

2016학년도 수능 대비 카이독 실전 모의고사 0회

수학 영역 (B형)

성명	
----	--

수험번호						-			
------	--	--	--	--	--	---	--	--	--

- 자신이 선택한 유형(A형/B형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰십시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정확히 기재하십시오.

괜찮아요? 많이 놀랐죠?

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 정답에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오.
배점은 2점, 3점, 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

카 이 독 모 의 고 사

제 2 교시

수학 영역(B형)

5지선다형

1. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $3A$ 의 모든 성분의 합이 15일 때, a 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 일 때, $\cos 4\theta$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

3. 함수 $f(x) = xe^{-x^2}$ 에 대하여 $f'(\sqrt{2})$ 의 값은? [2점]

- ① $-\frac{3}{e^2}$ ② $-\frac{2}{e^2}$ ③ $-\frac{1}{e^2}$ ④ $\frac{1}{e^2}$ ⑤ $\frac{2}{e^2}$

4. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_1$ 을 만족시킬 때, $a_k = 2a_1$ 을 만족시키는 자연수 k 의 값은? [3점]

- ① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

2

수학 영역(B형)

5. 배반인 두 사건 A, B에 대하여

$$P(A) + P(B^c) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

을 만족시킬 때, P(B)의 값은? (단, B^c는 B의 여사건이다.)

[3점]

- ① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

6. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + 2n}{n} \right) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + nb_n) = 3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

7. 원 $C: (x-a)^2 + (y-a)^2 = 36$ ($a > 6$) 위의 한 점 A가

행렬 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 로 나타내어지는 일차변환 f 에 의해

원 C 위의 다른 한 점으로 옮겨질 때, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 의 범위에서

이를 만족시키는 θ 의 최댓값이 $\frac{\pi}{3}$ 이다. a 의 값은? [3점]

- ① $6\sqrt{2}$ ② $12\sqrt{2}$ ③ $18\sqrt{2}$ ④ $24\sqrt{2}$ ⑤ $30\sqrt{2}$

8. 상자 안에 크기와 모양이 같은 공이 10개 들어있는데, 각각의 공에는 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀있다. 철수와 영희가 동시에 공을 하나씩 임의로 꺼낸 후 숫자를 확인한다고 하자. 철수가 확인한 숫자가 영희가 확인한 숫자보다 클 때, 두 사람이 확인한 숫자의 합이 짝수일 확률은? [3점]

- ① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{7}{15}$ ④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

9. 2보다 큰 자연수 n 에 대하여 $(x+x^2+\dots+x^n)(x+1)^n$ 의 전개식에서 x^n 의 계수가 63일 때, x^2 의 계수는? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

10. 어느 학교에서 도보를 통해 등교를 하는 학생들의 비율을 조사하기 위하여 이 학교의 학생 중 100명을 임의추출하여 조사한 결과 20명이 도보를 통해 등교를 한다고 답하였다. 이 결과를 이용하여 구한 도보를 통해 등교를 하는 학생들의 비율에 대한 신뢰도 $x\%$ 의 신뢰구간이 $[a, 3a]$ 이다. x 의 값을 오른쪽의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, a 는 양의 상수이다.) [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

- ① 68 ② 77 ③ 86 ④ 96 ⑤ 98

11. 구 $S_1 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$ 위의 점 $(2, 2, 2)$ 에서 구 S_1 과 접하는 평면 α 가 점 $(4, 4, 9)$ 를 중심으로 하는 구 S_2 와 공통으로 접할 때, 구 S_2 의 반지름의 길이는? [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

12. $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, 자연수 n 에 대하여 방정식

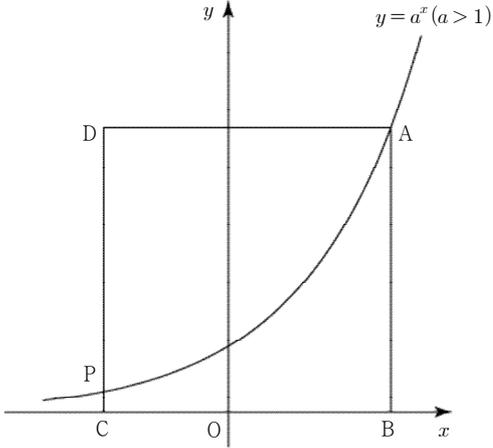
$$3\sin x - 4\cos x = n$$

의 실근의 개수를 a_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 값은? [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

