제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $3^{1-\sqrt{5}} \times 3^{1+\sqrt{5}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

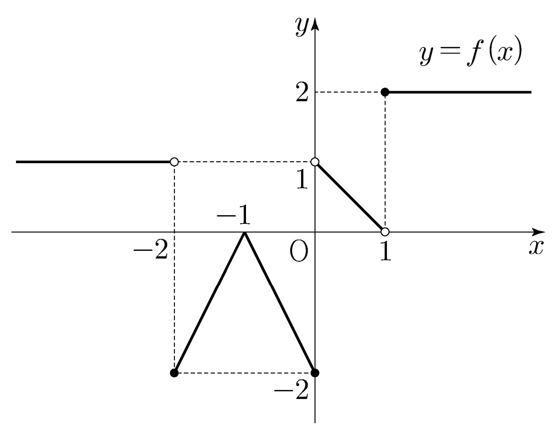
2. 함수 $f(x)=2x^2-x$ 에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ 인 θ 에 대하여 $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -2+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)$ 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_3 a_8}{a_6} = 12, \quad a_5 + a_7 = 36$$

일 때, a_{11}의 값은? [3점]

① 72 ② 78 ③ 84 ④ 90 ⑤ 96

6. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$은 $x = -1$에서 극대이고, $x = 3$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 0 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

7. 두 실수 a, b가

$$3a + 2b = \log_3 32, \quad ab = \log_9 2$$

를 만족시킬 때, $\frac{1}{3a} + \frac{1}{2b}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{25}{12}$

8. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=6x^2-2f(1)x, \quad f(0)=4$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

9. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 부등식

$$\cos x \le \sin\frac{\pi}{7}$$

를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha \le x \le \beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은? [4점]

① $\frac{8}{7}\pi$ ② $\frac{17}{14}\pi$ ③ $\frac{9}{7}\pi$ ④ $\frac{19}{14}\pi$ ⑤ $\frac{10}{7}\pi$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}$

$\beta = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{7}$

$\therefore \beta - \alpha = \frac{9}{7}\pi$

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선이 점 $(1, 3)$에서 만날 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

$f'(2)=0, \ f(2)=3$

$3f'(-2) = 3 - f(-2)$ 기울기

$f(x) = (x-2)^3 + p(x-2)^2 + 3$

$f'(-2) = 48 - 8p$

$3 - f(-2) = 64 - 16p$

$\Rightarrow 144 - 24p = 64 - 16p$

$p = 10$

$\therefore f(0) = 35$

11. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(1)과 점 B(8)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도는 각각

$$v_1(t)=3t^2+4t-7, \quad v_2(t)=2t+4$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 될 때까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 10 ② 14 ③ 19 ④ 25 ⑤ 32 ✓

$P(t)=t^3+2t^2-7t+1$
$Q(t)=t^2+4t+8$

P, Q 생겨먹은걸 고려하면
거리지만 절댓값 없이
Q−P=4가 처음 되는곳이다.

$(Q-P)(t)=-t^3-t^2+11t+7=4$
$t^3+t^2-11t-3=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -11 & -3 \\ 3 & & 3 & 12 & 3 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$t^2+4t+1=0$의 근은
모두 음수이다.

$\int_0^3 |v_1(t)|dt = P(0)-P(1)+P(3)-P(1)$
$= 4+28$
$=32$

12. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

홀수 다음은 반드시 짝수

를 만족시킬 때, $a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 172 ✓ ② 175 ③ 178 ④ 181 ⑤ 184

a_1 말고 a_2로 케이스 분류

	a_2	a_3	a_4
1.	홀	짝	홀
2.	짝	짝	짝
3.	짝	홀	짝

1. $a_2=2k-1$, k 자연수
$a_3=2k$
$a_4=k$
$\Rightarrow 3k-1=40$
존재 X

2. $a_2=8k$, k 자연수
$a_3=4k$
$a_4=2k$
$\Rightarrow 10k=40$
$k=4$

3. $a_2=2(2k-1)$, k 자연수
$a_3=2k-1$
$a_4=2k$
$\Rightarrow 6k-2=40$
$k=7$

a_2로 가능한 수
: 32, 26

a_1 31+64+25+52 = 172

13. 두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \dfrac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\ge 0) \end{cases}$$

