정답 및 해설

1) 정답 ⑤
$2+a=7 \quad \therefore a=5$

2) 정답 ①
$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{e^x}=1$

3) 정답 ③
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $3a_5=a_7$으로부터
$3\times(4r^4)=4r^6 \quad \therefore r^2=3$
$a_3=a_1\times r^2$이므로 $a_3=12$

4) 정답 ④
$\mathrm{P}(2,\ 2,\ 3)$, $\mathrm{Q}(-2,\ 2,\ 3)$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=4$

5) 정답 ③
$f'(x)=3(2e^x+1)^2\cdot(2e^x)$이므로 $f'(0)=54$

6) 정답 ⑤
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(4,\ 2)\cdot(2,\ -2)=4\times 2+2\times(-2)=4$

7) 정답 ⑤
일차변환 f, g를 나타내는 행렬이 $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$이므로 합성변환 $f\circ g$에 의하여 점 $(3,\ 3)$이 옮겨진 점 P의 좌표는
$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\sqrt{2}\end{pmatrix}$이다.

8) 정답 ②
$\log_2(4+x)+\log_2(4-x)=3 \Leftrightarrow \log_2(16-x^2)=3$
$\Leftrightarrow 16-x^2=8$
$\therefore x=\pm 2\sqrt{2}$

9) 정답 ②
두 사건 A, B가 독립이므로 $\mathrm{P}(B)=k$ (k는 상수)라 놓으면,
$\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{3}$
$\Leftrightarrow \mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\times\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{6}\times(1-k)+\left(1-\frac{1}{6}\right)\times k=\frac{1}{3}$
$\Leftrightarrow \frac{2}{3}k=\frac{1}{6}$
$\therefore k=\frac{1}{4}$

10) 정답 ④
$y=\ln 5x$의 양변을 미분하면 $y'=\frac{1}{x} \quad \therefore y'_{x=\frac{1}{5}}=5$
점 $\left(\frac{1}{5},\ 0\right)$에서의 접선의 방정식은 $y=5\left(x-\frac{1}{5}\right)+0=5x-1$

11) 정답 ④
두 직선 $x-y-1=0$, $ax-y+1=0$의 기울기를 각각 m_1, m_2라고 하면 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때,
$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\frac{a-1}{1-a\times 1}=\frac{1}{6} \quad \therefore a=\frac{7}{5}$

12) 정답 ②
포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선 $y_1y=2(x+x_1)$이 x축과 만나는 점의 좌표는 $\mathrm{Q}(-x_1,\ 0)$이다.
$\therefore x_1=2,\ y_1=2\sqrt{2}$
$\overline{\mathrm{FP}}=\sqrt{(2-1)^2+(2\sqrt{2}-0)^2=3}$, $\overline{\mathrm{QF}}=3$,
$\overline{\mathrm{QP}}=\sqrt{((-2)-2)^2+(2\sqrt{2}-0)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$
이므로 코사인 제2법칙을 사용하면
$\cos(\angle\mathrm{PFO})=\frac{3^2+3^2-(2\sqrt{6})^2}{2\cdot 3\cdot 3}=-\frac{1}{3}$

13) 정답 ①
하루 여가 활동시간 X는 정규분포 $N(m,\ 10^2)$을 따르므로 회사 직원 중 n명을 임의추출하여 신뢰도 95%로 모평균 m을 추정하면 다음과 같다.
$\overline{X}-1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}$
그런데 문제에서 신뢰구간이 $[38.08,\ 45.92]$라고 했으므로
$\overline{X}-1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}=38.08$, $\overline{X}+1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}=45.92$가 됨을 알 수 있다.
$\therefore \overline{X}=42,\ n=25$

14) 정답 ④
곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$과 y축 및 직선 $y=e$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피 V를 구하기 위해서는 $y=e$를 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 원기둥의 부피 V_1에서 $y=e^{\frac{x}{2}}$를 구간 $[0,\ 2]$에서 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피 V_2를 빼주면 된다.
$V=\pi(e)^2\cdot 2-\int_0^2\pi\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2dx=2e^2\pi-\left[e^x\right]_0^2=(e^2-1)\pi$

15) 정답 ①
1, 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어있는

주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 나열하는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{C}_4 \times 4! = 120$ (가지)

이때, 나열된 순서대로 공에 적혀있는 수를 $a,\ b,\ c,\ d$라 할 때, $a \le b \le c \le d$ 인 경우의 수는

$(a,\ b,\ c,\ d) = (1,\ 1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 1,\ 3,\ 4),$
$(1,\ 2,\ 3,\ 4)$