[13~14] 그림은 $y = a^x$ ($a > 1$)의 그래프를 나타낸 것이다. 곡선 $y = a^x$ 위의 제 1사분면에 있는 점 A에 대하여 점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 B라 하자. $\overline{AB} = \overline{BC}$ 가 되도록 x 축에 점 B보다 왼쪽에 점 C를 잡고, 제 2사분면 위에 점 D를 잡을 때, 곡선 $y = a^x$ 와 직선 CD의 교점을 P라 하자. 사각형 ABCD는 정사각형이다.

13번과 14번의 두 물음에 답하시오.

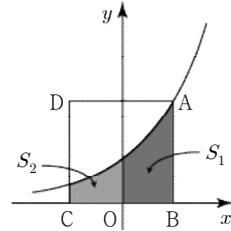


13. $a = 2$ 이고, 직선 AP의 기울기가 $\frac{3}{5}$ 일 때, 점 A의 y 좌표는?

[3점]

- ① 5 ② $\frac{5}{2}$ ③ $\log_2 5$
- ④ $\log_2 5 - 1$ ⑤ $\log_2 5 + 1$

14. 곡선 $y = a^x$ 와 x 축, y 축 및 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 이라 하고, 곡선 $y = a^x$ 와 x 축, y 축 및 직선 CD로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. $\overline{OB} = \overline{OC}$ 를 만족시키면서, $S_1 S_2 = k(S_1 - S_2)$ 이도록 하는 실수 k 의 최솟값은? (단, 0는 원점이다.) [4점]



- ① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{2}{e}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $2e$ ⑤ e^2

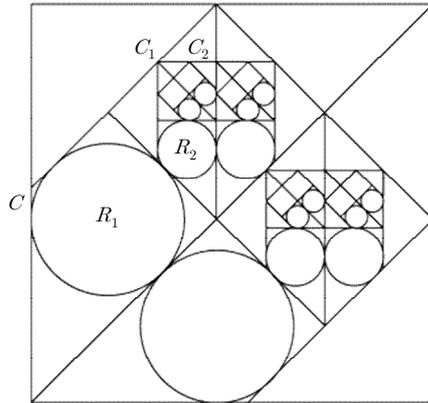
15. x 에 관한 부등식 $\frac{(x-1)^2(x-a)}{x+b+c+d} < 0$ 의 정수인 해의 개수가 6이 되도록 하는 네 자연수 a, b, c, d 에 대하여 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는? [4점]

- ① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

16. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 C 에 대하여 정사각형 C 의 한 대각선과 평행한 두 직선을 그을 때, 각 직선과 평행한 정사각형 C 의 대각선과의 거리를 한 변의 길이로 하고 한 꼭짓점이 정사각형 C 위에 있도록 정사각형 C_1 을 두 개 그릴 때, 정사각형 C 의 한 변과 정사각형 C_1 의 세 변의 연장선에 모두 접하는 원이 존재하는데, 이 때 그려지는 모든 원을 R_1 이라 하자.

두 정사각형 C_1 의 한 대각선과 평행한 두 직선을 그을 때, 각 직선과 평행한 정사각형 C_1 의 대각선과의 거리를 한 변의 길이로 하고 한 꼭짓점이 정사각형 C_1 위에 있도록 정사각형 C_2 를 두 개 그릴 때, 정사각형 C_1 의 한 변과 정사각형 C_2 의 세 변의 연장선에 모두 접하는 원이 존재하는데, 이 때 그려지는 모든 원을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 그려진 원 R_n 의 둘레의 길이의 합을 l_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{5(\sqrt{2}+1)}{3} \pi$ ② $\frac{4(\sqrt{2}+1)}{3} \pi$ ③ $(\sqrt{2}+1)\pi$
 ④ $\frac{2(\sqrt{2}+1)}{3} \pi$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}+1}{3} \pi$

17. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 0$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k + (n+1)a_{n+1} = 6n^2$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k + na_n = 6(n-1)^2 \quad (n \geq 2)$$

이므로 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$(n+1)a_{n+1} = \boxed{\text{(가)}} \times a_n + 12n - 6$$

이다. $b_n = n(n-1)a_n$ 이라 하면

$$b_{n+1} = b_n + \boxed{\text{(나)}} \quad (n \geq 2)$$

이고, $b_2 = 6$ 이므로

$$b_n = n(n-1) \times \boxed{\text{(다)}} \quad (n \geq 2)$$

이다. 그러므로

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n=1) \\ \boxed{\text{(다)}} & (n \geq 2) \end{cases}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ 이

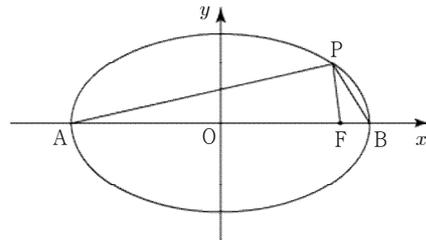
라 할 때, $\frac{g(10)}{f(6) \times h(6)}$ 의 값은? [4점]

- ① 12 ② 6 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

18. 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 한 초점 F와 타원 위의 한 점 P에

대하여 $\overline{PF} = 2$ 를 만족시킨다. 타원의 장축 위의 두 꼭짓점을

각각 A, B라 할 때, $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값은? [4점]



- ① 82 ② 84 ③ 86 ④ 88 ⑤ 90

19. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$AB = A + E, (B^2 - B)^2 + E = O$$

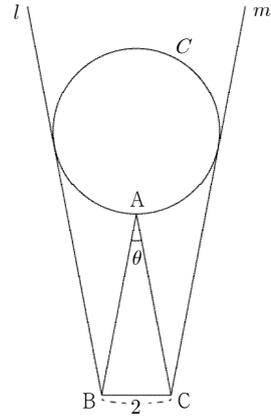
를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위행렬이고, O 는 영행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. A 의 역행렬이 존재한다.
 ㄴ. $B^2 = -A^2$
 ㄷ. 임의의 실수 t 에 대하여 $A + tB$ 의 역행렬이 항상 존재한다.

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 그림과 같이 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이고, $\overline{BC} = 2$ 인 이등변삼각형 ABC 가 있다. 점 B 를 지나고 직선 AC 와 평행한 직선을 l , 점 C 를 지나고 직선 AB 와 평행한 직선을 m 이라 할 때, 점 A 를 지나고 직선 l 과 직선 m 에 접하는 원을 C 라 하자. $\angle BAC = \theta$ ($0 < \theta < \pi$)라 할 때, 원 C 의 반지름을 $r(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow \pi-0} \{(\pi - \theta) \times r(\theta)\}$ 의 값은? (단, 원 C 는 삼각형 ABC 의 내부를 지나지 않는다.) [4점]



- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 함수 $g(x)$ 는 증가함수이고, 모든 실수 x 에 대하여

$$ax + \int_1^x g(t)dt = a + \int_0^{g(x)} f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(a) + g(a) = 8$ 일 때, $f(a^2) + g(a^2)$ 의 값은?
(단, a 는 $a > 0$ 인 상수이다.) [4점]

- ① 28 ② 30 ③ 32 ④ 34 ⑤ 36

단답형

22. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(16x-15) + x^2 - 1}{x-1}$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 일차변환 f 에 의하여 점 $(3, 5)$ 가 점 $(1, 2)$ 로 옮겨지고, 합성변환 $f \circ f$ 에 의하여 점 $(-3, -5)$ 가 점 $(0, 1)$ 로 옮겨진다. 일차변환 f 에 의하여 점 (a, b) 가 점 $(3, 5)$ 로 옮겨질 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 어느 데이터 샘플에서 데이터 항목의 첫 번째 숫자가 n ($n=1,2,3,\dots,9$)일 확률을 p_n 이라 할 때, 다음 관계식이 성립한다고 한다.

