

2016학년도 고대수교(KUME) 9월 모의평가

집필 고려대학교 수학교육과 수학문제연구부
조용환 김민정 장재혁 이경민 황현정
정수연 박성은 심준보 이동선 김정문
심재운 신문성

검토 이하늘(고려대학교 수학교육과)
현우람(고려대학교 수학교육과)
양병호(고려대학교 수학교육과)
박근서(고려대학교 수학교육과)
조기강(D&T 수학연구소)
안정혁(D&T 수학연구소)
조민성(D&T 수학연구소)

본 모의평가에 대한 저작권은 고려대학교 수학교육과 수학문제연구부에게 있으며,
저작권자의 허락 없이 전부 또는 일부를 영리적 목적으로 사용하거나 2차적 저작물
작성 등으로 이용하는 일체의 행위는 정보통신망 이용촉진 및 정보보호, 저작권 관련
법률에 따라 금지되어 있습니다.

제 2 교시

수학 영역(B형)

5지선다형

1. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $A-B$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{6x}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

3. 좌표공간에서 두 점 $A(a, 3, -1)$, $B(-2, 1, b)$ 에 대하여 선분 AB의 중점이 y 축 위에 있을 때, $a+b$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 + a_5 = 3$ 일 때, a_7 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 두 사건 A, B 에 대하여 A 와 B 는 서로 독립사건이고

$$P(A^c) = P(B) = \frac{1}{3}$$

일 때, $P(A \cup B)$ 의 값은? (단, A^c 은 A 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

6. 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{6}$ 일 때,
 $|\vec{a}-\vec{b}|$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

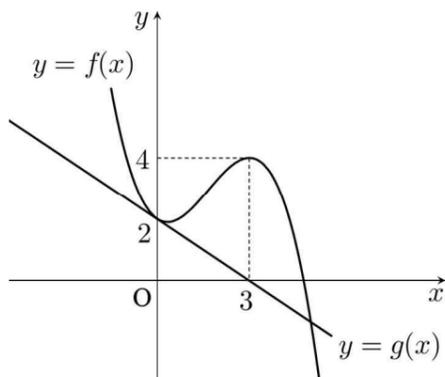
7. 함수 $f(x) = a \cos 2x + 2 \sin x \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 최댓값이 2일 때,
양수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

8. 숫자 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 택한 4개의 숫자의 합이 9이하가 되는 경우의 수는? [3점]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

9. 삼차함수 $y=f(x)$ 와 $f(x)$ 의 $x=0$ 에서의 접선의 방정식 $y=g(x)$ 의 그래프가 다음과 같다.

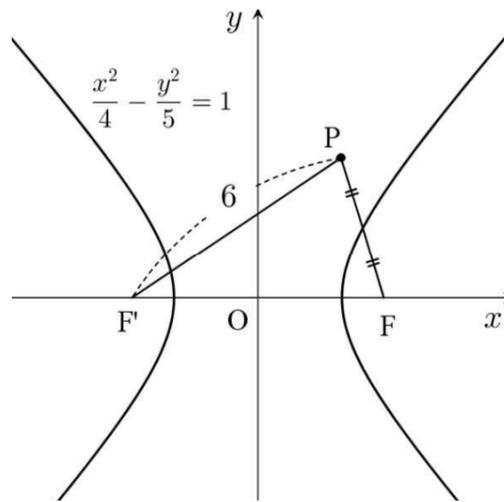


함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 극댓값 4를 가질 때,
방정식 $\frac{4-f(x)}{g(x)}=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10. 그림과 같이 두 점 F, F' 을 초점으로 하는 쌍곡선

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 이 있다. 제 1사분면 위에 있는 점 P 가 $\overline{F'P}=6$ 를 만족하고 선분 PF 의 중점이 쌍곡선 위에 있을 때, 삼각형 $PF'F$ 의 넓이는? [3점]



- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

11. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 2$ 이고

$$\sqrt{n+1} a_{n+1} = (n+1) \sqrt{n} a_n - n \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정의 일부이다.

