SEOL:NAME 고1 개념테스트 정답지

자가검진

매우 준수 78~100점
준수 64~77점
복습 필요 50~63점
재학습 필요 49점 이하
* 절대적 수치가 아니므로 참조용으로만 활용할 것

빠른 정답

번호	정답	번호	정답	번호	정답	번호	정답
1	(2)	2	(2)	3	(3)	4	(1)
5	(5)	6	(1)	7	(1)	8	(2)
9	(4)	10	(2)	11	9	12	9
13	35	14	3	15	108	16	62

해설

1. ② [2021학년도 9월 고1 11번]
주어진 연립방정식에서
$4x^2-4xy+y^2=(2x-y)^2=0$이므로 $y=2x$
$5x-10=0$ 이므로 $x=2$, $y=4$ 에서 $\alpha+\beta=6$

2. ② [2019학년도 11월 고1 26번]
$\overline{\mathrm{AC}}=x$, $\overline{\mathrm{BC}}=y$ 라 하면,
$\frac{1}{2}xy=3$, $x^2+y^2=24$에서
$(x+y)^2-2xy=24$, 곧, $x+y=6$,
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=216-3\times6\times6$
$=108$

3. ③ [2011학년도 3월 고3 가형 5번]
ⅰ) $a<0$일 때,
$a^2-2a<a^2-4a<a^2-6a$이므로 해는
$a^2-2a<x<a^2-4a$, $x>a^2-6a$
$a^2-2a=8$, $a^2-4a=12$, $a^2-6a=16$이다.
따라서 연립방정식을 만족하는 $a=-2$이다.
ⅱ) $a=0$일 때,
$x^3>0$
따라서 $x>0$이므로 조건에 맞지 않는다.
ⅲ) $a>0$일 때,
$a^2-2a>a^2-4a>a^2-6a$이므로 해는
$a^2-6a<x<a^2-4a$, $x>a^2-2a$
$a^2-2a=16$, $a^2-4a=12$, $a^2-6a=8$이다.
따라서 연립방정식을 만족하는 상수 a는 존재하지 않는다.
ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여 $a=-2$

4. ① [2022학년도 9월 고1 15번]
$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$라 하면,

$\mathrm{P}(2x_1,\ 2y_1)$, $\mathrm{Q}(2x_2,\ 2y_2)$이므로 선분 PQ 의 중점의 좌표에서

$x_1+y_1=4$, $y_1+y_2=5$

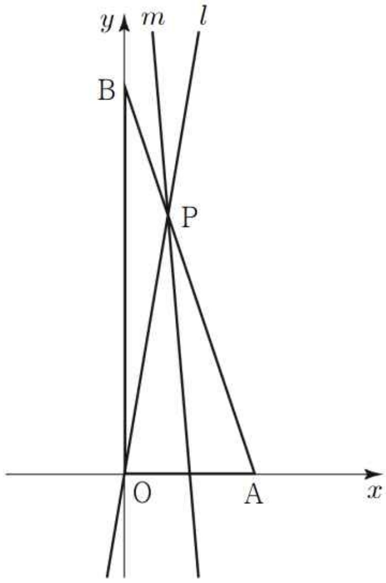
한편, 삼각형 OAB 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+x_1+x_2}{3},\ \frac{0+y_1+y_2}{3}\right)$$

곧, $\left(\frac{4}{3},\ \frac{5}{3}\right)$이므로 $a+b=3$

5. ⑤ [2022학년도 9월 고1 26번]
직선 $\mathrm{A_2C_2}$는 지름이므로 원점을 지나는 직선이다.
따라서 점 $\mathrm{A_2}$와 $\mathrm{C_2}$가 원점에 대하여 대칭이므로 $b=-7$
직선 $\mathrm{A_1C_1}$는 지름이므로 원점을 지나는 직선이다.
따라서 점 $\mathrm{C_1}$의 x좌표는 -3이므로 $x^2+y^2=100$에 이를 대입하면 $a^2=91$임을 얻는다.
따라서 $a^2+b^2=91+49=140$

6. ① [2022학년도 9월 고1 18번]
조건 (가)에서
직선 걍이 삼각형 OAB의 점 O를 지나므로
조건 (나), (다)에서
점 P는 선분 AB를 $2:1$ 또는 $1:2$로 내분하는 점이어야 한다.
(ⅰ) 점 P가 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점일 때



