2016학년도 KUME 9월 모의평가
정답 및 해설 [A형]

• 2교시 수학 영역 •

[A 형]

1	④	**2**	③	**3**	③	**4**	⑤	**5**	②
6	⑤	**7**	⑤	**8**	①	**9**	①	**10**	①
11	④	**12**	②	**13**	④	**14**	②	**15**	④
16	③	**17**	⑤	**18**	①	**19**	②	**20**	④
21	③	**22**	8	**23**	5	**24**	128	**25**	11
26	4	**27**	25	**28**	32	**29**	5	**30**	656

14. 정답 ②

ⅰ) a가 홀수일 때

함수 $f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 홀수번, 즉 1번, 3번, 5번 대칭시키면 $y=2^{-x}$이 된다. 그러므로 각각 이동된 두 그래프의 교점의 x좌표는 다음 방정식의 실근과 같다.

$$2^{-x}=4^{x-b}=2^{2(x-b)}=2^{2x-2b}$$
$$-x=2x-2b$$
$$3x=2b$$
$$\therefore\ x=\frac{2}{3}b$$

$\frac{2}{3}b$가 자연수가 되기 위해서 b는 3의 배수여야 하므로 이때 총 경우의 수는

(a가 홀수인 경우의 수)×(b가 3의 배수인 경우의 수) $=3\times2=6$

ⅱ) a가 짝수일 때

함수 $f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 짝수번, 즉 2번, 4번, 6번 대칭시키면 결국 다시 원래의 그래프가 된다. 그러므로 각각 이동된 두 그래프의 교점의 x좌표는 다음 방정식의 실근과 같다.

$$2^{x}=4^{x-b}=2^{2(x-b)}=2^{2x-2b}$$
$$x=2x-2b$$
$$\therefore\ x=2b$$

1 이상 6 이하의 모든 자연수 b에 대하여 $x=2b$의 값이 자연수가 되므로 이때 총 경우의 수는

(a가 짝수인 경우의 수) × (b의 모든 경우의 수) $=3\times6=18$

ⅰ)과 ⅱ)에 의하여 각각 이동된 두 그래프의 교점의 x좌표가 자연수가 되는 경우의 수는 총 24가지이다.

15. 정답 ④

ⅰ) 앞면이 나온 동전의 개수가 0개일 때

(앞면이 나온 동전의 개수가 0개일 확률) = $\frac{1}{4}$

추가된 흰 공 : 0개, 추가된 검은 공 : 2개

(흰 공 3개, 검은 공 4개 중 흰 공을 뽑을 확률) = $\frac{3}{7}$

ⅱ) 앞면이 나온 동전의 개수가 1개일 때

(앞면이 나온 동전의 개수가 1개일 확률) = $\frac{1}{2}$

추가된 흰 공 : 1개, 추가된 검은 공 : 1개

(흰 공 4개, 검은 공 3개 중 흰 공을 뽑을 확률) = $\frac{4}{7}$

ⅲ) 앞면이 나온 동전의 개수가 2개일 때

(앞면이 나온 동전의 개수가 2개일 확률) = $\frac{1}{4}$

추가된 흰 공 : 2개, 추가된 검은 공 : 0개

(흰 공 5개, 검은 공 2개 중 흰 공을 뽑을 확률) = $\frac{5}{7}$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여 주어진 사건이 일어날 확률은

$$\left(\frac{1}{4}\times\frac{3}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{5}{7}\right)=\frac{4}{7}$$

16. 정답 ③

주어진 식의 양변을 $\sqrt{n+1}$ 로 나누면

$$a_{n+1}=\sqrt{n^2+n}\,a_n-\frac{n}{\sqrt{n+1}}$$

이다. 정리하면

$$a_{n+1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\boxed{\sqrt{n^2+n}}\times\left(a_n-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

이다. 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n-\frac{1}{\sqrt{n}}$ 이라고 하면

$$b_{n+1}=\boxed{\sqrt{n^2+n}}\times b_n\quad(n\ge1)$$

이다.

$$\frac{b_2}{b_1}\times\frac{b_3}{b_2}\times\cdots\times\frac{b_n}{b_{n-1}}=\boxed{(n-1)!\sqrt{n}}\quad(n\ge2)$$

이므로

$$b_n=\boxed{(n-1)!\sqrt{n}}\times b_1\quad(n\ge2)$$

이다. 이 때, $b_1=a_1-\frac{1}{\sqrt{1}}=1$ 이므로

$$a_n=\boxed{(n-1)!\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

이다.