주어진 식의 양변을 $\sqrt{n+1}$ 로 나누면

$$a_{n+1} = \sqrt{n^2+n} a_n - \frac{n}{\sqrt{n+1}}$$

이다. 정리하면

$$a_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \boxed{\text{(가)}} \times \left(a_n - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

이다. 수열 $\{b_n\}$ 을 $b_n = a_n - \frac{1}{\sqrt{n}}$ 이라고 하면

$$b_{n+1} = \boxed{\text{(가)}} \times b_n \quad (n \geq 1)$$

이다.

$$\frac{b_2}{b_1} \times \frac{b_3}{b_2} \times \dots \times \frac{b_n}{b_{n-1}} = \boxed{\text{(나)}} \quad (n \geq 2)$$

이므로

$$b_n = \boxed{\text{(나)}} \times b_1 \quad (n \geq 2)$$

이다. 이 때, $b_1 = a_1 - \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ 이므로

$$a_n = \boxed{\text{(나)}} + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $f(4) \times g(5)$ 의 값은? [3점]

- ① 200 ② 220 ③ 240 ④ 260 ⑤ 270

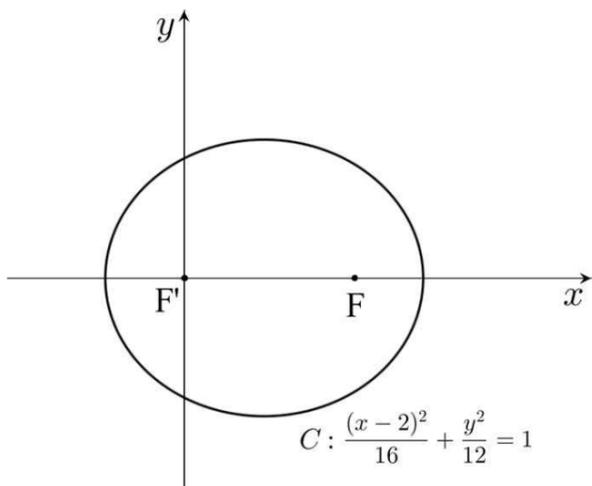
12. 함수

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1)-1 & (x < 1) \\ 1+\ln x & (x \geq 1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)f(-x)$ 가 $x=1$ 에서 연속일 때, 실수 a 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{1}{5}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ -1

[13~14] 그림과 같이 타원 $C: \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 와 타원 C 의 두 초점 F 와 F' 에 대하여 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. 타원 C 와 y 축이 만나는 점 중 y 좌표의 값이 양수인 점을 P 라고 하자. 직선 PF 과 타원으로 둘러싸인 영역 중에서, 점 F' 를 포함하지 않는 영역을 x 축 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? [3점]

- ① 34π ② 36π ③ 38π ④ 40π ⑤ 42π

14. 일차변환 $f = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ 와 $g = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 에 대하여, 점

F 가 변환 $f \circ g$ 에 의하여 옮겨지는 점을 점 Q 라 하자. 점 Q 가 타원 C 위의 점일 때, $\cos\theta$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

15. 구간 $[0, 3]$ 에서 정의된 연속확률변수 X 의 확률밀도함수가

$$f(x) \text{이다. } X \text{의 분산이 } 4 \text{이고 } \int_0^3 (x^2+3)f(x)dx = 11 \text{ 일 때,}$$

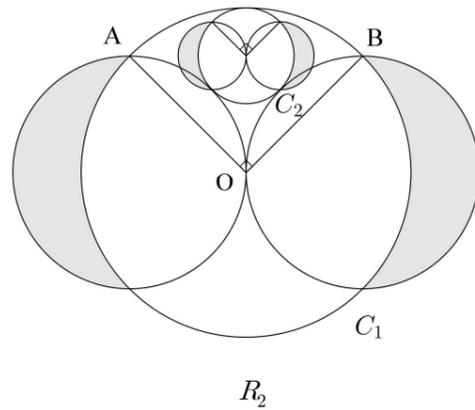
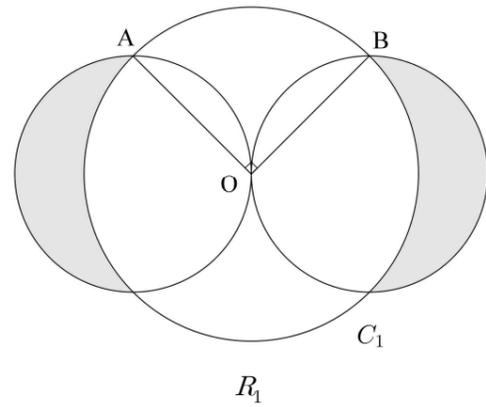
X 의 평균은? [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

