 점 $(2,\ 0)$, 준선이 직선 $x=-2$이므로 포물선 $(y-2)^2=8(x+2)$의 초점은 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, 준선은 $x=-4$이다.

점 P에서 준선 $x=-4$에 내린 수선의 발을 H, 준선이 x축과 만나는 점을 B라 하면

$$\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PH}}$$
$$\geq \overline{\mathrm{OB}}$$

이 값이 최소가 되는 점 $\mathrm{P_0}$은

포물선 $(y-2)^2=8(x+2)$와 x축이 만나는 점이다.



이때

$$\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{OP_0}}+\overline{\mathrm{P_0A}} \quad \cdots ㉠$$

에서 $\overline{\mathrm{OP_0}}+\overline{\mathrm{P_0A}}=\overline{\mathrm{OB}}=4$이므로 ㉠은

$\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{QA}}=4$

따라서 점 Q는 두 점 A, O를 초점으로 하고 거리의 합이 4인 타원 위의 점이다.

점 Q의 y좌표가 가장 큰 점은 이 타원이 y축의 양의 방향과 만나는 점이므로 이 점을 $\mathrm{Q_1}(0,\ a)$라 하면

$\overline{\mathrm{OQ_1}}+\overline{\mathrm{Q_1A}}=4$에서

$a+(a-2)=4$

$\therefore\ a=3$

또한, 점 Q의 y좌표가 가장 작은 점은 이 타원이 y축의 음의 방향과 만나는 점이므로 이 점을 $\mathrm{Q_2}(0,\ b)$라 하면

$\overline{\mathrm{OQ_2}}+\overline{\mathrm{Q_2A}}=4$에서

$(0-b)+(2-b)=4$

$\therefore\ b=-1$

따라서 $M=3$, $m=-1$이므로

$M^2+m^2=3^2+(-1)^2=10$

90 정답 ⑤

해설 벡터로 표현된 직선과 원의 방정식을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 점을 구할 수 있는가?

점 X의 좌표를 $(x,\ y)$라 하자.

조건 (가)에서

$$(\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0 \quad \cdots ㉠$$

또는 $|\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|-3=0 \quad \cdots ㉡$

㉠에서 $\overrightarrow{\mathrm{DX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$에서 $\overrightarrow{\mathrm{DX}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$이므로

점 X는 점 $\mathrm{D}(8,\ 6)$을 지나고 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(4,\ 4)$에 수직인 직선 위의 점이다.

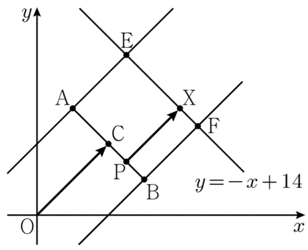
즉, 점 X는 직선 $l: y=-x+14$ 위의 점이다.

㉡에서 $|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|=3$이므로 점 X는 점 $\mathrm{C}(4,\ 4)$를 지나고 반지름의 길이가 3인 원, 즉 $(x-4)^2+(y-4)^2=9$ 위의 점이다.

조건 (나)를 만족시키는 점 X를 다음과 같이 경우를 나누어 생각해보면

(ⅰ) 점 X가 직선 l 위에 있는 경우

점 A를 지나고 직선 OC와 평행한 직선이 직선 l과 만나는 점을 E, 점 B를 지나고 직선 OC와 평행한 직선이 직선 l과 만나는 점을 F라 하자.



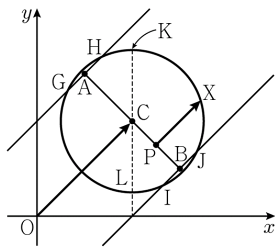
선분 EF 위의 임의의 점 X에 대하여 점 X를 지나고 직선 OC와 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 X'이라 하면 점 P가 점 X'과 일치할 때

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PX}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$는 평행하므로 조건 (나)를 만족시킨다.

직선 l 위의 점 중에서 선분 EF 위에 있지 않은 점 X에 대하여는 선분 AB 위의 임의의 점 P에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PX}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$가 평행할 수 없으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, 점 X의 y좌표가 최대인 경우는 점 X가 점 $\mathrm{E}(5,\ 9)$와 일치하는 경우이고, 점 X의 y좌표가 최소인 경우는 점 X가 점 $\mathrm{F}(9,\ 5)$와 일치하는 경우이다.

(ⅱ) 점 X가 원 $(x-4)^2+(y-4)^2=9$ 위에 있는 경우



위 그림과 같이 점 A를 지나고 직선 OC와 평행한 직선과 만나는 두 점을 G, H라 하고, 원이 점 B를 지나고 직선 OC와 평행한 직선과 만나는 두 점을 I, J라 하자.