가 있는데, 이 때, $(1,\ 1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 1,\ 3,\ 4)$는 a와 b의 순서를 바꿀 수 있고, $(1,\ 2,\ 3,\ 4)$는 두 번 나올 수 있으므로

구하고자 하는 확률은 $\dfrac{8}{120} = \dfrac{1}{15}$

16) 정답 ①

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$라 하면 $b_{n+1} = \dfrac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}$ 으로부터

$b_{n+1} = \dfrac{S_n}{n} \Leftrightarrow n\,b_{n+1} = S_n \cdots$ ㉠

마찬가지 논리로

$b_{n+2} = \dfrac{S_{n+1}}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)b_{n+2} = S_{n+1} \cdots$ ㉡

이므로 ㉡$-$㉠ 으로부터

$(n+1)b_{n+2} - n\,b_{n+1} = S_{n+1} - S_n$

$\Leftrightarrow\ (n+1)b_{n+2} - n\,b_{n+1} = b_{n+1}$

$\Leftrightarrow\ (n+1)b_{n+2} = (n+1)b_{n+1}$

$\therefore\ b_{n+2} = b_{n+1}\ (\because\ n \ge 1)$

또한 ㉡$\div$㉠ 으로부터 $\dfrac{(n+1)b_{n+2}}{n\,b_{n+1}} = \dfrac{S_{n+1}}{S_n}$ 이므로

$S_{n+1} = \boxed{\dfrac{n+1}{n}} \times S_n$

$S_n = S_1 \times \dfrac{S_2}{S_1} \times \dfrac{S_3}{S_2} \times \cdots \times \dfrac{S_n}{S_{n-1}}$

$= 10 \times \dfrac{2}{1} \times \dfrac{3}{2} \times \cdots \times \dfrac{n}{n-1}$

$= \boxed{10n}$

$f(n) = \dfrac{n+1}{n},\ g(n) = 10n$ 이므로

$f(5) \times g(6) = \dfrac{6}{5} \times 60 = 72$

17) 정답 ③

$B^2 + AB = E \cdots$ ㉠, $\quad B^2 = B - E \cdots$ ㉡

ㄱ. ㉠으로부터 $(B+A)B = E \Leftrightarrow B(B+A) = E$ 이므로
$AB = BA$ (참)

ㄴ. ㉠의 양변에 B^{-1}을 곱하면 $B + A = B^{-1} \cdots$ ㉢
㉡의 양변에 B^{-1}을 곱하면
$B = E - B^{-1} \Leftrightarrow E - B = B^{-1} \cdots$ ㉣
㉢, ㉣로부터 $B + A = E - B \Leftrightarrow A + 2B = E$ (참)

ㄷ. ㄴ으로부터 $B = -\dfrac{1}{2}A + \dfrac{1}{2}E$를 ㉡에 대입하면

$\left(-\dfrac{1}{2}A + \dfrac{1}{2}E\right)^2 = \left(-\dfrac{1}{2}A + \dfrac{1}{2}E\right) - E$

$\Leftrightarrow\ A^2 = -3E$

$\therefore\ A^3 + A^2 + 3A = -3E$ (거짓)

18) 정답 ①

확률변수 X와 확률변수 Y는 표준편차가 동일하므로 $f(12) = g(26)$을 만족하기 위해서는 $\left|\dfrac{12-10}{4}\right| = \left|\dfrac{26-m}{4}\right|$ 을 만족해야만 한다.

$\therefore\ m = 24$ 또는 28

그런데 $\mathrm{P}(Y \ge 26) \ge 0.5$를 만족하기 위해서는 $m = 28$이어야만 한다.

$\therefore\ \mathrm{P}(Y \le 20) = \mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{20-28}{4}\right)$

$= 1 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.0228$

19) 정답 ⑤

$\overline{\mathrm{F'P}} = \overline{\mathrm{F'F}}$ 이거나 $\overline{\mathrm{F'F}} = \overline{\mathrm{FP}}$ 의 두 가지 경우뿐이다.

그런데 $\overline{\mathrm{F'F}} = 4$ 이므로

1) $\overline{\mathrm{PF}} = 2$ 일 때

$\triangle\mathrm{PF'F}$의 세 변이 각각 4, 4, 2이므로 $h = \dfrac{4+4+2}{2} = 5$

라고 놓으면 $\triangle\mathrm{PF'F} = \sqrt{5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3} = \sqrt{15}$

2) $\overline{\mathrm{F'P}} = 6$ 일 때

$\triangle\mathrm{PF'F}$의 세 변이 각각 4, 4, 6이므로 $h = \dfrac{4+4+6}{2} = 7$

라고 놓으면 $\triangle\mathrm{PF'F} = \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1} = 3\sqrt{7}$

1), 2)로부터 모든 a의 값의 곱은 $3\sqrt{105}$

20) 정답 ③

선분 HG의 중점을 M이라 놓자. R_1의 넓이는 부채꼴 BGO에서 삼각형 BMO를 뺀 넓이의 6배와 같다.