16. 중심이 O 이고 반지름의 길이가 1인 원 C_1 이 있다. 그림과

같이 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ 인 원 위의 두 점을 A, B 라 하자. 점 A 와 O 를 지나고 원과 점 B 와 O 를 지나고 원이 넓이가 같고 점 O 에서 외접하도록 그렸을 때, 두 원의 내부와 원 C_1 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

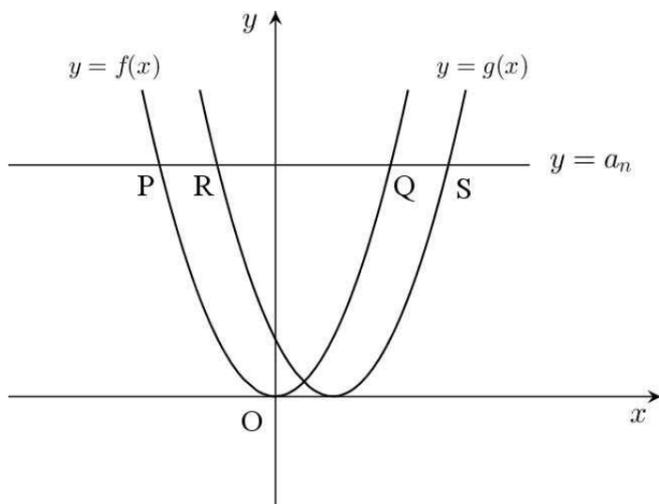
그림 R_1 에서 그린 두 원에 외접하고 호 AB 에 접하는 원 C_2 를 그린다. 원 C_2 에 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 두 원을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



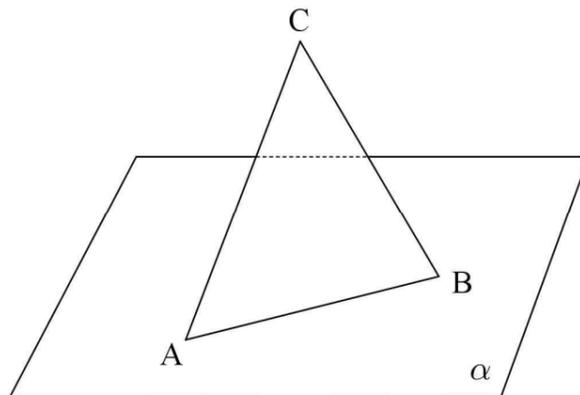
- ① $\frac{1+2\sqrt{2}}{7}$ ② $\frac{2+4\sqrt{2}}{7}$
 ③ $\frac{2+6\sqrt{2}}{7}$ ④ $\frac{1+2\sqrt{2}}{7}\pi$
 ⑤ $\frac{2+4\sqrt{2}}{7}\pi$

17. 직선 $y = a_n$ 이 함수 $f(x) = x^2$ 의 그래프와 만나는 두 점 P, Q와 함수 $g(x) = (x-1)^2$ 과 만나는 두 점 R, S에 대하여 $\overline{RQ} = n$ 이다. 선분 RQ와 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3}$ 의 값은? (단, n 은 자연수이고 a_n 은 양수이다.) [4점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$



18. 그림과 같이 평면 α 위에 놓여있는 선분 AB를 한 변으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 직선 AC와 평면 α 가 이루는 각의 크기는 45° 이고 직선 AC와 점 B사이의 거리는 4이다. $\overline{AC} = 6$ 이고 $\overline{BC} = 5$ 일 때, 평면 ABC와 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 하자. $\tan\theta$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ② $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ ③ $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ ④ $\frac{4\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{7}}{7}$

19. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$BA = B^2 + 2E, \quad A^2 + 2AB + 3B^2 = O$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?
(단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행렬이다.) [4점]

—<보 기>—

- ㄱ. $AB = BA$
 ㄴ. $A+B$ 의 역행렬이 존재한다.
 ㄷ. $(A+2B)^2 = E$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 1보다 큰 실수 x 에 대하여 $\log x$ 의 지표와 가수를 각각

$f(x), g(x)$ 라 하자. $f(x) + \frac{3}{g(x)}$ 의 값이 10보다 작은 홀수가

되도록 하는 x 의 값 중 6번째로 큰 수를 $10^{\frac{n}{m}}$ 라고 할 때,
 $m+n$ 의 값은? (단, $g(x) \neq 0$ 이고, m 과 n 은 서로소인
 자연수이다.) [4점]

- ① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

21. 함수 $f(x) = 3kx^3 - kx$ 와 첫째항이 $-\frac{1}{3}$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은? [4점]

- (가) $a_n \leq a_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
- (나) $\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x) dx = 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
- (다) $a_n + a_{n+2} \leq 2a_{n+1}$ 을 만족하는 n 의 최솟값은 5이다.

- ① 85 ② 86 ③ 87 ④ 88 ⑤ 89

단답형

22. 함수 $f(x) = 5\ln(x^2 + 1)$ 에 대하여 $f'(3)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 어느 고등학교의 모든 학생은 자전거와 버스 중 하나만 이용하여 등교한다. 이 학교의 남학생 수와 여학생 수의 비가 3:4이고 남학생의 60%와 여학생의 40%가 자전거로 등교한다. 버스로 등교하는 학생 중에서 한 학생을 임의로 선택할 때, 이 학생이 여학생일 확률이 p 이다. $30p$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 분수부등식 $\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-2} \leq 0$ 을 만족시키는 모든 자연수 x 의 합을 구하시오. [3점]

25. 자극에 대한 소리의 크기는 표준 소리 압력에 대한 상대적인 음의 세기이다. 표준 소리의 압력을 $P_0(\mu\text{Pa})$, 자극의 소리 압력을 $P(\mu\text{Pa})$, 기준 소리 압력에 대한 자극의 상대적인 소리의 크기를 $S(\text{dB})$ 라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$S = 20(\log P - \log P_0) \quad (P > 0, P_0 > 0)$$

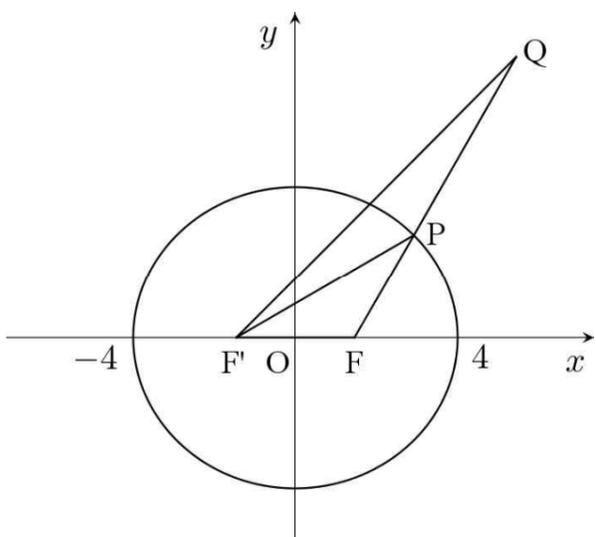
- 두 소리 자극 A, B 에 대하여 자극의 소리 압력을 각각 P_A ($P_A > 0$), P_B ($P_B > 0$)라 하고, 상대적인 소리의 크기를 S_A, S_B 라고 하자. $S_A = 40 + S_B$ 일 때, $\frac{P_A}{P_B}$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 어느 지역 학생들의 일주일 자습시간은 평균 9시간, 표준편차 σ 시간인 정규분포를 따른다고 한다. $P(a \leq X \leq 9) = 0.3413$ 일 때, 이 지역 학생 중에서 임의추출한 25명의 일주일 자습시간의 표본평균이 8이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값이 0.0062이다. 실수 a 의 값을 구하시오.