$$f(n)=\sqrt{n^2+n}\ ,\ g(n)=(n-1)!\sqrt{n}$$

이므로

$$f(4)=\sqrt{20}\ ,\ g(5)=4!\times\sqrt{5}=24\sqrt{5}$$
$$f(4)\times g(5)=\sqrt{20}\times24\sqrt{5}=240$$

17. 정답 ⑤

ㄱ. $A(A-B)=E=(A-B)A$ 이므로
$A^2-AB=A^2-BA$
$AB=BA$ (참)

ㄴ. $A(A-B)=E$ 이므로
$A^{-1}=A-B$ (참)

ㄷ. $3AB-BA=A+E$
ㄱ에 의하여 $3AB-AB=A+E$
$2AB=A+E$
$2AB-A=E$
$A(2B-E)=E$
$A^{-1}=2B-E$
ㄴ에 의하여 $2B-E=A-B$
$A+E=3B$ (참)

18. 정답 ①

세 사람이 사과를 나누어 갖는 경우
사과 4개를 세 사람에게 나누어주되, 철수는 사과를 2개이상 갖지 않아야 하므로, 다음과 같이 2가지 경우가 있다.

ⅰ) 철수가 사과를 갖지 않을 때,
사과 4개를 영희, 영수 두 사람이 나누어 가져야 하므로,
$x+y=4\,(x\ge0,y\ge0)$. $\therefore {}_2H_4={}_5C_4=5$.

ⅱ) 철수가 사과를 1개 가질 때,
사과 3개를 영희, 영수 두 사람이 나누어 가져야 하므로,
$x+y=3(x\ge0,y\ge0)$.$\therefore {}_2H_3={}_4C_3=4$.

세 사람이 귤을 나누어 갖는 경우
$x'+y'+z'=5\,(x\ge0,y\ge0,z\ge0)$. $\therefore {}_3H_5={}_7C_5=21$.
따라서, $5\times21+4\times21=9\times21=189$이다.

19. 정답 ②

점 A와 점 O를 지나는 원의 중심을 O_1, 점 B와 점 O를 지나는 원의 중심을 O_2라 하자. 두 원이 점 O에서 외접하기 위해서는 $\angle AOO_1=\angle BOO_2=45^\circ$가 되어야 한다. 즉, 삼각형 AOO_1은 $\overline{AO_1}=\overline{OO_1}$이고, $\angle AOO_1=\angle OAO_1=45^\circ$ 인 직각이등변 삼각형이 되고, 삼각형 BOO_2 또한 마찬가지로 직각이등변 삼각형이 된다. 그러므로, 점 O_1과 O_2를 중심으로 하는 두 원은 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt2}{2}$인 원이다.

그림 R_1에 색칠된 두 영역은 모양이 같고
그 넓이는 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt2}{2}$인 반원의 넓이에서 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 90°인 활꼴의 넓이를 뺀 것의 두배이므로

$$2\left\{\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\right\}=2\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

이 된다.

다음으로 원 C_2의 중심을 O_3, 반지름을 r이라고 하자. 삼각형 O_3OO_1은 $\angle O_3OO_1=90^\circ$ 인 직각삼각형이고 $\overline{O_3O}=1-r$, $\overline{OO_1}=\frac{\sqrt2}{2}$, $\overline{O_1O_3}=r+\frac{\sqrt2}{2}$ 이므로 피타고라스에 의하여 $r=1-\frac{\sqrt2}{2}$ 가 된다.

원 C_1과 C_2의 닮음비가 $1:\left(1-\frac{\sqrt2}{2}\right)$이므로
그림 R_1에 색칠된 영역의 넓이와 그림 R_2에서 새롭게 색칠된 영역의 넓이비는

$$1^2:\left(1-\frac{\sqrt2}{2}\right)^2=1:\left(\frac{3}{2}-\sqrt2\right)$$

가 된다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-\left(\frac{3}{2}-\sqrt2\right)}=\frac{2+4\sqrt2}{7}$$

이 된다.

20. 정답 ④

$x>1$ 이므로 $f(x)$ 는 0이상의 정수이다.

$f(x)+\dfrac{3}{g(x)}$ 가 10이하의 홀수가 되기 위해서는 $\dfrac{3}{g(x)}$ 도 자연수가 되어야 한다.

$0 \le g(x) < 1$ 이므로 $3 < \dfrac{3}{g(x)}$ 이다.