점 P의 좌표는 $\left(\frac{2}{3},\ 4\right)$이므로 직선 l의 기울기는

$$\frac{4-0}{\frac{2}{3}-0}=6$$

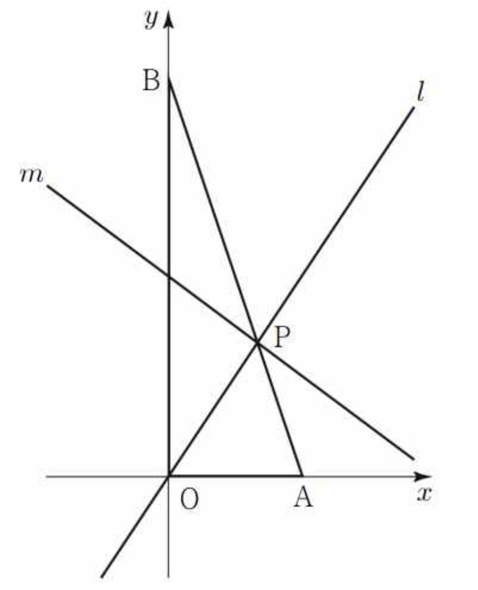
조건 (다)에서

직선 m은 삼각형 OAP의 넓이를 이등분하여야 하므로 선분 OA의 중점 $(1,\ 0)$을 지난다. 직선 m의 기울기는

$$\frac{4-0}{\frac{2}{3}-1}=-12$$

두 직선 l, m의 기울기의 합은 -6

(ⅱ) 점 P가 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점일 때



점 P의 좌표는 $\left(\frac{4}{3},\ 2\right)$이므로

직선 l의 기울기는 $\dfrac{2-0}{\frac{4}{3}-0}=\dfrac{3}{2}$

조건 (다)에서

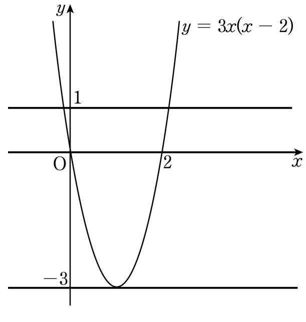
직선 m은 삼각형 OPB의 넓이를 이등분하여야 하므로 선분 OB의 중점 $(0,\ 3)$을 지난다. 직선 m의 기울기는

$$\frac{2-3}{\frac{4}{3}-0}=-\frac{3}{4}$$

두 직선 l, m의 기울기의 합은 $\dfrac{3}{4}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 두 직선 l, m의 기울기의 합의 최댓값은 $\dfrac{3}{4}$이다.

7. ① [2016학년도 3월 고3 나형 19번]



조건 (가)에 의해

이차함수 $f(x)=ax(x-2)$ (a는 상수)꼴이다.

조건 (나)에 의해 $ax(x-2)-6(x-2)=0$이므로

$(ax-6)(x-2)=0$이다.

이차방정식의 실근의 개수가 1이므로 $ax-6=0$의 근도 $x=2$이다.

즉, $a=3$이다.

$f(x)=3x(x-2)=3(x-1)^2-3$이므로

이차함수 $f(x)$의 꼭짓점은 $(1,\ -3)$이다.

$f(f(x))=-3$을 만족하기 위해서는 $f(x)=1$이 되어야 함을 그래프에서 알 수 있다.

그러므로 $3x^2-6x=1$에서 $3x^2-6x-1=0$이다.

따라서 서로 다른 두 실근의 곱은 근과 계수의 관계에서 $-\dfrac{1}{3}$이다.

8. ② [2022년 6월 고1 20번]

$(x-a)(x-2a)+4$가 완전제곱식이어야 하므로 전개하면

$x^2-3ax+2a^2+4$에서 판별식이 0임을 활용하면

$D=9a^2-8a^2-16=a^2-16=0$

$a=\pm 4$

$a=4$이면 $\{P(x)+2\}^2=(x-6)^2$

$P(x)=x-8$ 또는 $-x+4$

$a=-4$이면 $\{P(x)+2\}^2=(x+6)^2$

$P(x)=x+4$ 또는 $-x-8$

각 경우에 $P(1)$의 합은 $-7+3+5-9=-8$

9. ④ [2019학년도 3월 고3 나형 20번]

조건 (가)에 의해 집합 A의 모든 원소 a에 대하여 $2a\not\in A$이므로 a와 $2a$가 집합 A에 동시에 속할 수 없다.

a, $2a$가 모두 속하는 집합들로 집합 U를 나누어 보면 다음과 같다.

