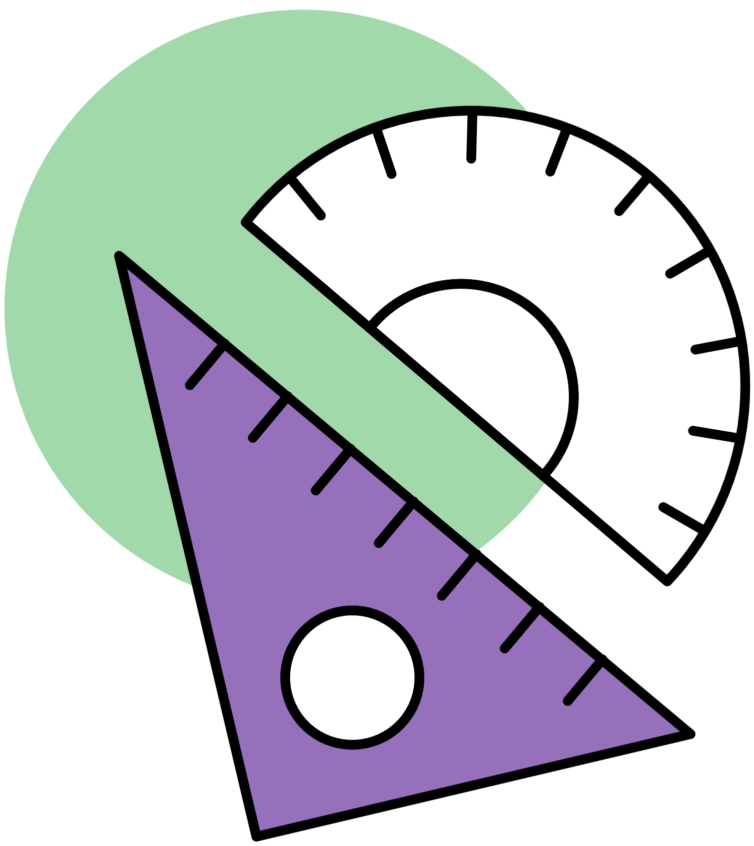
모의 논술

제한 시간: 90분

건직쌤



[문제1]

(가) 수열 a_n, b_n, C_n에 대해 $a_{n+1}-a_n=C_n$이 만족한다. $(a_n>0)$ $b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{C_n}{a_{n+1}a_n}$이라 할 때 $b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}$으로 나타낼 수 있다.

(나) 자연로그(ln)의 밑은 무리수인 상수로 $2.71828\cdots$의 값을 가지며 기호 e로 표기한다. e는 다음의 극한값으로 표현한다. $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

(다) 수열 a_n, b_n에 대해 $a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$, $b_n=(a_n)^{n^2}$라 한다.

[1-1] $x>0$인 x에 대해 $\ln x\le x-1$이 성립함을 증명하라. [6점]

[1-2] 정의역이 $\{x|x>1\}$인 함수 $f(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$, $g(x)=\ln f(x)$가 있다. $g'(x)$를 구하시오. [8점]

[1-3] $\lim_{n\to\infty}b_n$값을 구하여라. [7점]

[1-4] [1-1]과 [1-2]의 결과를 이용해서 $b_{n+1}>b_n$을 증명하라. [9점]

[문제2]

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$와 두 실수 a, b가 있을 때 $\int_a^b f(x)g'(x)dx$는 $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$로 나타낼 수 있다.

$\int_0^\pi e^{-x} x \sin x dx$값을 구하여라. [30점]

[문제3]

좌표평면 위의 두 점 $A(x_{1,}y_1)$, $B(x_2, y_2)$에서 두 점 사이의 거리 $\overline{AB}= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 로 나타낼 수 있다.

[3-①] 실수 a에 대해 $\sqrt{5a^2-24a+29}$의 최솟값을 구하여라. [7점]

[3-②] 좌표 평면 위의 세 점 $A(4,1)$, $B(2,5)$, $y=2x$위의 점 C가 있다. 이때 $\overline{AC}+\overline{BC}$의 최솟값을 구하여라. [9점]

[3-③] $f(a)= \sqrt{5a^2-24a+29}+\sqrt{5a^2-12a+17}$ 일 때, $f(a)$의 최솟값을 구하여라. [11점]

[3-④] 실수 a,b에 대해 $\sqrt{5a^2-18a+17}+\sqrt{5a^2+5b^2-8ab}+\sqrt{5b^2-24b+29}$ 의 최솟값을 구하여라. [13점]

해설 - [문제1]

[1-1] $h(x)=\ln x-x+1\ (x>0)$

$h'(x)=\dfrac{1}{x}-1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$+$	0	$-$
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$

함수 $h(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 0을 가진다. 따라서 $h(x)\le 0$이고 $\ln x \le x-1$이 성립한다.

[1-2] $g(x)=x^2\left\{n\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\right\}=x^2\{\ln(x^2-1)-\ln x^2\}$

$$g'(x)=2x\{\ln(x^2-1)-\ln x^2\}+x^2\left\{\frac{2x}{x^2-1}-\frac{2}{x}\right\}$$

$$=2x\left\{-\ln\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{x^2}{x^2-1}-1\right\}$$

[1-3] 제시문 [가]에 의해 $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}=1-\frac{1}{n^2}$ 그리고 b_n을

$b_n=\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}$이라고 했을 때 제시문 [나]에 의해 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}\right\}^{-1}=\frac{1}{e}$

[1-4] [1-1], [1-2]에 의해 $g'(x)=2x\times\left(-h\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)\right)$이다. $\dfrac{x^2}{x^2-1}>0,\ \dfrac{x^2}{x^2-1}\ne 1$이므로 $h\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)<0$을 만족한다. 따라서 $g'(x)>0\ (x>1)$이다. 이때 $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$이고 $f(x)>0$이므로 $f'(x)>0$이다. $b_n=f(n),\ b_{n+1}=f(n+1)$이고 $f'(x)>0$이므로 $f(n+1)=b_{n+1}>f(n)=b_n$이 성립한다.