이 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하고 구간 $[-1,\ \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{2}+3\sqrt{2}$ ② $3+3\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{9}{2}+3\sqrt{2}$

④ $6+3\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{15}{2}+3\sqrt{2}$

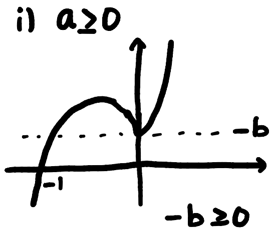
$$f'(x)=\begin{cases} -x^2-2ax-b & (x<0) \\ x^2+2ax-b & (x\ge 0) \end{cases}$$

$f'(-1)=0$ 임은 자명하다

$\Rightarrow -1+2a-b=0$

$1-2a-a^2\ge 0$

i) $a\ge 0$

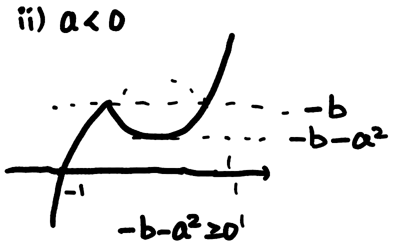


$-b\ge 0$

$\Rightarrow 1-2a\ge 0$

$0\le a\le \frac{1}{2}$

ii) $a<0$



$-b-a^2\ge 0$

$\Rightarrow a^2+2a-1\le 0$

$\Rightarrow -1-\sqrt{2}\le a<0$

$-1-\sqrt{2}\le a\le \frac{1}{2}$

$a+b=3a-1$ 이므로

$M=\frac{1}{2}$

$m=-4-3\sqrt{2}$

$\therefore M-m=\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

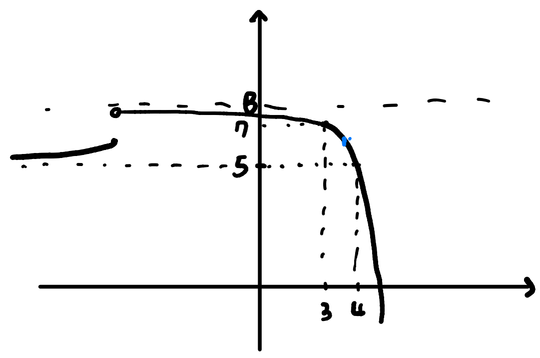
$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+a}+b & (x\le -8) \\ -3^{x-3}+8 & (x>-8) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

> 집합 $\{f(x)\,|\,x\le k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $3\le k<4$이다.

⇒ 함수값으로 나올 수 있는 정수의 개수

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19



<사고 과정>

- $k\le 3$에서 2개인데, k가 커지면서 $3<k<4$인 어딘가에서 6이 추가되는 게 보이지만 개수가 2개에서 변하면 안 되므로 왼쪽에서 이미 6이 나온 상태!
- $f(-8)<7$이어야 $k<3$일 때 조건 만족 불가 (6 하나)
- 5가 추가되는 순간($k=4$)부터 조건에 위배되므로 $b=5$임을 추측할 수 있다.

