2016학년도 KUME 9월 모의평가
정답 및 해설 (B형)

• 2교시 수학 영역 •

[B 형]

1	③	2	①	3	③	4	②	5	⑤
6	②	7	③	8	④	9	②	10	①
11	③	12	④	13	⑤	14	④	15	②
16	②	17	①	18	⑤	19	③	20	④
21	③	22	3	23	20	24	4	25	100
26	7	27	16	28	2	29	75	30	50

16) 정답 ②

점 A와 점 O를 지나는 원의 중심을 O_1, 점 B와 점 O를 지나는 원의 중심을 O_2라 하자. 두 원이 점 O에서 외접하기 위해서는 $\angle \mathrm{AOO}_1 = \angle \mathrm{BOO}_2 = 45^\circ$가 되어야 한다. 즉, 삼각형 AOO_1은 $\overline{\mathrm{AO}_1} = \overline{\mathrm{OO}_1}$이고, $\angle \mathrm{AOO}_1 = \angle \mathrm{OAO}_1 = 45^\circ$ 인 직각이등변 삼각형이 되고, 삼각형 BOO_2 또한 마찬가지로 직각이등변 삼각형이 된다. 그러므로, 점 O_1과 O_2를 중심으로 하는 두 원은 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 원이다.

그림 R_1에 색칠된 두 영역은 모양이 같고

그 넓이는 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 반원의 넓이에서 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 90°인 활꼴의 넓이를 뺀 것의 두배이므로

$$2\left\{\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\right\} = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

이 된다.

다음으로 원 C_2의 중심을 O_3, 반지름을 r이라고 하자. 삼각형 $\mathrm{O}_3\mathrm{OO}_1$은 $\angle \mathrm{O}_3\mathrm{OO}_1 = 90^\circ$ 인 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{O}_3\mathrm{O}} = 1 - r$, $\overline{\mathrm{OO}_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_3} = r + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 피타고라스에 의하여 $r = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 가 된다.

원 C_1과 C_2의 닮음비가 $1 : \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이므로

그림 R_1에 색칠된 영역의 넓이와 그림 R_2에서 새롭게 색칠된 영역의 넓이비는

$$1^2 : \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 : \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$$

가 된다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)} = \frac{2 + 4\sqrt{2}}{7}$$

이 된다.

17) 정답 ①

점 P와, Q는 직선 $y = a_n$ 과 $y = x^2$ 의 교점이므로 $\mathrm{P}(-\sqrt{a_n}, a_n)$, $\mathrm{Q}(\sqrt{a_n}, a_n)$ 이다.

점 R은 점 P를 x축 방향으로 1만큼 평행이동 한 점이기 때문에 $\mathrm{R}(1 - \sqrt{a_n}, a_n)$ 이다.

$\overline{\mathrm{RQ}} = n$ 이라고 했으므로 $2\sqrt{a_n} - 1 = n$ 이고 정리하면 $a_n = \frac{(n+1)^2}{4}$ 이다.

구하는 영역은 $x = \frac{1}{2}$ 대칭이므로

$$S_n = 2\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{a_n}} a_n - x^2 dx$$

$$= 2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} \frac{(n+1)^2}{4} - x^2 dx$$

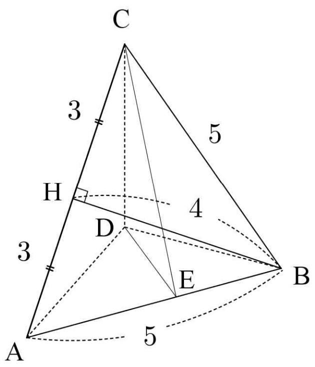
$$= 2\left[\frac{(n+1)^2}{4}x - \frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{n+1}{2}}$$

$$= \frac{(n+1)^3}{4} - \frac{(n+1)^3}{12} - \left\{\frac{(n+1)^2}{4} - \frac{1}{12}\right\}$$

$$= \frac{(n+1)^3}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} + \frac{1}{12}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^3} = \frac{1}{6}$$

18) 정답 ⑤



점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 문제에서 거리가 4라고 했기 때문에 $\overline{\mathrm{HC}} = \overline{\mathrm{HA}} = 3$ 이고 삼각형 ABC가 이등변 삼각형이라는 것을 알 수 있다. 따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = 5$ 이다.

