

2024학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제 자연계열 (수학)

모집 단위	수험번호	성 명
----------	------	--------

[문제 1] 좌표평면에서 오른쪽(x 축 양의 방향) 또는 위쪽(y 축 양의 방향)으로만 움직이며 x 좌표와 y 좌표가 모두 음이 아닌 정수로만 이루어진 점에서만 방향 전환을 하는 로봇이 있다. 다음 물음에 답하시오.

[문제 1-1] 로봇이 원점에서 오른쪽으로 출발하여 점 $(21, 21)$ 까지 움직일 때, 방향 전환을 정확히 5번 거쳐 갈 수 있는 경로의 수를 구하시오. 단, 원점에서는 방향 전환이 일어나지 않는다고 가정한다. **[5점]** (답 : $190^2 = 36100$)

[문제 1-2] 원점을 중심으로 하고 반지름이 58인 원 모양 테두리를 설정하자. 로봇은 원점을 출발하여 테두리에 닿으면 멈춘다. 로봇이 멈출 때까지 움직인 거리의 최댓값을 구하시오. 단, 로봇은 한 점으로 간주한다. **[10점]** (답 : $41 + 3\sqrt{187}$)

[문제 2] 자연수 n 과 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 에 대하여 $a_n = n!$ 이고, b_n 과 c_n 은 모두 자연수이다. 1보다 큰 자연수 n 에 대하여 다음 세 조건이 성립한다.

- (가) b_n 의 모든 소인수는 n 이하이다.
- (나) $\log_2 n^3 \leq c_n \leq \log_2 n^4$
- (다) b_n 은 $a_n^{c_n}$ 의 약수가 아니다.

다음 급수의 수렴 및 발산을 판정하고, 수렴하는 경우 수렴값을 구하시오.

[문제 2-1] $\left\{ \frac{1}{n} \ln a_{2n} - \frac{1}{n} \ln a_n - \ln(2n) \right\}$ **[5점]** (답 : $\ln 2 - 1$ 로 수렴)

[문제 2-2] $\left\{ \frac{b_n}{n^2} \right\}$ **[10점]** (답 : 양의 무한대로 발산)

[문제 3] -20부터 20까지의 정수 중 0을 제외한 정수 40개가 주어지고, 이들을 두 개씩 묶어 20개의 순서쌍을 만든다. 20쌍 중 임의의 순서쌍에 대하여 두 정수의 합을 확률변수 X 로 정의할 때, 다음 물음에 답하시오.

[문제 3-1] $E(X)$ 의 값을 구하고, 이 값이 순서쌍의 결정 방법과 관계 없이 일정함을 설명하시오. [5점] (답 : $E(X) = 0$)

[문제 3-2] $V(X)$ 의 값이 최대가 되도록 하는 순서쌍의 결정 방법을 설명하고, 이때의 $V(X)$ 의 값을 구하시오. [10점] (답 : 573)

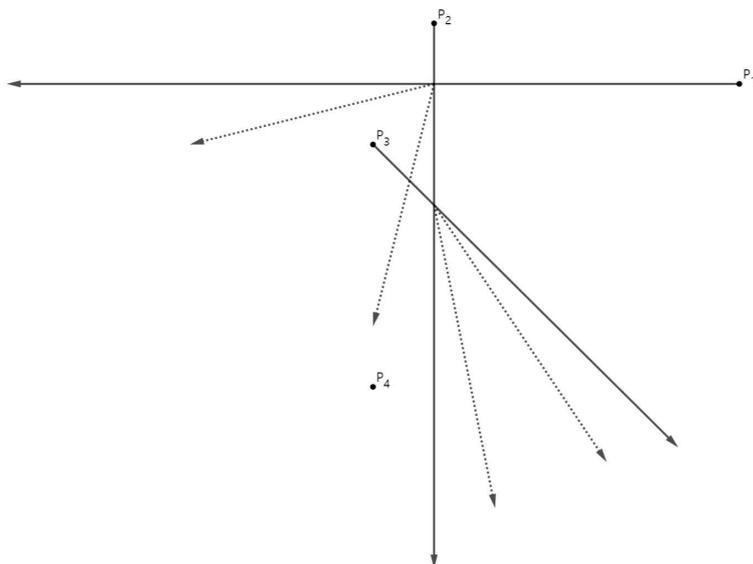
[문제 4] 좌표평면 위의 네 점 $P_1(6, 4), P_2(1, 5), P_3(0, 3), P_4(0, -1)$ 과 네 벡터 $\vec{v}_1 = (-1, 0), \vec{v}_2 = (0, -1), \vec{v}_3 = (1, -1), \vec{v}_4 = (1, 1)$ 이 주어져 있다. 이때

$$\vec{OQ}_i = \vec{OP}_i + t\vec{v}_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, t \geq 0)$$

를 만족시키는 점 Q_i 가 그리는 자취를 반직선 l_i 라 정의하자. 또한, 다음 두 조건에 따라 새로운 반직선을 생성해나간다.

(가) 반직선 l_i 와 l_j 의 교점을 P라 할 때, 양의 실수 a 에 대하여 $\vec{OR} = \vec{OP} + t(a\vec{v}_i + \vec{v}_j)$ 또는 $\vec{OS} = \vec{OP} + t(\vec{v}_i + a\vec{v}_j)$ 를 만족하는 점 R, S가 그리는 자취에 해당하는 반직선을 새로 그린다.

(나) 새로 생성된 반직선들에 대해서도 (가)의 조건을 그대로 적용한다.



위 그림은 점 P_1, P_2, P_3, P_4 및 새로 생성된 반직선 몇 개를 그린 것이다.

다음 물음에 답하시오.

[문제 4-1] 두 반직선 l_1, l_2 가 주어져 있을 때, 새로 생성된 반직선들이 점 $A(2, 2)$ 를 지나도록 하는 양의 실수 a 가 존재하는지 판단하시오. 존재하는 경우 a 의 값을 구하고, 존재하지 않는 경우 그 이유를 서술하시오. [5점] (답 : 존재하지 않음)

[문제 4-2] 네 반직선 l_1, l_2, l_3, l_4 가 주어져 있을 때, 새로 생성된 반직선들이 점 $A(2, 2)$ 를 지나도록 하는 양의 실수 a 가 존재하는지 판단하시오. 존재하는 경우 a 의 값을 구하고, 존재하지 않는 경우 그 이유를 서술하시오. [10점] (답 : 존재하지 않음)

복기자 : sukital729@gmail.com