$\{1,2,4,8,16\}$, $\{3,6,12\}$, $\{5,10\}$, $\{7,14\}$, $\{9,18\}$, $\{11\}$, $\{13\}$, $\{15\}$, $\{17\}$, $\{19\}$

각 집합에 속하는 모든 원소들을 크기 순서대로 나열 할 때, 이웃한 두 원소는 동시에 A에 속할 수 없다.

$\{1,2,4,8,16\}$에서 조건 (가)를 만족시키는 집합 A의 부분집합은

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{8\}$, $\{16\}$, $\{1,4\}$, $\{1,8\}$, $\{1,16\}$, $\{2,8\}$, $\{2,16\}$, $\{4,16\}$, $\{1,4,16\}$

이다.

이 중 집합 A의 원소의 개수가 최대일 때는

$\{1,4,16\}\subset A$인 경우이다.

마찬가지 방법으로 $\{3,6,12\}$에서 $\{3,12\}\subset A$이고 세 집합 $\{5,10\}$, $\{7,14\}$, $\{9,18\}$에서는 각 집합의 두 원소 중 하나의 원소가 A에 속한다.

또한 집합 A의 원소의 개수가 최대가 되기 위해서는 11, 13, 15, 17, 19는 항상 A에 속해야 한다.

즉, $\{11,13,15,17,19\}\subset A$이다.

이상에서 반드시 포함되어야 하는 원소의 합은

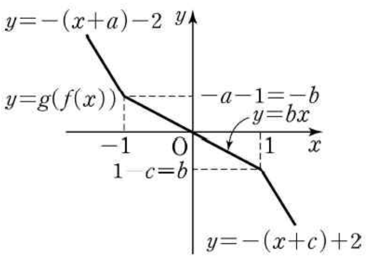
$1+3+4+11+12+13+15+16+17+19=111$이다.

조건 (나)에 의해 각 집합 $\{5, 10\}$, $\{7, 14\}$, $\{9, 18\}$에서 한 개씩 선택한 원소의 합이 최대인 홀수가 되도록 5, 14, 18을 선택한다.
따라서 집합 A의 모든 원소의 합의 최댓값은
$111+5+14+18=148$이다.

10. ② [2018학년도 9월 나형 21번]

$$g(x)=\begin{cases} -x+2 & (x \geq 1) \\ x & (-1 \leq x < 1) \\ -x-2 & (x < -1) \end{cases}$$

$g \circ f$가 실수 전체에서 정의된 역함수를 가지려면 $g \circ f$가 연속인 경우는 증가 또는 감소함수여야 한다.
$|x| \geq 1$일 때 $f(x)$는 증가하고 $g(x)$는 감소하므로 $g(f(x))$는 감소함수여야 한다. ⋯ ㉠
또한 $x=0$의 근방에서 $g(x)$는 증가하므로 ㉠을 만족하려면 $f(x)=bx$는 감소해야 한다.
$\therefore b<0$
$g \circ f$가 연속이려면 $x=-1, 1$에서 연속임을 보이면 된다.



ⅰ) $x=-1$일 때

$\lim_{x \to -1-} g(f(x))=g(-1+a)=-1-a$

$\left(\because \lim_{x \to -1-} f(x)=-1+a<-2\right)$

$\lim_{x \to -1+} g(f(x))=g(-b)=-b$

$\left(\because 0<\lim_{x \to -1+} f(x)=-b \leq 1\right)$

연속이려면 $-1-a=-b$

$\therefore a=b-1$

ⅱ) $x=1$일 때

$\lim_{x \to 1-} g(f(x))=g(b)=b$

$\lim_{x \to 1+} g(f(x))=g(1+c)=1-c$

$\left(\because \lim_{x \to 1+} f(x)=1+c>2\right)$

연속이려면 $b=1-c$

$\therefore c=1-b$

ⅰ), ⅱ)에서
$a+b+2c=(b-1)+b+2(1-b)=1$

11. 9 [자작]

$84=2^2 \times 3 \times 7$이므로 30 이하의 홀수들 중 3의 배수와 7의 배수인 것들의 개수를 빼면 된다.
30 이하의 홀수 중 3의 배수의 집합을 A, 7의 배수의 집합을 B라 하면,
$n(A)=5,\ n(B)=2,\ n(A \cap B)=1$
이므로 빼야 하는 값은 $5+2-1=6$
따라서 구하는 값은 $15-6=9$