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E라고 하자. 삼각형 ABC의 넓이는 12이고 $\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{CE}} \times \overline{\mathrm{AB}}$ 와 같기 때문에 $\overline{\mathrm{CE}} = \frac{24}{5}$ 이다.

직선 AC가 α평면과 이루는 각의 크기가 45° 이므로 CD의 길이는 $3\sqrt{2}$ 이다.

두 평면의 이면각의 크기를 θ라고 하면

$\sin\theta = \frac{5\sqrt{2}}{8}$ 이고 $\cos\theta = \frac{\sqrt{14}}{8}$

따라서 $\tan\theta = \frac{5\sqrt{7}}{7}$

(정사영을 통해서도 구할 수 있다. 삼각형 ADB의 각 변의 길이를 구해보면 직각삼각형인 것도 알 수 있다.)

19) 정답 ③

ㄱ. $BA = B^2 + 2E$ 에서 B^2을 좌변으로 넘기면

$BA - B^2 = 2E$

$B(A - B) = 2E$

B와 $A - B$는 역행렬 관계이므로

$(A - B)B = 2E$

따라서 $AB - B^2 = 2E$ 이고 $AB = BA$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 교환법칙이 성립했기 때문에

$A^2 + 2AB + 3B^2 = (A+B)^2 + 2B^2 = O$

$(A+B)^2 = -2B^2$ 인데 B의 역행렬이 존재하므로 B^2의 역행렬도 존재한다. 따라서 좌변의 $A+B$의 역행열도 존재한다. (참)

ㄷ. $(A+2B)^2 = E$ 가 참이라고 하자.

$A^2 + 4AB + 4B^2 = E$ 이고

두 번째 준식에서 $A^2 + 2AB + 3B^2 = O$ 이므로 연립하면 $2AB + B^2 = E$ 이다. 다시 첫 번째 식과 연립하면 $B^2 = -E$ 이고 이 결과를 준식에 대입해 보면 $AB = E$, , $A^2 = E$ 이다.

$A^2B^2 = -E$ 인데 $(AB)^2 = E$ 이므로 모순 (거짓)

20) 정답 ④

$x > 1$ 이므로 $f(x)$는 0이상의 정수이다.

$f(x) + \frac{3}{g(x)}$ 가 10이하의 홀수가 되기 위해서는 $\frac{3}{g(x)}$도 자연수가 되어야 한다.

$0 \le g(x) < 1$ 이므로 $3 < \frac{3}{g(x)}$ 이다.

따라서 $\frac{3}{g(x)}$는 4, 5, 6, 7, 8, 9 가 될 수 있고 이때 가수는 $g(x) = \frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{3}$이다. 각각의 가수에 대해서 가능한 $f(x)$를 찾아보자.

$\frac{3}{g(x)} = 4$ 일 때, $g(x) = \frac{3}{4}$이고 $f(x)$는 1, 3, 5

$\frac{3}{g(x)} = 5$ 일 때, $g(x) = \frac{3}{5}$이고 $f(x) = 0, 2, 4$

$\frac{3}{g(x)} = 6$ 일 때, $g(x) = \frac{1}{2}$이고 $f(x) = 1, 3$

$\frac{3}{g(x)} = 7$ 일 때, $g(x) = \frac{3}{7}$이고 $f(x) = 0, 2$

$\frac{3}{g(x)} = 8$ 일 때, $g(x) = \frac{3}{8}$이고 $f(x) = 1$

$\frac{3}{g(x)} = 9$ 일 때, $g(x) = \frac{1}{3}$이고 $f(x) = 0$

6번째로 큰 x는 $g(x) = \frac{3}{7}$이고 $f(x) = 2$ 일 때, $x = 10^{\frac{17}{7}}$ 이므로 $m + n = 24$

21) 정답 ③

① 조건 (가)

문제에서 초항이 $-\frac{1}{3}$이라고 했기 때문에 수

열 a_n은 $-\frac{1}{3}$부터 시작하여 점차 증가하는 수열이다.