따라서 $\dfrac{3}{g(x)}$ 는 4, 5, 6, 7, 8, 9 가 될 수 있고 이 때 가수는 $g(x)=\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{7}$, $\dfrac{3}{8}$, $\dfrac{1}{3}$ 이다.

각각의 가수에 대해서 가능한 $f(x)$ 를 찾아보자.

$\dfrac{3}{g(x)}=4$ 일 때, $g(x)=\dfrac{3}{4}$ 이고 $f(x)$ 는 $1, 3, 5$

$\dfrac{3}{g(x)}=5$ 일 때, $g(x)=\dfrac{3}{5}$ 이고 $f(x)=0, 2, 4$

$\dfrac{3}{g(x)}=6$ 일 때, $g(x)=\dfrac{1}{2}$ 이고 $f(x)=1, 3$

$\dfrac{3}{g(x)}=7$ 일 때, $g(x)=\dfrac{3}{7}$ 이고 $f(x)=0, 2$

$\dfrac{3}{g(x)}=8$ 일 때, $g(x)=\dfrac{3}{8}$ 이고 $f(x)=1$

$\dfrac{3}{g(x)}=9$ 일 때, $g(x)=\dfrac{1}{3}$ 이고 $f(x)=0$

6번째로 큰 x는 $g(x)=\dfrac{3}{7}$ 이고 $f(x)=2$ 일 때, $x=10^{\frac{17}{7}}$ 이므로 $m+n=24$

21. 정답 ③

주어진 사차함수

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4+ax^3+bx^2$$

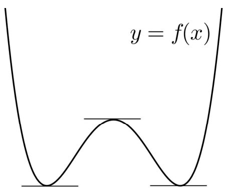
의 도함수는

$$f'(x)=x^3+3ax^2+2bx$$

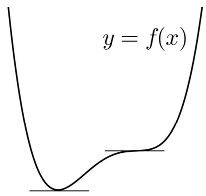
이므로, $f(0)=f'(0)=0$ 이 되어 함수 $f(x)$ 의 그래프는 원점에서 x축과 접한다.

(가) 조건에 의하여 주어진 조건을 만족하는 사차함수의 개형은 크게 다음과 같이 두 가지의 경우로 나눌 수 있다.

ⅰ) 서로 다른 세 점에서 극값을 갖되 두 극솟값이 서로 같은 경우



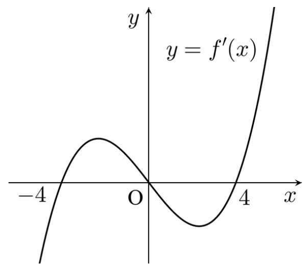
ⅱ) 하나의 극소점과 접선의 기울기가 0인 변곡점을 갖는 경우



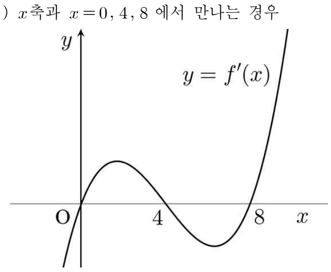
그러나 (나) 조건에 의하여 도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나야하므로 위의 두 가지의 경우 중에서 ⅰ)의 경우만 (나) 조건을 만족한다.

또한 (다) 조건의 $f'(4)=0$ 을 만족시키는 삼차함수 $y=f'(x)$ 의 개형은 세부적으로 다음과 같이 세 가지의 경우로 나눌 수 있다.

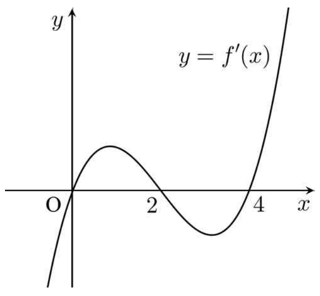
ⅰ) x축과 $x=-4, 0, 4$ 에서 만나는 경우



ⅱ) x축과 $x=0, 4, 8$ 에서 만나는 경우



ⅲ) x축과 $x=0, 2, 4$ 에서 만나는 경우



그러나 위의 세 가지 경우 중 조건 $f'(1)\cdot f'(3)<0$ 을 만족시키는 경우는 ⅲ) 뿐이다.

그러므로

$$f'(x)=x(x-2)(x-4)=x^3-6x^2+8x$$

이고,

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2$$

이므로,

$$f(-2)=\frac{1}{4}(-2)^4-2(-2)^3+4(-2)^2=36$$

26. 정답 4

$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이 $x=0, y=0$ 이외의 해를 갖기 때문에 행렬$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & a-1 \end{pmatrix}$이 역행렬을 갖지 않는다.