$R_1 = 6 \times \left\{\dfrac{1}{2} \times (2\sqrt{3})^2 \times \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{3}\right\} = 6\left(2\pi - 3\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 12\pi - 9\sqrt{3}$

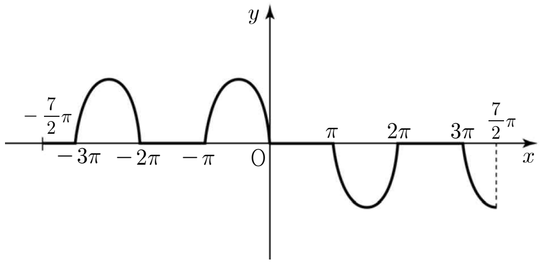
R_1과 R_2 사이의 넓이의 비율은

$\left(\dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{BC}}}\right)^2 = \left(\dfrac{6 - 2\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$ 이므로

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n = \dfrac{12\pi - 9\sqrt{3}}{1 - \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = (2\pi - 3\sqrt{3})(2\sqrt{3} + 3)$

21) 정답 ①

함수 $f(x)$를 그리면 다음과 같다.



닫힌 구간 $\left[-\frac{7}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)\,dt \geq 0$이 되도록 하는 실수 a의 최솟값은 $-\frac{7}{2}\pi$이고, 최댓값은 -3π이다. $\therefore\ \beta-\alpha = \frac{\pi}{2}$

22) 정답 6

$\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = [2\sqrt{x}\,]_1^{16} = 6$

23) 정답 4

$-x^2+7x = t$라고 치환하면 $\sqrt{t} = t-2$ ⋯ ㉠

양변을 제곱하면 $t = (t-2)^2 \Leftrightarrow t^2-5t+4 = 0 \quad \therefore\ t = 1,\ 4$

그런데 $t = 1$은 ㉠을 만족하지 않으므로 무연근이다.

따라서 $-x^2+7x = 4 \Leftrightarrow x^2-7x+4 = 0$

구하고자 하는 모든 실근의 곱은 4

24) 정답 2

$x^2+2nx-4n = 0$의 양의 실근은 $a_n = -n+\sqrt{n^2+4n}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(-n+\sqrt{n^2+4n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}(-n+\sqrt{n^{2+}4n}\,)\times\frac{n+\sqrt{n^2+4n}}{n+\sqrt{n^2+4n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+\sqrt{n^2+4n}}$$
$$= 2$$

25) 정답 84

B의 속력을 v_B라 하면 , A의 속력은 $v_A = 0.9v_B$라 놓을 수 있다.

$L_A = 80+28\log\frac{0.9v_B}{100}-14\log\frac{d}{25}$,

$L_B = 80+28\log\frac{v_B}{100}-14\log\frac{d}{25}$ 로부터

$$L_B-L_A = 28\left(\log\frac{0.9\,v_B}{100}-\log\frac{v_B}{100}\right) = 28\log 0.9$$
$$= 28\left(\log\frac{9}{10}\right) = 28(2\log 3-1) = 56\log 3-28$$

$\therefore\ a = 56,\ b = -28 \quad \therefore\ a-b = 84$

26) 정답 162

$\cos(\angle\mathrm{ABC}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{BQ}} = 3\sqrt{3} \quad \therefore\ \overline{\mathrm{AQ}} = 3\sqrt{6}$

$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AQ}} = \frac{1}{2}\times 12\times 3\sqrt{6} = 18\sqrt{6}$

삼수선의 정리에 의하여 $\angle\mathrm{APQ} = 90^o$이므로

$\triangle\mathrm{ABC}$의 평면 BCD 위로의 정사영 $\triangle\mathrm{BCP}$의 넓이는

$\triangle\mathrm{BCP} = \triangle\mathrm{ABC}\times\cos(\angle\mathrm{AQP}) = 18\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{6} = 9\sqrt{2}$

$\therefore\ k^2 = 162$

27) 정답 32

1) $d = 2$일 때, $a+b+c = 18 \quad \therefore\ {}_3\mathrm{H}_6 = {}_8\mathrm{C}_6 = 28$

2) $d = 3$일 때, $a+b+c = 17$

$a,\ b,\ c$가 모두 3의 배수를 만족하지 않는다.

