제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\left(2^{\sqrt{3}}\times 4\right)^{\sqrt{3}-2}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

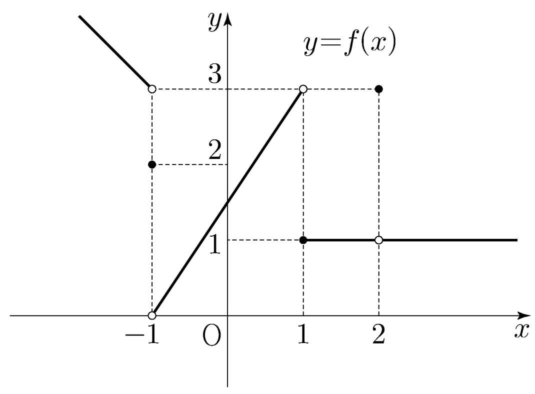
3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2=6,\quad a_4+a_6=36$$

일 때, a_{10} 의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 2} f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (a_n<7) \\ a_n-7 & (a_n\geq 7) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

6. 방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는? [3점]

① 20 ② 23 ③ 26 ④ 29 ⑤ 32

7. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

8. 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은? [3점]

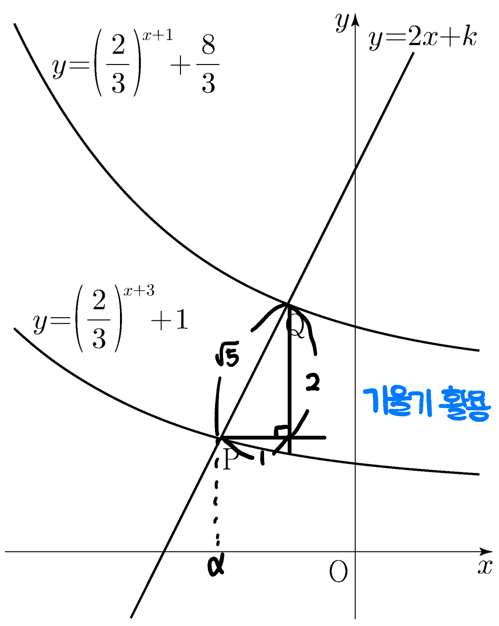
① 3　② $\frac{13}{4}$　③ $\frac{7}{2}$　④ $\frac{15}{4}$　⑤ 4

9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{31}{6}$　② $\frac{16}{3}$　③ $\frac{11}{2}$　④ $\frac{17}{3}$　⑤ $\frac{35}{6}$



$\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+3}+1+2=\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}+\frac{8}{3}$

$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}$

$\alpha=-2$

$P=(-2,\frac{5}{3})$

$\frac{5}{3}=-4+k$

$\therefore k=\frac{17}{3}$

10. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

① -18　② -17　③ -16　④ -15　⑤ -14

$f(0)=0,\ f(1)=2$

$f'(0)x+f(0)=\{f'(1)+f(1)\}(x-1)+f(1)$
$=\{f'(1)+f(1)\}x-f'(1)$

$\Rightarrow f'(0)=f'(1)+f(1),\ f(0)=-f'(1)=0$

$\Rightarrow f'(0)=2$

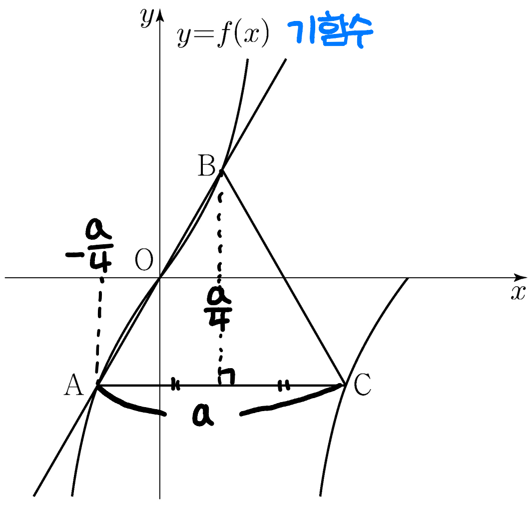
$f(x)=ax^3+bx^2+2x$ 라고 하면
$f(1)=2,\ f'(1)=0$ 이므로
$f(x)=-2x^3+2x^2+2x$

$\therefore f'(2)=-14$

11. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2} < x \le a,\ x \ne \frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a = 2\tan\frac{\pi}{4} = 2$

$\Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$S = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