② 조건 (나)

구간 $[a_n, a_{n+1}]$ 에서의 적분값은 1이다.

③ 조건 (다)

a_{n+1}을 이항하면 $a_{n+2}-a_{n+1} \leq a_{n+1}-a_n$

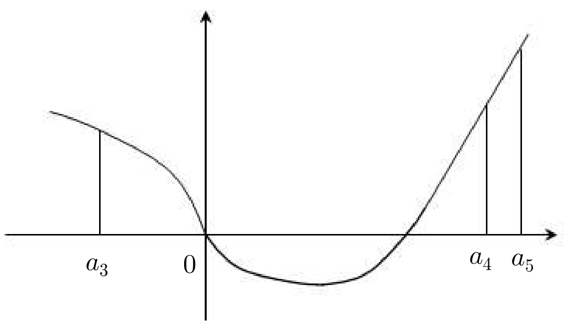
이 관계식을 만족하는 n의 최솟값이 5이므로 $n=5, 6, 7, 8, \cdots$일 때 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$a_6-a_5 \geq a_7-a_8 \geq a_8-a_9 \geq \cdots$$

이 부등식으로부터 주어진 적분구간의 길이가 $[a_5, a_6]$에서부터 계속에서 감소한다는 것을 알 수 있다. 그러나 $n=4$일 때 성립하지 않기 때문에 구간 $[a_5, a_6]$의 길이가 최대여야 한다.

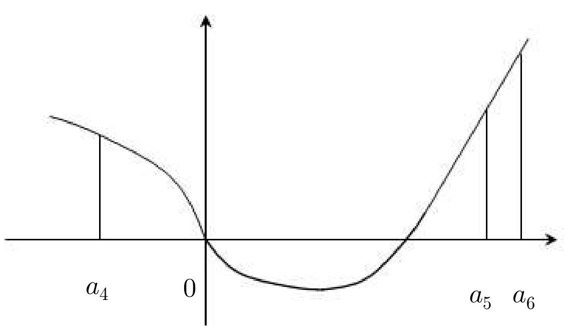
④ 주어진 삼차함수의 개형을 알아보면 $x=-\frac{1}{3}$에서 극댓값을 갖는다. $a_1=-\frac{1}{3}$이므로 a_1을 시작으로 (나) 조건에 의하여 x축 양의 방향으로 넓이가 1이 되도록 적분 구간을 잡아 갈 수 있다.

그런데 삼차함수는 극댓값을 기준으로 점점 감소하기 때문에 적분값이 계속해서 1이 되도록 하기 위해서 구간의 길이가 길어져야 한다. 따라서 $a_2-a_1 < a_3-a_2 < \cdots$



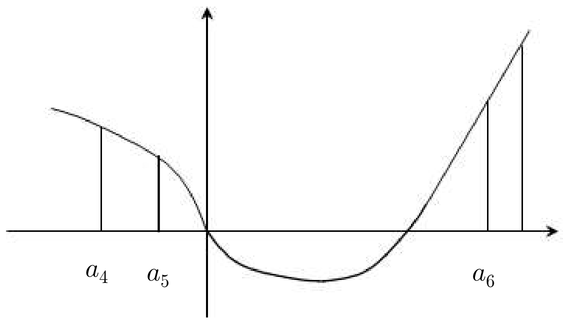
만약 구간 $[a_1, 0]$까지의 그래프아래 넓이가 4보다 작다면 위 그림과 같이 적분 구간이 $[a_5, a_6]$이 가장 커지는 수열 a_n이 존재할 수 없다. 따라서 구간 $[a_1, 0]$의 넓이가 조건을 만족시키는 수열 a_n이 존재할 수 있도록 충분히 넓어져야 한다.