3) $d = 4$일 때, $a+b+c = 16 \quad \therefore\ {}_3\mathrm{H}_1 = 3$

4) $d = 5$일 때, $a+b+c = 15 \quad \therefore\ {}_3\mathrm{H}_0 = 1$

1, 2, 3, 4)에 의하여 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$28+3+1 = 32$(개)

28) 정답 80

선분 PC를 한 변으로 하는 정삼각형의 한 꼭지점을 D라고 하자.

$\triangle\mathrm{ABC}$로부터 외접원의 반지름의 길이가 2이므로 사인법칙을 적용하면 $\frac{\overline{\mathrm{PC}}}{\sin\theta} = 4 \quad \therefore\ \overline{\mathrm{PC}} = 4\sin\theta$

$\overline{\mathrm{PC}} = 4\sin\theta$이므로 정삼각형 $\triangle\mathrm{PCD}$의 내접원의 반지름은 $\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3}}$이고 따라서 $S(\theta)$는 $\frac{4\sin^2\theta}{3}\pi$이다.

$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2} = \frac{4}{3}\pi \quad \therefore\ 60a = 80$

29) 정답

두 구 $S_1 : x^2+y^2+(z-3)^2 = 1,\ S_2 : x^2+y^2+(z+3)^2 = 4$의 중심을 각각 $\mathrm{C}_1(0,\ 0,\ 3),\ \mathrm{C}_2(0,\ 0,\ -3)$이라 놓고, S_1과 S_2가 평면 α와 만나는 점을 각각 A, B라 놓자.

선분 AB와 y축이 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 $\triangle\mathrm{C_1DA}$와 $\triangle\mathrm{C_2DB}$는 모두 세 변의 길이가 $2:1:\sqrt{3}$인 직각삼각형이며 $1:2$ 닮음 관계에 있음을 알 수 있다. $\therefore\ \mathrm{D}(0,\ 0,\ 1)$

또한 평면 α의 법선 벡터를 $\vec{n} = (1,\ a,\ b)$라 놓으면, $\vec{n}$은 y축의 방향벡터인 $(0,\ 0,\ 1)$과 60^o의 각을 이루며,

평면 $\alpha : x+ay+bz = c$는 점 $\mathrm{D}(0,\ 0,\ 1)$과 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{6},\ 0\right)$을 지나게 된다. 따라서

1) $(1,\ a,\ b)\cdot(0,\ 0,\ 1) = \sqrt{1+a^2+b^2}\times 1\times\cos 60^o = b$

$\Leftrightarrow\ 1+a^2+b^2 = 4b^2 \quad \therefore\ a^2-3b^2 = -1$

2) $0+a\cdot 0+b\cdot 1 = c \quad \therefore\ b = c$

3) $\frac{1}{2}+a\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}+b\cdot 0=c$

1), 2), 3)으로부터 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $b=\frac{2}{3}$, $c=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \alpha : x+\frac{\sqrt{3}}{3}y+\frac{2}{3}z=\frac{2}{3}$

$\mathrm{Q}(k, -\sqrt{3}, 2)$가 평면 α 위의 점이므로

$k+\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-\sqrt{3})+\frac{2}{3}\times 2=\frac{2}{3} \quad \therefore\ k=\frac{1}{3}$

30) 정답 15

$f(x)$가 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 가지므로

$x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$은

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (2ax+b)e^x+(ax^2+bx+c)e^x=0$$
$$\Leftrightarrow \{ax^2+(2a+b)x+c\}e^x=0$$

의 두 근이다. 따라서 위 식에 대입하면

$-\frac{2a+b}{a}=0,\ \frac{b+c}{a}=-3 \quad \therefore\ b=-2a,\ c=-a$

$\therefore\ f(x)=a(x^2-2x-1)e^x$

그런데 (나) 조건에서 $0\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1\ge 0 \Leftrightarrow f(x_2)-f(x_1)\ge -(x_2-x_1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\ge -1$$

이라고 하였으므로 $y=f'(x)$의 최솟값 -1을 가짐을 알 수 있다. 다시 말해,

$f'(x)=a(2x-2)e^x+a(x^2-2x-1)e^x=a(x^2-1)e^x$

로부터 $y=f'(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극값 $f'(-1)=\frac{2a}{e}$, $f'(1)=-2ae$를 갖는데, 아래 그림으로부터 $\lim_{x\to-\infty}f'(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}f'(x)\to\infty$이므로 $y=f'(x)$는 $x=1$에서 최소값 $-2ae$를 갖게 된다.

$\therefore\ -2ae\ge -1 \Leftrightarrow a\le\frac{1}{2e}$

따라서 세 수 a, b, c의 곱 $abc=2a^3$의 최댓값은 $2\left(\frac{1}{2e}\right)^3=\frac{1}{4e^3}$이다.

$\therefore\ k=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 60k=15$