12. 9 [2017학년도 4월 고3 가형 12번]

$f(1)=a,\ f(2)=b$라 하자.
조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는
ⅰ) $a+b=4$일 때
$(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$ $\therefore 3$가지
ⅱ) $a+b=8$일 때
$(2,6)$, $(3,5)$, $(4,4)$, $(5,3)$, $(6,2)$ $\therefore 5$가지
ⅲ) $a+b=12$일 때
$(6,6)$ $\therefore 1$가지
ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여 함수 f의 개수는 9

13. 35 [자작]

명제가 거짓이려면 주어진 이차방정식이 중근을 가지거나
허근을 가지면 된다.
$D=(a+4)^2-18a=a^2-10a+16 \leq 0$
곧, $(a-2)(a-8) \leq 0$이므로
$2+3+4+5+6+7+8=35$

14. 3 [2022학년도 11월 고1 17번]

$g(x)=(x-3)(|x-2|-3)$이므로
$x \geq 2$이면 $g(x)=(x-3)(x-5)$
이 구간이면서 $-1 \leq x \leq 5$에서
최댓값은 3, 최솟값은 -1
$x \leq 2$이면 $g(x)=(x-3)(-x-1)$
이 구간이면서 $-1 \leq x \leq 5$에서
최댓값은 4, 최솟값은 0
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 3

15. 108 [2016년 3월 나17]

선분 FH는 직각이등변삼각형 EFH의 빗변이므로 길이는 $\sqrt{2} \times \sqrt{a^2+b^2}$
문제에서 $\overline{\mathrm{FH}}=6\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2} \times \sqrt{a^2+b^2}=6\sqrt{2}$에서
$a^2+b^2=36$이다.
그런데 삼각형 FGM의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이고
$36=a^2+b^2 \geq 2ab$이므로 $\frac{1}{2}ab \leq 9$
그러므로 삼각형 FGM의 넓이의 최댓값은 9이다.
따라서 $12S=108$

16. 62 [2017학년도 3월 나형 30번]

자연수 전체의 집합의 부분집합 X가

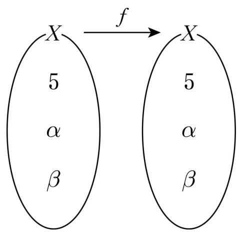
$n(X)=3$이고 $5\in X$이므로 $X=\{5,\alpha,\beta\}$

대응 $f: X\to X$를

$x\in X$가 홀수이면 $f(x)=\dfrac{x+p}{2}$

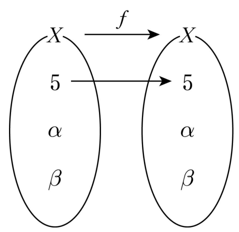
$x\in X$가 짝수이면 $f(x)=\dfrac{x}{2}$

로 정의하면 f는 함수이다.



$\dfrac{5+p}{2}$가 자연수가 되어야 하므로 p는 홀수이다.

ⅰ) $f(5)=5$, 즉 $p=5$일 때



$f(\alpha)=5$, $f(\alpha)=\alpha$, $f(\alpha)=\beta$인 경우를 각각 생각할 수 있다.

$f(\alpha)=5$일 때, α가 짝수이면 $\dfrac{\alpha}{2}=5$, $\alpha=10$

이때 β가 홀수이면 $\beta=15$이고, β가 짝수이면 $\beta=20$

따라서 가능한 경우는

$X=\{5,10,15\}$, $X=\{5,10,20\}$

따라서 $p=5$이고 α가 짝수인 경우 가능한 집합 X가 존재하므로 $p=5$일 때, α가 홀수인 경우와 $f(\alpha)=\alpha$, $f(\alpha)=\beta$인 경우는 다루지 않는다.

ⅱ) $f(5)=\alpha$일 때

$\alpha\neq5$이므로 $p\neq5$

그런데 $p<5$인 홀수인 경우에는 $n(X)=3$인 경우가

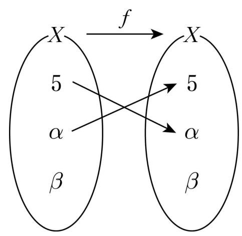
존재하지 않음을 쉽게 확인할 수 있다.