호 JH 또는 호 GI 위의 임의의 점 X에 대하여 점 X를 지나고 직선 OC와 평행한 직선이 선분 AB와 만나는 점을 X'이라 하면 점 P가 점 X'과 일치할 때 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PX}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$는 평행하므로 조건 (나)를 만족시킨다.

원 위의 점 중에서 호 JH 위에도 있지 않고 호 GI 위에도 있지 않은 점 X에 대하여는 선분 AB 위의

임의의 점 P에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{PX}$, $\overrightarrow{OC}$가 평행할 수 없으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, 원 $(x-4)^2+(y-4)^2=9$ 위의 점 중에서 y좌표가 가장 큰 점을 K, y좌표가 가장 작은 점을 L이라 하면 점 X의 y좌표가 최대인 경우는 점 X가 점 K$(4,\ 7)$과 일치하는 경우이고, 점 X의 y좌표가 최소인 경우는 점 X가 점 L$(4,\ 1)$과 일치하는 경우이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 점 Q, R는 각각 Q$(5,\ 9)$, R$(4,\ 1)$이다.

$$\therefore\ \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}=(5,\ 9)\cdot(4,\ 1)$$
$$=5\cdot4+9\cdot1$$
$$=29$$

91 정답 80

해설 초점이 일치하는 두 쌍곡선 위의 점이 조건을 만족시킬 때, 직선의 기울기를 구할 수 있는가?

쌍곡선 $C_1 : x^2-\dfrac{y^2}{24}=1$의 주축의 길이는 2,

쌍곡선 $C_2 : \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{21}=1$의 주축의 길이는 4,

두 쌍곡선 C_1, C_2의 초점은 모두 F$(5,\ 0)$, F$'(-5,\ 0)$이다.

점 P는 쌍곡선 C_1 위에 있는 제2사분면 위의 점이므로

$\overline{PF}=\overline{PF'}+2$ $\cdots$ ㉠

점 Q는 쌍곡선 C_2 위에 있는 제2사분면 위의 점이므로

$\overline{QF}=\overline{QF'}+4$ $\cdots$ ㉡

$\overline{PQ}+\overline{QF}$, $2\overline{PF'}$, $\overline{PF}+\overline{PF'}$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항의 성질에 의하여

$4\overline{PF'}=(\overline{PQ}+\overline{QF})+(\overline{PF}+\overline{PF'})$

이때 ㉡에 의하여

$$\overline{PQ}+\overline{QF}=\overline{PQ}+\overline{QF'}+4$$
$$=\overline{PF'}+4$$

$\therefore\ 4\overline{PF'}=\overline{PF'}+4+\overline{PF}+\overline{PF'}$

따라서 $2\overline{PF'}=4+\overline{PF}$에 ㉠을 대입하면

$2\overline{PF'}=4+(\overline{PF'}+2)$

$\therefore\ \overline{PF'}=6$

이때 삼각형 PF$'$F는 $\overline{PF'}=6$, $\overline{FF'}=10$, $\overline{PF}=8$인 직각삼각형이므로

$$\tan(\angle PF'F)=\frac{\overline{PF}}{\overline{PF'}}=\frac{4}{3}$$

따라서 직선 PQ의 기울기 m도 $\dfrac{4}{3}$이므로

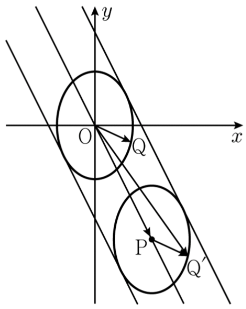
$$60m=60\cdot\frac{4}{3}=80$$

92 정답 13

해설 벡터의 합을 이용하여 점 X가 나타내는 영역을 나타낼 수 있고 타원의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{PQ'}$이 되는 점을 잡으면 점 Q$'$은 타원 $2x^2+y^2=3$을 중심이 P가 되도록 평행이동시킨 타원 위의 점이다.

$$\therefore\ \overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$$
$$=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ'}$$
$$=\overrightarrow{OQ'}$$



한편, 타원 $2x^2+y^2=3$에 접하고 직선 $2x+y=0$에 평행한 접선의 방정식은

$$y=-2x\pm\sqrt{\frac{3}{2}\cdot(-2)^2+3}$$

$\therefore\ y=-2x\pm3$

따라서 점 X가 나타내는 점은 직선 $y=-2x+3$ 또는 이 직선의 아래쪽 부분과 직선 $y=-2x-3$ 또는 이 직선의 위쪽 부분의 공통부분이다.

따라서 x좌표와 y좌표가 모두 0 이상인 모든 점 X가 나타내는 영역은 직선 $y=-2x+3$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분이다.

이때 직선 $y=-2x+3$이 x축과 만나는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$, y축과 만나는 점의 좌표는 $(0,\ 3)$이므로 구하는 영역의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot3=\frac{9}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=9$이므로

$p+q=13$