(1) 구간 $[a_4, 0]$에서 그래프 아래 넓이가 1보다 작은 경우



위 그림과 같이 조건을 만족시키는 수열이 존재할 수 없다.

(2) 구간 $[a_4, 0]$에서 그래프 아래 넓이가 1보다 크거나 같은 경우



위 그림과 같이 조건을 만족하는 수열 a_n이 존재한다.

구간 $[a_1, a_4]$에서 그래프 아래 넓이는 3이고 구간 $[a_4, 0]$에서 그래프 아래 넓이가 1보다 크거나 같아야 하므로 구간 $[a_1, 0]$에서 그래프 아래 넓이가 4보다 크거나 같아야 한다.

$4 \leq \int_{-\frac{1}{3}}^{0} f(x)dx$

$\int_{-\frac{1}{3}}^{0} f(x)dx = \frac{5}{108}k$ 이므로

정리하면 $4 \leq \frac{5}{108}k$

k의 범위는 $86.\text{xx} \leq k$

∴ 최솟값은 87이다.

27) 정답 16

$\overline{\mathrm{F'F}}=a$ 라고 하자. 삼각형 F′FP는 이등변삼각형 이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=a$ 이다. 점 P는 타원위의 점이므로 타원의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{F'P}}=8-a$

그런데 삼각형 F′FP의 두 밑각의 크기는 30° 이므로 삼각비에 의해 $a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{8-a}{2}$

$\therefore\ a=\frac{8}{1+\sqrt{3}}=4(\sqrt{3}-1)$

삼각형 F′FP도 이등변 삼각형이므로 $\overline{\mathrm{F'P}}=\overline{\mathrm{PQ}}$ 이고 타원의 정의해 의해 $\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{PF'}}=8$

따라서 $\overline{\mathrm{FQ}}=8$

각 F′FP의 외각의 크기는 60° 이므로 삼각형 QFF′의 높이는 $8\tan60^\circ=4\sqrt{3}$

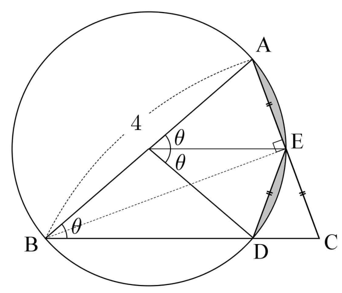
삼각형 QFF′의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4(\sqrt{3}-1)\times4\sqrt{3}$

$=24-8\sqrt{3}$

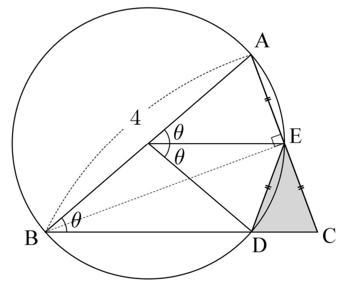
$\therefore\ p+q=16$

28) 정답 4

원의 중심을 O라고 하면, 원의 중심 O와 점 E는 각각 선분 AB, 선분 AC의 중점이므로 선분OE와 선분 BC는 평행하다.
원의 반지름으로 선분 OB, 선분 OD, 선분 OE, 선분 OA의 길이는 같으므로, 평행선의 성질에 의해 $\angle \mathrm{AOE}=\angle \mathrm{EOD}=\theta$ 이다.
따라서 아래 그림과 같이 두 활꼴의 넓이가 같다.



따라서 구하는 넓이는 아래 그림과 같다.



점 E는 원 위의 점이므로 $\angle \mathrm{AEB}=\frac{\pi}{2}$ 이고 따라서 점 E는 선분 AC의 중점이다. 선분 AE와 선분 ED, 선분 EC의 길이가 모두 $4\sin\frac{\theta}{2}$ 로 같고 삼각형 EDC와 삼각형 ABC는 닮음(AA)이므로 $\angle \mathrm{CED}=\theta$ 이다.