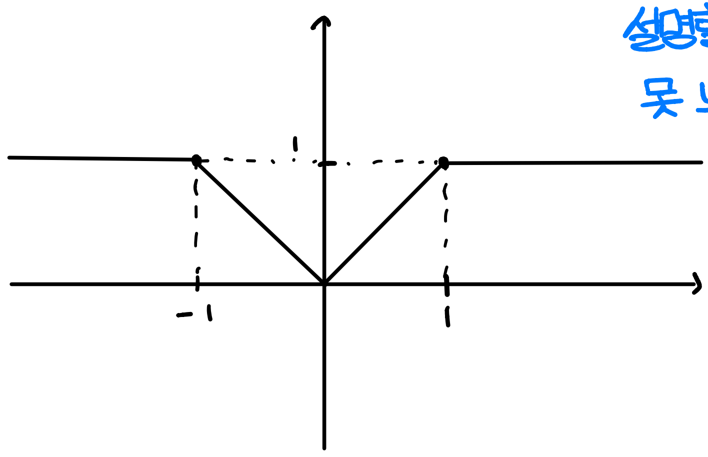
$$\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0$$ 인수분해

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$(f(x)-x)(f(x)+x)(f(x)-1) = 0$

설명할 가치를 못 느끼겠음



13. 두 상수 a, $b\,(1<a<b)$에 대하여 좌표평면 위의
두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과
두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다.
함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

$y=\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}(x-a)+\log_2 a$

$y=\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}x+\frac{b\log_2 a-a\log_2 b}{b-a}$

같은 방식으로 y 절편을 찾으면

두 번 다 계산하면 회의감을 좀 맛봐야함

$b\log_2 a-a\log_2 b=b\log_4 a-a\log_4 b$

$b\log_4 a=a\log_4 b$

$\frac{\log_4 a}{a}=\frac{\log_4 b}{b}$

함수 $\frac{\log_4 x}{x}$는 $x>1$에서 감소하므로 $a=b$

미적 모르는 분들 ㅈㅅ

$f(1)=a^b+b^a=2a^a=40$

$f(2)=a^{2b}+b^{2a}=2a^{2a}=2\cdot 20^2=800$

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b)\quad(a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|\,dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt=0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

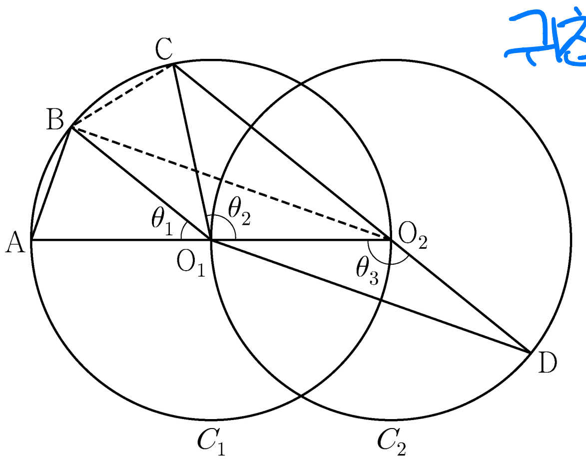
ㄱ. $\int_0^1 v(t)dt=x(1)-x(0)=0$

ㄴ. 참이면 $\int_0^1|v(t)|dt>2$ 이므로 거짓

ㄷ. $\int_0^1|v(t)|dt=2$ 이므로 $x(t_2)=0$인 t_2가 $(0,1)$에 없으면 $(0,1)$에 $|x(t)|=1$인 t가 존재하므로 참이어야 함.

15. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다.
이때 $\angle BO_1A = \theta_1$, $\angle O_2O_1C = \theta_2$, $\angle O_1O_2D = \theta_3$이라 하자.

귀찮음



다음은 $\overline{AB} : \overline{O_1D} = 1 : 2\sqrt{2}$이고 $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1 + \angle O_1O_2D = \pi$이므로 $\theta_3 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$에서 $2\theta_1 + \theta_2 = \pi$이므로 $\angle CO_1B = \theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB} = k$라 할 때
> $\overline{BO_2} = \overline{O_1D} = 2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2} = \boxed{(가)}$이고,
> $\angle BO_2A = \dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2} = \boxed{(나)}$이다.
> 삼각형 O_2BC에서
> $\overline{BC} = k$, $\overline{BO_2} = 2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B = \dfrac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C} = \boxed{(다)}$이다.
> $\overline{CD} = \overline{O_2D} + \overline{O_2C} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB} : \overline{CD} = k : \left(\dfrac{\boxed{(가)}}{2} + \boxed{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p) \times g(p)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{169}{27}$ ② $\dfrac{56}{9}$ ③ $\dfrac{167}{27}$ ④ $\dfrac{166}{27}$ ⑤ $\dfrac{55}{9}$