따라서

$6\le 2^{a-8}+5<7$

$1\le 2^{a-8}<2$

$8\le a<9$

$\therefore a=8,\ b=5$

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\neq 0)\\ 3 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이라 하자. $\lim_{x\to 3} g(x)=g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은? [4점]

: 불연속 $\Rightarrow f(3)=0$

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=2$$

$\Rightarrow f(6)=f(3)=0$

$f(x)=(x-3)(x-6)(x-\alpha)$

$f(x+3)=x(x-3)(x+3-\alpha)$

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=\frac{3(6-\alpha)}{-3(3-\alpha)}=2$$

$\Rightarrow \alpha=4$

$$\therefore g(5)=\frac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}=\frac{40\cdot(-1)}{-2}=20$$

단답형

16. 방정식 $\log_2(x-1)=\log_4(13+2x)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)=34,\quad \sum_{k=1}^{10}a_k=10$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 함수 $f(x)=(x^2+1)(x^2+ax+3)$에 대하여 $f'(1)=32$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

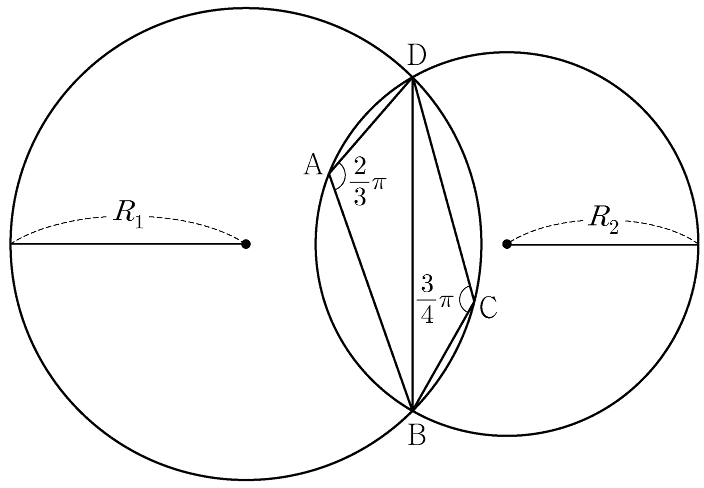
19. 두 곡선 $y=3x^3-7x^2$과 $y=-x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

20. 그림과 같이

이건 뭔...

$$\overline{\mathrm{AB}}=2,\ \overline{\mathrm{AD}}=1,\ \angle\mathrm{DAB}=\frac{2}{3}\pi,\ \angle\mathrm{BCD}=\frac{3}{4}\pi$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



다음은 $R_1 \times R_2$의 값을 구하는 과정이다.

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{\mathrm{BD}}$$

이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$R_2=\boxed{\text{(가)}}\times\overline{\mathrm{BD}}$$

이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BD}}^2=2^2+1^2-(\boxed{\text{(나)}})$$

이므로

$$R_1\times R_2=\boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $9\times(p\times q\times r)^2$의 값을 구하시오. [4점]

$p=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$q=2\cdot AB\cdot AD\cos\frac{2}{3}\pi=-2$

$r=\frac{1}{\sqrt{6}}BD^2=\frac{7}{\sqrt{6}}$

$\therefore 9\times(pqr)^2=9\cdot\frac{1}{3}\cdot4\cdot\frac{49}{6}=98$

→ a_1, d 자연수

21. 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

$$\sum_{k=1}^{7} S_k = \sum_{k=1}^{7} (8-k)a_k$$
$$= \sum_{k=1}^{7} (8-k)(a_1+(k-1)d)$$
$$= 28a_1 + 56d$$

$a_1 + 2d = 23$

$23 + 4d$: 13의 배수

$d = 4$, $a_1 = 15$

$\therefore a_2 = 19$

22. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

실화?

(가) $\int_{1}^{x} f(t)\,dt = xf(x) - 2x^2 - 1$
(나) $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\int_{1}^{3} g(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

(가)에서 대입, 미분

$f(1) = 3$
$f'(x) = 4$ $\Rightarrow f(x) = 4x - 1$

$F(3) - F(1) = 14$

(나)에서

$F(x)G(x) = 2x^4 + x^3 + x + C$

$= (2x^2 - x + C_1)(x^2 + ax + C_2)$

최고차항 추론 후 계수 비교 $a = 1$

$\Rightarrow G(x) = x^2 + x + C_2$

몰라도 됨

$\int_{1}^{3} g(x) = G(3) - G(1)$

$= 10$

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.