따라서 $p>5$인 경우만 생각하면 된다.

$5<p$이면 $5<\alpha<p$이다.

이때 가능한 경우로 $f(\alpha)=5$ 또는 $f(\alpha)=\alpha$ 또는 $f(\alpha)=\beta$를 생각해 볼 수 있다.

ⅱ-1) $f(5)=\alpha$, $f(\alpha)=5$일 때



α가 짝수이면 $\dfrac{\alpha}{2}=5$, $\alpha=10$이고, $\dfrac{5+p}{2}=10$이므로 $p=15$

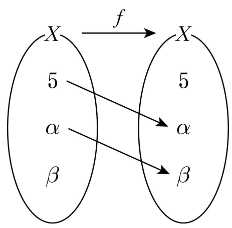
가능한 β의 값은 $\beta=15$와 $\beta=20$이 있다.

ⅱ-2) $f(5)=\alpha$, $f(\alpha)=\alpha$일 때

$\alpha\neq5$이면 $p\neq5$이므로 $\dfrac{\alpha}{2}\neq\alpha$, $\dfrac{\alpha+p}{2}\neq\alpha$

따라서 이 경우는 존재하지 않는다.

ⅱ-3) $f(5)=\alpha$, $f(\alpha)=\beta$일 때



$f(\beta)=5$ 또는 $f(\beta)=\alpha$ 또는 $f(\beta)=\beta$의 경우를 생각해 볼 수 있다.

ⅱ-3-a) $f(\beta)=5$일 때,

ⅱ-3-a-ㄱ) α가 짝수이면 $\dfrac{\alpha}{2}=\beta$

이때 β가 짝수이면 $\dfrac{\beta}{2}=5$, $\beta=10$이고, $\alpha=20$

$\dfrac{5+p}{2}=20$이므로 $p=35$

이때 $X=\{5,10,20\}$

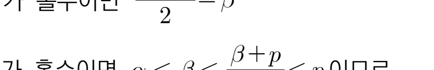
β가 홀수이면 $f(\beta)=f(f(\alpha))=f(f(f(5)))$에서

$\dfrac{\beta+p}{2}=\dfrac{\alpha+2p}{4}=\dfrac{5+5p}{8}=5$이고, $p=7$

이때 $X=\{3,5,6\}$

ⅱ-3-a-ㄴ) $p>5$이면 5, α, p, $\dfrac{\alpha+p}{2}$의 대소 관계는

다음 그림과 같다.



α가 홀수이면 $\dfrac{\alpha+p}{2}=\beta$

β가 홀수이면 $\alpha<\beta<\dfrac{\beta+p}{2}<p$이므로

$n(X)\geq4$가 되어 모순이 생긴다.

β가 짝수이면 $\dfrac{\beta}{2}=5$

$f(\beta)=\dfrac{\beta}{2}=5$, 즉 $\beta=10$일 때,

$\frac{\alpha+p}{2}=\frac{\frac{5+p}{2}+p}{2}=10$ $p=\frac{35}{3}$ 이므로 모순이다.

따라서 가능한 경우가 없다.

ⅱ-3-b) $f(\beta)=\alpha$일 때,

ⅱ-3-b-ㄱ) α가 짝수이고 β가 짝수이면

$f(\beta)=\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha}{4}=\alpha$이므로 $\alpha=0$이 되어 모순이다.

ⅱ-3-b-ㄴ) α가 짝수이고 β가 홀수이면

$\alpha=f(\beta)=f(f(f(5)))$ 이므로

$\frac{5+p}{2}=\frac{5+5p}{8}$, $p=15$ 이고 $\beta=5$가 되어 모순이다.

ⅱ-3-b-ㄷ) α가 홀수이면 β는 짝수이고 이 경우 $\frac{\beta}{2}=\alpha$

$\frac{5+3p}{8}=\frac{5+p}{2}$, $p<0$이 되어 모순이다.

ⅱ-3-c) $f(\beta)=\beta$일 때,

$\beta<p$이므로 $\frac{\beta}{2}\neq\beta$이고, $\frac{\beta+p}{2}\neq\beta$이므로 $f(\beta)\neq\beta$

따라서 가능한 경우가 없다.

ⅰ), ⅱ)에서 조건을 만족시키는 모든 자연수 p의 값의 합은 $5+7+15+35=62$