단답형

16. $\log_2 120 - \dfrac{1}{\log_{15} 2}$의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 3x^2 + 2x$이고 $f(0) = 2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{2} = 56, \quad \sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k = 100$$

일 때, a_8의 값을 구하시오. [3점]

19. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - (a^2 - 8a)x + 3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오. [3점]

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x) = x$이다.
(나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 $f(x+1) - xf(x) = ax + b$이다.

$60 \times \int_1^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

$0 \le x \le 1$ 일 때

$f(x+1) = xf(x) + ax + b = x^2 + ax + b$

f는 미분 가능하므로

대입하는 값 주의

$a=1,\ b=1$

$\int_0^1 f(x+1)dx = \int_1^2 f(x)dx = \frac{11}{6}$

$\therefore 60 \times \int_1^2 f(x)dx = 110$

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_1| = 2$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}| = 2|a_n|$이다.

(다) $\sum_{n=1}^{10} a_n = -14$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$의 값을 구하시오. [4점]

$|a_n| = 2^n$ 부호 고르기

$\sum_{k=1}^{n} 2 < 2^{n+1}$ 이므로 $a_{10} = -1024$여야

$\sum_{n=1}^{10} a_n < 0$ 일 수 있다

$\sum_{n=1}^{9} 2^n = 1022$ 이므로 $a_1 \sim a_9$가 모두 양수인 경우에서

음수로 바뀔 항들의 합이 6이어야 한다.

$\Rightarrow a_1 = -2,\ a_2 = -4,\ a_{10} = -1024$, 나머지 양수

$\therefore \sum_{n=1}^{5} a_{2n-1} = \sum_{n=1}^{5} 2^{2n-1} - 4 = 678$

22. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x) = 0$이 닫힌구간 $[t, t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t \to a+} g(t) + \lim_{t \to a-} g(t) \le 2$이다.

(나) $g(f(1)) = g(f(4)) = 2,\ g(f(0)) = 1$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

$f'(x) = \frac{3}{2}(x-\beta)(x-\alpha)$라 하면 $(\beta > \alpha)$

(가)에 의해 $\beta - \alpha \ge 2$

(나)에 의해 $\beta - \alpha \le 2$ $g(t)=2$인 t가 존재하므로

$\Rightarrow \beta - \alpha = 2$

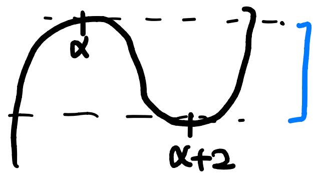
$g(f(1)) = g(f(4))$ 이므로 $f(1) = f(4) = \alpha$

$\alpha = 1$ or $\alpha + 2 = 4$

$\alpha = 2$면 $g(f(0)) \ne 1$

이므로 $\alpha = 1$,

$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2(x-4) + 1$

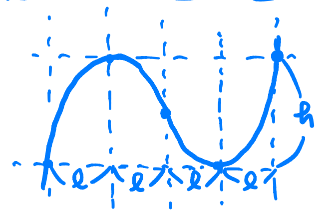


이 차이가 2라는 것을 알면 굳이 계산을 할 필요가 없다.

$\therefore f(5) = 9$

Tip)

최고차항 계수가 a인 삼차함수의 비율관계가 다음과 같다.



이때 $h = 4a\ell^3$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 다항식 $(x+2)^7$의 전개식에서 x^5의 계수는? [2점]

① 42 ② 56 ③ 70 ④ 84 ⑤ 98

24. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르고 $\mathrm{V}(2X)=40$일 때, n의 값은? [3점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

25. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는? [3점]

(가) $a+b+c+d+e=12$
(나) $\left\|a^2-b^2\right\|=5$

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

$(a,b)=(3,2)$ or $(2,3)$

$c+d+e=7 \Rightarrow c'+d'+e'=4 \Rightarrow {}_3H_4=15$

자연수

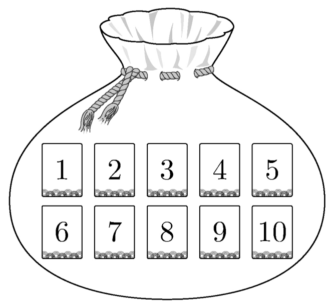
$2\times15=30$

26. 1부터 10까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 카드 3장을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4 이하이거나 7 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{13}{15}$ ④ $\frac{9}{10}$ ⑤ $\frac{14}{15}$