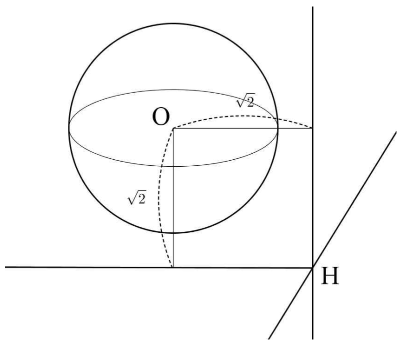
$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DE}}\times\overline{\mathrm{CE}}\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\times16\times\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta$$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}8\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to+0}8\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{4\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}\times\frac{\sin\theta}{\theta}$$
$$=2$$

29) 정답 75

① 점 P의 자취

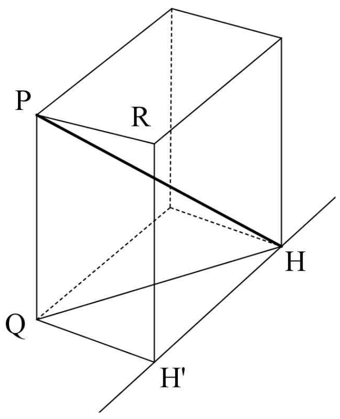
구의 중심으로부터 각 평면까지의 거리는 $\sqrt{2}$이고 두 평면이 이루는 각의 크기는 90° 이다.



$\overrightarrow{QH}\cdot\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{RQ}\cdot\overrightarrow{RH}=3$ 를 만족하는 점 P의 자취를 알아보자.

두 평면이 이루는 각이 90° 였기 때문에 점 P에서 교선 l에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

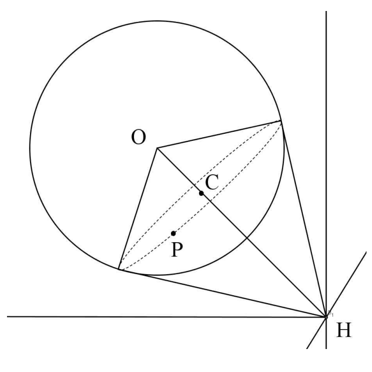
$\overrightarrow{QH}\cdot\overrightarrow{PH}=|\overrightarrow{QH}|^2$ 이고
$\overrightarrow{RQ}\cdot\overrightarrow{RH}=|\overrightarrow{RH'}|^2$ 이므로
($\because \overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{RH'}+\overrightarrow{H'Q}$, $\overrightarrow{RH}=\overrightarrow{RH'}+\overrightarrow{H'H}$)
준식은 $|\overrightarrow{QH}|^2+|\overrightarrow{RH'}|^2=3$ 이다.
$|\overrightarrow{RH'}|^2=|\overrightarrow{PQ}|^2$ 이므로 피타고라스 정리에 의해
$|\overrightarrow{HP}|^2=3$ 이다.



결국 점 P는 점 H를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 구 위를 움직인다.

그런데 점 P는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 구 위의 점이기도 하다. 따라서 두 구의 교선(원)위를 움직이는 점이라는 것을 알 수 있다.

$\overline{OH}=2$, $\overline{OP}=1$, $\overline{HP}=\sqrt{3}$ 이므로 삼각형 OPH는 직각삼각형을 이룬다. 점 P가 그리는 원의 중심을 C라고 하면 그 원의 반지름은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

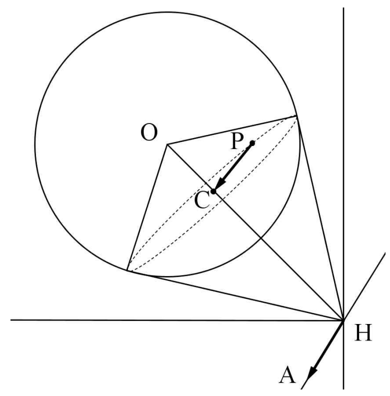


② 점 A의 위치
$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}$ 의 최댓값이 $\frac{3}{4}$라고 했으므로 언제 최대가 되는지 알아보자.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA})\\ &= |\overrightarrow{PO}|^2+\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{HA}\\ &= 1+(-1)+\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{HA}\end{aligned}$$