따라서 $a(a-1)-b=0$

즉, $a^2-a-b=0 \quad \cdots$(ㄱ)

$3a-b$ 의 값을 k라고 할 때, k의 최댓값을 구해보자.

(ㄱ)에 의해 $3a-b=k$ 에 b 대신 a^2-a 를 대입하면, $k=-a^2+4a$ 이므로, k의 최댓값은 4 이다.

27. 정답 25

전체 경우의 수 : ${}_6C_2=15$

$X=0$ 인 경우 : $(1,1)$, $(3,3)$ 2가지

$X=1$ 인 경우 : $(1,2)$ 2번 (1이 두개), $(2,3)$ 2번 (3이 두개), $(3,4)$ 2번 (3이 두개) 6가지

$X=2$ 인 경우 : $(1,3)$ 4번 (1이 두 개, 3이 두개), $(2,4)$ 5가지

$X=3$ 인 경우 : $(1,4)$ 2번 (1이 두개)2가지

X	0	1	2	3
확률	$\frac{2}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{2}{15}$

$$\therefore E(X)=0\times\frac{2}{15}+1\times\frac{6}{15}+2\times\frac{5}{15}+3\times\frac{2}{15}$$
$$=\frac{6+10+6}{15}=\frac{22}{15}$$
$$\because E(15X+3)=15E(X)+3=25$$

28. 정답 32

$\int g(x)dx=G(x)+C$ 라고 하면,

$\int_2^x g(t)\,dt=G(x)-G(2)$ 이므로

$\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}\int_2^x g(t)\,dt$

$= \lim_{x\to 2}\frac{G(x)-G(2)}{x-2} \quad = G'(x) = g(2)$

$g(2) = \int_0^2 f(t)\,dt$

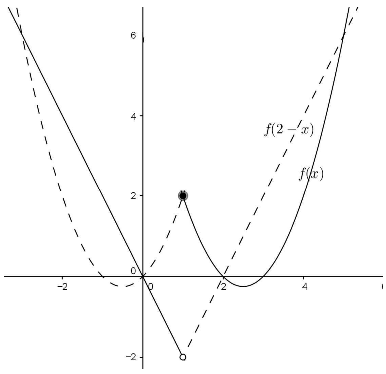
$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{ax^2}{2} + 2ax\right]_0^2 = 6a + 4 = 10$

따라서 $a = 1$ 이므로 $f(x) = x^3 + x + 2$

$\therefore f(3) = 27 + 3 + 2 = 32$

29. 정답 5

함수 $f(2a-x)$ 는 $f(x)$ 를 $x = a$ 에 대하여 대칭이동 시킨 함수이다.
$f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 불연속이므로 $f(2a-x)$ 는 $x = 2a-1$ 에서 불연속이 된다.
$a \neq 1$ 인 경우에는 $x = 1$ 에서 함수 $f(2a-x)$ 가 연속이고 $f(x)$ 가 불연속이기 때문에
극한값 $\lim_{x\to 1} f(x)f(2a-x)$ 이 존재하려면 $f(2a-1)$ 의 값이 0이 되어야 한다.
$f(2a-1) = 0$ 인 상수 a 를 구해보면 $2a-1 = 0, 2, 3$ 이다.
$\therefore a = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2$
$a = 1$ 인 경우에는 $x = 1$ 에서 함수 $f(2-x)$ 와 $f(x)$ 둘 다 불연속이므로 좌, 우 극한값을 조사해서 극한값 $\lim_{x\to 1} f(x)f(2-x)$ 이 존재하는지 알아보자.
$f(x)$ 는 실선, $f(2-x)$ 는 점선이다.

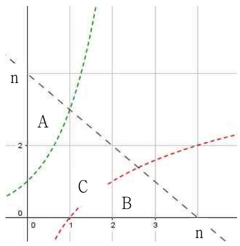


다음 그림에서 $\lim_{x\to 1+0} f(x) = 2$ 이고
$\lim_{x\to 1+0} f(2-x) = -2$ 이다. 또,
$\lim_{x\to 1-0} f(x) = -2$ 이고 $\lim_{x\to 1-0} f(2-x) = 2$ 이다. 따라서
$\lim_{x\to 1+0} f(x)f(2-x) = \lim_{x\to 1-0} f(x)f(2-x) = -4$
좌우극한값이 같으므로 $a = 1$ 일 때 극한값 $\lim_{x\to 1} f(x)f(2-x) = -4$ 존재

$\therefore$ 모든 상수 a 는 $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$ 이므로 합은 5이다.

