제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{7x}-1}{e^{2x}-1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x = t + \cos 2t, \quad y = \sin^2 t$$

에서 $t = \frac{\pi}{4}$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

25. 함수 $f(x)=x+\ln x$에 대하여 $\int_1^e \left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{e^2}{2}+\frac{e}{2}$ ② $\frac{e^2}{2}+e$ ③ $\frac{e^2}{2}+2e$
④ e^2+e ⑤ e^2+2e

$\int_1^e f'(x)f(x)dx = \frac{1}{2}f(x)^2\Big]_1^e$

$= \frac{1}{2}\{(e+1)^2-1\}$

$= \frac{e^2}{2}+e$

26. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 $a_1=b_1=1$, $a_2b_2=1$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}}+b_n\right)=2$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$0<r<1$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}}+b_n\right) = \frac{1}{d}+\frac{1}{1-r}=2$

$(1+d)r=1$

$1+d-r=2d(1-r)$

$dr+r=1$

$\Rightarrow r=\frac{1}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{1-r} = \frac{3}{2}$

27. $x=-\ln 4$ 에서 $x=1$ 까지의 곡선 $y=\frac{1}{2}(|e^{x}-1|-e^{|x|}+1)$ 의 길이는? [3점]

① $\frac{23}{8}$ ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{29}{8}$ ④ 4 ⑤ $\frac{35}{8}$

길이 $l=\int_{-\ln 4}^{1}\sqrt{(y')^2+1}\,dx$

$=\int_{0}^{1} 1\,dx+\int_{-\ln 4}^{0}\sqrt{\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2+1}\,dx$

$=1+\int_{-\ln 4}^{0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\,dx$

$=\frac{23}{8}$

28. 실수 $a\,(0<a<2)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}2|\sin 4x| & (x<0)\\ -\sin ax & (x\ge 0)\end{cases}$$

이라 하자. 함수

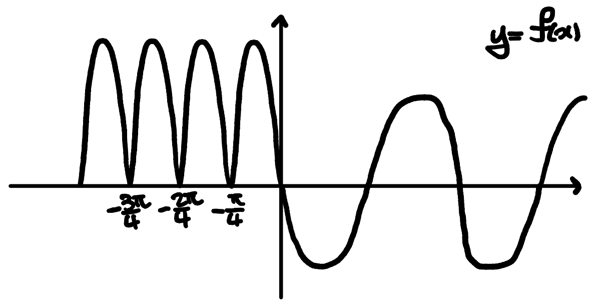
$$g(x)=\left|\int_{-a\pi}^{x} f(t)\,dt\right|$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, a의 최솟값은? [4점]

$f(t)$가 연속함수라는 것은 함수 $\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$의 도함수가 연속이라는 것

$\Rightarrow \int_{-a\pi}^{x} f(t)dt=0$ 이 문제

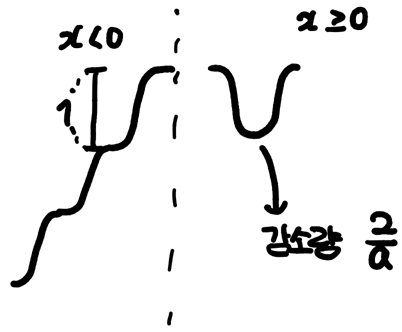
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$



g가 $x=-a\pi$에서 미분 가능하려면

$a=\frac{n}{4}$ (n은 자연수)이다.

$\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$ 그래프 개형을 보면



$a=\frac{n}{4}$ 이면 최댓값 $=\int_{-a\pi}^{0} f(t)dt=n$ 이 되는데,

이때 $x\ge 0$ 에서의 극소(최솟)값 ≥ 0 이어야 미분 가능하다.

즉, $\int_{-a\pi}^{0} f(t)dt-\frac{2}{a}\ge 0$

$n\ge\frac{8}{n}$ $\Rightarrow$ n의 최소 : 3

$\therefore a_{min}=\frac{3}{4}$

단답형

29. 두 실수 a, $b(a>1,\ b>1)$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=a,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{9}{a}$$

를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

$a>3$

$a=b$면

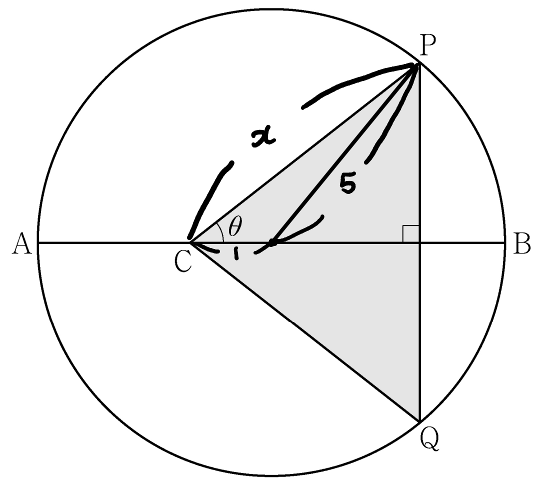
$1=\frac{9}{a}$

$a=b=9$

$\therefore\ a+b=18$

케이스 다 쓰기 귀찮음 ㅈㅅ
다른 거 다 해보면 모순 확인 가능

30. 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 AB 위에 $\overline{AC}=4$인 점 C가 있다. 이 원 위의 점 P를 $\angle PCB=\theta$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 PCQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



$x^2+1-2x\cos\theta=25$ 코사인 법칙

$x^2-2x\cos\theta-24=0$

$x=\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+24}$

$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta-\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+24}}$ 이거 매번 쓰기 지겹나니 라이프니츠 ㄱㄱ

$S(\theta)=\frac{1}{2}x^2\sin2\theta$

$S'(\theta)=x\frac{dx}{d\theta}\sin2\theta+x^2\cos2\theta$

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 $x=4\sqrt{2}$

$\therefore\ -7\times S'(\frac{\pi}{4})=-7\cdot4\sqrt{2}\cdot(-\frac{8}{7\sqrt{2}})+0=32$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.