여사건

min = 5, 6



$$1-\frac{{}_5C_2+{}_4C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{13}{15}$$

27. 어느 자동차 회사에서 생산하는 전기 자동차의 1회 충전 주행 거리는 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다.
이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 100대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다.
이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 400대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다.
$\overline{x_1} - \overline{x_2} = 1.34$이고 $a = c$일 때, $b - a$의 값은? (단, 주행 거리의 단위는 km이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 5.88 ② 7.84 ③ 9.80
④ 11.76 ⑤ 13.72

$a = \overline{x}_1 - 1.96 \times \frac{\sigma}{10}$

$c = \overline{x}_2 - 2.58 \times \frac{\sigma}{20}$

$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 = 0.067\sigma = 1.34 \Rightarrow \sigma = 20$

$b - a = 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{10} = 7.84$

28. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는? [4점]

> (가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \ge \sqrt{x}$이다.
> (나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 138 ③ 148 ④ 158 ⑤ 168

$f(1) \ge 1$
$f(2) \ge 2$
$f(3) \ge 2$ ⇒ 그냥 치역을 정해서 개수 세기
$f(4) \ge 2$
$f(5) \ge 3$

i) $\{1, 2, 3\}$ $f(5) = 3$, $f(1) = 1$ $\Rightarrow$ $2^3 - 1 = 7$

ii) $\{1, 2, 4\}$ $f(1) = 1$, $f(5) = 4$ $\Rightarrow$ $2^3 - 1 = 7$

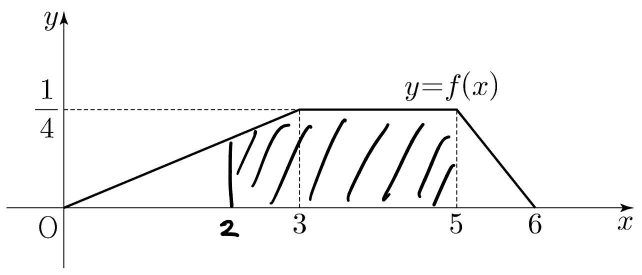
iii) $\{1, 3, 4\}$ $f(1) = 1$, $f(5) = 3$ or 4 $\Rightarrow$ $2(2^3 - 1) = 14$

iv) $\{2, 3, 4\}$ $f(5) = 3$ or 4 $\Rightarrow$ $2(3^4 - 3 - 2(2^4 - 2)) = 100$

sum = 128

단답형

29. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 6$, $0 \le Y \le 6$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0 \le x \le 6$인 모든 x에 대하여

$$f(x)+g(x)=k \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킬 때, $\mathrm{P}(6k \le Y \le 15k)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\int_0^6 (f(x)+g(x))dx = 6k = 2 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

$P(6k \le Y \le 15k) = \int_{6k}^{15k} k - f(x)dx$

$= \int_2^5 \frac{1}{3} - f(x)dx$

$= 1 - \frac{17}{24}$

$= \frac{7}{24}$

$\therefore p+q = 31$

30. 흰 공과 검은 공이 각각 10개 이상 들어 있는 바구니와 비어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 5 이상이면 바구니에 있는 흰 공 2개를 주머니에 넣고, 나온 눈의 수가 4 이하이면 바구니에 있는 검은 공 1개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 5번 반복할 때, $n(1 \le n \le 5)$번째 시행 후 주머니에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a_n, b_n이라 하자. $a_5+b_5 \ge 7$일 때, $a_k=b_k$인 자연수 $k(1 \le k \le 5)$가 존재할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

5번 시행에서 주사위 5 이상 횟수를 m이라 하자

$2m+5-m = m+5 \ge 7 \Rightarrow m \ge 2$

$m \ge 2$ 일 확률 : $1 - {}_5C_0\left(\frac{2}{3}\right)^5 - {}_5C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{131}{243}$

$a_k = b_k$가 가능한 k는

$k=3$: WW B B 가 유일하다

두 사건이 동시에 일어날 확률

: ${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left({}_2C_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + {}_2C_2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) = \frac{60}{243}$

$\frac{q}{p} = \frac{\frac{60}{243}}{\frac{131}{243}} = \frac{60}{131}$

$\therefore p+q = 191$

＊ 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.