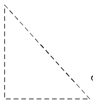
30. 정답 656

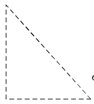
$a + b < n, a < 2^b, b < 3^a$ 를 만족시키는 자연수 (a,b) 의 모든 순서쌍의 개수는
$b < -a + n, \log_2 a < b, b < 3^a$ 영역에 속한 자연수 (a,b) 의 순서쌍의 개수와 같다.
즉, 아래 그림에서 C 영역에 속한 자연수 (a,b) 의 개수를 구하는 것과 같다.



영역 A : $b < -a + n, 3^a \le b$
영역 B : $b < -a + n, b \le \log_2 a$

C영역에 속한 자연수 격자점의 개수=

(삼각형  에 속한 자연수 격자점의 개수)
− (영역 A에 속한 자연수 격자점의 개수)
− (영역 B에 속한 자연수 격자점의 개수)
로 구할 수 있다.

ⅰ) 임의의 자연수 n 에 대하여,  에 속한 자연수 격자점의 개수는
$a = 1$ 일 때, $b = 1, 2, \cdots, n-2$
$a = 2$ 일 때, $b = 1, 2, \cdots, n-3$
$\vdots$
$a = n-1$ 일 때, $b = 1$
이므로
$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) = \sum_{k=1}^{n-2} k = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ 개이다.

ⅱ) 영역 A에 속한 자연수 (a,b) 의 개수
영역 A는 $b < -a + n, 3^a \le b$ 이기 때문에,
$a = 1$ 일 때, $b \ge 3^1, b < -1 + n$ 이므로, 자연수 (a,b) 의 개수는 $n > 4$ 에 대하여
$(a,b) = (1,3), \cdots, (1, n-2) \quad : \therefore \sum_{n=5}^{20} (n-4)$ 개
$a = 2$ 일 때, $b \ge 3^2, b < -2 + n$ 이므로, 자연수 (a,b) 의 개수는 $n > 11$ 에 대하여
$(a,b) = (2,9), \cdots, (2, n-3) \quad : \therefore \sum_{n=12}^{20} (n-11)$ 개
$n < 27$ 에 대하여 $a = 3$ 인 자연수 (a,b) 는 생기지 않는다.

<u>영역 B에 속한 자연수 (a,b) 의 개수</u>
영역 B는 $b < -a + n, b \le \log_2 a \Leftrightarrow a \ge 2^b$ 이기 때문에,
$b = 1$ 일 때, $a \ge 2^1, a < -1 + n$ 이므로, 자연수 (a,b) 의 개수는 $n > 3$ 에 대하여
$(a,b) = (2,1), \cdots, (n-2, 1) \quad : \sum_{n=4}^{20} (n-3)$ 개
$b = 2$ 일 때, $a \ge 2^2, a < -2 + n$ 이므로, 자연수 (a,b) 의 개수는 $n > 6$ 에 대하여
$(a,b) = (4,2), \cdots, (n-3, 2) \quad : \sum_{n=7}^{20} (n-6)$ 개
$b = 3$ 일 때, $a \ge 2^3, a < -3 + n$ 이므로, 자연수 (a,b) 의 개수는 $n > 11$ 에 대하여
$(a,b) = (8,3), \cdots, (n-4, 3) \quad : \sum_{n=12}^{20} (n-11)$ 개
$b = 4$ 일 때, a 는 16보다 크거나 같으므로, 자연수 (a,b) 순서쌍은 $n > 20$ 에 대하여 영역 B에 생기게 된다.

$\sum_{n=3}^{20} a_n =$ (삼각형 내부에 속한 자연수 순서쌍의 개수)
−(영역 A에 속한 자연수 순서쌍의 개수)
−(영역 B에 속한 자연수 순서쌍의 개수)
이므로,

$$\sum_{n=3}^{20} a_n = \sum_{n=3}^{20} \frac{(n-2)(n-1)}{2} - \left\{\sum_{n=5}^{20}(n-4) + \sum_{n=12}^{20}(n-11)\right\}$$
$$- \left\{\sum_{n=4}^{20}(n-3) + \sum_{n=7}^{20}(n-6) + \sum_{n=12}^{20}(n-11)\right\}$$
$$= 1140 - 181 - 303 = 656.$$