$(\because \overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OH}=-\frac{1}{2}\times 2=-1\ )$

$$\begin{aligned}&= \overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{HA}\\ &= (\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CO})\cdot\overrightarrow{HA}\\ &= \overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{HA}\end{aligned}$$

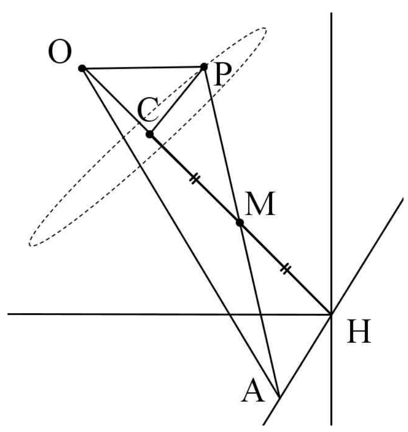


최댓값은 $\overrightarrow{CP}$와 $\overrightarrow{HA}$ 가 평행이고 방향이 반대 일 때라는 것을 알 수 있고 그 때의 최댓값이 $\frac{3}{4}$ 라고 했으므로 점 A는 H로부터 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 만큼 떨어진 곳에 있다.

$(\because \overline{CP}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ )$

$\therefore\ \overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PA}$ 가 최댓값일 때, 삼각형 OPA 는 다음 그림과 같다.



$\overline{CH}$의 중점을 M이라 하면 $\overline{OM}=\frac{5}{4}$ 이고 삼각형 OPA의 높이는 $\overline{HA}+\overline{CP}=\sqrt{3}$

삼각형 OPA의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}\times\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{8}$

$\therefore\ 64k^2=75$

30) 정답 50

$g'(x)=2^{f(x)}\times f'(x)\times \ln 2$ 이고
$2^{f(x)}\times\ln 2>0$ 이므로

$g'(x)=0 \iff f'(x)=0$

$f'(x)=k(x-1)(x-n)$

$\therefore\ f(x)=k\left\{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(1+n)x^2+6nx\right\}$

$(\because f(0)=0\ )$

조건 (나)에서

$g'(0)=2^{f(0)}\times\ln 2\times f'(0)=n\times\ln 2\times k$

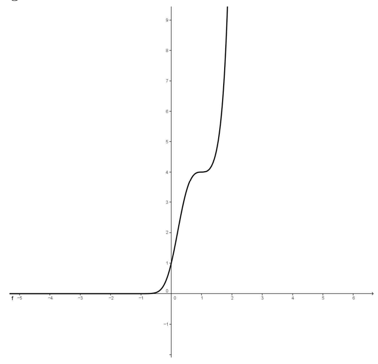
$n\times k\times\ln 2=\frac{1}{n}\times 6\times\ln 2$

$\therefore\ k=\frac{6}{n^2}$

$h'(x)=g'(g(x))\cdot g'(x)$
방정식 $g'(x)=0$ 의 근은 1과 n이므로

$h'(x)=0$
$\iff g(x)=1$ 또는 $g(x)=n$ 또는 $g'(x)=0$

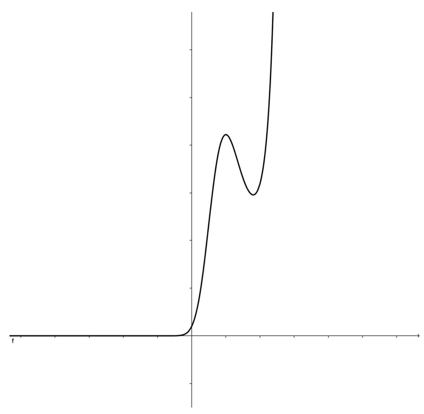
① $n=1$ 일 때
$f'(x)=0$ 는 $x=1$을 중근으로 갖기 때문에 함수 $g(x)$는 아래와 같은 그래프 개형을 갖는다.