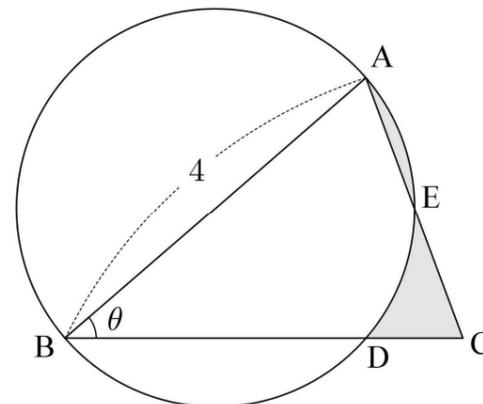
z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

[4점]

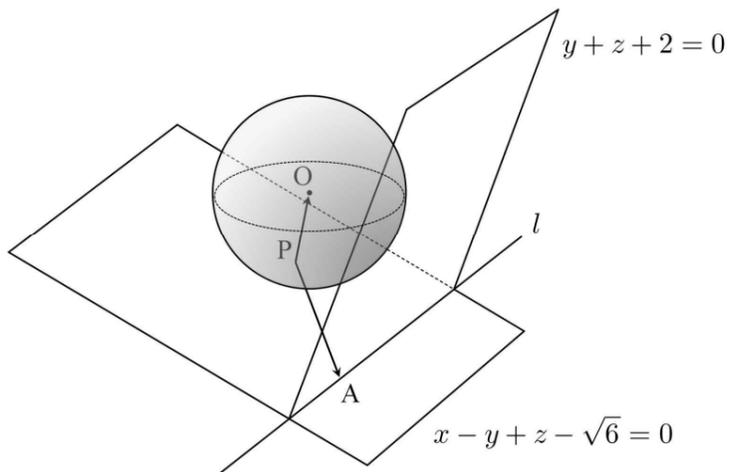
27. 그림과 같이 중심이 원점이고 두 초점 F와 F'이 x축 위에 있는 타원이 있다. 제 1사분면에 있는 타원 위의 점 P에 대하여 P를 $\angle PF'F = \frac{\pi}{6}$ 가 되도록 제 1사분면에 잡고, 선분 FP의 연장선 위에 y좌표가 양수인 점 Q를 $\overline{PQ} = \overline{PF'}$ 가 되도록 잡았을 때, $\overline{FF'} = \overline{PF}$ 를 만족한다. 타원의 장축의 길이가 8일 때, 삼각형 QFF'의 넓이가 $p+q\sqrt{3}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. [4점]



28. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{BC} = 4$ 이고 $\angle ABC = \theta$ 인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 원이 선분 AC와 만나는 점을 E, 선분 BC와 만나는 점을 D라고 하자. 호 AE와 선분 AE로 둘러싸인 영역의 넓이와 선분 EC, 선분 DC와 호 ED로 둘러싸인 영역의 넓이의 합을 $S(\theta)$ 라고 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



29. 좌표공간에서 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 위를 움직이는 점 P에서 평면 $x - y + z - \sqrt{6} = 0$ 와 평면 $y + z + 2 = 0$ 에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하고, 원점에서 두 평면의 교선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 P, Q, R, H가 $\overrightarrow{QH} \cdot \overrightarrow{PH} + \overrightarrow{RQ} \cdot \overrightarrow{RH} = 3$ 을 만족하고 직선 l 위의 점 A에 대하여 $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA}$ 의 최댓값이 $\frac{3}{4}$ 이다. $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA}$ 가 최대가 될 때의 점 P에 대하여 삼각형 OPA의 넓이를 k 라 할 때, $64k^2$ 의 값을 구하시오. [4점]



30. 원점을 지나는 삼차함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x) = 2^{f(x)}$ 가 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $g'(x) = 0$ 이 두 실근 1, n 을 갖는다.
- (나) $g'(0) = 6 \times \frac{\ln 2}{n}$

함수 $h(x) = (g \circ g)(x)$ 의 극점의 개수를 a_n 이라고 할 때,

$\sum_{n=1}^{10} a_n$ 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항
 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.