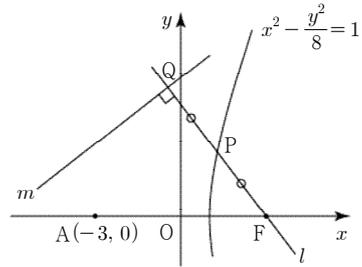
$$p_n = k(\log(n+1) - \log n) \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

이 때, 10^{k+p_2} 의 값을 구하시오. [3점]

25. 좌표공간에서 점 $A(6, 8, 9)$ 에 대하여 $\overline{AB}=5$ 를 만족시키면서 움직이는 점 B 가 있다. 직선 AB 는 xy 평면과 만나는데 이 때의 교점을 P 라 할 때, 점 P 는 선분 AB 를 3:2로 외분한다. 선분 OP 의 길이의 최댓값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.) [3점]

26. 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ 의 x 좌표가 양수인 초점 F 를 지나고

기울기가 음수인 직선 l 이 쌍곡선과 만나는 제 1사분면 위의 점을 P 라 하고, 직선 l 위의 다른 한 점을 Q 라 할 때, 점 P 는 선분 FQ 의 중점이다. 점 Q 를 지나고 직선 l 과 수직인 직선을 m 이라 할 때, 직선 m 과 점 $A(-3, 0)$ 사이의 거리가 2이다. 선분 FQ 의 길이를 a 라 할 때, a^2 의 값을 구하시오. [4점]



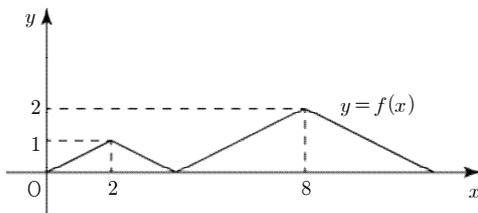
27. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = -\left| \frac{1}{2}x - n^2 \right| + n \quad (2n^2 - 2n \leq x < 2n^2 + 2n, n = 1, 2, 3, \dots)$$

을 만족시킨다. 닫힌 구간 $[0, a]$ 에서 방정식

$$[f(x)] = \sqrt{[f(x)] + 1} + 5$$

를 만족시키는 정수해의 개수가 5가 되도록 하는 자연수 a 의 최댓값을 구하시오. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]



28. 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 정의된 연속확률변수 X 의

확률밀도함수가 $f(x) = ax^2 + bx$ ($0 \leq x \leq 1, a \neq 0$)이다.

$E(X) \leq \frac{7}{12}$ 을 만족시키는 점 $P(a, b)$ 가 나타내는 도형

전체의 길이가 l 일 때, l^2 의 값을 구하시오. [4점]

29. 함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

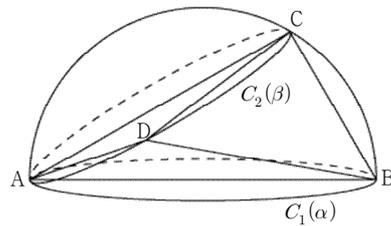
- (가) 함수 $f(x), \frac{1}{g(x)}$ 은 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
- (나) 모든 실수 t 에 대하여 함수 $f(t), 2f'(t), f''(t)$ 는 이 순서대로 공비가 $g(t)$ 인 등비수열을 이룬다.
- (다) $g(2) = 1$

$\int_0^2 \frac{1}{g(x)} dx$ 의 값을 구하시오. (단, 닫힌 구간 $[0, 2]$ 에서 $f'(x)g(x) \neq 0$ 이다.) [4점]

30. 평면 α 위의 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 C_1 을 밑면으로 하는 반구가 있다. 원 C_1 위의 점들 중 점 A만을 지나는 평면 β 에 의해 생긴 단면인 원을 C_2 라 할 때, 원 C_2 위의 점들 중 평면 α 와 거리가 가장 먼 점을 C라 하고, 원 C_2 위의 다른 한 점을 D라 하자. 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 평면 BCA와 평면 BCD가 이루는 각의 크기와 평면 BDA와 평면 CDA가 이루는 각의 크기가 같다.
- (나) 사면체 ABCD의 부피가 $\frac{\sqrt{2}}{6}$ 이다.

평면 α 와 평면 β 가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos^2 \theta = \frac{q}{p}$ 이다. pq 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인 하시오.