해설 - [문제2]

$h'(x)=e^{-x}\sin x$라고 하고 $h'(x)$의 부정적분 중 상수항이 0인 함수를 $h(x)$라 하자.

$$\int_0^\pi e^{-x}x\sin x dx=\int_0^\pi xh'(x)dx=\left[xh(x)\right]_0^\pi-\int_0^\pi h(x)dx=\pi h(\pi)-\int_0^\pi h(x)dx \quad \cdots ①$$

$$h(x)=\int e^{-x}\sin x dx=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x dx=-e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x dx$$

이므로 $2h(x)=-e^{-x}(\cos x+\sin x)$, $h(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)$

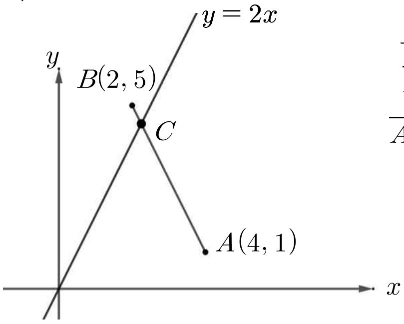
$$\begin{aligned}\int_0^\pi h(x)dx&=-\frac{1}{2}\left\{\int_0^\pi e^{-x}\cos x dx+\int_0^\pi e^{-x}\sin x dx\right\}\\&=-\frac{1}{2}\left\{\int_0^\pi e^{-x}\cos x dx+\left[-e^{-x}\sin x\right]_0^\pi+\int_0^\pi e^{-x}\cos x dx\right\}\\&=-\int_0^\pi e^{-x}\cos x dx\\&=-\left\{\left[-e^{-x}\cos x\right]_0^\pi-\int_0^\pi e^{-x}\sin x dx\right\}\\&=-e^{-\pi}-1+\int_0^\pi e^{-x}\sin x dx\\&=-e^{-\pi}-1+h(\pi)-h(0)=-e^{-\pi}-1+\frac{1}{2}e^{-\pi}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}e^{-\pi}-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

① 식에서 $\int_0^\pi e^{-x}x\sin x dx=\pi h(x)-\int_0^\pi h(x)dx=\frac{1}{2}\pi e^{-\pi}+\frac{1}{2}e^{-\pi}+\frac{1}{2}$

해설 - [문제3]

[3-①] $\sqrt{5\left(a-\frac{12}{5}\right)^2-\frac{144}{5}+29}=\sqrt{5\left(a-\frac{12}{5}\right)^2+\frac{1}{5}}$ 이므로 최솟값은 $a=\frac{12}{5}$ 일 때 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 이다.

[3-②]

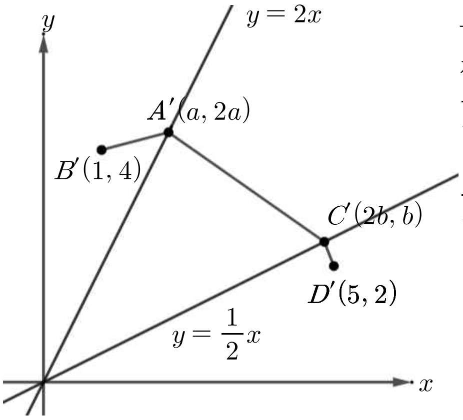


그래프와 같이 직선 $\overleftrightarrow{AB}$와 $y=2x$의 교점이 C일 때 $\overline{AC}+\overline{BC}$가 $\overline{AB}$로 최솟값을 가진다. 따라서 $\overline{AB}=\sqrt{(4-2)^2+(5-1)^2}=2\sqrt{5}$ 의 최솟값을 가진다.

[3-③] $f(a)=\sqrt{(a-2)^2+(2a-5)^2}+\sqrt{(a-4)^2+(2a-1)^2}$ $A(4,1)$, $B(2,5)$, $C(a,2a)$라 했을 때 $f(a)=\overline{BC}+\overline{AC}$이다. 따라서 [3-②]에 의해 $f(a)$는 최솟값 $2\sqrt{5}$ 를 가진다.

[3-④] $\sqrt{(a-1)^2+(2a-4)^2}+\sqrt{(a-2b)^2+(2a-b)^2}+\sqrt{(2b-5)^2+(b-2)^2}$

$A'(a,2a)$, $B'(1,4)$, $C(2b,b)$, $D'(5,2)$라 했을 때



주어진 식은 $\overline{A'B'}+\overline{A'C'}+\overline{C'D'}$값과 같다. 이때 직선 $\overleftrightarrow{B'D'}$위에 점 A', C'가 있을 때 $\overline{A'B'}+\overline{A'C'}+\overline{C'D'}$의 값이 $\overline{B'D'}$로 최소이다. 따라서 주어진 식의 최솟값은 $\overline{B'D'}=\sqrt{(1-5)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$ 이다.