$g'(1)=0$ 이지만 도함수의 부호 변화가 없으므로 극값을 갖지 않는다.

따라서 $a_1=0$

② $n\geq 2$ 일 때
$f'(x)=0$ 는 1과 n을 근으로 갖기 때문에 함수 $g(x)$는 아래와 같은 그래프 개형을 갖는다.

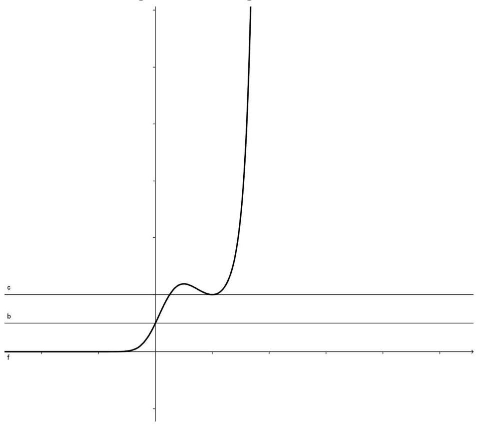


$y=g(x)$ 와 두 직선 $y=1$, $y=n$ 과의 교점의 개수를 알아보아야 한다.

$g(1)=2^{f(1)}=2^{\frac{(3n-1)}{n^2}}$

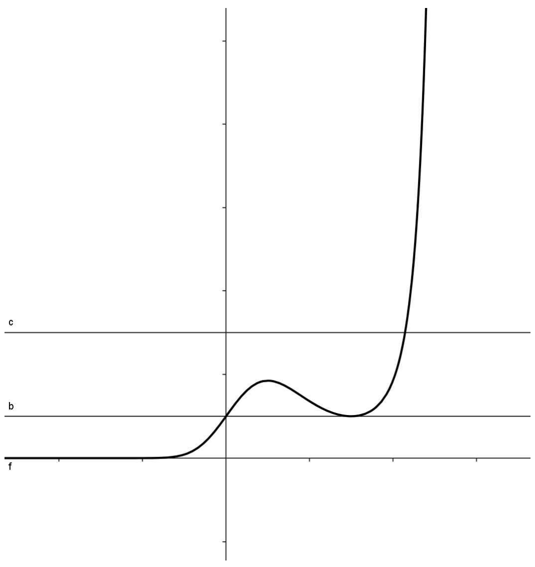
$g(n)=2^{(3-n)}$

$n=2$ 일 때 $g(1)>2$ $g(2)=2$ 이므로



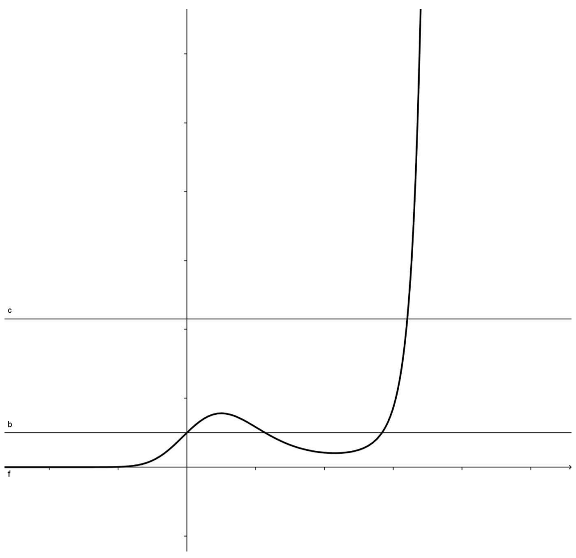
$a_2=4$

$n=3$ 일 때, $g(1)<2$, $g(3)=1$ 이므로



$a_3=4$

$n\geq 4$ 일 때 $1<g(1)<2$, $0<g(n)<1$ 이므로



$a_n=6$ $(n\geq 4)$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = 0+4+4+6\times 7=50$